

Câu 1. (3.0 điểm) Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$2x^3 - x^2 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = 3x + 1 + \sqrt[3]{x^2 + 2}$$

Câu 2. (4.0 điểm) Đặt $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$. Cho $a_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdots f(2n)}$ với n là

số nguyên dương. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 3. (3.0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $2abc = 2a + 4b + 7c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a + b + c$.

Câu 4. (4.0 điểm)

a) Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ sao cho $AB = CD = EF = R$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, DE, FA . Chứng minh rằng tam giác MNP đều.

b) Cho tam giác ABC có phân giác trong AD (D thuộc BC) và thỏa mãn các điều kiện $AC + AD = BC$ và $AB + AD = CD$. Hãy tính các góc của tam giác ABC .

Câu 5. (3.0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện:

$$3f(x) - 2f(f(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Câu 6. (3.0 điểm) Trong một quốc gia có $n \geq 2$ thành phố. Giữa hai thành phố bất kỳ có đường bay trực tiếp theo hai chiều. Người ta muốn cấp phép khai thác cho các đường bay cho một hãng hàng không với các điều kiện sau đây:

(i) Mỗi đường bay chỉ được cấp phép cho một hãng hàng không duy nhất.

(ii) Di chuyển đường bay của một hãng hàng không tùy ý, người ta có thể đi từ thành phố bất kỳ tới các thành phố còn lại.

Hỏi có thể cấp phép cho tối đa bao nhiêu hãng hàng không?

----- Hết -----