

MỤC LỤC

CHƯƠNG 4	GIỚI HẠN	1
1	GIỚI HẠN DÃY SỐ	1
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	1
1	DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0	1
1.1	Định nghĩa dãy số có giới hạn 0	1
1.2	Một số dãy số có giới hạn 0 thường gặp	1
2	DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN	1
2.1	Định nghĩa dãy số có giới hạn	1
2.2	Một số định lí	1
2.3	Tổng quát của cấp số nhân lùi vô hạn	2
3	DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC	2
3.1	Dãy số có giới hạn $+\infty$	2
3.2	Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực	2
3.3	Một số kết quả	3
B	CÁC DẠNG TOÁN	3
	Dạng 1. Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim u_n = L$	3
	Dạng 2. Tính giới hạn của dãy số bằng các định lí về giới hạn	4
	Dạng 3. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn	6
	Dạng 4. Dãy số có giới hạn vô cực	7
C	CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	9
	ĐÁP ÁN	50
2	GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ	51
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	51
1	Giới hạn của hàm số tại một điểm	51

2	Giới hạn của hàm số tại vô cực	51
3	Một số định lý về giới hạn hữu hạn	51
4	Giới hạn một bên	52
5	Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực	52
6	Các dạng vô định	53
B	CÁC DẠNG TOÁN	53
	Dạng 1. Sử dụng định nghĩa giới hạn của hàm số tìm giới hạn	53
	Dạng 2. Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ không tồn tại	54
	Dạng 3. Các định lý về giới hạn và giới hạn cơ bản để tìm giới hạn	54
	Dạng 4. Tính giới hạn một bên của hàm số	57
	Dạng 5. Giới hạn của hàm số số kép	59
	Dạng 6. Một vài quy tắc tính giới hạn vô cực	59
	Dạng 7. Dạng $\frac{0}{0}$	61
	Dạng 8. Giới hạn dạng $1^\infty, 0 \cdot \infty, \infty^0$.	79
C	CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	80
	ĐÁP ÁN	136
3	HÀM SỐ LIÊN TỤC	138
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT	138
1	Hàm số liên tục tại một điểm	138
2	Hàm số liên tục trên một khoảng	138
3	Các định lý về hàm số liên tục	139
B	CÁC DẠNG TOÁN	139
	Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm - Dạng I	139
	Dạng 2. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm - Dạng II	140
	Dạng 3. Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng	141
	Dạng 4. Sử dụng tính liên tục của hàm số để chứng minh	143

Dạng 5. Sử dụng tính liên tục của hàm số để xét dấu hàm số	144
C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	144
ĐÁP ÁN	173

BÀI 1. GIỚI HẠN DÃY SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

1.1 Định nghĩa dãy số có giới hạn 0

Định nghĩa 1. Ta nói **dãy số** (u_n) **có giới hạn là 0** (hay giới hạn là 0) nếu mọi số hạng của dãy số đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn một số dương nhỏ tùy ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi. Khi đó ta viết:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 0 \text{ viết tắt là } \lim (u_n) = 0 \text{ hoặc } u_n \rightarrow 0$$

Nhận xét.

- ① Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi và chỉ khi dãy số $(|u_n|)$ có giới hạn là 0.
- ② Dãy số không đổi (u_n) với $u_n = 0$ có giới hạn 0.

1.2 Một số dãy số có giới hạn 0 thường gặp

Từ định nghĩa, ta có kết quả:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$$

Định lí 1. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) . Nếu $|u_n| \leq v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$

Định lí 2. Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$

2 DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN

2.1 Định nghĩa dãy số có giới hạn

Định nghĩa 2. Ta nói **dãy số** (u_n) **có giới hạn là số thực L** (hay giới hạn là L) nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - L) = 0$

Khi đó ta viết:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = L \text{ viết tắt là } \lim (u_n) = L \text{ hoặc } u_n \rightarrow L$$

2.2 Một số định lí

Định lí 3. Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó:

- $\lim |u_n| = |L|$ và $\lim \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{L}$
- Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $L \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$

Định lí 4. Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$. Khi đó:

■ Các dãy số $(u_n + v_n)$, $(u_n - v_n)$, $(u_n \cdot v_n)$ và $(c \cdot u_n)$ có giới hạn và:

- ① $\lim (u_n + v_n) = L + M$
- ② $\lim (u_n - v_n) = L - M$
- ③ $\lim (u_n \cdot v_n) = L \cdot M$
- ④ $\lim (c \cdot u_n) = c \cdot L$

■ Nếu $M \neq 0$ thì dãy số $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ có giới hạn và $\lim \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{L}{M}$

2.3 Tổng quát của cấp số nhân lùi vô hạn

Với cấp số nhân (u_n) có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ thì:

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}$$

3 Dãy số có giới hạn vô cực

3.1 Dãy số có giới hạn $+\infty$

Định nghĩa 3. Ta nói **dãy số** (u_n) **có giới hạn là** $-\infty$ nếu mọi số hạng của dãy số đều nhỏ hơn một số âm nhỏ tùy ý cho trước kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Khi đó, ta viết:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = -\infty, \text{ viết tắt là } \lim (u_n) = -\infty \text{ hoặc } \lim u_n = -\infty \text{ hoặc } u_n \rightarrow -\infty$$

Nhận xét. Nếu $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim (-u_n) = +\infty$

- ① Các dãy số có giới hạn $+\infty$ và $-\infty$ được gọi chung là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực.
- ② Dãy số có giới hạn là số thực L được gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

3.2 Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

Quy tắc ①

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim (u_n.v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim (u_n.v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc ②

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim (u_n.v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim (u_n.v_n)$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	-	$+\infty$

Quy tắc ③

Nếu $\lim u_n = L$ và $\lim v_n = 0 \neq$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
+	+	$+\infty$
+	-	$-\infty$
-	+	$-\infty$
-	-	$+\infty$

3.3 Một số kết quả

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) .

- Nếu $u_n \leq v_n$ với mọi n và $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim v_n = +\infty$.
- Nếu $\lim u_n = L \in \mathbb{R}$ và $\lim |v_n| = +\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$
- Nếu $\lim u_n = +\infty$ (hoặc $-\infty$) và $\lim v_n = L \in \mathbb{R}$ thì $\lim (u_n + v_n) = +\infty$ (hoặc $-\infty$).

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn 0 .

$$\textcircled{1} u_n = \frac{1}{n+1}$$

$$\textcircled{2} u_n = \frac{\sin n}{n+4}$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \text{ a) Ta có : } \left| \frac{1}{n+1} \right| < \frac{1}{n} \text{ và } \lim \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim \frac{1}{n+1} = 0 .$$

$$\textcircled{2} \text{ b) Ta có : } \left| \frac{\sin n}{n+4} \right| < \frac{1}{n+4} < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim \frac{\sin n}{n+4} = 0 .$$

□

Nhận xét. Để chứng minh các dãy số trên có giới hạn 0 chúng ta đã sử dụng phép đánh giá để khẳng định $u_n < \frac{1}{n}$ và $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Ví dụ 2. Chứng minh dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ có giới hạn 0.

Lời giải.

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{n+1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ và } \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0 .$$

□

Nhận xét. Để chứng minh dãy số trên có giới hạn 0 chúng ta đã sử dụng phép đánh giá để khẳng định $u_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ và $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Ví dụ 3. Chứng minh dãy số u_n với $u_n = \frac{\cos(n\pi)}{4^n}$ có giới hạn 0 .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \left| \frac{\cos(n\pi)}{4^n} \right| < \frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{4} \right)^n \text{ và } \lim \left(\frac{1}{4} \right)^n = 0 \Rightarrow \lim u_n = 0 .$$

□

Nhận xét. Để chứng minh dãy số trên có giới hạn 0 chúng ta đã sử dụng phép đánh giá để khẳng định $u_n < q^n$ và $\lim q^n = 0$

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Sử dụng định nghĩa chứng minh rằng $\lim u_n = L$

Phương pháp áp dụng là ta đi chứng minh $\lim (u_n - L) = 0$

Ví dụ 1. Chứng minh rằng

$$\textcircled{1} \lim \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{2} \lim \frac{n^2+n}{n^2+1} = 1$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \text{ Đặt } u_n = \frac{3n-1}{2n+1} \Rightarrow \lim \left(u_n - \frac{3}{2} \right) = \lim \left(\frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right) = \lim \frac{-5}{2n+1} = 0 \Rightarrow \lim u_n = \frac{3}{2} .$$

$$\textcircled{2} \text{ Đặt } u_n = \frac{n^2 + n}{n^2 + 1} \Rightarrow \lim(u_n - 1) = \lim\left(\frac{n^2 + n}{n^2 + 1} - 1\right) = \lim \frac{n - 1}{n^2 + 1} = 0 \Rightarrow \lim u_n = 1.$$

□

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $\lim \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} + 2 \right] = 2$

Lời giải.

$$\text{Đặt } u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} + 2 \Rightarrow \lim(u_n - 2) = \lim \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} = 0 \Rightarrow \lim u_n = 2.$$

□

Dạng 2. Tính giới hạn của dãy số bằng các định lí về giới hạn

Phương pháp áp dụng là ta đưa dãy số đã cho về dạng tổng hiệu tích thương của những dãy số mà ta đã biết giới hạn.

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau

$$\textcircled{1} \lim \frac{n+1}{3n-1}$$

$$\textcircled{2} \lim \frac{n-1}{n^2-2}$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \text{ Ta có } \lim \frac{n+1}{3n-1} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{\lim 1 + \lim \frac{1}{n}}{\lim 3 - \lim \frac{1}{n}} = \frac{1}{3}.$$

$$\textcircled{2} \text{ Ta có } \lim \frac{n-1}{n^2-2} = \lim \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{2}{n^2}} = \frac{\lim \frac{1}{n} - \lim \frac{1}{n^2}}{\lim 1 - \lim \frac{2}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

□

Nhận xét. Như vậy, để tính các giới hạn trên chúng ta đã thực hiện phép chia cả tử và mẫu cho bậc cao nhất của n và sử dụng kết quả $\lim \frac{a}{n^k} = 0$.

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau

$$\textcircled{1} \lim \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$$

$$\textcircled{2} \lim \frac{n^2 + n\sqrt[3]{n^3+1}}{n\sqrt{n^2+1} + 1}$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \lim \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\textcircled{2} \lim \frac{n^2 + n\sqrt[3]{n^3+1}}{n\sqrt{n^2+1} + 1} = \lim \frac{1 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1+1}{1+0} = 2.$$

□

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau

$$\textcircled{1} \lim \sqrt{\frac{4n + \sin(n\pi)}{n}}$$

$$\textcircled{2} \lim \sqrt[3]{\frac{8n + \cos(n\pi)}{n}}$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \lim \sqrt{\frac{4n + \sin(n\pi)}{n}} = \lim \sqrt{4 + \frac{\sin(n\pi)}{n}} = \sqrt{4} = 2 \quad (\text{vì } \lim \frac{\sin(n\pi)}{n} = 0).$$

$$\textcircled{2} \lim \sqrt[3]{\frac{8n + \cos(n\pi)}{n}} = \lim \sqrt[3]{8 + \frac{\cos(n\pi)}{n}} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad (\text{vì } \lim \frac{\cos(n\pi)}{n} = 0).$$

□

Nhận xét. Như vậy để tính các giới hạn trên, chúng ta đã thực hiện phép tách thành các giới hạn nhỏ.

Ví dụ 4. Tính các giới hạn sau

$$\textcircled{1} \lim \frac{1 - 4^n}{1 + 4^n}$$

$$\textcircled{2} \lim \frac{3^n - 4^{n+1}}{3^{n+2} + 4^n}$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \lim \frac{1 - 4^n}{1 + 4^n} = \lim \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1.$$

$$\textcircled{2} \lim \frac{3^n - 4^{n+1}}{3^{n+2} + 4^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4}{9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} = \frac{0 - 4}{0 + 1} = -4.$$

□

Nhận xét. Như vậy, để tính các giới hạn trên chúng ta đã thực hiện phép chia cả tử và mẫu cho cơ số lớn nhất và sử dụng kết quả $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$.

Ví dụ 5. Tính các giới hạn sau

$$\textcircled{1} \lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$\textcircled{2} \lim (\sqrt{n^2 + n} - n)$$

$$\textcircled{3} \lim \frac{1}{\sqrt{3n+2} - \sqrt{2n+1}}$$

$$\textcircled{4} \lim \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n+1}}{3n+2}$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

$$\textcircled{2} \lim (\sqrt{n^2+n} - n) = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{3} \lim \frac{1}{\sqrt{3n+2} - \sqrt{2n+1}} = \lim \frac{\sqrt{3n+2} + \sqrt{2n+1}}{n+1} = \lim \frac{\sqrt{\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \lim \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n+1}}{3n+2} &= \lim \frac{n^2 - n}{(3n+2) \cdot (\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n+1})} \\ &= \lim \frac{1 - \frac{1}{n}}{\left(3 + \frac{2}{n}\right) \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Nhận xét. Như vậy, để tính các giới hạn trên chúng ta cần sử dụng phép nhân liên hợp để khử dạng $\infty - \infty$ và $\frac{k}{\infty - \infty}$.

□

Ví dụ 6. Tính $\lim \frac{n + \sqrt[3]{1-n^3}}{\sqrt{n^2+1}-n}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim \frac{n + \sqrt[3]{1-n^3}}{\sqrt{n^2+1}-n} &= \lim \frac{(n^3+1-n^3) \cdot (\sqrt{n^2+1}+n)}{(n^2+1-n^2) \cdot [n^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+\sqrt[3]{(1-n^3)^2}]} \\ &= \lim \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+\sqrt[3]{(1-n^3)^2}} \\ &= \lim \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+\frac{1}{n}}{1-\sqrt[3]{\frac{1}{n^3}-1}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^3}-1\right)^2}} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 7. Tính $L = \lim \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}$, với $|a| < 1, |b| < 1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} L &= \lim \frac{(1+a+a^2+\dots+a^n)(1-a)(1-b)}{(1+b+b^2+\dots+b^n)(1-a)(1-b)} \\ &= \lim \frac{(1-a^{n+1})(1-b)}{(1-b^{n+1})(1-a)} \\ &= \lim \frac{(1-a \cdot a^n)(1-b)}{(1-b \cdot b^n)(1-a)} = \frac{1-b}{1-a}. \end{aligned}$$

□

Dạng 3. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Phương pháp áp dụng:

Sử dụng công thức:

$$S = u_1 + u_2 + \dots = \frac{u_1}{1-q}, \text{ với } |q| < 1.$$

Ví dụ 1. Tính các tổng sau:

① $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

② $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + \dots$

Lời giải.

① Xét cấp số nhân u_n có $u_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2} < 1$, ta được:

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

② Dãy số $-1, \frac{1}{10}, -\frac{1}{10^2}, \dots, \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}, \dots$ là một cấp số nhân có $u_1 = -1$ và công bội $q = \frac{-1}{10}$

Từ đó, suy ra: $\lim S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{-1}{1+\frac{1}{10}} = \frac{-10}{11}.$

□

Ví dụ 2. Biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

① $0,444\dots$

② $0,2121\dots$

③ $0,32111\dots$

Lời giải.

① Nhận xét rằng:

$$0,444\dots = 0,4 + 0,04 + 0,004 + \dots = \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \dots$$

trong đó, các số $\frac{4}{10}, \frac{4}{100}, \frac{4}{1000}, \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{4}{10}$ và công bội $q = \frac{1}{10}$.

$$\text{Từ đó, suy ra: } 0,444\dots = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{4}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{4}{9}.$$

② Nhận xét rằng:

$$0,2121\dots = 0,21 + 0,0021 + \dots = \frac{21}{100} + \frac{21}{10000} + \dots$$

trong đó, các số $\frac{21}{100}, \frac{21}{10000}, \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{21}{100}$ và công bội $q = \frac{1}{100}$.

$$\text{Từ đó, suy ra: } 0,2121\dots = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{21}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{21}{99}.$$

③ Nhận xét rằng:

$$0,32111\dots = 0,32 + 0,001 + 0,0001 + \dots = 0,32 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots$$

trong đó, các số $\frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \frac{1}{1000}$ và công bội $q = \frac{1}{10}$.

$$\text{Từ đó, suy ra: } 0,32111\dots = 0,32 + \frac{u_1}{1-q} = \frac{32}{100} + \frac{\frac{1}{1000}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{289}{900}.$$

□

Dạng 4. Dãy số có giới hạn vô cực

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau:

① $\lim(n^2 - n + 1).$

② $\lim(-n^2 + n + 1).$

Lời giải.

① Ta có: $\lim(n^2 - n + 1) = \lim\left[n^2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right] = +\infty.$

② Ta có: $\lim(-n^2 + n + 1) = \lim\left[-n^2\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\right] = -\infty.$

□

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\sqrt{2n^2 - 3n - 8}.$

② $\lim\sqrt[3]{1 + 2n - n^3}.$

Lời giải.

① Ta có: $\lim\sqrt{2n^2 - 3n - 8} = \lim\sqrt{n^2\left(2 - \frac{3}{n} - \frac{8}{n^2}\right)} = +\infty.$

② Ta có: $\lim \sqrt[3]{1+2n-n^3} = \lim \sqrt[3]{n^3 \left(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^2} - 1 \right)} = -\infty.$

□

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau:

① $\lim (\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}).$ ② $\lim (\sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n+1}).$ ③ $\lim \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}.$

Lời giải.

① Ta thực hiện phép nhân liên hợp:

$$\begin{aligned} \lim (\sqrt{2n+1} - \sqrt{n}) &= \lim \frac{2n+1-n}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}} = \lim \frac{n+1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}} = +\infty. \end{aligned}$$

② Ta có:

$$\begin{aligned} \lim (\sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n+1}) &= \lim \frac{n^2+1}{\sqrt{n^2+n+2} + \sqrt{n+1}} \\ &= \lim \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4}} + \sqrt{\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}}} = +\infty. \end{aligned}$$

③ Ta có:

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}} = \lim (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}) = +\infty.$$

□

Ví dụ 4. Tính các giới hạn sau:

① $\lim (2n + \cos n).$ ② $\lim \left(\frac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5 \right).$

Lời giải.

① Ta có: $2n + \cos n \geq 2n - 1$ và $\lim(2n - 1) = +\infty$
từ đó, suy ra: $\lim(2n + \cos n) = +\infty.$

② Ta có: $\frac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5 \geq \frac{1}{2}n^2 + 2$ và $\lim \left(\frac{1}{2}n^2 + 2 \right) = +\infty$
từ đó, suy ra: $\lim \left(\frac{1}{2}n^2 - 3\sin 2n + 5 \right) = +\infty.$

□

Ví dụ 5. Chứng minh rằng nếu $q > 1$ thì $\lim q^n = +\infty.$

Áp dụng tìm giới hạn của các dãy số (u_n) với:

① $u_n = \frac{3^n + 1}{2^n - 1}.$ ② $u_n = 2^n - 3^n.$

Lời giải.

Ta có: $\lim q^n = \lim \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n} = +\infty.$

① Ta có: $\lim u_n = \lim \frac{3^n + 1}{2^n - 1} = \lim \frac{1 + \frac{1}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n}} = +\infty.$

② Ta có: $\lim u_n = \lim 2^n - 3^n = \lim 3^n \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \right] = -\infty.$

□

Ví dụ 6. Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ với $u_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ và $v_n = \frac{n \cos \frac{\pi}{n}}{n^2 + 1}.$

① Tính $\lim u_n.$

② Chứng minh rằng $\lim v_n = 0.$

Lời giải.

① Ta có: $\lim u_n = \lim \frac{n}{n^2 + 1} = 0.$

② Ta có: $\left| \frac{n \cos \frac{\pi}{n}}{n^2 + 1} \right| \geq \frac{n}{n^2 + 1}$ và $\lim \frac{n}{n^2 + 1} = 0$, từ đó, suy ra điều cần chứng minh.

□

© CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Kết quả của giới hạn $\lim \left(\frac{\sin 5n}{3n} - 2 \right)$ bằng

A. -2.

B. 3.

C. 0.

D. $\frac{5}{3}.$

Lời giải.

Ta có $0 \leq \left| \frac{\sin 5n}{3n} \right| \leq \frac{1}{n}$, mà $\lim \frac{1}{n} = 0$ nên $\lim \frac{\sin 5n}{3n} = 0$, do đó $\lim \left(\frac{\sin 5n}{3n} - 2 \right) = -2.$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 2. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn k để $\lim \frac{n - 2\sqrt{n^k} \cos \frac{1}{n}}{2n} = \frac{1}{2}?$

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. Vô số.

Lời giải.

Ta có $\frac{n - 2\sqrt{n} \sin 2n}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{n} \sin 2n}{n}.$

Điều kiện bài toán trở thành $\lim \frac{\sqrt{n^k} \cos \frac{1}{n}}{n} = 0.$

Ta có $\lim \cos \frac{1}{n} = \cos 0 = 1$ nên bài toán trở thành tìm k sao cho

$\lim \frac{\sqrt{n^k}}{n} = \lim n^{\frac{k}{2}-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{k}{2} - 1 < 0 \Leftrightarrow k < 2$ mà $k \in \mathbb{N}^*, k = 3l$

nên không tồn tại k (do k nguyên dương và chẵn)

Chọn đáp án **A**

□

Câu 3. Kết quả của giới hạn $\lim \frac{3 \sin n + 4 \cos n}{n + 1}$ bằng

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Ta có $0 \leq \left| \frac{3 \sin n + 4 \cos n}{n + 1} \right| \leq \frac{7}{n + 1} \leq \frac{7}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{3 \sin n + 4 \cos n}{n + 1} = 0.$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 4. Kết quả của giới hạn $\lim \left(5 - \frac{n \cos 2n}{n^2 + 1} \right)$ bằng

A. 4.

B. $\frac{1}{4}.$

C. 5.

D. -4.

Lời giải.

Ta có $0 \leq \left| \frac{n \cos 2n}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{n}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{n \cos 2n}{n^2 + 1} = 0 \Rightarrow \lim \left(5 - \frac{n \cos 2n}{n^2 + 1} \right) = 5$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 5. Kết quả của giới hạn $\lim \left(n^2 \sin \frac{n\pi}{5} - 2n^3 \right)$ là

A. $-\infty$.B. -2 .C. 0 .D. $+\infty$.**Lời giải.**

Ta có $\lim \left(n^2 \sin \frac{n\pi}{5} - 2n^3 \right) = \lim n^3 \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\sin n\pi}{5} - 2 \right)$.

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ 0 \leq \left| \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin n\pi}{5} \right| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\sin n\pi}{5} - 2 \right) = -2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim n^3 \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\sin n\pi}{5} - 2 \right) = -\infty.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 6. Giá trị của giới hạn $\lim \left(4 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right)$ bằng

A. 1 .B. 3 .C. 4 .D. 2 .**Lời giải.**

Ta có $0 \leq \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{(-1)^n}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim \left(4 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right) = 4$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 7. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ và $v_n = \frac{1}{n^2 + 2}$. Khi đó $\lim (u_n + v_n)$ có giá trị bằng

A. 3 .B. 0 .C. 2 .D. 1 .**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} 0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \\ 0 \leq |v_n| \leq \frac{1}{n^2 + 2} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \lim u_n = \lim v_n = 0 \Rightarrow \lim (u_n + v_n) = 0.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 8. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{-3}{4n^2 - 2n + 1}$ là

A. $-\frac{3}{4}$.B. $-\infty$.C. 0 .D. -1 .**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim \frac{-3}{4n^2 - 2n + 1} = \lim \frac{\frac{-3}{n^2}}{4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{0}{4} = 0.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 9. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{n + 2n^2}{n^3 + 3n - 1}$ bằng

A. 2 .B. 1 .C. $\frac{2}{3}$.D. 0 .**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim \frac{n + 2n^2}{n^3 + 3n - 1} = \lim \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 10. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{3n^3 - 2n + 1}{4n^4 + 2n + 1}$ là

A. $+\infty$.B. 0 .C. $\frac{2}{7}$.D. $\frac{3}{4}$.**Lời giải.**

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 2n + 1}{4n^4 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{4 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = \frac{0}{4} = 0.$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 11. Giá trị của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} + 1}{n^2 + 2}$ bằng

A. $\frac{3}{2}.$

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} + 1}{n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 12. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \frac{1}{n+1}$ và $v_n = \frac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải.

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} = 0.5.$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 13. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

A. $a = 10.$

B. $a = 8.$

C. $a = 6.$

D. $a = 4.$

Lời giải.

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+4}{5n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{4}{n}}{5 + \frac{3}{n}} = \frac{a}{5}.$ Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{5} = 2 \Leftrightarrow a = 10.$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 14. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b là

A. b là một số thực tùy ý.

B. $b = 2.$

C. không tồn tại $b.$

D. $b = 5.$

Lời giải.

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+b}{5n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{b}{n}}{5 + \frac{3}{n}} = \frac{2}{5} (\forall b \in \mathbb{R}).$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 15. Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 5}{2n^2 + 1}.$

A. $L = \frac{3}{2}.$

B. $L = \frac{1}{2}.$

C. $L = 2.$

D. $L = 1.$

Lời giải.

Ta có $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 5}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 16. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

A. $a = -4.$

B. $a = 4.$

C. $a = 3.$

D. $a = 2.$

Lời giải.

$$2 = \lim u_n = \lim \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5} = \lim \frac{4 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{a + \frac{5}{n^2}} = \frac{4}{a} (a \neq 0) \Leftrightarrow a = 2.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 17. Tính giới hạn $L = \lim \frac{n^2 - 3n^3}{2n^3 + 5n - 2}$.

A. $L = -\frac{3}{2}$.

B. $L = \frac{1}{5}$.

C. $L = \frac{1}{2}$.

D. $L = 0$.

Lời giải.

$$L = \lim \frac{n^2 - 3n^3}{2n^3 + 5n - 2} = \lim \frac{\frac{1}{n} - 3}{2 + \frac{5}{n^2} - \frac{2}{n^3}} = \frac{-3}{2}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L = \lim \frac{5n^2 - 3an^4}{(1-a)n^4 + 2n + 1} > 0$.

A. $a \leq 0; a \geq 1$.

B. $0 < a < 1$.

C. $a < 0; a > 1$.

D. $0 \leq a < 1$.

Lời giải.

$$L = \lim \frac{5n^2 - 3an^4}{(1-a)n^4 + 2n + 1} = \lim \frac{\frac{5}{n^2} - 3a}{(1-a) + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^4}} = \frac{-3a}{(1-a)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ a > 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 19. Tính giới hạn $L = \lim \frac{(2n - n^3)(3n^2 + 1)}{(2n - 1)(n^4 - 7)}$.

A. $L = -\frac{3}{2}$.

B. $L = 1$.

C. $L = 3$.

D. $L = +\infty$.

Lời giải.

$$L = \lim \frac{(2n - n^3)(3n^2 + 1)}{(2n - 1)(n^4 - 7)} = \lim \frac{n^3 \left(\frac{2}{n^2} - 1 \right) \cdot n^2 \left(3 + \frac{1}{n^2} \right)}{n \left(2 - \frac{1}{n} \right) \cdot n^4 \left(1 - \frac{7}{n^4} \right)} = \lim \frac{\left(\frac{2}{n^2} - 1 \right) \left(3 + \frac{1}{n^2} \right)}{\left(2 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{7}{n^4} \right)}$$

$$= \frac{-1 \cdot 3}{2 \cdot 1} = -\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 20. Tính giới hạn $L = \lim \frac{(n^2 + 2n)(2n^3 + 1)(4n + 5)}{(n^4 - 3n - 1)(3n^2 - 7)}$.

A. $L = 0$.

B. $L = 1$.

C. $L = \frac{8}{3}$.

D. $L = +\infty$.

Lời giải.

$$L = \lim \frac{(n^2 + 2n)(2n^3 + 1)(4n + 5)}{(n^4 - 3n - 1)(3n^2 - 7)} = \lim \frac{\left(1 + \frac{2}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n^3} \right) \left(4 + \frac{5}{n} \right)}{\left(1 - \frac{3}{n^3} - \frac{1}{n^4} \right) \left(3 - \frac{7}{n^2} \right)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{1 \cdot 3} = \frac{8}{3}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 21. Tính giới hạn $L = \lim \frac{\sqrt[3]{n} + 1}{\sqrt[3]{n} + 8}$.

A. $L = \frac{1}{2}$.

B. $L = 1$.

C. $L = \frac{1}{8}$.

D. $L = +\infty$.

Lời giải.

$$L = \lim \frac{\sqrt[3]{n} + 1}{\sqrt[3]{n} + 8} = \lim \frac{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{1 + \frac{8}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} = 1.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 22. Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2}$ là

A. $-\frac{1}{3}$.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)}{n^2 \left(\frac{1}{n^2} - 3\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 3}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 3} = -\frac{1}{3} < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2} - 3} = -\infty.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 23. Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3n^3}{4n^2 + 2n + 1}$ là

A. $\frac{3}{4}$.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. $\frac{5}{7}$.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3n^3}{4n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{2}{n^2} + 3\right)}{n^2 \left(4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\frac{2}{n^2} + 3}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2} + 3}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3n^3}{4n^2 + 2n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{\frac{2}{n^2} + 3}{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = +\infty.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 24. Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - n^4}{4n - 5}$ là

A. 0.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - n^4}{4n - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left(\frac{3}{n^3} - 1\right)}{n \left(4 - \frac{5}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \cdot \frac{\frac{3}{n^3} - 1}{4 - \frac{5}{n}}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n^3} - 1}{4 - \frac{5}{n}} = -\frac{1}{4} < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - n^4}{4n - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \cdot \frac{\frac{3}{n^3} - 1}{4 - \frac{5}{n}} = -\infty.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 25. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 2n^3}{2n^2 - 1}$.

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{-2n^3 - 4}$.

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3n^3}{-2n^2 - 1}$.

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n^4}{-2n^4 + n^2}$.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 2n^3}{2n^2 - 1} = +\infty : \text{ « bậc tử » } > \text{ « bậc mẫu » và } a_m b_k = 2 \cdot 2 = 4 > 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{-2n^3 - 4} = 0 : \text{ « bậc tử » } < \text{ « bậc mẫu ».}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3n^3}{-2n^2 - 1} = +\infty : \text{ « bậc tử » } > \text{ « bậc mẫu » và } a_n b_k = (-3) \cdot (-2) > 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n^4}{-2n^4 + n^2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} : \text{ « bậc tử » } = \text{ « bậc mẫu » và } \frac{a_m}{b_k} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 26. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng $-\frac{1}{3}$?

A. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{3n^2 + 5}$.

B. $u_n = \frac{-n^4 + 2n^3 - 1}{3n^3 + 2n^2 - 1}$.

C. $u_n = \frac{n^2 - 3n^3}{9n^3 + n^2 - 1}$.

D. $u_n = \frac{-n^2 + 2n - 5}{3n^3 + 4n - 2}$.

Lời giải.

$$\lim u_n = \lim \frac{n^2 - 3n^3}{9n^3 + n^2 - 1} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 27. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

A. $u_n = \frac{1 + n^2}{5n + 5}$.

B. $u_n = \frac{n^2 - 2}{5n + 5n^3}$.

C. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 5n^2}$.

D. $u_n = \frac{1 + 2n}{5n + 5n^2}$.

Lời giải.

$$\lim u_n = \lim \frac{1 + n^2}{5n + 5} = \lim n \cdot \frac{\frac{1}{n^2} + 1}{5 + \frac{1}{n}} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \frac{\frac{1}{n^2} + 1}{5 + \frac{1}{n}} = \frac{a_m}{b_k} = \frac{1}{5} > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 28. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $u_n = \frac{1 + 2n}{5n + 5n^2}$.

B. $u_n = \frac{n^3 + 2n - 1}{-n + 2n^3}$.

C. $u_n = \frac{2n^2 - 3n^4}{n^2 + 2n^3}$.

D. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 1}$.

Lời giải.

$$u_n = \frac{2n^2 - 3n^4}{n^2 + 2n^3} : \text{ « bậc tử » } > \text{ « bậc mẫu » và } a_m b_k = -3 \cdot 2 = -6 < 0 \Rightarrow \lim u_n = -\infty.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 29. Tính giới hạn $L = \lim (3n^2 + 5n - 3)$.

A. $L = 3$.

B. $L = -\infty$.

C. $L = 5$.

D. $L = +\infty$.

Lời giải.

$$L = \lim (3n^2 + 5n - 3) = \lim n^2 \left(2 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2} \right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim n^2 = +\infty \\ \lim \left(2 + \frac{5}{n} - \frac{3}{n^2} \right) = 2 > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10; 10)$ để $L = \lim (5n - 3(a^2 - 2)n^3) = -\infty$?

A. 19.

B. 3.

C. 5.

D. 10.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim (5n - 3(a^2 - 2)n^3) = \lim n^3 \left(\frac{5}{n^2} - 3(a^2 - 2) \right) = -\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim \left(\frac{5}{n^2} - 3(a^2 - 2) \right) = a^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}.$$

Vì $a \in \mathbb{Z}, a \in (-10; 10)$ nên $a = -1; 0; 1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 31. Tính giới hạn $\lim (3n^4 + 4n^2 - n + 1)$.

A. $L = 7$.

B. $L = -\infty$.

C. $L = 3$.

D. $L = +\infty$.

Lời giải.

$$\lim (3n^4 + 4n^2 - n + 1) = \lim n^4 \left(3 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim n^4 = +\infty \\ \lim \left(3 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} \right) = 3 > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 32. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + \dots + (\sqrt{2})^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\lim u_n = -\infty$.

B. $\lim u_n = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}}$.

C. $\lim u_n = +\infty$.

D. Không tồn tại $\lim u_n$.**Lời giải.**Vì $\sqrt{2}, (\sqrt{2})^2, \dots, (\sqrt{2})^n$ lập thành cấp số nhân có $u_1 = \sqrt{2} = q$ nên

$$u_n = \sqrt{2} \cdot \frac{1 - (\sqrt{2})^n}{1 - \sqrt{2}} = (2 - \sqrt{2}) [(\sqrt{2})^n - 1] \Rightarrow \lim u_n = +\infty \text{ vì } \begin{cases} a = 2 - \sqrt{2} > 0 \\ q = \sqrt{2} > 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án **C** □**Câu 33.** Giá trị của giới hạn $\lim \frac{\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2}}{n^2 + 1}$ bằng

A. $\frac{1}{8}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải.Ta có $\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2} = \frac{1}{2} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$. Do đó

$$\lim \frac{\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2}}{n^2 + 1} = \lim \frac{n^2 + n}{4n^2 + 4} = \frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án **D** □**Câu 34.** Giá trị của giới hạn $\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$ bằng

A. 0.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Lời giải.Ta có $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n-1) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)(1+n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2n^2}$.Do đó $\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim \frac{n^2 - n}{2n^2} = \frac{1}{2}$.Chọn đáp án **C** □**Câu 35.** Giá trị của giới hạn $\lim \left(\frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1)}{3n^2 + 4} \right)$ bằng

A. 0.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. 1.

Lời giải.Ta có $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$ nên

$$\lim \left(\frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1)}{3n^2 + 4} \right) = \lim \frac{n^2}{3n^2 + 4} = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **B** □**Câu 36.** Giá trị của giới hạn $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \lim \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Chọn đáp án **B** □**Câu 37.** Giá trị của giới hạn $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 1.

D. 2.

Lời giải.

Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ thì $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$, do đó

$$\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right) = \lim \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right]$$

$$= \lim \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2n+1} \right] = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 38. Giá trị của giới hạn $\lim \left[\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+3)} \right]$ bằng

- A. $\frac{11}{18}$. B. 2. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+3)} &= \frac{1}{3} \left[1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n+3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right). \end{aligned}$$

Do đó $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+3)} \right) = \lim \frac{1}{3} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{11}{18}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 39. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n(n^2 + 1)}$ bằng

- A. 4. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Đặt $P(n) = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$ thì ta có

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= (P(2) - P(1)) + (P(3) - P(2)) + \cdots + (P(n+1) - P(n)) \\ &= P(n+1) - P(1) = \frac{n(n+1)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Do đó $\lim \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n(n^2 + 1)} = \lim \frac{n(n+1)(2n+3)}{6n(n^2 + 1)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 40. Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_n = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}, n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = -1$. B. $\lim u_n = 0$. C. $\lim u_n = \frac{1}{2}$. D. $\lim u_n = 1$.

Lời giải.

Giả sử $\lim u_n = a$ thì ta có

$$a = \lim u_{n+1} = \lim \frac{1}{2 - u_n} = \frac{1}{2 - a} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ a(2 - a) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ a^2 - 2a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 41. Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}, n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = 1$. B. $\lim u_n = 0$. C. $\lim u_n = 2$. D. $\lim u_n = +\infty$.

Lời giải.

Giả sử $\lim u_n = a$ thì ta có

$$a = \lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n + 1}{2} = \frac{a + 1}{2} \Leftrightarrow a = 1.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 42. Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. 0.

D. 3.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{4 - \frac{2}{n}} = \frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 43. Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 + 2n + 1}{\sqrt{3n^4 + 2}}$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 + 2n + 1}{\sqrt{3n^4 + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\sqrt{3 + \frac{2}{n^4}}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 44. Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}}$ là:

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{5}{7}$.

C. $+\infty$.

D. 1.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{3}{n}}}{\sqrt{2 + \frac{5}{n}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 45. Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - 4}{\sqrt{n+1} + n}$ bằng

A. 1.

B. 0.

C. -1.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - 4}{\sqrt{n+1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - \frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 46. Biết rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 - n - 2}} = a \sin \frac{\pi}{4} + b$. Tính $S = a^3 + b^3$.

A. $S = 1$.

B. $S = 8$.

C. $S = 0$.

D. $S = -1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 - n - 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}} = \frac{1 + \sqrt{1}}{1} = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{2} \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow S = 8.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 47. Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$ là

A. $+\infty$.

B. 10.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim \frac{10}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}} = \lim \frac{\frac{10}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 48. Kết quả của giới hạn $\lim (n+1) \sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}$ là

A. $+\infty$.

B. 1.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim (n+1) \sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}} = \lim \sqrt{\frac{2(n+1)^3}{n^4+n^2-1}} = 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 49. Biết rằng $\lim \frac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}} = b\sqrt{3} + c$ với a, b, c là các tham số. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a+c}{b^3}$.

A. $P = 3$.B. $P = \frac{1}{3}$.C. $P = 2$.D. $P = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim \frac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}} = \lim \frac{\sqrt[3]{a + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^3}}}{\sqrt{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}} = \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{3} \sqrt{3} = b\sqrt{3} + c \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{a} = \frac{b}{3} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 50. Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt[5]{200-3n^5+2n^2}$ là

A. $+\infty$.

B. 1.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim \sqrt[5]{200-3n^5+2n^2} = \lim n \left(\sqrt[5]{\frac{200}{n^5} - 3 + \frac{2}{n^3}} \right) = -\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \left(\sqrt[5]{\frac{200}{n^5} - 3 + \frac{2}{n^3}} \right) = -\sqrt[5]{3} < 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 51. Giá trị của giới hạn $\lim (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 5.

Lời giải.

$$\lim (\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1}) = \lim \frac{4}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1}} = 0.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 52. Giá trị của giới hạn $\lim (\sqrt{n^2-n+1} - n)$ là

A. $-\frac{1}{2}$.

B. 0.

C. 1.

D. $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim (\sqrt{n^2-n+1} - n) = \lim \frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n} = \lim \frac{-1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 53. Giá trị của giới hạn $\lim (\sqrt{n^2-1} - \sqrt{3n^2+2})$ là

A. -2.

B. 0.

C. $-\infty$.D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim (\sqrt{n^2-1} - \sqrt{3n^2+2}) = \lim n \left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - \sqrt{3+\frac{2}{n^2}} \right) = -\infty \text{ vì}$$

$$\lim n = +\infty, \lim \left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} - \sqrt{3+\frac{2}{n^2}} \right) = 1 - \sqrt{3} < 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 54. Giá trị của giới hạn $\lim (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n})$ là

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n}) = \lim \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - 2n}} = \lim \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n}}} = 2.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 55. Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim (\sqrt{n^2 + a^2n} - \sqrt{n^2 + (a+2)n + 1}) = 0$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim (\sqrt{n^2 + a^2n} - \sqrt{n^2 + (a+2)n + 1}) &= \lim \frac{(a^2 - a - 2)n - 1}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \lim \frac{a^2 - a - 2 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{a^2 - a - 2}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 56. Giá trị của giới hạn $\lim (\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2})$ là

A. 0.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.C. $-\infty$.D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim (\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2}) &= \lim \frac{2n - 1}{\sqrt{2n^2 - n + 1} + \sqrt{2n^2 - 3n + 2}} \\ &= \lim \frac{2 - \frac{1}{n}}{\sqrt{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 57. Giá trị của giới hạn $\lim (\sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 + n})$ là

A. -1.

B. $1 - \sqrt{2}$.C. $-\infty$.D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim (\sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 + n}) &= \lim n \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{2 + \frac{1}{n}} \right) = -\infty \text{ vì} \\ \lim n &= +\infty, \lim \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{2 + \frac{1}{n}} \right) = 1 - \sqrt{2} < 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 58. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim (\sqrt{n^2 - 8n} - n + a^2) = 0$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim (\sqrt{n^2 - 8n} - n + a^2) &= \lim \left(\frac{-8n}{\sqrt{n^2 - 8n} + n} + a^2 \right) = \lim \left(\frac{-8}{\sqrt{1 - \frac{8}{n}} + 1} + a^2 \right) \\ &= a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 59. Giá trị của giới hạn $\lim (\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n)$ là

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim (\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n) = \lim \frac{-2n + 3}{\sqrt{n^2 - 2n + 3} + n} = \lim \frac{-2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1} = -1.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 60. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n = -1$.

A. 3.

B. 2.

C. -2.

D. -3.

Lời giải.

$$\begin{aligned} -1 &= \lim u_n = \lim \left(\sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1} \right) = \lim \frac{an + 4}{\sqrt{n^2 + an + 5} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= \lim \frac{a + \frac{4}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = -2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 61. Giá trị của giới hạn $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 2} \right)$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải.

$$\lim \left(\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 2} \right) = \lim \frac{-1}{\sqrt[3]{(n^3 + 1)^2} + \sqrt[3]{n^3 + 1} \cdot \sqrt[3]{n^3 + 2} + \sqrt[3]{(n^3 + 2)^2}} = 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 62. Giá trị của giới hạn $\lim \left(\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n \right)$ là

A. $\frac{1}{3}$.B. $+\infty$.

C. 0.

D. 1.

Lời giải.

$$\lim \left(\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n \right) = \lim \frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^2 - n^3)^2} - n\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n^2} = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n} - 1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{n} - 1} + 1} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Giải nhanh: } \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n = \frac{n^2}{\sqrt[3]{(n^2 - n^3)^2} - n\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n^2} \sim \frac{n^2}{\sqrt[3]{n^6} - n\sqrt[3]{-n^3} + n^2} = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 63. Giá trị của giới hạn $\lim \left(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n \right)$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.B. $-\frac{2}{3}$.

C. 0.

D. 1.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim \left(\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n \right) &= \lim \frac{-2n^2}{\sqrt[3]{(n^3 - 2n^2)^2} + n \cdot \sqrt[3]{n^3 - 2n^2} + n^2} \\ &= \lim \frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{n}} + 1} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 64. Giá trị của giới hạn $\lim \left[\sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) \right]$ là

A. -1.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. 1.

Lời giải.

$$\lim \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = \lim \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \lim \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = 1.$$

$$\text{Giải nhanh: } \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \sim \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = 1.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 65. Giá trị của giới hạn $\lim \left[\sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right]$ bằng

A. 0.

B. $\frac{1}{2}$.C. $\frac{1}{3}$.D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải.

$$\lim \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Giải nhanh: } \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 66. Giá trị của giới hạn $\lim [n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-3})]$ bằng

A. -1.

B. 2.

C. 4.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-3}) = \lim \frac{4n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-3}} = \lim \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{3}{n^2}}} = 2.$$

$$\text{Giải nhanh: } n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-3}) = \frac{4n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-3}} \sim \frac{4n}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = 2.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 67. Giá trị của giới hạn $\lim [n(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-6})]$ là

A. $\sqrt{7} - 1$.

B. 3.

C. $\frac{7}{2}$.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim n(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-6}) &= \lim \frac{7n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+n-6}} \\ &= \lim \frac{7}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{6}{n^2}}} = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Giải nhanh: } n(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-6}) = \frac{7n}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+n-6}} \sim \frac{7n}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = \frac{7}{2}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 68. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+4}}$ là

A. 1.

B. 0.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim \frac{1}{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+4}} &= \lim \left[-\frac{1}{2} (\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+4}) \right] = \lim n \cdot \left[-\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \right) \right] \\ &= -\infty \text{ vì } \lim n = +\infty, \lim \left[-\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \right) \right] = -1 < 0. \end{aligned}$$

$$\text{Giải nhanh: } \frac{1}{\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+4}} = -\frac{1}{2} (\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+4}) \sim -\frac{1}{2} (\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}) = -n \rightarrow -\infty.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 69. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{\sqrt{9n^2-n} - \sqrt{n+2}}{3n-2}$ là:

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim \frac{\sqrt{9n^2-n} - \sqrt{n+2}}{3n-2} = \lim \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}}{3 - \frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{9}}{3} = 1.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 70. Giá trị của giới hạn $\lim (\sqrt[3]{n^3+1} - n)$ là

A. 2.

B. 0.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim (\sqrt[3]{n^3+1} - n) = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{(n^3+1)^2} + n\sqrt[3]{n^3+1} + n^2} = 0.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 71. Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 5^{n+2}}{3^n + 2 \cdot 5^n}$ bằng

A. $-\frac{25}{2}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. 1.

D. $-\frac{5}{2}$.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 5^{n+2}}{3^n + 2 \cdot 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\frac{1}{5}\right)^n - 25}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 2} = -\frac{25}{2}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 72. Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n}$ bằng

A. -15.

B. -10.

C. 10.

D. 15.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 10}{2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} = -10.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 73. Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n}$ là

A. 0.

B. 1.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n}{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 74. Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{2^n - 2 \cdot 3^n + 1}$ bằng

A. -1.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 1}{2^n - 2 \cdot 3^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 75. Biết rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(\sqrt{5})^n - 2^{n+1} + 1}{5 \cdot 2^n + (\sqrt{5})^{n+1} - 3} + \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1} \right) = \frac{a\sqrt{5}}{b} + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $S = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $S = 26$.

B. $S = 30$.

C. $S = 21$.

D. $S = 31$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(\sqrt{5})^n - 2^{n+1} + 1}{5 \cdot 2^n + (\sqrt{5})^{n+1} - 3} + \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - 2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}{5 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n + \sqrt{5} - 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n} + \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2. \end{aligned}$$

Vậy $S = 1^2 + 5^2 + 2^2 = 30$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 76. Kết quả của giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^n + 3^n + 2^{2n}}{3\pi^n - 3^n + 2^{2n+2}}$ là

A. 1.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $+\infty$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{\pi^n + 3^n + 2^{2n}}{3\pi^n - 3^n + 2^{2n+2}} = \lim \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}{3 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^n - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + 4} = \frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án **(D)** □**Câu 77.** Kết quả của giới hạn $\lim [3^n - \sqrt{5}^n]$ là**A.** 3.**B.** $-\sqrt{5}$.**C.** $-\infty$.**D.** $+\infty$.**Lời giải.**

$$\lim [3^n - \sqrt{5}^n] = \lim 3^n \left(1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n\right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim 3^n = +\infty \\ \lim 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n = 1 > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □**Câu 78.** Kết quả của giới hạn $\lim (3^4 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n)$ là**A.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.**B.** -1.**C.** $-\infty$.**D.** $\frac{1}{3}$.**Lời giải.**

$$\lim (3^4 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n) = \lim 3^n \left(162 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 5\right) = -\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim 3^n = +\infty \\ \lim \left(162 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - 5\right) = -5 < 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □**Câu 79.** Kết quả của giới hạn $\lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2n + 4^n}$ là**A.** 0.**B.** 1.**C.** $-\infty$.**D.** $+\infty$.**Lời giải.**

$$0 \leq \left| \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2n + 4^n} \right| \leq \frac{8 \cdot 3^{n+1}}{4^n} = 24 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2n + 4^n} = 0.$$

Chọn đáp án **(A)** □**Câu 80.** Kết quả của giới hạn $\lim \frac{2^{n+1} + 3n + 10}{3n^2 - n + 2}$ là**A.** $+\infty$.**B.** $\frac{2}{3}$.**C.** $\frac{3}{2}$.**D.** $-\infty$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } 2^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \Rightarrow 2^n \geq C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \sim \frac{n^3}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{n}{2^n} \rightarrow 0 \\ \frac{2^n}{n^2} \rightarrow +\infty \end{cases} \text{ . Khi đó:}$$

$$\lim \frac{2^{n+1} + 3n + 10}{3n^2 - n + 2} = \lim \frac{2^n}{n^2} \cdot \frac{2 + 3 \cdot \frac{n}{2^n} + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim \frac{2^n}{n^2} = +\infty \\ \lim \frac{2 + 3 \cdot \frac{n}{2^n} + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{2}{3} > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □**Câu 81.** Tìm tất cả giá trị nguyên của a thuộc $(0; 2018)$ để $\lim \sqrt[4]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} \leq \frac{1}{1024}$.**A.** 2007.**B.** 2008.**C.** 2017.**D.** 2016.**Lời giải.**

$$\lim \sqrt[4]{\frac{4^n + 2^{n+1}}{3^n + 4^{n+a}}} = \lim \sqrt[4]{\frac{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4^a}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4^a}} = \sqrt{\frac{1}{(2^a)^2}} = \frac{1}{2^a} \leq \frac{1}{1024} \Leftrightarrow 2^a \geq 1024 = 2^{10}$$

 $\Leftrightarrow a \geq 10$.Mà $a \in (0; 2018)$ và $a \in \mathbb{Z}$ nên $a \in \{10; 11; \dots; 2017\} \Rightarrow$ có 2008 giá trị a .Chọn đáp án **(A)** □

Câu 82. Kết quả của giới hạn $\lim \left(\frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{3n - 1} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

B. -1 .

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \left(\frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{3n - 1} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right) = \lim \frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{3n - 1} + \lim \frac{(-1)^n}{3^n}$. Ta có

$$\begin{cases} \lim \frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{3n - 1} = \lim \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \\ 0 \leq \left| \frac{(-1)^n}{3^n} \right| \leq \left(\frac{1}{3} \right)^n \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{(-1)^n}{3^n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim \left(\frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{3n - 1} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right) = \frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 83. Kết quả của giới hạn $\lim \left(\frac{\sqrt{3n} + (-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n} - 1} \right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{5}$.

D. -1 .

Lời giải.

$\lim \left(\frac{\sqrt{3n} + (-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n} - 1} \right) = \lim \left(\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n} - 1} + \frac{(-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n}} \right)$. Ta có :

$$\begin{cases} \lim \frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \\ 0 \leq \left| \frac{(-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n} - 1} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n} - 1} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{(-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n} - 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim \left(\frac{\sqrt{3n} + (-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n} - 1} \right) = \sqrt{3}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 84. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $(0; 20)$ sao cho $\lim \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} - \frac{1}{2n}}$ là một số nguyên?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} = \lim \frac{a - \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + 1} = a \\ \lim \frac{1}{2n} = \lim \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim \sqrt{3 + \frac{an^2 - 1}{3 + n^2} - \frac{1}{2n}} = \sqrt{3 + a}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} a \in (0; 20), a \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{a + 3} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \{1; 6; 13\}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 85. Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2}$ là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2} = \lim \sqrt{3^n} \cdot \sqrt{2 - \frac{n}{3^n} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n}.$$

$$\forall \epsilon \begin{cases} \lim \sqrt{3^n} = +\infty \\ 0 \leq \frac{n}{3^n} \leq \frac{n}{C_n^2} = \frac{n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} \rightarrow 0 \Rightarrow \lim \frac{n}{3^n} = 0 \\ \lim \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim \sqrt{3^n} = +\infty \\ \lim \sqrt{2 - \frac{n}{3^n} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^n} = \sqrt{2} > 0. \end{cases}$$

Do đó $\lim \sqrt{2 \cdot 3^n - n + 2} = +\infty$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 86. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là

- A. $u_1 = 3$. B. $u_1 = 4$. C. $u_1 = \frac{9}{2}$. D. $u_1 = 5$.

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân, ta có:

$$\begin{cases} \frac{u_1}{1-q} = 2 \\ S_3 = u_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2(1-q) \\ 2(1-q^3) = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\frac{1}{2} \\ u_1 = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 87. Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots$.

- A. $S = \frac{27}{2}$. B. $S = 14$. C. $S = 16$. D. $S = 15$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-3}} + \dots = 9 \left(\underbrace{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots}_{\text{CSN: } u_1=1, q=\frac{1}{3}} \right) = 9 \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \right) = \frac{27}{2}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 88. Tính tổng $S = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right)$.

- A. $S = \sqrt{2} + 1$. B. $S = 2$. C. $S = 2\sqrt{2}$. D. $S = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S = \sqrt{2} \left(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots}_{\text{CSN: } u_1=1, q=\frac{1}{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \right) = 2\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 89. Tính tổng $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots$.

- A. $S = 3$. B. $S = 4$. C. $S = 5$. D. $S = 6$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots = 1 + \underbrace{\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \dots}_{\text{CSNlvh: } u_1=1, q=\frac{2}{3}} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 90. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot 3^{n-1}}, \dots$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{8}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{8}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } S = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot 3^{n-1}} + \dots = \frac{1}{2} \left(\underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}}_{\text{CSN: } u_1=1, q=-\frac{1}{3}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{3}} \right) = \frac{3}{8}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 91. Tính tổng $S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) + \dots$.

- A. 1. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right) + \dots$$

$$= \left(\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots}_{\text{CSN: } u_1=q=\frac{1}{2}} \right) - \left(\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots}_{\text{CSN: } u_1=q=\frac{1}{3}} \right) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 92. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}$ ($|a| < 1, |b| < 1$) bằng

- A. 0. B. $\frac{1-b}{1-a}$. C. $\frac{1-a}{1-b}$. D. Không tồn tại.

Lời giải.

Ta có $1+a+a^2+\dots+a^n$ là tổng $n+1$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu là 1 và công bội là a , nên $1+a+a^2+\dots+a^n = \frac{1 \cdot (1-a^{n+1})}{1-a} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Tương tự: $1+b+b^2+\dots+b^n = \frac{1(1-b^{n+1})}{1-b} = \frac{1-b^{n+1}}{1-b}$.

$$\text{Do đó } \lim \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n} = \lim \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \lim \frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}} = \lim \frac{1-a}{1-b} \cdot \frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}} = \frac{1-a}{1-b} \quad (|a| < 1, |b| < 1).$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 93. Rút gọn $S = 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \dots + \cos^{2n} x + \dots$ với $\cos x \neq \pm 1$.

- A. $S = \sin^2 x$. B. $S = \cos^2 x$. C. $S = \frac{1}{\sin^2 x}$. D. $S = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S = \underbrace{1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \dots + \cos^{2n} x + \dots}_{\text{CSN: } u_1=1, q=\cos^2 x} = \frac{1}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 94. Rút gọn $S = 1 - \sin^2 x + \sin^4 x - \sin^6 x + \dots + (-1)^n \cdot \sin^{2n} x + \dots$ với $\sin x \neq \pm 1$.

- A. $S = \sin^2 x$. B. $S = \cos^2 x$. C. $S = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$. D. $S = \tan^2 x$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S = \underbrace{1 - \sin^2 x + \sin^4 x - \sin^6 x + \dots + (-1)^n \cdot \sin^{2n} x + \dots}_{\text{CSNlvh: } u_1=1, q=-\sin^2 x} = \frac{1}{1 + \sin^2 x}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 95. Thu gọn $S = 1 - \tan \alpha + \tan^2 \alpha - \tan^3 \alpha + \dots$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

- A. $S = \frac{1}{1 - \tan \alpha}$. B. $S = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}$.
C. $S = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$. D. $S = \tan^2 \alpha$.

Lời giải.

Ta có $\tan \alpha \in (0; 1)$ với mọi $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, do đó

$$S = \underbrace{1 - \tan \alpha + \tan^2 \alpha - \tan^3 \alpha + \dots}_{\text{CSN: } u_1=1, q=-\tan \alpha} = \frac{1}{1 + \tan \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 96. Cho m, n là các số thực thuộc $(-1; 1)$ và các biểu thức:

$$M = 1 + m + m^2 + m^3 + \dots$$

$$N = 1 + n + n^2 + n^3 + \dots$$

$$A = 1 + mn + m^2n^2 + m^3n^3 + \dots$$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $A = \frac{MN}{M + N - 1}.$

B. $A = \frac{MN}{M + N + 1}.$

C. $A = \frac{1}{M} + \frac{1}{N} - \frac{1}{MN}.$

D. $A = \frac{1}{M} + \frac{1}{N} + \frac{1}{MN}.$

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} M = \frac{1}{1-m} \\ N = \frac{1}{1-n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 - \frac{1}{M} \\ n = 1 - \frac{1}{N} \end{cases}$, khi đó

$$A = \frac{1}{1-mn} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{M}\right) \left(1 - \frac{1}{N}\right)} = \frac{MN}{M + N - 1}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 97. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111\dots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính tổng $T = a + b$.

A. 17.

B. 68.

C. 133.

D. 137.

Lời giải.

Ta có $0,5111\dots = 0,5 + 10^{-2} + 10^{-3} + \dots + 10^{-n} + \dots$ Dãy số $10^{-2}; 10^{-3}; \dots; 10^{-n}; \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng $u_1 = 10^{-2}$, công bội bằng $q = 10^{-1}$ nên $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{10^{-2}}{1-10^{-1}} = \frac{1}{90}$. Vậy

$$0,5111\dots = 0,5 + S = \frac{46}{90} = \frac{23}{45} \Rightarrow \begin{cases} a = 23 \\ b = 45 \end{cases} \Rightarrow T = a + b = 68.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 98. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A = 0,353535\dots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = ab$.

A. 3456.

B. 3465.

C. 3645.

D. 3546.

Lời giải.

Ta có $0,353535\dots = 0,35 + 0,0035 + \dots = \frac{35}{10^2} + \frac{35}{10^4} + \dots + \frac{35}{10^n} + \dots$

Dãy số $\frac{35}{10^2}; \frac{35}{10^4}; \dots; \frac{35}{10^n}; \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng $u_1 = \frac{35}{10^2}$, công bội bằng

$$q = 10^{-2} \text{ nên } S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{\frac{35}{10^2}}{1-10^{-2}} = \frac{35}{99}.$$

Vậy $0,353535\dots = \frac{35}{99} \Rightarrow \begin{cases} a = 35 \\ b = 99 \end{cases} \Rightarrow T = ab = 3465.$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 99. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $B = 5,231231\dots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = a - b$.

A. 1409.

B. 1490.

C. 1049.

D. 1940.

Lời giải.

Ta có

$$B = 5,231231\ldots = 5 + 0,231 + 0,000231 + \ldots$$

$$= 5 + \frac{231}{10^3} + \frac{231}{10^6} + \ldots = 5 + \frac{\frac{231}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} = 5 + \frac{231}{999} = \frac{1742}{333} \Rightarrow \begin{cases} a = 1742 \\ b = 333 \end{cases} \Rightarrow T = 1409.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 100. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,17232323\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a - b > 2^{15}$.

B. $a - b > 2^{14}$.

C. $a - b > 2^{13}$.

D. $a - b > 2^{12}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 0,17232323\ldots &= 0,17 + 23 \left(\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^8} + \ldots \right) \\ &= \frac{17}{100} + 23 \cdot \frac{\frac{1}{10000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{17}{100} + \frac{23}{100 \cdot 99} = \frac{1706}{9900} = \frac{853}{4950} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = 853 \\ b = 4950 \end{cases} \Rightarrow 2^{12} < T = 4097 < 2^{13}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 101. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \ldots + 2n + 1}{3n^2 + 4}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. 0.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) &= \frac{(1 + 2n + 1)(n + 1)}{2} = (n + 1)^2. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1)}{3n^2 + 4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^2}{3n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{4}{n^2}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 102. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng -1 ?

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{-2n^3 - 4}$.

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3}{-2n^2 - 1}$.

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{-2n^3 + 2n^2}$.

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{-2n^2 - 1}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{-2n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{n^2}}{-2 - \frac{1}{n^2}} = -1.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 103. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \ldots + 2n + 1}{3n^2 + 4}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. 0.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) &= \frac{(1 + 2n + 1)(n + 1)}{2} = (n + 1)^2. \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1)}{3n^2 + 4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^2}{3n^2 + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{4}{n^2}} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 104. **A.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^{n+1}}{1 - 3^n}$.

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right)$.

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n+1} - \sqrt{2n+1})$.

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 3n^2}{2n^3 + 1}$.

Lời giải.

Xét $L = \lim n (\sqrt{n+1} - \sqrt{2n+1}) = \lim n\sqrt{n} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{2+\frac{1}{n}} \right)$ có

$$— \lim n\sqrt{n} = +\infty.$$

$$— \lim \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{2+\frac{1}{n}} \right) = 1 - \sqrt{2} < 0.$$

Suy ra $L = -\infty$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 105. Phát biểu nào trong các phát biểu sau là **sai**?

A. $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số).

B. $\lim q^n = 0$ ($|q| > 1$).

C. $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ ($k > 1$).

D. $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Lời giải.

Ta có $\lim q^n = 0$ với $|q| < 1$. Suy ra $\lim q^n = 0$ ($|q| > 1$) là sai.

Chọn đáp án **B** □

Câu 106. $\lim (\sqrt{n^2 - 3n + 1} - n)$ bằng

A. -3 .

B. $-\frac{3}{2}$.

C. 0 .

D. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim (\sqrt{n^2 - 3n + 1} - n) = \lim \frac{-3n + 1}{\sqrt{n^2 - n + 1} + n} = \lim \frac{-3 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} = -\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 107. $\lim \frac{\sqrt{n} + 2}{n + 1}$ bằng

A. 1 .

B. $+\infty$.

C. 0 .

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \frac{\sqrt{n} + 2}{n + 1} = \lim \frac{\frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 0$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 108. Giá trị của $B = \lim \frac{4n^2 + 3n + 1}{(3n - 1)^2}$ bằng

A. $\frac{4}{9}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. 0 .

D. 4 .

Lời giải.

Ta có $\lim \frac{4n^2 + 3n + 1}{(3n - 1)^2} = \lim \frac{4n^2 + 3n + 1}{9n^2 - 6n + 1} = \lim \frac{4 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{9 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{4}{9}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 109. Giới hạn $\lim \frac{5\sqrt{3n^2 + n}}{2(3n + 2)} = \frac{a\sqrt{3}}{b}$ (với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T = a + b$.

A. $T = 21$.

B. $T = 11$.

C. $T = 7$.

D. $T = 9$.

Lời giải.

$$\lim \frac{5\sqrt{3n^2 + n}}{2(3n + 2)} = \lim \frac{5\sqrt{3 + \frac{1}{n}}}{2\left(3 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

Vậy $a = 5$, $b = 6$, $T = a + b = 11$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 110. Giá trị của $\lim \left[\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right]$ bằng

A. 1.

B. 0.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\lim \left[\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right] = \lim \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2} = \lim \left[\frac{n(n+1)}{2n^2} \right] = \lim \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 111. Tính giới hạn $L = \lim \frac{2n+1}{2+n-n^2}$.

A. $L = -\infty$.

B. $L = -2$.

C. $L = 1$.

D. $L = 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } L = \lim \frac{2n+1}{2+n-n^2} = \lim \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} - 1} = 0.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 112. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $u_n = \frac{n^2-2}{5n+3n^2}$.

B. $u_n = \frac{n^2-2n}{5n+3n^2}$.

C. $u_n = \frac{1-2n}{5n+3n^2}$.

D. $u_n = \frac{1-2n^2}{5n+3n^2}$.

Lời giải.

Giới hạn của dãy số có lũy thừa trên tử thức nhỏ hơn lũy thừa dưới mẫu thức thì bằng 0. Do đó, dãy số có giới hạn bằng 0 là $u_n = \frac{1-2n}{5n+3n^2}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 113. Tính $\lim \frac{2^n+1}{2 \cdot 2^n+3}$

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim \frac{2^n+1}{2 \cdot 2^n+3} = \lim \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{2 + \frac{3}{2^n}} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 114. Cho các dãy số (u_n) , (v_n) và $\lim u_n = a$, $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n}$ bằng

A. 1.

B. 0.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim u_n = a$, $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 115. Giá trị của giới hạn $\lim \frac{3+2n}{n+1}$ là

A. 3.

B. $-\infty$.

C. 1.

D. 2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim \frac{3+2n}{n+1} = \lim \frac{\frac{3}{n} + 2}{1 + \frac{1}{n}} = 2.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 116. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào có giá trị bằng 1?

A. $\lim \frac{3^{n+1}+2n}{5+3^n}$.

B. $\lim \frac{3n^2+n}{4n^2-5}$.

C. $\lim \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2+1}$.

D. $\lim \frac{2n^3+3}{1+2n^2}$.

Lời giải.

$$\lim \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + 1} = \lim \frac{n^2 + 2n - n^2 - 1}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 + 1}} = \lim \frac{n \left(2 - \frac{1}{n}\right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{2}{1 + 1} = 1.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 117. Tính $\lim \frac{5n+3}{2n-1}$.

A. 1.

B. $+\infty$.

C. 2.

D. $\frac{5}{2}$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim \frac{5n+3}{2n-1} = \lim \frac{5 + \frac{3}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 118. Tính giới hạn $\lim \frac{2n+1}{3n+2}$ A. $\frac{2}{3}$.B. $\frac{3}{2}$.C. $\frac{1}{2}$.

D. 0.

Lời giải.

$$\lim \frac{2n+1}{3n+2} = \lim \frac{n \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{n \left(3 + \frac{2}{n}\right)} = \lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 119. Dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} \cdot u_n \end{cases}$ và dãy số (v_n) xác định bởi $\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_{n+1} = v_n + \frac{u_n}{n} \end{cases}$.

Tính $\lim v_n$.

A. 1.

B. $\frac{5}{6}$.C. $\frac{1}{6}$.D. $\frac{1}{3}$.**Lời giải.**

Từ $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} \cdot u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{u_n}{n}$ nên dãy $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ là cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{3}$.

Lại có $v_{n+1} = v_n + \frac{u_n}{n} \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{n}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} v_2 - v_1 &= \frac{u_1}{1} \\ v_3 - v_2 &= \frac{u_2}{2} \\ &\vdots \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{u_n}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{Cộng vế theo vế ta được } v_{n+1} - v_1 = \frac{u_1}{1} + \frac{u_2}{2} + \cdots + \frac{u_n}{n} = \frac{u_1 \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{3}}.$$

$$\text{Do đó } v_{n+1} = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + v_1 = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + \frac{1}{3}.$$

$$\text{Từ đó ta được } \lim v_n = \lim \left[\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] + \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 120. Tính giới hạn $\lim \frac{\sqrt{4n^2+1} - \sqrt{n+2}}{2n-3}$ bằng

A. $+\infty$.

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{3}{2}$.**Lời giải.**

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+1} - \sqrt{n+2}}{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}}{2 - \frac{3}{n}} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 121. $\lim_{x \rightarrow 2^{2018}} \frac{x^2 - 4^{2018}}{x - 2^{2018}}$ bằng

A. 2^{2019} .B. 2^{2018} .

C. 2.

D. $+\infty$.**Lời giải.**

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2^{2018}} \frac{x^2 - 4^{2018}}{x - 2^{2018}} = \lim_{x \rightarrow 2^{2018}} \frac{(x - 2^{2018})(x + 2^{2018})}{x - 2^{2018}} = \lim_{x \rightarrow 2^{2018}} (x + 2^{2018}) = 2^{2018} + 2^{2018} = 2^{2019}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 122. Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{3n^2 + n - 2}$.

A. $L = +\infty$.B. $L = 0$.C. $L = \frac{1}{3}$.D. $L = -\infty$.**Lời giải.**

Ta có $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{3n^2 + n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)}{n^2 \left(3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \cdot \left(\frac{1 - \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} \right) \right] = +\infty,$

vì $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} = \frac{1 - 2 \cdot 0}{3 + 0 - 2 \cdot 0} = \frac{1}{3} > 0. \end{cases}$

Chọn đáp án **A** □

Câu 123. Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{3n^2 + n - 2}$.

A. $L = +\infty$.B. $L = 0$.C. $L = \frac{1}{3}$.D. $L = -\infty$.**Lời giải.**

Ta có $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{3n^2 + n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)}{n^2 \left(3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \cdot \left(\frac{1 - \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} \right) \right] = +\infty,$

vì $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} = \frac{1 - 2 \cdot 0}{3 + 0 - 2 \cdot 0} = \frac{1}{3} > 0. \end{cases}$

Chọn đáp án **A** □

Câu 124. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0; 2019)$ để $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} \leq$

$$\frac{1}{2187}?$$

A. 2018.

B. 2011.

C. 2012.

D. 2019.

Lời giải.

Do $\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên

$$\lim \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} = \sqrt{\lim \frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} = \sqrt{\lim \frac{1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n + 9^a}} = \sqrt{\frac{1}{9^a}} = \frac{1}{3^a}.$$

Theo đề bài ta có $\lim \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} \leq \frac{1}{2187} \Leftrightarrow \frac{1}{3^a} \leq \frac{1}{2187} \Leftrightarrow 3^a \geq 2187 \Leftrightarrow a \geq 7$.

Mà $a \in \mathbb{Z}$ và $a \in (0; 2019)$ nên $a \in \{7; 8; 9; \dots; 2018\}$. Vậy số giá trị nguyên a là $2018 - 7 + 1 = 2012$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 125. Tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = -\frac{1}{2}$

- A. $S = 1$. B. $S = \frac{2}{3}$. C. $S = \frac{3}{2}$. D. $S = 2$.

Lời giải.

$$S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 126. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Tìm $L = \lim \frac{n}{u_n}$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 3. D. 2.

Lời giải.

— Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n - 1)d = 2 + (n - 1)3 = 3n - 1$.

— Ta có $L = \lim \frac{n}{u_n} = \lim \frac{n}{3n - 1} = \lim \frac{1}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 127. $\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right)$ bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 0.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

$$\text{Do đó } \lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim \frac{n+1}{2n} = \lim \frac{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 128. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Tìm $L = \lim \frac{n}{u_n}$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 3. D. 2.

Lời giải.

— Số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n - 1)d = 2 + (n - 1)3 = 3n - 1$.

— Ta có $L = \lim \frac{n}{u_n} = \lim \frac{n}{3n - 1} = \lim \frac{1}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 129. $\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right)$ bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 0.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

$$\text{Do đó } \lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \lim \frac{n+1}{2n} = \lim \frac{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 130. $\lim \frac{1}{5n+3}$ bằng

- A. 0. B. $\frac{1}{3}$. C. $+\infty$. D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim \frac{1}{5n+3} = 0.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 131. $\lim \frac{1}{5n+2}$ bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim \frac{1}{5n+2} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{5 + \frac{2}{n}} = 0.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 132. $\lim \frac{1}{2n+7}$ bằng

- A. $\frac{1}{7}$. B. $+\infty$. C. $\frac{1}{2}$. D. 0.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim \frac{1}{2n+7} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{2 + \frac{7}{n}} = \frac{0}{2} = 0.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 133. $\lim \frac{1}{2n+5}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 0. C. $+\infty$. D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim \frac{1}{2n+5} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n}} = 0.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 134. Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) có công bội $q \neq 0$, có tổng $S = 12$ và $u_3 = -2u_4$. Tìm số hạng đầu u_1 của cấp số nhân (u_n) .

- A. $u_1 = 18$. B. $u_1 = 8$. C. $u_1 = 24$. D. $u_1 = 6$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } u_3 = -2u_4 \Rightarrow u_4 = -\frac{1}{2}u_3 \Rightarrow q = -\frac{1}{2}.$$

$$S = 12 \Leftrightarrow \frac{u_1}{1 + \frac{1}{2}} = 12 \Rightarrow u_1 = 18.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 135. $\lim \left(\frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} \right)$ bằng

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{5}$.

C. $\frac{1}{36}$.

D. $\frac{1}{20}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \lim \left(\frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} \right) \\ &= \lim \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5} \right) \\ &= \lim \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4n+5} \right) \\ &= \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 136. Tính $\lim \frac{2018n+1}{n-3}$.

A. $-\frac{1}{3}$.

B. 2018.

C. $+\infty$.

D. 0.

Lời giải.

Ta có $\lim \frac{2018n+1}{n-3} = \lim \frac{2018 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{3}{n}} = 2018$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 137. Xét các khẳng định sau

① Tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} > 2,1$.

② Tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2$.

③ Tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} > 1,99999$.

Số khẳng định đúng là

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải.

Xét dãy số $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$. Khi đó, u_n là một dãy số tăng.

Mặt khác, theo công thức tổng của cấp số nhân lùi vô hạn ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

Do đó, chỉ có mệnh đề “Tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} > 1,99999$ ” là đúng.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 138. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 4 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 5 \quad (n \geq 1) \end{cases}$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2}$.

A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 5 \Rightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 5 \quad (n \geq 1)$.

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$ ta được $v_{n+1} = v_n + 5 \quad (n \geq 1)$.

Suy ra dãy số (v_n) là cấp số cộng có công sai $d = 5$ và $v_1 = u_2 - u_1 = 4 - 2 = 2$.

Do đó $v_n = 2 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 3$. Suy ra $u_{n+1} - u_n = 5n - 3 \quad (n \geq 1)$.

Từ đó

$$u_2 - u_1 = 2$$

$$u_3 - u_2 = 7$$

$$u_4 - u_3 = 12$$

.....

$$u_{n+1} - u_n = 5n - 3$$

Suy ra $u_{n+1} - u_1 = 2 + 7 + 12 + \dots + (5n - 3) = \frac{n[2 + (5n - 3)]}{2} = \frac{n(5n - 1)}{2}$.

Từ đó ta có $u_{n+1} = \frac{n(5n - 1)}{2} + u_1 = \frac{n(5n - 1)}{2} + 2 = \frac{5n^2 - n + 4}{2}$.

Bởi vậy $u_n = \frac{5n^2 - 11n + 10}{2}$. Do đó

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^2 - 11n + 10}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2} - \frac{11}{2n} + \frac{5}{n^2} \right) = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 139. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3}{n^2 - 1}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = 2.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 140. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 1}{n + 1}$.

A. 2.

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 1}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 2.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 141. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - n}{1 - 3n^2}$ bằng

A. 1.

B. 0.

C. $-\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - n}{1 - 3n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} - 3} = 0.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 142. Dãy số nào dưới đây có giới hạn bằng 0 ?

A. $(1, 01)^n$.

B. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

C. $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

D. $\left(\frac{5}{3}\right)^n$.

Lời giải.

Ta biết rằng nếu $|q| < 1$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 143. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 1}{-n + 1}$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. 2.

D. -2.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{-n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{-1 + \frac{1}{n}} = -2.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 144. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} \end{cases}$ với $n \geq 2$. Đặt $S_n = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n}$. Tìm $\lim S_n$.

A. $+\infty$.**B.** $\frac{3}{4}$.**C.** $\frac{3}{8}$.**D.** $-\infty$.**Lời giải.**

Xét dãy (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3u_{n-1} \end{cases}$ (với $n \geq 2$) là cấp số nhân với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ q = 3. \end{cases}$

Đặt $v_n = \frac{1}{u_n}$, khi đó dãy (v_n) là cấp số nhân với $\begin{cases} v_1 = \frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Ta có (v_n) là cấp số nhân lùi vô hạn nên $S_n = \frac{v_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$ hay $\lim S_n = \frac{3}{4}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 145. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. Nếu $\lim u_n = 0$ thì $\lim |u_n| = 0$.**B.** Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = -\infty$.**C.** Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = +\infty$.**D.** Nếu $\lim u_n = -a$ thì $\lim |u_n| = a$.**Lời giải.**

— Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n = n^2$. Ta có $\lim u_n = \lim |u_n| = \lim |n^2| = \lim n^2 = +\infty$ nên mệnh đề “Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = -\infty$ ” sai.

— Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n = -n^2$. Ta có $\lim |u_n| = \lim |-n^2| = \lim n^2 = +\infty$ nhưng $\lim u_n = -\infty$ nên mệnh đề “Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = +\infty$ ” sai.

— Xét dãy số (u_n) cho bởi $u_n = \frac{n}{n+1}$. Ta có $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ và $\lim \left| \frac{n}{n+1} \right| = 1$ nên mệnh đề “Nếu $\lim u_n = -a$ thì $\lim |u_n| = a$ ” sai.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 146. Tính giới hạn $L = \lim \frac{3n+2017}{2n+2018}$.

A. $L = \frac{3}{2}$.**B.** $L = \frac{2}{3}$.**C.** $L = 1$.**D.** $L = \frac{2017}{2018}$.**Lời giải.**

Ta có

$$L = \lim \frac{3n+2017}{2n+2018} = \lim \frac{3 + \frac{2017}{n}}{2 + \frac{2018}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 147. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -5 \\ u_{n+1} = 5u_n - 20, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính $I = \lim(u_n + 2 \cdot 5^n)$.

A. $I = 100$.**B.** $I = -\infty$.**C.** $I = -100$.**D.** $I = 5$.**Lời giải.**

Từ $u_{n+1} = 5u_n - 20 \Leftrightarrow u_{n+1} - 5 = 5(u_n - 5)$. Đặt $v_n = u_n - 5$ ta được $v_{n+1} = 5v_n$. Suy ra (v_n) là cấp số nhân có công bội $q = 5$ và $v_1 = u_1 - 5 = -5 - 5 = -10$. Công thức tổng quát của (v_n) là $v_n = -10 \cdot 5^{n-1}$ hay $u_n = -10 \cdot 5^{n-1} + 5$.

Do đó $I = \lim(u_n + 2 \cdot 5^n) = \lim(-10 \cdot 5^{n-1} + 5 + 2 \cdot 5^n) = \lim 5 = 5$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 148. Tính giới hạn $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n-1}$.

A. $L = 2$.

B. $L = -3$.

C. $L = -2$.

D. $L = 3$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2 + \frac{3}{n} \right)}{n \left(1 - \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 2.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 149. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-2n+1) = -\infty$.

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{3n^2} = -\infty$.

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{-2n+1} = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-2n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \left(-2 + \frac{1}{n} \right) \right) = -\infty.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n} \right)}{3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n}}{3} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{-2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{-2 + \frac{1}{n}} = \frac{0}{-2+0} = 0.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 150. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 5 \end{cases}$. Tính giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{2^n - 1}$.

A. $I = \frac{3}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = 3$.

D. $I = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $v_n = u_n + 5$. Từ $u_{n+1} = 2u_n + 5 \Leftrightarrow u_{n+1} + 5 = 2(u_n + 5) \Leftrightarrow v_{n+1} = 2v_n$ với $v_1 = u_1 + 5 = 6$.

Ta có $v_n = 2^{n-1}v_1 = 3 \cdot 2^n \Rightarrow u_n = 3 \cdot 2^n - 5$.

$$\text{Do đó } I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{2^n - 1} = \frac{3 \cdot 2^n - 5}{2^n - 1} = \frac{3 - \frac{5}{2^n}}{1 - \frac{1}{2^n}} = 3.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 151. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 2, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ với mọi n nguyên dương. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

A. 2.

B. 4.

C. $\sqrt{2}$.

D. -1.

Lời giải.

Ta chứng minh quy nạp rằng $u_n = 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

— Với $n = 1$, ta có $u_1 = 2$.

— Giả sử $u_n = 2$ với mọi $n \leq k$. Ta có $u_{k+1} = \sqrt{2+u_k} = \sqrt{2+2} = 2$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có $u_n = 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 152. Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 \cdot 4^n + 1} - 2^n}{\sqrt{2 \cdot 4^n + 1} + 2^n} = a + b\sqrt{2}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $T = a^3 + b^3$.

A. $T = 19$.

B. $T = 35$.

C. $T = 1$.

D. $T = 17$.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 \cdot 4^n + 1} - 2^n}{\sqrt{2 \cdot 4^n + 1} + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{4^n}} - 1}{\sqrt{2 + \frac{1}{4^n}} + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 3 - 2\sqrt{2}. \text{ Suy ra } a = 3 \text{ và } b = -2.$$

$$\text{Khi đó: } T = a^3 + b^3 = 3^3 + (-2)^3 = 19.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 153. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 3$ và $u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Biết dãy số (u_n) tăng và không bị chặn trên. Đặt $v_n = \frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} + \frac{1}{u_3 - 1} + \dots + \frac{1}{u_n - 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n$.

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 1. D. 0.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 4 \Rightarrow u_{n+1} - 2 = u_n^2 - 3u_n + 2 = (u_n - 1) \cdot (u_n - 2)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{1}{(u_n - 1) \cdot (u_n - 2)} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{1}{u_n - 2} - \frac{1}{u_n - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{u_n - 2} - \frac{1}{u_{n+1} - 2}.$$

$$\text{Suy ra } v_n = \frac{1}{u_1 - 2} - \frac{1}{u_2 - 2} + \frac{1}{u_2 - 2} - \frac{1}{u_3 - 2} + \dots + \frac{1}{u_n - 2} - \frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{1}{u_1 - 2} - \frac{1}{u_{n+1} - 2}.$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1 - 2} - \frac{1}{u_{n+1} - 2} \right) = \frac{1}{u_1 - 2} = 1.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 154. Tính giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n-1}$.

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. -2.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 2.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 155. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n-1}$.

A. $+\infty$.

B. 2.

C. $\frac{1}{2}$.

D. -1.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 2.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 156. Kết quả đúng của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 5^{n+2}}{3^n + 2 \cdot 5^n}$ là

A. 1.

B. $-\frac{5}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $-\frac{25}{2}$.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 5^{n+2}}{3^n + 2 \cdot 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{5^n} - 5^2}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 2} = -\frac{25}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 157. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2(n+1) \end{cases} \text{ với } n = 1, 2, 3, \dots$$

Khi đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right)$ bằng

A. 0.

B. $+\infty$.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $u_n = u_{n-1} + 2n = u_{n-2} + 2(n-1) + 2n = \dots = u_1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2n = n(n+1)$, suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 158. Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2an^3 - 6n^2 + 2}{n^3 + n} = 4$ với a là tham số thực. Khi đó, hãy tính giá trị của $M = a^4 - a$.

A. $M = 10$.

B. $M = 6$.

C. $M = 12$.

D. $M = 14$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2an^3 - 6n^2 + 2}{n^3 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(2a - \frac{6}{n} + \frac{2}{n^3})}{n^3(1 + \frac{1}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a - \frac{6}{n} + \frac{2}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 2a$, suy ra $2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$.

Vậy ta có $M = a^4 - a = 2^4 - 2 = 14$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 159. Cho tổng $S = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$. Tổng S bằng

A. ∞ .

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} S &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots\right) \\ &= 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 160. Cho dãy số (u_n) có $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3u_n - 1}{2u_n + 5}$.

A. $-\frac{1}{5}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{5}{9}$.

D. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3u_n - 1}{2u_n + 5} = \frac{3 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2 + 5} = \frac{5}{9}$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 161. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^n}{2^n}, \dots$ là

A. -1.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{1}{4}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = -\frac{1}{2}$, công bội $q = -\frac{1}{2}$. Tổng cấp số nhân lùi vô hạn là $S = \frac{u_1}{1 - q} = -\frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 162. Khi biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $P = 0,323232\dots = 0,(32)$ dưới dạng phân số tối giản $P = \frac{m}{n}$ trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$. Tính hiệu $H = n - 3m$.

A. 0.

B. -3.

C. 3.

D. 67.

Lời giải.

Ta có

$$0,(32) = 32 \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \dots \right) = 32 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{32}{99}.$$

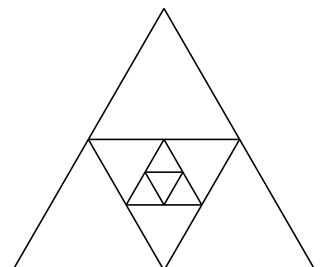
Do đó $n - 3m = 99 - 3 \cdot 32 = 3$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 163.

Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh bằng 1. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm BC, CA, AB ta được $\triangle A_1B_1C_1$. Tương tự $\triangle A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 . Quá trình lặp lại sau n bước ($n \in \mathbb{N}^*$) ta được $\triangle A_nB_nC_n$. Gọi S_0, S_n lần lượt là diện tích $\triangle ABC$ và $\triangle A_nB_nC_n$. Đặt T_n là tổng diện tích các tam giác $ABC, A_1B_1C_1, \dots, A_nB_nC_n$. Hỏi T_n không vượt quá số nào sau đây



A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{11\sqrt{3}}{36}$.

C. $\frac{100\sqrt{3}}{299}$.

D. $\frac{19\sqrt{3}}{240}$.

Lời giải.

Ta có tam giác đều cạnh a có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Mà $A_n B_n = \frac{1}{2} \cdot A_{n-1} B_{n-1}$ nên $S_n = \frac{1}{4} \cdot S_{n-1}$.

Hay (S_n) là cấp số nhân công bội $q = \frac{1}{4}$.

Ta có $\lim T_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{100\sqrt{3}}{299}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 164. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

A. $1 - 4n$.

B. $\frac{n^3 - 3n}{n + 1}$.

C. $\frac{n + 1}{n^2}$.

D. $\frac{1 - 2n^3}{n^3 + 5n}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \frac{n + 1}{n^2} = \lim \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 165. Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1 B_1 C_1, A_2 B_2 C_2, A_3 B_3 C_3, \dots$ sao cho $A_1 B_1 C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_n B_n C_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1} B_{n-1} C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_n B_n C_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$?

A. $S = \frac{15\pi}{4}$.

B. $S = 4\pi$.

C. $S = \frac{9\pi}{2}$.

D. $S = 5\pi$.

Lời giải.

Ta có: $S_1 = \pi \cdot \left(3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = 3\pi$; $S_2 = \pi \cdot \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{4} \cdot S_1$;

$$S_3 = \pi \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{3\pi}{16} = \frac{1}{4} \cdot S_2$$

Ta có $S_1; S_2; S_3; \dots; S_n; \dots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $S_1 = 3\pi$ và công bội $q = \frac{1}{4}$.

$$\text{Suy ra } S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{S_n}{1 - q} = \frac{3\pi}{1 - \frac{1}{4}} = 4\pi.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 166. Tính $\lim \frac{\sin 2018n}{n}$.

A. 0.

B. 1.

C. $+\infty$.

D. 2018.

Lời giải.

Ta có $-1 \leq \sin 2018n \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin 2018n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Vì $\lim \left(-\frac{1}{n} \right) = \lim \frac{1}{n} = 0$ nên $\lim \frac{\sin 2018n}{n} = 0$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 167. Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào có giá trị khác với các giới hạn còn lại?

A. $\lim \frac{3n - 1}{3n + 1}$.

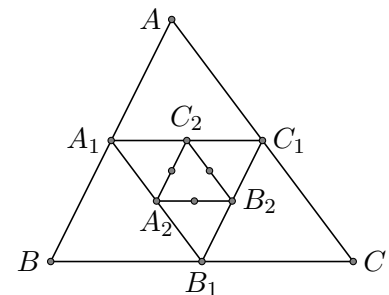
B. $\lim \frac{2n^2 + 1}{2n^2 - 3}$.

C. $\lim \frac{3n + 1}{-3n + 1}$.

D. $\lim \frac{n + 1}{n - 1}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \frac{3n - 1}{3n + 1} = \lim \frac{3 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = 1$; $\lim \frac{2n^2 + 1}{2n^2 - 3} = \lim \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{3}{n^2}} = 1$; $\lim \frac{3n + 1}{-3n + 1} = \lim \frac{3 + \frac{1}{n}}{-3 + \frac{1}{n}} = -1$;



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 1.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 168. Nếu $\lim u_n = L$ (với $u_n \geq -9$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$) thì $\lim \sqrt{u_n + 9}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $\sqrt{L+9}$. B. $L+9$. C. $L+3$. D. $\sqrt{L}+3$.

Lời giải.

Theo lý thuyết, $\lim \sqrt{u_n + 9} = \sqrt{L + 9}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 169. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n + 1}{n}$ bằng

A. $+\infty$. B. 1. C. $-\infty$. D. 0.

Lời giải.

Với mọi $n > 0$ thì $|\sin n + 1| \leq 2$. Do đó, với mọi $n > 0$, ta có

$$0 \leq \left| \frac{\sin n + 1}{n} \right| \leq \frac{2}{n}.$$

Từ đó

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin n + 1}{n} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin n + 1}{n} \right| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n + 1}{n} = 0.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 170. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $u_1 = 1$; $u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + a}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Biết rằng $\lim(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 - 2n) = b$. Giá trị của biểu thức $T = ab$ là

A. -2. B. -1. C. 1. D. 2.

Lời giải.

Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}u_n^2 + a} \Rightarrow u_{n+1}^2 - 3a = \frac{2}{3}(u_n^2 - 3a).$$

Đặt $v_n = u_n^2 - 3a$ thì (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = 1 - 3a$ và công bội $q = \frac{2}{3}$.

$$\text{Do đó } v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (1 - 3a) \Rightarrow u_n^2 = v_n + 3a = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (1 - 3a) + 3a.$$

$$\text{Suy ra } u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 - 2n = (1 - 3a) \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} - 2n + 3na = 3(1 - 3a) \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] - n(3a - 2).$$

Vì $\lim(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 - 2n) = b$ nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[3(1 - 3a) \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) - n(3a - 2) \right] = b \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2 = 0 \\ b = 3(1 - 3a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -3. \end{cases}$$

Suy ra $T = ab = -2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 171. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{3n^2 + n}}{2(3n + 2)} = \frac{a\sqrt{3}}{b}$ (với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T = a + b$.

A. $T = 7$. B. $T = 21$. C. $T = 9$. D. $T = 11$.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{3n^2 + n}}{2(3n + 2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(5\sqrt{3 + \frac{1}{n}} \right)}{n \left(6 + \frac{4}{n} \right)} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 6. \end{cases}$$

Vậy $T = a + b = 11$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 172. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(0; 2018)$ để có $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} \leq \frac{1}{2187}$?

A. 2011.

B. 2016.

C. 2019.

D. 2009.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1 + 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n + 9^a}} = \frac{1}{3^a}.$$

Nên:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9^n + 3^{n+1}}{5^n + 9^{n+a}}} \leq \frac{1}{2187} &\Leftrightarrow \frac{1}{3^a} \leq \frac{1}{2187} \\ &\Leftrightarrow 3^a \geq 2187 \\ &\Leftrightarrow 3^a \geq 3^7 \\ &\Leftrightarrow a \geq 7. \end{aligned}$$

Do đó, trên khoảng $(0; 2018)$ có 2011 giá trị nguyên của tham số a thỏa mãn đề bài.Chọn đáp án **A**

□

Câu 173. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n+3}$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.

B. 1.

C. 3.

D. -2.

Lời giải.

Ta có $\frac{3n-2}{n+3} = \frac{3 - \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n}}$.

Ta có $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{n}\right) = 3 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n+3} = 3.$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 174. Giá trị của $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n-2}$ bằng

A. $+\infty$.B. $-\infty$.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{2}{n}} = 2.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 175. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2018 \\ u_{n+1} = u_n(u_n^{2017} + 1), \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính giới hạn $L = 2018 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{u_1^{2017}}{\sqrt{u_2} + \frac{u_2}{\sqrt{u_1}}} \right)$.

A. 2018^2 .

B. 2018.

C. $\sqrt{2018}$.D. $2018\sqrt{2018}$.**Lời giải.**

Ta có $u_{n+1} = u_n(u_n^{2017} + 1) \Leftrightarrow u^{2018} = u_{n+1} - u_n \Leftrightarrow u_n^{2017} = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}.$

$$\begin{aligned}
\frac{u_n^{2017}}{\sqrt{u_{n+1}} + \frac{u_{n+1}}{\sqrt{u_n}}} &= \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n \left(\sqrt{u_{n+1}} + \frac{u_{n+1}}{\sqrt{u_n}} \right)} \\
&= \frac{(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n})(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n})}{\sqrt{u_{n+1}}u_n(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n})} \\
&= \frac{\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}}{\sqrt{u_{n+1}}u_n} = \frac{1}{\sqrt{u_n}} - \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}}
\end{aligned}$$

Giả sử $\lim u_n = a > 0$ hữu hạn, khi đó ta có $u_{n+1} = u_n(u_n^{2017} + 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $a = a(a^{2017} + 1)$ (vô lý vì $a > 0$), vì thế nên $\lim u_n = +\infty$.

$$\begin{aligned}
L &= 2018 \lim \left(\frac{1}{\sqrt{u_1}} - \frac{1}{\sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2}} - \frac{1}{\sqrt{u_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{u_n}} - \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}} \right) \\
&= 2018 \lim \left(\frac{1}{\sqrt{u_1}} - \frac{1}{\sqrt{u_{n+1}}} \right) = 2018 \cdot \frac{1}{\sqrt{2018}} = \sqrt{2018}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 176. Tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = -\frac{1}{2}$.

- A. $S = 2$. B. $S = \frac{3}{2}$. C. $S = 1$. D. $S = \frac{2}{3}$.

Lời giải.

Tổng của cấp số nhân đã cho là $S = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 177. Tìm giới hạn $I = \lim \frac{3n - 2}{n + 3}$.

- A. $I = -\frac{2}{3}$. B. $I = 1$. C. $I = 3$. D. $I = -2$.

Lời giải.

$$I = \lim \frac{3n - 2}{n + 3} = \lim \frac{3 - \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = 3.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 178. Tính $L = \lim \frac{1 - 2n}{3n + 1}$.

- A. $L = -\frac{2}{3}$. B. $L = \frac{1}{3}$. C. 1. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } L = \lim \frac{1 - 2n}{3n + 1} = \lim \frac{\frac{1}{n} - 2}{3 + \frac{1}{n}} = -\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 179. Với n là số nguyên lớn hơn 2, đặt $S_n = \frac{1}{C_3^3} + \frac{1}{C_4^3} + \frac{1}{C_5^3} + \dots + \frac{1}{C_n^3}$. Tính $\lim S_n$.

- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. 3. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$C_n^3 = \frac{n!}{(n-3)! \cdot 3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{C_3^3} + \frac{1}{C_4^3} + \frac{1}{C_5^3} + \cdots + \frac{1}{C_n^3} \\ &= \frac{6}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{6}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{6}{5 \cdot 4 \cdot 3} + \cdots + \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \\ &= 3 \left[\frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{2}{(n-2)(n-1)n} \right] \end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} &= \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3}, \\ \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} &= \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4}, \\ \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} &= \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5}, \\ &\vdots \\ \frac{2}{(n-2)(n-1)n} &= \frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{1}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Suy ra $S_n = 3 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{n(n-1)} \right)$.

Vậy nên $\lim S_n = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 180. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{2n^2+1}$ bằng

A. 0.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} - 1}{2 + \frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 181. Tam giác mà ba đỉnh của nó lần lượt là trung điểm các cạnh của tam giác ABC được gọi là tam giác trung bình của tam giác ABC .

Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n + \cdots$.

A. $S = \frac{15\pi}{4}$.

B. $S = 4\pi$.

C. $S = \frac{9\pi}{2}$.

D. $S = 5\pi$.

Lời giải.

Với mọi tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh a_n trong dãy tam giác đều cho, ta có

Đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$ có bán kính $R_n = OA_n = \frac{a_n\sqrt{3}}{3}$ và diện tích $S_n = \frac{\pi a_n^2}{3}$.

Ngoài ra A_{n+1} là trung điểm của cạnh B_nC_n nên $OA_{n+1} = \frac{a_n\sqrt{3}}{6}$, từ đó

Đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có

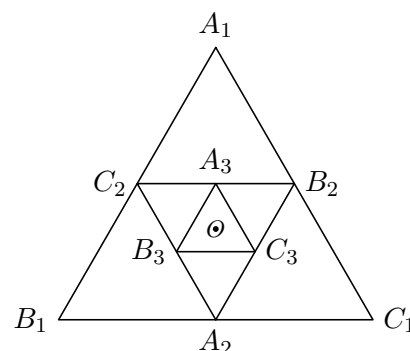
bán kính $R_{n+1} = OA_{n+1} = \frac{a_n\sqrt{3}}{6}$ và diện tích $S_{n+1} = \frac{\pi a_n^2}{12}$.

Dãy (S_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn có

$$S_1 = \frac{\pi a_1^2}{3} = 3\pi \text{ và công bội } q = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{1}{4}.$$

Vậy tổng của dãy là

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots + S_n + \cdots = \frac{S_1}{1-q} = \frac{3\pi}{1-\frac{1}{4}} = 4\pi.$$



Chọn đáp án **B**

□

Câu 182. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{2n^2+3n+1}$.

A. $-\infty$.

B. 0.

C. $+\infty$.

D. 1.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{2n^2+3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = 0.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 183. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$. Gọi $S_n = \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_n u_{n+1}}$. Tính $\lim S_n$.

A. $\lim S_n = \frac{1}{6}$.B. $\lim S_n = 1$.C. $\lim S_n = 0$.D. $\lim S_n = \frac{1}{3}$.**Lời giải.**

Từ giả thiết ta có (u_n) là cấp số cộng với $(u_1) = 2, d = 3$. Ta có

$$\frac{1}{u_n u_{n+1}} = \frac{1}{u_n(u_n + d)} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n + d} \right) = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \frac{u_{n+1} - u_1}{d u_1 u_{n+1}} \\ &= \frac{u_1 + nd - u_1}{d u_1 u_{n+1}} = \frac{n}{u_1 u_{n+1}} \\ &= \frac{n}{u_1(u_1 + nd)} = \frac{n}{2(2 + 3n)}. \end{aligned}$$

Do đó $\lim S_n = \frac{1}{6}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 184. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right) u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Gọi $S_n = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_n}{n}$. Tìm $\lim S_n$.

A. $\lim S_n = \frac{3}{2}$.B. $\lim S_n = \frac{2}{3}$.C. $\lim S_n = \frac{5}{2}$.D. $\lim S_n = \frac{5}{3}$.**Lời giải.**

— Ta có $u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right) u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{u_n}{n} \quad (*)$.

— Đặt $v_n = \frac{u_n}{n}$ ta có $(*)$ trở thành $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$.

— Dãy (v_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $v_1 = \frac{u_1}{1} = 1$ và công bội $q = \frac{1}{3}$ nên

$$v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}.$$

Do đó $S_n = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_n}{n} = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$

$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n}{1 - \frac{1}{3}}.$$

$$\text{— Suy ra } \lim S_n = \lim \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 185. Tính $I = \lim \frac{8n^5 - 2n^3 + 1}{4n^5 + 2n^2 + 1}$.

A. $I = 2$.

B. $I = 8$.

C. $I = 1$.

D. $I = 4$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \lim \frac{8n^5 - 2n^3 + 1}{4n^5 + 2n^2 + 1} = \lim \frac{8 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^5}}{4 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^5}} = \frac{8}{4} = 2.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 186. Tính giới hạn $I = \lim \frac{2n + 2017}{3n + 2018}$.

A. $I = \frac{2}{3}$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = \frac{2017}{2018}$.

D. $I = 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \lim \frac{2 + \frac{2017}{n}}{3 + \frac{2018}{n}} = \frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 187.

Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng a . Chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 . Từ hình vuông C_2 lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông C_i ($i \in \{1; 2; 3; \dots\}$).

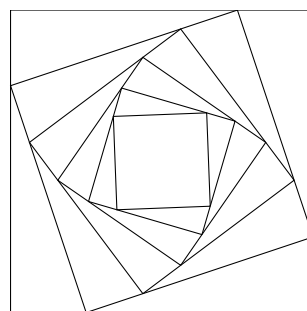
Đặt $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$. Biết $S = \frac{32}{3}$, tính a .

A. 2.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{2}$.



Lời giải.

Ta có $S_1 = a^2$, hình vuông C_2 có cạnh bằng $\sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$, do đó $S_2 = \frac{10a^2}{16}$. Bằng quy nạp ta chứng minh được (S_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{S_2}{S_1} = \frac{5}{8}$. Nên

$$S = \frac{a^2}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{8a^2}{3} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow a = 2.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 188. Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào có giá trị khác với các giới hạn còn lại?

A. $\lim \frac{3n-1}{3n+1}$.

B. $\lim \frac{2n+1}{2n-1}$.

C. $\lim \frac{4n+1}{3n-1}$.

D. $\lim \frac{n+1}{n-1}$.

Lời giải.

$$\text{Để thấy } \lim \frac{4n+1}{3n-1} = \frac{4}{3}; \lim \frac{2n+1}{2n-1} = \lim \frac{n+1}{n-1} = \lim \frac{3n-1}{3n+1} = 1.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 189. Tính $\lim \frac{1-2n}{3n+1}$.

A. -5.

B. 7.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 2}{3 + \frac{1}{n}} = -\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 190. Giới hạn $\lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right]$ là

- A. 1. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right] \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} \\ &= \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

Vậy $\lim S_n = \lim \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{2} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}.$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 191. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{n+1}.$

- A. 1. B. 2. C. -1. D. 0.

Lời giải.

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} = -1.$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 192. Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + n + 1} - n}{2n}$ bằng

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{9}{2}$. C. $+\infty$. D. 1.

Lời giải.

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + n + 1} - n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - 1}{2} = 1.$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 193. Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 3}{2n^2 + n + 1}.$

- A. 0. B. $+\infty$. C. 3. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 3}{2n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

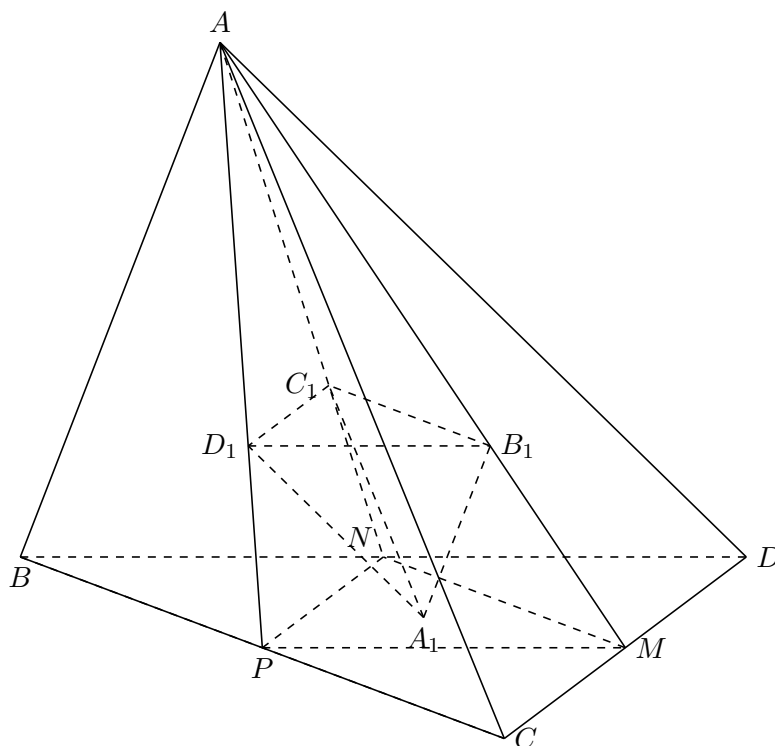
Chọn đáp án **D**

□

Câu 194. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi $A_1B_1C_1D_1$ là tứ diện với các đỉnh lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD , CDA , DAB , ABC và có thể tích V_1 . Gọi $A_2B_2C_2D_2$ là tứ diện với các đỉnh lần lượt là trọng tâm các tam giác $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$ và có thể tích $V_2, \dots$ cứ như vậy cho đến tứ diện $A_nB_nC_nD_n$ có thể tích V_n với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính giá trị của $P = \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_1 + V_2 + \cdots + V_n).$

- A. $\frac{V}{26}$. B. $\frac{V}{27}$. C. $\frac{8V}{9}$. D. $\frac{82V}{81}$.

Lời giải.



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm CD, DB, BC . Tam giác $B_1C_1D_1$ đồng dạng tam giác MNP tỉ số $k = \frac{2}{3}$ nên $\frac{S_{\triangle B_1C_1D_1}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{B_1C_1D_1}}{BCD} = \frac{1}{9}$.

Mặt khác lại có $d(A_1; (B_1C_1D_1)) = d(D_1; (BCD)) = \frac{1}{3}d(A; (BCD))$. Từ đây ta có

$$\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{ABCD}} = \frac{d(A_1; (B_1C_1D_1)) \cdot S_{\triangle B_1C_1D_1}}{d(A; (ABC)) \cdot S_{BCD}} = \frac{1}{27} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{27} \cdot V_{ABCD}.$$

Tương tự ta có $V_2 = \frac{1}{27}V_1, \dots$ hay (V_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $V_1 = \frac{1}{27}V$ và công bội $q = \frac{1}{27}$. Do đó $P = \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_1 + V_2 + \dots + V_n) = \frac{V_1}{1 - \frac{1}{27}} = \frac{V}{26}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 195. Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+1}$

A. $I = 0$.

B. $I = 3$.

C. $I = 1$.

D. $I = 2$.

Lời giải.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 2.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 196. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. 0.

C. 1.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} &= \frac{(2n+1) - (2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \\ 2u_n &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{2n+1} \Rightarrow u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} \Rightarrow \lim u_n = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 197. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $u_1 = 1, u_2 = 3, u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1, n = 1, 2, \dots$. Tính

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2}.$$

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1, \forall n \geq 1 \Leftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 1, \forall n \geq 1$ (1).

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$. Từ (1), suy ra $v_{n+1} = v_n + 1, \forall n \geq 1$. Do đó, (v_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $v_1 = 2$ và công sai $d = 1$. Ta có

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} &= \frac{(2+n)(n-1)}{2} \\ \Rightarrow (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \dots + (u_n - u_{n-1}) &= \frac{(2+n)(n-1)}{2} \\ \Rightarrow u_n - u_1 &= \frac{(2+n)(n-1)}{2} \\ \Rightarrow u_n &= \frac{n^2 + n}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^2+n}{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}{1} = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 198. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Tìm $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{u_n}$.

A. $L = \frac{1}{3}$.

B. $L = \frac{1}{2}$.

C. $L = 3$.

D. $L = 2$.

Lời giải.

Ta có: $u_n = u_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)3 = 3n - 1$.

Do đó: $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3}$.

Chọn đáp án **A**

□

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. B	4. C	5. A	6. C	7. B	8. C	9. D	10. B
11. D	12. A	13. A	14. A	15. B	16. D	17. A	18. C	19. A	20. C
21. B	22. C	23. B	24. C	25. B	26. C	27. A	28. C	29. D	30. B
31. D	32. C	33. D	34. C	35. B	36. B	37. A	38. A	39. D	40. D
41. A	42. B	43. C	44. D	45. B	46. B	47. C	48. C	49. B	50. D
51. A	52. A	53. C	54. B	55. B	56. B	57. C	58. B	59. A	60. C
61. C	62. A	63. B	64. D	65. B	66. B	67. C	68. C	69. A	70. B
71. A	72. B	73. A	74. B	75. B	76. D	77. D	78. C	79. A	80. A
81. A	82. C	83. B	84. B	85. D	86. A	87. A	88. C	89. A	90. D
91. D	92. B	93. C	94. C	95. B	96. A	97. B	98. B	99. A	100. D
101. C	102. D	103. C	104. C	105. B	106. B	107. C	108. A	109. B	110. D
111. D	112. C	113. D	114. B	115. D	116. C	117. D	118. A	119. B	120. B
121. A	122. A	123. A	124. C	125. B	126. A	127. B	128. A	129. B	130. A
131. B	132. D	133. B	134. A	135. D	136. B	137. B	138. B	139. B	140. A
141. B	142. C	143. D	144. B	145. A	146. A	147. D	148. A	149. B	150. C
151. A	152. A	153. C	154. B	155. B	156. D	157. D	158. D	159. C	160. C
161. D	162. C	163. C	164. C	165. B	166. A	167. C	168. A	169. D	170. A
171. D	172. A	173. C	174. C	175. C	176. D	177. C	178. A	179. B	180. D
181. B	182. B	183. A	184. A	185. A	186. A	187. A	188. C	189. C	190. B
191. C	192. D	193. D	194. A	195. D	196. A	197. C	198. A		

BÀI 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1. (Giới hạn hữu hạn): Giả sử $(a; b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên một khoảng $(a; b)$, có thể trừ ở một điểm x_0 . Ta nói **hàm số $f(x)$ có giới hạn là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0)** nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a; b) \setminus \{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$

Khi đó ta viết:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow x_0$$

Từ định nghĩa, ta có các kết quả:

① $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$, với c là hằng số.

② Nếu hàm số $f(x)$ xác định tại điểm x_0 thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Định nghĩa 2. (Giới hạn vô cực): Giả sử $(a; b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và $y = f(x)$ là một hàm số xác định trên một khoảng $(a; b)$, có thể trừ ở một điểm x_0 . Ta nói **hàm số $f(x)$ có giới hạn là vô cực khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0)** nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a; b) \setminus \{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = \pm\infty$

Khi đó ta viết:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \text{ hoặc } f(x) \rightarrow \pm\infty \text{ khi } x \rightarrow x_0$$

2 GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa 3. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Ta nói **hàm số $f(x)$ có giới hạn là số thực L khi x dần đến $+\infty$** nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a; +\infty)$ mà $\lim x_n = +\infty$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$

Khi đó ta viết:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow +\infty$$

Các giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$ được định nghĩa tương tự.

Ta có các kết quả sau với số nguyên dương k bất kì cho trước:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$

3 MỘT SỐ ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lý 1. Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ ($L, M \in \mathbb{R}$). Khi đó:

① $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = L.M \text{ Đặc biệt, nếu } c \text{ là hằng số thì } \lim_{x \rightarrow x_0} [c.f(x)] = c.L$$

$$\textcircled{3} \text{ Nếu } M \neq 0 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

Định lí 2. Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Khi đó:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) \pm g(x)| = |L|$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

$$\textcircled{3} \text{ Nếu } f(x) \geq 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ thì } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L} \text{ và } L \geq 0$$

Định lí 3. Giả sử $f(x), g(x), h(x)$ là ba hàm số xác định trên một khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 , có thể trừ ở một điểm x_0 . Nếu $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$

các định lí trên vẫn đúng khi thay $x \rightarrow x_0, x \rightarrow \pm\infty$.

4 GIỚI HẠN MỘT BÊN

Định nghĩa 4. (Giới hạn bên phải): giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng $(x_0; b)$ ($x_0 \in \mathbb{R}$). Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn phải là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(x_0; b)$ mà $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ta đều có $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$

Khi đó ta viết:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow x_0^+$$

Định nghĩa 5. (Giới hạn bên trái): giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng $(a; x_0)$ ($x_0 \in \mathbb{R}$). Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn trái là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a; x_0)$ mà $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ta đều có $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$

Khi đó ta viết:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \text{ hoặc } f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow x_0^-$$

Định lí 4. Điều kiện cần và đủ để $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ là $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

$$\textcircled{1} \text{ Các giới hạn } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty \text{ được định nghĩa tương tự.}$$

$$\textcircled{2} \text{ Định lí vẫn đúng với giới hạn vô cực.}$$

5 MỘT VÀI QUY TẮC TÌM GIỚI HẠN VÔ CỰC

Quy tắc ① Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L \neq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = \pm\infty$ được cho trong bảng sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	Dấu của L	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)]$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	-	$+\infty$

Quy tắc ② Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ và $g(x) \neq 0$ với mọi $x \neq x_0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	dấu của $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
+	+	$+\infty$
+	-	$-\infty$
-	+	$-\infty$
-	-	$+\infty$

① Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ và $f(x) \neq 0$ với $x \neq x_0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$.

② Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{|f(x)|} = 0$

6 CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH

Khi tìm giới hạn của một hàm số, chúng ta có thể gặp các trường hợp sau:

① $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ với $u(x) \rightarrow 0$ và $v(x) \rightarrow 0$.

② $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ với $u(x) \rightarrow \infty$ và $v(x) \rightarrow \infty$.

③ $\lim [u(x) - v(x)]$ với $u(x) \rightarrow \infty$ và $v(x) \rightarrow \infty$.

④ $\lim [u(x) \cdot v(x)]$ với $u(x) \rightarrow 0$ và $v(x) \rightarrow \infty$. Ta gọi là các dạng vô định dạng $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$

B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Sử dụng định nghĩa giới hạn của hàm số tìm giới hạn

Phương pháp áp dụng

Sử dụng các định nghĩa 1, định nghĩa 2, định nghĩa 3.

Ví dụ 1. Sử dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, tìm các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1}$.

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3x+1}$.

Lời giải.

① Đặt $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

Với mọi dãy số (x_n) mà $x_n \neq 1$ với mọi n và $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, ta có $f(x_n) = \frac{2}{x_n-1}$.

Do đó: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{x_n-1} = \frac{2}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - 1} = 0$.

② Tương tự câu a.

□

Dạng 2. Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ không tồn tại

Phương pháp áp dụng

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chọn hai dãy số x_n và y_n với

$$\text{— } x_n \rightarrow x_0 \text{ khi } n \rightarrow \infty, \text{ khi đó đánh giá } f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L_1.$$

$$\text{— } y_n \rightarrow x_0 \text{ khi } n \rightarrow \infty, \text{ khi đó đánh giá } f(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L_2.$$

Bước 2: Nhận xét rằng $L_1 \neq L_2$.

Bước 3: vậy, giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ không tồn tại.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các giới hạn sau không tồn tại:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x.$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x.$

Lời giải.

① Đặt $f(x) = \cos x$. Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với:

$$\text{— } x_n = 2n\pi \Rightarrow x_n \rightarrow +\infty \text{ khi } n \rightarrow \infty \text{ và ta được: } f(x_n) = \cos(x_n) = \cos(2n\pi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

$$\text{— } y_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow y_n \rightarrow +\infty \text{ khi } n \rightarrow \infty \text{ và ta được: } f(y_n) = \cos(y_n) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

vậy, giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ không tồn tại.

② Đặt $f(x) = \sin x$. Chọn hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ với:

$$\text{— } x_n = -n\pi \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty \text{ khi } n \rightarrow \infty \text{ và ta được: } f(x_n) = \sin(x_n) = \sin(-n\pi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{— } y_n = \frac{\pi}{2} - 2n\pi \Rightarrow y_n \rightarrow -\infty \text{ khi } n \rightarrow \infty \text{ và ta được: } f(y_n) = \sin(y_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2n\pi\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

vậy, giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ không tồn tại.

□

Với các hàm số:

$$\text{— } f(x) = \cos ax \text{ chúng ta thường chọn hai dãy số } \{x_n\} \text{ và } \{y_n\} \text{ với: } x_n = \frac{2n\pi}{a} \text{ và } y_n = \frac{\pi}{2a} + \frac{n\pi}{a}.$$

$$\text{— } f(x) = \sin ax \text{ chúng ta thường chọn hai dãy số } \{x_n\} \text{ và } \{y_n\} \text{ với: } x_n = \frac{n\pi}{a} \text{ và } y_n = \frac{\pi}{2a} + \frac{2n\pi}{a}.$$

Dạng 3. Các định lý về giới hạn và giới hạn cơ bản để tìm giới hạn

Phương pháp áp dụng

Cách 1: Đưa hàm số cần tìm giới hạn về dạng tổng, hiệu, tích, thương của những hàm số mà ta đã biết giới hạn.

Ta có kết quả sau:

① $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$

② Nếu hàm số $y = f(x)$ xác định tại điểm x_0 thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = 0.$

④ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = 0.$

⑤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty.$

⑥ $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ.} \end{cases}$

Cách 2: Sử dụng nguyên lý kẹp giữa, cụ thể

Giả sử cần tính giới hạn của hàm số $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ta thực hiện các bước sau :

Bước 1: Chọn hai hàm số $g(x)$, $h(x)$ thỏa mãn :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

Bước 2: Khẳng định :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = L$$

Bước 3: Kết luận:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Chú ý: Chúng ta còn sử dụng các kết quả sau :

① Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

② Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$ có thể trừ đi điểm $x_0 \in (a; b)$.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ và $|g(x)| \leq M$ với $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ (Trong đó M là một hằng số) thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$$

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + x)$.

② $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1}$.

Lời giải.

① Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + x) = 3^2 + 3 = 12.$$

② Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-1} = +\infty.$$

Nhận xét.

- Với hàm số $f(x)$ xác định tại điểm x_0 thì giới hạn của nó khi $x \rightarrow x_0$ có giá trị $f(x)$.
- Với hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ có $f(x_0) \neq 0$ và $g(x_0) = 0$ thì giới hạn của nó khi $x \rightarrow x_0$ có giá trị bằng ∞
- Trong trường hợp với hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ có $f(x_0) = 0$ (tức có dạng $\frac{0}{0}$)

Chúng ta cần sử dụng các phép biến đổi đại số để khử dạng $\frac{0}{0}$, và thông thường là làm xuất hiện nhân tử chung $(x - x_0)$

□

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau :

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

② $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x^2 + 2x - 3}$.

Lời giải.

① Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2.$$

② Ta có :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+2x-3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(\sqrt{x+8}+3)(x-1)(x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x+8}+3)(x+3)} = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

□

Nhận xét.

Vậy với hàm số $f(x)$ không xác định tại điểm x_0 thì chúng ta cần khử dạng vô định đó (nếu có thể), ta thực hiện như sau :

- Trong (câu a) , chúng ta sử dụng phép phân tích đa thức thành nhân tử ,và khử nhân tử $(x-1)$
- Trong (câu b) , chúng ta sử dụng phép nhân liên hợp để khử nhân tử $(x-1)$

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 1} x \left(2 - \frac{1}{x}\right).$

② $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2}.$

Lời giải.

① Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow 1} x \left(2 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1) = -1.$$

② Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x(9-x)} = -\lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{x(\sqrt{x}-3)} = -\frac{1}{54}.$$

□

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-x-1}.$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-x+7}{2x^3-1}.$

Lời giải.

① Chia tử cho mẫu cho x^2 ,Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2-x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

② Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-x+7}{2x^3-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} = 0.$$

□

Ví dụ 5. Tìm các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^2-1}.$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^2-1}.$

Lời giải.

① Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^6+2}}{3x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^6}}}{3-\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{3}.$$

② Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^6 + 2}}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{2}{x^6}}}{3 - \frac{1}{x^3}} = -\frac{1}{3}.$$

□

Ví dụ 6. Tìm các giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + x^2 + \cdots + x^n - \frac{n}{1-x}).$$

Lời giải.

Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + x^2 + \cdots + x^n - \frac{n}{1-x}) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(1-x^n) - n}{1-x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} [x(1-x^n) - n]}{\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)} = -\infty.$$

□

Ví dụ 7. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng chứa điểm $x = 0$ và thỏa mãn $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq M$ với mọi $x \neq 0$. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Áp dụng :

① $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}.$

② $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}.$

Lời giải.

Từ giả thiết $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq M$ với mọi $x \neq 0$ suy ra :

$$|f(x)| \leq M|x| \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = M \cdot 0 = 0.$$

① Với mọi $x \neq 0$ thuộc lân cận của điểm 0 ta luôn có :

$$\left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x| \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

$$\text{Vậy, ta được } \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

② Với mọi $x \neq 0$ thuộc lân cận của điểm 0 ta luôn có :

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}, \forall x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0.$$

Vậy, ta được :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1.$$

□

Dạng 4. Tính giới hạn một bên của hàm số

Phương pháp áp dụng

Sử dụng các định lý với lưu ý sau:

- $x \rightarrow x_0^+$; được hiểu là $x \rightarrow x_0$ và $x > x_0$ (khi đó $|x - x_0| = x - x_0$).

- $x \rightarrow x_0^-$; được hiểu là $x \rightarrow x_0$ và $x < x_0$ (khi đó $|x - x_0| = x_0 - x$).

Ví dụ 1. Áp dụng định nghĩa ,Tìm các giới hạn một bên của các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1}.$

② $\lim_{x \rightarrow 5^-} (\sqrt{5-x} + 2x).$

Lời giải.

① a.Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0.$$

② Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} (\sqrt{5-x} + 2x) = 10.$$

□

Nhận xét. . Vậy, nếu hàm số $f(x)$ không xác định tại điểm x_0 thì giới hạn một bên của nó không khác so với giới hạn tại x_0 :

Ví dụ 2. Áp dụng định nghĩa ,Tìm các giới hạn một bên của các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1}.$

② $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1}.$

Lời giải.

① a.Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty.$$

② Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty.$$

□

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau (nếu có):

① $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|3x-6|}{x-2}.$

② $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|3x-6|}{x-2}.$

③ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|3x-6|}{x-2}.$

Lời giải.

① Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|3x-6|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 3 = 3.$$

② Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|3x-6|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x+6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-3) = -3.$$

③ Từ câu a và câu b ,Ta thấy :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|3x-6|}{x-2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|3x-6|}{x-2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|3x-6|}{x-2} \text{ không tồn tại.}$$

□

Ví dụ 4. Tính giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}}.$$

Lời giải.

Ta có :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2 - x^3}} - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2}} = 1.\end{aligned}$$

□

Dạng 5. Giới hạn của hàm số số kép*Phương pháp chung*Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x < x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x \geq x_0 \end{cases}$ Để tính giới hạn hoặc tìm giá trị của tham số m để hàm số có giới hạn khi $x \rightarrow x_0$ ta thực hiện theo các bước sau :**Bước 1::** Tính các giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f_1(x) = L_1; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x) = L_2$$

Bước 2: Khi đó: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ Để hàm số có giới hạn khi $x \rightarrow x_0$ điều kiện là $L_1 = L_2 \Rightarrow$ giá trị của tham số**Ví dụ 1.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0. \end{cases}$ Tính $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ **Lời giải.**Ta có : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x + 1) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$

Vậy ta được :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

□

Ví dụ 2. Cho hàm số : $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Tìm a để hàm số có giới hạn khi $x \rightarrow 0$ **Lời giải.**Ta có : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + a) = a$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$ Để có giới hạn của hàm số khi $x \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow a = 1$ Vậy giá trị cần tìm là $a = 1$.

□

Dạng 6. Một vài qui tắc tính giới hạn vô cực**Ví dụ 1.** Tính các giới hạn sau :

① $\lim_{x \rightarrow 0} (3x^3 - 5x^2 + 7).$

② $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^4 - 3x + 12}$

Lời giải.

① Ta có : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 7) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^3} \right) = (-\infty)^3 \cdot 3 = -\infty.$

② Ta có : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt{2 - \frac{3}{x^3} + \frac{12}{x^4}} = (+\infty) \sqrt{2} = +\infty.$

□

Nhận xét. Với hàm số có dạng $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_1 x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n \left(a_1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) = (\pm\infty)^n \cdot a_n \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5}{x^2 + 1}.$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x}.$

Lời giải.

① Ta có : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = +\infty$

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{x^2} \right) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) = 0$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} > 0$ với $x > 0$.

② Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 - x}}{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{1}{x^3}}}{x^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}} = +\infty$

Vì $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^3}} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \right) = 0$ và $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} > 0$ với $x < 0$.

□

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x + 1}{x - 2}.$

② $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + 1}{x - 2}.$

Lời giải.

① Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x + 1}{x - 2} = +\infty$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 1) = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0$ và $x - 2 > 0$ với $x > 2$.

② Ta có : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x + 1}{x - 2} = +\infty$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + 1) = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 2) = 0$ và $x - 2 < 0$ với $x < 2$.

□

Ví dụ 4. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} \cdot \frac{2x+1}{2x-3} \right].$

② $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)}.$

Lời giải.

① Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} \cdot \frac{2x+1}{2x-3} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(1-1)^2} \cdot \frac{2+1}{2-3} \right] = +\infty \cdot (-3) = -\infty.$

② Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{(x-1)(x^2-3x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{(x-1)^2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{(1-1)^2} \cdot \frac{5}{1-2}$
 $= +\infty \cdot (-5) = -\infty.$

□

Nhận xét. Trong lời giải của ví dụ trên, trong câu b nếu học sinh không biến đổi hàm số đưa về dạng $\frac{5}{(x-1)^2(x-2)}$ thì không khẳng định được $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{(1-1)^2} = +\infty$

Ví dụ 5. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right).$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \text{ Ta biến đổi } \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ và $x^2 > 0$ với $x \neq 0$ nên $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$.

$$\textcircled{2} \text{ Ta biến đổi } \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{x+1}{x^2-4}$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2-4) = 0$ và $x^2-4 < 0$ với $x < 2$ nên $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = -\infty$.

□

Dạng 7. Dạng $\frac{0}{0}$

Phương pháp chung:

Bản chất của việc khử dạng không xác định $\frac{0}{0}$ là làm xuất hiện nhân tử chung để :

$\textcircled{1}$ Hoặc là khử nhân tử chung để đưa về dạng xác định

$\textcircled{2}$ Hoặc là biến đổi về dạng giới hạn cơ bản, quen thuộc đã biết kết quả hoặc biết cách giải

■ Nếu $f(x) = 0$ có nghiệm là x_0 thì $f(x) = (x - x_0)g(x)$

■ Một số dạng liên hợp

$$\textcircled{1} \sqrt{a} - b \text{ là } \sqrt{a} + b$$

$$\textcircled{2} \sqrt{a} - \sqrt{b} \text{ là } \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\textcircled{3} \sqrt[3]{a} - b \text{ là } \sqrt[3]{a^2} + b\sqrt[3]{a} + b^2$$

$$\textcircled{4} \sqrt[3]{a} + b \text{ là } \sqrt[3]{a^2} - b\sqrt[3]{a} + b^2$$

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1}.$$

:

Lời giải.

$$\textcircled{1} \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} = 3.$$

$$\textcircled{2} \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3x-1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (3x-1) = 2.$$

□

Nhận xét. Như vậy, với dạng $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $x = x_0$ là nghiệm của $f(x)$ và $g(x)$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x-x_0)f_1(x)}{(x-x_0)g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2}.$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x-1}{x+3} = +\infty.$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{2x-1}{x+3} = -\infty.$$

Chú ý: Tiếp theo, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp nhân tử chung như trên cho các hàm số khác, cụ thể là hàm số lượng giác. Khi đó ta cần nhớ lại các công thức biến đổi góc $\square$

Ví dụ 3. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x - \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x}.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{1 - \sin 2x - \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} = \frac{(1 - \cos 2x) - \sin 2x}{(1 - \cos 2x) + \sin 2x} = \frac{2 \sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x}{2 \sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x - \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = -1. \quad \square$$

Nhận xét. Như vậy, để tính giới hạn trên chúng ta cần biến đổi lượng giác để khử nhân tử chung làm mất dạng $\frac{0}{0}$

. Tiếp theo chúng ta áp dụng cách khử nhân tử chung cho dạng hàm số chứa căn, cụ thể dạng sau :

$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\sqrt{f(x)} - a}{g(x)}$ trong đó $\sqrt{f(x_0)} = a$ và $g(x_0) = 0$. Khi đó ta thực hiện phép nhân liên hợp như sau :

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{\sqrt{f(x)} - a}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - a^2}{[\sqrt{f(x)} + a]g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{(x - x_0) f_1(x)}{[\sqrt{f(x)} + a](x - x_0) g_1(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{[\sqrt{f(x)} + a]g_1(x)} = \frac{f_1(x_0)}{2a \cdot g_1(x_0)}$$

Phương pháp này cũng có thể sử dụng cho một số dạng khác được thể hiện trong các ví dụ sau :

Ví dụ 4. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 3x + 2}$

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(\sqrt{x+3} + 2)(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x+3} + 2)(x - 2)} = -\frac{1}{4}. \quad \square$$

Ví dụ 5. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{3 - \sqrt{2x+9}}.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{3 - \sqrt{2x+9}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3 + \sqrt{2x+9})}{-2x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \sqrt{2x+9}}{-2(\sqrt{x+1} + 1)} = -\frac{3}{2}. \quad \square$$

Ví dụ 6. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}}.$

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})(2-x)}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x})(2x-4)}$$

$$\text{Ta có : } = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}}{-2(\sqrt{x+2} + \sqrt{2x})} = -\frac{1}{4} \quad \square$$

Nhận xét. Như vậy, để tính được các giới hạn có dạng như trên ta cần phải nhận dạng liên hợp của biểu thức chứa căn cho cả tử và mẫu

Ví dụ 7. Tính các giới hạn

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2};$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}.$$

Lời giải.

$\textcircled{1}$ Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - 8}{\left[(\sqrt[3]{4x})^2 + \sqrt[3]{4x} + 4\right](x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{(\sqrt[3]{4x})^2 + 2\sqrt[3]{4x} + 4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$ Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1})}{x \left[\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)(x+1)} + \sqrt[3]{(x+1)^2} \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1})}{\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)(x+1)} + \sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 8. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \text{ với } a > 0;$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3} + x^3 - 3x}.$$

Lời giải.

$\textcircled{1}$ Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x^2 - a^2}} + \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x+a}} + \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}. \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$ Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3} + x^3 - 3x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} + \frac{x^3-3x+2}{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{x^2-1}{(\sqrt{x^2+3}+2)(x-1)} + x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} + x-2} = -2. \end{aligned}$$

Nhận xét. Như vậy, để tính được các giới hạn trên chúng ta cần thực hiện phép tách nó thành hai giới hạn nhỏ, từ đó mới có thể khử được dạng $\frac{0}{0}$.

Với giới hạn dạng $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{f(x)} - a}{g(x)}$, trong đó $\sqrt[3]{f(x_0)} = a$ và $g(x_0) = 0$.

Thực hiện phép nhân liên hợp $\sqrt[3]{f^2(x)} + \sqrt[3]{f(x)} + a^2$, ta được

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{f(x)} - a}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a^3}{\left[\sqrt[3]{f^2(x)} + \sqrt[3]{f(x)} + a^2\right] g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0) f_1(x)}{\left[\sqrt[3]{f^2(x)} + \sqrt[3]{f(x)} + a^2\right] (x - x_0) g_1(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{\left[\sqrt[3]{f^2(x)} + \sqrt[3]{f(x)} + a^2\right] g_1(x)} = \frac{f_1(x_0)}{(2a^2 + a) \cdot g_1(x_0)}. \end{aligned}$$

Phương pháp được mở rộng cho giới hạn dạng:

— Với giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{f(x)} + a}{g(x)}$, trong đó $\sqrt[3]{f(x_0)} = -a$ và $g(x_0) = 0$.

Thực hiện phép nhân liên hợp $\sqrt[3]{f^2(x)} - \sqrt[3]{f(x)} + a^2$.

— Với giới hạn

① $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{f(x)} \pm a}{\sqrt[3]{g(x)} \pm b}$, trong đó $\sqrt[3]{f(x_0)} = \mp a$ và $\sqrt[3]{g(x_0)} = \mp b$.

② $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{f(x)} \pm a}{\sqrt[3]{g(x)} - b}$, trong đó $\sqrt[3]{f(x_0)} = \mp a$ và $\sqrt[3]{g(x_0)} = b$.

③ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{f_1(x)} \pm \sqrt[3]{f_2(x)}}{\sqrt[3]{g_1(x)} - \sqrt[3]{g_2(x)}}$, trong đó $\sqrt[3]{f_1(x_0)} = \mp \sqrt[3]{f_2(x_0)}$ và $\sqrt[3]{g_1(x_0)} = \sqrt[3]{g_2(x_0)}$.

④ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{f_1(x)} \pm \sqrt[3]{f_2(x)}}{\sqrt[3]{g_1(x)} \pm \sqrt[3]{g_2(x)}}$, trong đó $\sqrt[3]{f_1(x_0)} = \mp \sqrt[3]{f_2(x_0)}$ và $\sqrt[3]{g_1(x_0)} = \mp \sqrt[3]{g_2(x_0)}$.

□

Ví dụ 9. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1}{\sqrt[3]{x-2} + x^2 - x + 1};$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}.$

Lời giải.

① Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1}{\sqrt[3]{x-2} + x^2 - x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1}{x-1}}{\frac{\sqrt[3]{x-2} + x^2 - x + 1}{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} + \frac{x^2-3x+2}{x-1}}{\frac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x-1} + \frac{x^2-x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x-2}{(\sqrt{2x-1}+1)(x-1)} + x-2}{\frac{2}{\left[\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{x-2} + 1\right]} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} + x-2}{\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{x-2} + 1} = 0. \end{aligned}$$

② Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 2 + 2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2(\sqrt{1+x}-1)}{x} + \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+1)} + \frac{x}{x[4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}]} \right\} = \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 10. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{x-1}.$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{5x+1} - 1}{x}.$

Lời giải.

① Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1-1}{\left[\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{2x-1} + 1\right](x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{2x-1} + 1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Cách 2. Đặt $t = \sqrt[3]{2x-1}$, ta được

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{\frac{t^3+1}{2}-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2(t-1)}{t^3-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2}{t^2+t+1} = \frac{2}{3}.$$

② Đặt $t = \sqrt[5]{5x+1}$, ta được

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{5x+1} - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{\frac{t^5-1}{5}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{5}{t^4+t^3+t^2+t+1} = 1.$$

⚠ Chúng ta đã được biết đến một giới hạn đặc biệt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Từ đó, ta suy ra:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Mở rộng: $\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin[f(x)]}{f(x)} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tan[f(x)]}{f(x)} = 1$, với $f(x_0) = 0$.

□

Ví dụ 11. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan 2x};$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x}.$

Lời giải.

① Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\tan 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2x}{\tan 2x} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

② Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin 2x}{2x} \cdot 2 \cos x \right) = 4.$$

Nhận xét. Trong ví dụ trên:

- Ở câu a) bằng việc thêm vào x chúng ta nhận được hai dạng giới hạn cơ bản và cần lưu ý $\tan 2x$ sẽ phải tương ứng với $2x$.
- Ở câu b) chúng ta cần sử dụng một phép biến đổi lượng giác để chuyển $1 - \cos^2 2x$ thành $\sin^2 2x$. Ngoài ra cũng có thể trình bày như sau:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2} \cdot \frac{4x}{\sin x} \right) = 4.$$

□

Ví dụ 12. Tính các giới hạn:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \tan 3x}{x};$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$$

Lời giải.

$\textcircled{1}$ Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \tan 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} + \frac{\tan 3x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin 2x}{2x} + \frac{3 \tan 3x}{3x} \right) = 5.$$

$\textcircled{2}$ Ta có

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x}.$$

Do đó

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Nhận xét. Trong ví dụ trên:

- Ở câu a) chúng ta thực hiện phép tách để nhận được tổng của hai giới hạn cơ bản.
- Ở câu b) chúng ta không thể thực hiện phép tách, bởi nếu làm như vậy:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x^3} - \frac{\sin x}{x^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} - \frac{\sin x}{x} \right) \frac{1}{x^2} = (1 - 1) \cdot \infty = 0 \cdot \infty \end{aligned}$$

$$\text{Hoặc } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \right) = 1 \cdot \infty - 1 \cdot \infty = \infty - \infty.$$

cả hai đều là những dạng vô định và chúng ta không thể kết luận được gì.

□

Ví dụ 13. Tính các giới hạn:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 3x \cdot \cos 5x}{x^2};$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos x \right)}{\sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Lời giải.

$\textcircled{1}$ Ta có

$$\begin{aligned} \cos 4x - \cos 3x \cdot \cos 5x &= \cos 4x - \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2}(2 \cos 4x - \cos 8x - \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2}[(1 - \cos 8x) + (1 - \cos 2x) - 2(1 - \cos 4x)] \\ &= \sin^2 4x + \sin^2 x - 2 \sin^2 2x. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 3x \cos 5x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x + \sin^2 x - 2 \sin^2 2x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 4x}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{16 \sin^2 4x}{(4x)^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{8 \sin^2 2x}{(2x)^2} \right] \\ &= 16 + 1 - 8 = 9. \end{aligned}$$

② Ta có
$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1 - \cos x)\right]}{\sin^2\frac{x}{2}} = \pi \frac{\sin\left(\pi \sin^2\frac{x}{2}\right)}{\pi \sin^2\frac{x}{2}}.$$

Do đó
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin^2\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \pi \frac{\sin\left(\pi \sin^2\frac{x}{2}\right)}{\pi \sin^2\frac{x}{2}} = \pi.$$

Nhận xét. Trong ví dụ trên:

- Ở câu a) chúng ta cần sử dụng phép biến đổi tích thành tổng. Và từ đó, với việc định hướng biến đổi TS thành tổng của các hàm số sin chúng ta đã sử dụng công thức góc nhân đôi của hàm số cos (cụ thể $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$).
- Ở câu b) các em học sinh cần có kinh nghiệm về hàm số lượng giác lồng nhau.

□

Ví dụ 14. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(a+x) \cdot \tan(a-x) - \tan^2 a}{x^2}.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \tan(a+x)\tan(a-x) - \tan^2 a &= \frac{\sin(a+x)\sin(a-x)}{\cos(a+x)\cos(a-x)} - \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} \\ &= \frac{\cos 2x - \cos 2a}{\cos 2x + \cos 2a} - \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a} = \frac{-2\cos 2a(1 - \cos 2x)}{(\cos 2x + \cos 2a)(1 + \cos 2a)} \\ &= \frac{-4\cos 2a \cdot \sin^2 x}{(\cos 2x + \cos 2a)(1 + \cos 2a)} = \frac{-4\cos 2a}{(\cos 2x + \cos 2a)(1 + \cos 2a)} \cdot \sin^2 x. \end{aligned}$$

Do đó
$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4\cos 2a}{(\cos 2x + \cos 2a)(1 + \cos 2a)} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{-4\cos 2a}{(1 + \cos 2a)^2}.$$

Nhận xét. Như vậy, trong thí dụ trên chúng ta đã cần sử dụng những phép biến đổi lượng giác phức tạp hơn rất nhiều. Và câu hỏi thường được đặt ra ở đây là “Định hướng cách thực hiện trên như thế nào?”, để trả lời chúng ta sẽ bắt đầu như sau:

- Không thể thực hiện phép tách, bởi nó không mang lại kết quả gì khi ứng với $\tan(a+x)$ cần có $a+x$ và $\tan(a-x)$ cần có $a-x$. Và khi đó, sẽ nhận được dạng vô định.
- Nếu sử dụng các phép biến đổi thuần túy với hàm số tang sẽ khó có thể tạo ra được nhân tử chung $\tan^2 x$ cho TS, bởi sự có mặt của số hạng tự do $\tan^2 a$.
- Từ nhận định trên, chúng ta khẳng định chỉ có thể làm xuất hiện nhân tử chung là $\sin^2 x$ cho TS. Từ đó, dẫn đến việc biến đổi các hàm số tang về dạng sin và cos.

□

Ví dụ 15. Tính các giới hạn sau:

①
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2}.$$

②
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}.$$

Lời giải.

① Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - 8}{\left[\left(\sqrt[3]{4x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{4x} + 4\right](x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{\left(\sqrt[3]{4x}\right)^2 + 2\sqrt[3]{4x} + 4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

② Ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1})}{x \left[\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)(x+1)} + \sqrt[3]{(x+1)^2} \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1})}{\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)(x+1)} + \sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 16. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \text{ với } a > 0.$

② $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3} + x^3 - 3x}.$

Lời giải.

① Ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})(\sqrt{x^2 - a^2})} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x+a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x} + \sqrt{a})\sqrt{x+a}} + \frac{1}{\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.\end{aligned}$$

② Ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3} + x^3 - 3x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} + \frac{x^3-3x+2}{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{x^2-1}{(\sqrt{x^2+3}+2)(x-1)} + x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} + x-2} = -2.\end{aligned}$$

□

Như vậy, để tính được các giới hạn trên chúng ta cần thực hiện phép tách nó thành hai giới hạn nhỏ, từ đó mới có thể khử được dạng $\frac{0}{0}$.

Với giới hạn dạng:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{f(x)} - a}{g(x)}, \text{ trong đó } \sqrt[3]{f(x_0)} = a \text{ và } g(x_0) = 0$$

Thực hiện phép nhân liên hợp $\sqrt[3]{f^2(x)} + \sqrt[3]{f(x)} + a^2$, ta được:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{f(x)} - a}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a^3}{\left[\sqrt[3]{f^2(x)} + a\sqrt[3]{f(x)} + a^2 \right] g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x-x_0)f_1(x)}{\left[\sqrt[3]{f^2(x)} + a\sqrt[3]{f(x)} + a^2 \right] (x-x_0)g_1(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{\left[\sqrt[3]{f^2(x)} + a\sqrt[3]{f(x)} + a^2 \right] g_1(x)} = \frac{f_1(x_0)}{(2a^2 + a)g_1(x_0)}.\end{aligned}$$

Phương pháp được mở rộng cho giới hạn dạng:

1) Với giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{f(x)} + a}{g(x)}, \text{ trong đó } \sqrt[3]{f(x_0)} = -a \text{ và } g(x_0) = 0$$

Thực hiện phép nhân liên hợp $\sqrt[3]{f^2(x)} - a\sqrt[3]{f(x)} + a^2$.

2) Với các giới hạn:

- a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{[3]f(x)} \pm a}{\sqrt[3]{g(x)} \pm b}$, trong đó $\sqrt[3]{f(x_0)} = \mp a$ và $\sqrt[3]{g(x_0)} = \mp b$.
- b) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{[3]f(x)} \pm a}{\sqrt{g(x)} - b}$, trong đó $\sqrt[3]{f(x_0)} = \mp a$ và $\sqrt{g(x_0)} = b$.
- c) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{f_1(x)} \pm \sqrt[3]{f_2(x)}}{\sqrt{g_1(x)} - \sqrt{g_2(x)}}$, trong đó $\sqrt[3]{f_1(x_0)} = \mp \sqrt[3]{f_2(x_0)}$ và $\sqrt{g_1(x_0)} = \sqrt{g_2(x_0)}$.
- d) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{f_1(x)} \pm \sqrt[3]{f_2(x)}}{\sqrt[3]{g_1(x)} \pm \sqrt[3]{g_2(x)}}$, trong đó $\sqrt[3]{f_1(x_0)} = \mp \sqrt[3]{f_2(x_0)}$ và $\sqrt[3]{g_1(x_0)} = \mp \sqrt[3]{g_2(x_0)}$.
- Thực hiện phép nhân liên hợp cho cả tử số và mẫu số.

Ví dụ 17. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1}{\sqrt[3]{x-2} + x^2 - x + 1}$.

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$.

Lời giải.

① Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1}{\sqrt[3]{x-2} + x^2 - x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1}{x-1}}{\frac{\sqrt[3]{x-2} + x^2 - x + 1}{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} + \frac{x^2-3x+2}{x-1}}{\frac{\sqrt[3]{x-2}+1}{x-1} + \frac{x^2-x}{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x-2}{(\sqrt{2x-1}+1)(x-1)} + x-2}{\frac{2}{\left[\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{x-2} + 1\right](x-1)} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} + x-2}{\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{x-2} + 1} + x} = 0. \end{aligned}$$

② ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 2 + 2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2(\sqrt{1+x} - 1)}{x} + \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} + \frac{x}{x(4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{(8-x)^2})} \right] = \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 18. Tính các giới hạn:

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{x-1}$.

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{5x+1} - 1}{x}$.

Lời giải.

① Ta có thể chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1-1}{\left[\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{2x-1} + 1 \right] (x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{2x-1} + 1} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Cách 2: Đặt $t = \sqrt[3]{2x-1}$ ta được:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - 1}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t-1}{\frac{t^3+1}{2}-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2(t-1)}{t^3-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2}{t^2+t+1} = \frac{2}{3}.$$

② Đặt $t = \sqrt[5]{5x+1}$, ta được:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{5x+1} - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t-1}{\frac{t^5-1}{5}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5}{t^4+t^3+t^2+t+1} = 1.$$

□

Chúng ta đã được biết tới một giới hạn đặc biệt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Từ đó suy ra:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1.$$

Mở rộng:

$$\lim_{f(x) \rightarrow 0} \frac{\sin[f(x)]}{f(x)} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tan[f(x)]}{f(x)} = 1 \text{ với } f(x_0) = 0.$$

Tuy nhiên, việc áp dụng chúng để tìm giới hạn của hàm số trong nhiều trường hợp cần thực hiện các phép biến đổi phù hợp.

Ví dụ 19. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan 2x}.$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x}.$

Lời giải.

① Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\tan 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2x}{\tan 2x} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

② Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin 2x}{2x} \cdot 2 \cos x \right) = 4.$$

□

Trong ví dụ trên:

— Ở câu a), bằng việc thêm vào x chúng ta nhận được hai dạng giới hạn cơ bản và cần lưu ý $\tan 2x$ sẽ phải tương ứng với $2x$.

— Ở câu b), chúng ta cần sử dụng một phép biến đổi lượng giác để chuyển $1 - \cos^2 2x$ thành $\sin^2 2x$. Ngoài ra, cũng có thể trình bày như sau:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2} \cdot \frac{4x}{\sin x} \right) = 4.$$

Ví dụ 20. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \tan 3x}{x}.$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}.$

Lời giải.

① Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \tan 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} + \frac{\tan 3x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin 2x}{2x} + \frac{3 \tan 3x}{3x} \right) = 5.$$

② Ta có:

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \frac{\sin x (1 - \cos x)}{\cos x} = \frac{2 \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x}$$

Do đó:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

□

Trong ví dụ trên:

— Ở câu a), chúng ta thực hiện phép tách để nhận được **tổng** của hai giới hạn cơ bản.

— Ở câu b), chúng ta không thể thực hiện phép tách, bởi nếu làm như vậy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x^3} - \frac{\sin x}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} - \frac{\sin x}{x} \right) \frac{1}{x^2} = (1 - 1) \cdot \infty = 0 \cdot \infty$$

Hoặc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x^2} \right) = 1 \cdot \infty - 1 \cdot \infty = \infty - \infty.$$

Cả hai đều những dạng vô định và chúng ta không thể kết luận được gì.

Ví dụ 21. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 3x \cdot \cos 5x}{x^2}.$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos x \right)}{\sin^2 \frac{x}{2}}.$

Lời giải.

① Ta có:

$$\begin{aligned} \cos 4x - \cos 3x \cdot \cos 5x &= \cos 4x - \frac{1}{2} (\cos 8x + \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2} (2 \cos 4x - \cos 8x - \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2} [(1 - \cos 8x) + (1 - \cos 2x) - 2(1 - \cos 4x)] \\ &= \sin^2 4x + \sin^2 x - 2 \sin^2 2x. \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 3x \cdot \cos 5x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x + \sin^2 x - 2 \sin^2 2x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 4x}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{16 \sin^2 4x}{(4x)^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{8 \sin^2 2x}{(2x)^2} \right] = 16 + 1 - 8 = 9. \end{aligned}$$

② Ta có:

$$\frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos x \right)}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cos x \right)}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \left[\frac{\pi}{2} (1 - \cos x) \right]}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \pi \frac{\sin \left(\pi \sin^2 \frac{x}{2} \right)}{\pi \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Do đó:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos x \right)}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \sin \left(\pi \sin^2 \frac{x}{2} \right)}{\pi \sin^2 \frac{x}{2}} = \pi.$$

□

Trong ví dụ trên:

- Ở câu a), chúng ta cần sử dụng phép biến đổi tích thành tổng. Và từ đó, với việc định hướng biến đổi tử số thành tổng của các hàm số sin chúng ta đã sử dụng công thức góc nhân đôi của hàm số cos (cụ thể $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$).
- Ở câu b), các em học sinh cần có kinh nghiệm về hàm số lượng giác lồng nhau.

Ví dụ 22. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(a+x)\tan(a-x) - \tan^2 a}{x^2}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \tan(a+x)\tan(a-x) - \tan^2 a &= \frac{\sin(a+x)\sin(a-x)}{\cos(a+x)\cos(a-x)} - \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} \\ &= \frac{\cos 2x - \cos 2a}{\cos 2x + \cos 2a} - \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a} \\ &= \frac{-2\cos 2a(1 - \cos 2x)}{(\cos 2x + \cos 2a)(1 + \cos 2a)} \\ &= \frac{-4\cos 2a}{(\cos 2x + \cos 2a)(1 + \cos 2a)} \cdot \sin^2 x. \end{aligned}$$

Do đó:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4\cos 2a}{(\cos 2x + \cos 2a)(1 + \cos 2a)} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} = \frac{-4\cos 2a}{(1 + \cos 2a)^2}.$$

□

Như vậy, trong thí dụ trên chúng ta đã cần sử dụng những phép biến đổi lượng giác phức tạp hơn rất nhiều. Và câu hỏi thường được đặt ra ở đây là "*Định hướng cách thực hiện trên như thế nào?*", để trả lời chúng ta sẽ bắt đầu như sau:

- Không thể thực hiện phép tách, bởi nó không mang lại kết quả gì khi ứng với $\tan(a+x)$ cần có $a+x$ và $\tan(a-x)$ cần có $a-x$. Và khi đó, sẽ nhận được dạng vô định $(\infty - \infty)$.
- Nếu sử dụng các phép biến đổi thuần túy với hàm số tan sẽ khó có thể tạo ra được nhân tử chung $\tan 2x$ cho tử số, bởi sự có mặt của số hạng tự do $\tan^2 a$.
- Từ nhận định trên, chúng ta khẳng định chỉ có thể làm xuất hiện nhân tử chung là $\sin^2 x$ cho tử số. Từ đó, dẫn đến việc biến đổi các hàm số *tan* về dạng sin và cos.

Ví dụ 23. Tính các giới hạn

① $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x).$

② $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x - 1).$

Lời giải.

① Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{2x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{|x| \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{-x \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - 1} = +\infty. \end{aligned}$$

② Ta có:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x - 1) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - (x - 1)^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1} - x + 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x + 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{1}{x}} = -1.
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 24. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4}$. Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, từ đó nhận xét về sự tồn tại của giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Lời giải.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 4}} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 4}} = 2$$

Vậy, ta thấy $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, suy ra $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ không tồn tại.

□

Ví dụ 25. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x - 2} + 1}.$

② $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + x^2 + x + 1}{x + 1}$

Lời giải.

① Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x - 2} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[\sqrt[3]{(x - 2)^2} - \sqrt[3]{x - 2} + 1](x - 1)}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{(x - 2)^2} - \sqrt[3]{x - 2} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}.$

② Ta có:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + x^2 + x + 1}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1} + \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x + 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)(x + 1)} + \lim_{x \rightarrow -1} x \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} - 1 = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 26. Tính các giới hạn sau:

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{2x - 1} + \sqrt[5]{x - 2}}{x - 1};$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2004) \sqrt[7]{1 - 2x} - 2004}{x}.$

Lời giải.

① Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{2x-1} + \sqrt[5]{x-2}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{2x-1} - 1 + \sqrt[5]{x-2} + 1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{2x-1} - 1}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x-2} + 1}{x-1}.\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt[4]{2x-1} \\ v = \sqrt[5]{x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \frac{u^4-1}{2} \\ x-1 = v^5-1. \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \frac{\sqrt[4]{2x-1} - 1}{x-1} = \frac{2(u-1)}{u^4-1} = \frac{2}{(u+1)(u^2+1)} \text{ và } x \rightarrow 1 \Leftrightarrow u \rightarrow 1.$$

$$\frac{\sqrt[5]{x-2} + 1}{x-1} = \frac{v+1}{v^5-1} = \frac{1}{v^4-v^3+v^2-v+1} \text{ và } x \rightarrow 1 \Leftrightarrow v \rightarrow -1.$$

$$\text{Vậy ta được } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{2x-1} + \sqrt[5]{x-2}}{x-1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{2}{(u+1)(u^2+1)} + \lim_{v \rightarrow -1} \frac{1}{v^4-v^3+v^2-v+1} = \frac{7}{10}.$$

$$\begin{aligned}\text{② Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2004) \sqrt[7]{1-2x} - 2004}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2004) \sqrt[7]{1-2x} - x^2 - 2004 + x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(x^2 + 2004) \frac{\sqrt[7]{1-2x} - 1}{x} + x \right] = -\frac{4008}{7}.\end{aligned}$$

Nhận xét. Trong ví dụ b) chúng ta đã thêm bớt x^2 để làm xuất hiện đa thức $P(x) = x^2 + 2004$ ở tử thức, từ đó làm xuất hiện dạng: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[8]{1+ax} - 1}{x} = \frac{a}{n}$. Đây là điểm mấu chốt của lời giải.

□

$$\text{Ví dụ 27. Tính giới hạn: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt[3]{1+\frac{x}{2}} \cdot \sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{4+x} - \sqrt[3]{8-x} - \sqrt[4]{1+x}}.$$

Lời giải.

Gọi tử thức là T ta có

$$\begin{aligned}T &= \sqrt{1+x} \sqrt[3]{1+\frac{x}{2}} \cdot \sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[3]{1+\frac{x}{2}} \cdot \sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} + \\ &+ \sqrt[3]{1+\frac{x}{2}} \cdot \sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} + \sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} - 1 + 1 - \sqrt[4]{1-x} \\ &= \sqrt[3]{1+\frac{x}{2}} \cdot \sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} (\sqrt{1+x} - 1) + \sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} \\ &+ \left(\sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} - 1 \right) - (\sqrt[4]{1-x} - 1).\end{aligned}$$

Gọi mẫu thức là M ta có:

$$\begin{aligned}M &= \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{1+\frac{x}{4}} - 2 \sqrt[3]{1-\frac{x}{8}} - \sqrt[4]{1+x} \\ &= 3 \left(\sqrt{1+\frac{x}{4}} - 1 \right) - 2 \left(\sqrt[3]{1-\frac{x}{8}} - 1 \right) - (\sqrt[4]{1+x} - 1).\end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt[3]{1+\frac{x}{2}} \cdot \sqrt[4]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{4+x} - \sqrt[3]{8-x} - \sqrt[4]{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{T}{M} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{M}{x}} = \frac{1}{5} = \frac{24}{5}.$$

□

Ví dụ 28. Tính các giới hạn:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{\sin(x-1)};$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{\tan(x-1)}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{\sin(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2x + 2)}{\sin(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 2}{\frac{\sin(x-1)}{x-1}} = 5.$$

$$\textcircled{2} \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{\tan(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{\tan(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{\frac{\tan(x-1)}{x-1}} = -2.$$

□

Ví dụ 29. Tính các giới hạn: $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{98}{83} \left(\frac{1 - \cos 3x \cos 5x \cos 7x}{\sin^2 7x} \right).$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 1 - \cos 3x \cos 5x \cos 7x &= 1 - \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) \cos 7x \\ &= 1 - \frac{1}{2}(\cos 8x \cos 7x + \cos 2x \cos 7x) \\ &= 1 - \frac{1}{4}(\cos 15x + \cos x + \cos 9x + \cos 5x) \\ &= \frac{1}{4}[(1 - \cos 15x) + (1 - \cos x) + (1 - \cos 9x) + (1 - \cos 5x)] \\ &= \frac{1}{4} \left(2 \sin^2 \frac{15x}{2} + 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{9x}{2} + 2 \sin^2 \frac{5x}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin^2 \frac{15x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{9x}{2} + \sin^2 \frac{5x}{2} \right). \end{aligned}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{98}{83} \cdot \frac{1}{2} \left(\sin^2 \frac{15x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{9x}{2} + \sin^2 \frac{5x}{2} \right) \cdot \frac{1}{\sin^2 7x} \\ &= \frac{98}{83} \cdot \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2 \frac{15x}{2}}{\left(\frac{15x}{2} \right)^2} \cdot \left(\frac{15}{2} \right)^2 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2} \right)^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin^2 \frac{9x}{2}}{\left(\frac{9x}{2} \right)^2} \cdot \left(\frac{9}{2} \right)^2 + \frac{\sin^2 \frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2} \right)^2} \cdot \left(\frac{5}{2} \right)^2 \right] \cdot \frac{(7x)^2}{\sin^2 7x} \cdot \frac{1}{(7)^2} \\ &= \frac{98}{83} \cdot \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{15}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{9}{2} \right)^2 + \left(\frac{5}{2} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{(7)^2} = 1. \end{aligned}$$

Nhận xét. Như vậy, trong thí dụ trên thực chất chúng ta chỉ cần sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng và công thức góc nhận đôi của cos. Tuy nhiên, các em học sinh cần thận trọng trong tính toán.

□

Ví dụ 30. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}};$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos \sqrt{x})(1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2} (1 + \sqrt{\cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}} \right] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\tan x \sin^2(x/2)}{x} \cdot \frac{1}{(x/2)^2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x}} \right] = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Nhận xét. Như vậy, trong bài giải của ví dụ trên chúng ta cần thực hiện phép nhân liên hợp trước khi sử dụng các phép biến đổi lượng giác để chuyển chúng về dạng cơ bản. Với giới hạn dạng: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) - f_2(x)}{g(x)}$, trong đó $f_1(x_0) = f_2(x_0) = c$ và $g(x_0) = 0$.

Ta lựa chọn một trong hai cách:

Cách 1. (Chèn hằng số vãng) Ta thực hiện việc thêm hằng số vãng c (với $f_1(x_0) = f_2(x_0) = c$) vào biểu thức của giới hạn, ta được: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) - c + c - f_2(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) - c}{g(x)} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - f_2(x)}{g(x)}$.

Cách 2. (Chèn hàm số vãng) Ta thực hiện việc thêm hàm số vãng $f(x)$ (với $f(x_0) = c$) vào biểu thức của giới hạn, ta được: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) - f(x)}{g(x)} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f_2(x)}{g(x)}$.

□

$$\textbf{Ví dụ 31.} \text{ Tính giới hạn } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 2 + 2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2(\sqrt{1+x} - 1)}{x} + \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} + \frac{x}{x[4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{(8-x)^2}]} \right\} = \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 32. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2x}{\tan(x-1)};$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2x}{\tan(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4x^2 + x + 3}{(\sqrt{x+3} + 2x) \tan(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4x - 3}{\sqrt{x+3} + 2x} \cdot \frac{x-1}{\tan(x-1)} = -\frac{7}{4}.$$

$\textcircled{2}$ Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1. Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2 - \cos^2 x}{(\sqrt{1+x^2} + \cos x) x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 x}{(\sqrt{1+x^2} + \cos x) x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + \cos x} \cdot \left(1 + \frac{\sin^2 x}{x^2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Cách 2: Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sqrt{1+x^2} + 1} + \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} \right] = 1.$$

□

Ví dụ 33. Tính các giới hạn sau:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}};$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\frac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}}.$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{(x-1)(x+2)^2}{x^3+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2}{x^2}} = 1.$$

$$\textcircled{2} \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\frac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^2(2x^3+x)}{x^5-x^2+3}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}}} = -\sqrt{2}.$$

□

Ví dụ 34. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \tan x$.

Lời giải.

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$ suy ra $x = \frac{\pi}{2} - t$. Nhận xét khi $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ thì $t \rightarrow 0$.

Vậy, ta được $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \tan x = \lim_{t \rightarrow 0} \tan \left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \cot t = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \frac{\cos t}{\sin t} = 1$.

□

Ví dụ 35. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1}$.

Lời giải.

Ta biến đổi: $\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1} = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{2x+1}$, đặt $\frac{1}{t} = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow x = t - 1$.

Nhận xét khi $x \rightarrow \infty$ thì $t \rightarrow \infty$.

Vậy, ta được: $\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1} = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2(t-1)+1} = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{2t-1}{t}}$.

Do đó: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{2x+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{2t-1}{t}} = e^2$. □

Ví dụ 36. Xét tính liên tục của hàm số sau trên toàn trục số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ ax + 1 & \text{khi } x \geq 1. \end{cases}$$

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

— Khi $x < 1$, ta có $f(x) = x^2 + x$ nên hàm số liên tục với $x < 1$.

— Khi $x > 1$, ta có $f(x) = ax + 1$ nên hàm số liên tục với $x > 1$.

— Khi $x = 1$, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + 1) = a + 1.$$

$$f(1) = a + 1.$$

Do đó:

– Nếu $a = 1$ thì $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 2$, do đó hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

– Nếu $a \neq 1$ thì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(1) = 2$, do đó hàm số gián đoạn tại $x_0 = 1$.

Kết luận:

— Nếu $a = 1$ thì hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

— Nếu $a \neq 1$ thì hàm số liên tục trên $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ và gián đoạn tại $x_0 = 1$. □

Ví dụ 37. Chứng minh rằng với mọi m phương trình $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = m$. (1) luôn có nghiệm.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Biến đổi phương trình về dạng: $\sin x - \cos x - m \sin x \cdot \cos x = 0$.

Xét hàm số $f(x) = \sin x - \cos x - m \sin x \cdot \cos x$ liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $f(0) = -1 < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0 \Rightarrow f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) luôn có 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. □

Ví dụ 38. Xét dấu hàm số $f(x) = 2 + \cos x - 2 \tan \frac{x}{2}$ trên $(0; \pi)$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; \pi)$.

Giải phương trình $f(x) = 0$ với ẩn phụ $t = \tan \frac{x}{2}$, suy ra $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, ta có:

$$2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 2t = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2+t+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

Như vậy trên các khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$ và $(\frac{\pi}{2}; \pi)$ hàm $f(x)$ không triệt tiêu, do đó:

- Vì $f(\frac{\pi}{3}) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$ nên $f(x) > 0$ với $\forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$.
- Vì $f(\frac{2\pi}{3}) = 2 - \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} < 0$ nên $f(x) < 0$ với $\forall x \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$.

□

Dạng 8. Giới hạn dạng $1^\infty, 0 \cdot \infty, \infty^0$.

Phương pháp áp dụng:

- ① Đối với dạng $0 \cdot \infty$ và ∞^0 ta chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Sử dụng phương pháp biến đổi để tận dụng các dạng giới hạn cơ bản.

Cách 2: Sử dụng nguyên lý kẹp giữa với các bước:

Bước 1: Chọn hai hàm số $g(x)$, $h(x)$ thỏa mãn:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Bước 2: Khẳng định: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$. (hoặc $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = L$).

Bước 3: Vậy, ta được: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ (hoặc $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$).

- ② Đối với dạng 1^∞ cần nhớ các giới hạn cơ bản sau: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Ví dụ 1. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x+1)(x^2 - x + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x^2 - x + 1) \sqrt{\frac{x(x+1)}{x-1}} = 0. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 3x)^{\frac{1}{x}}$.

Lời giải.

Ta biến đổi:

$$(1 + \sin 3x)^{\frac{1}{x}} = (1 + \sin 3x)^{\frac{1}{\sin 3x} \cdot \frac{\sin 3x}{x}} = (1 + \sin 3x)^{\frac{1}{\sin 3x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3}.$$

Do đó:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 3x)^{\frac{1}{\sin 3x} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3} = e^3.$$

□

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x^2 + 2)$ bằng

- A. 0. B. $-\infty$. C. $+\infty$. D. 2.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x^2 + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} \right) \right].$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = -1$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x^2 + 2) = -\infty$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 2. Cho $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$. Tính giới hạn đó.

- A. $+\infty$. B. 1. C. 0. D. $-\infty$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{x(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{x(x-2)}{x+2}} = 0.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 3. Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + ax + 3x}) = -2$. Tính giá trị của a .

- A. -6. B. 12. C. 6. D. -12.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + ax + 3x}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{\sqrt{9x^2 + ax} - 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{x \left(-\sqrt{9 + \frac{a}{x}} - 3 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{-\sqrt{9 + \frac{a}{x}} - 3} = -\frac{a}{6}. \end{aligned}$$

Suy ra $-\frac{a}{6} = -2 \Rightarrow a = 12$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 4. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\frac{x^{2017} - 1}{x^{2019}}}$ ta được kết quả là

- A. $-\infty$. B. 1. C. -1. D. 0.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\frac{x^{2017} - 1}{x^{2019}}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\frac{1}{x^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^{2017}} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{x^{2017}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{x^{2017}}} \right) = -1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 5. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x}$ bằng

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $+\infty$. D. 0.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)}{x(\sqrt{1-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x} + 1} = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 6. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{8 - x^3}$.

A. -2.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $-\infty$.

D. $-\frac{8}{3}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{8 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x^2+4)}{-x^2-2x-4} = -\frac{8}{3}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x^2 + 2)$ bằng

A. 0.

B. $-\infty$.

C. $+\infty$.

D. 2.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x^2 + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \cdot \left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} \right) \right].$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = -1$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x^2 + 2) = -\infty$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 8. $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ bằng

A. $+\infty$.

B. 1.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{x(x-2)^2}{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{x(x-2)}{x+2}} = 0.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + ax} + 3x) = -2$. Khi đó giá trị của a bằng

A. -6.

B. 12.

C. 6.

D. -12.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + ax} + 3x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{\sqrt{9x^2 + ax} - 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{-\left(\sqrt{9 + \frac{a}{x}} + 3\right)} \\ &= \frac{a}{-6}. \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{a}{-6} = -2 \Leftrightarrow a = 12$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 10. Biết $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + bx + c}{x-3} = 8$, ($b, c \in \mathbb{R}$). Tính $P = b + c$.

A. $P = 13$.

B. $P = -11$.

C. $P = -12$.

D. $P = -13$.

Lời giải.

$$\text{Ta thấy } \frac{x^2 + bx + c}{x-3} = x + b + 3 + \frac{3b + c + 9}{x-3}.$$

$$\text{Ta được } \begin{cases} 3b + c + 9 = 0 \\ b + 6 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -15 \end{cases} \Rightarrow b + c = -13.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 11. Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng $+\infty$?

A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{x+1}$.

B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+5}{1-2x}$.

C. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2-2x+1}$.

D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|1-x|}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x-1|} = +\infty.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 12. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ bằng

A. 1.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. $\frac{3}{4}$.D. $-\frac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{x + 2} = \frac{3}{4}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 14. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 2}$.

A. $-\infty$.

B. 0.

C. -1.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{2}{x}} = -1$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 15. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 4}$ bằng

A. $+\infty$.B. $\frac{1}{2}$.C. $-\frac{1}{2}$.D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)(x - 2)}{2(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1}{2} = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 16. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2x)$ bằng

A. $+\infty$.

B. 1.

C. $-\infty$.

D. -1.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(1 + \frac{2}{x^2} \right) \right] = +\infty$.

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2} \right) = 1$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 17. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 12x + 35}{x - 5}$ bằng

A. $+\infty$.B. $\frac{2}{5}$.

C. -2.

D. 5.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 12x + 35}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x - 7)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x - 7) = -2$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 18. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 2}{x - 1}$ bằng

A. $-\frac{1}{2}$.B. $-\infty$.C. $+\infty$.D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 2) = 3 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0$ và $x - 1 < 0$ khi $x \rightarrow 1^-$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 2}{x - 1} = -\infty$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 19. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1}$ bằng

A. $+\infty$.

B. 1.

C. $-\infty$.

D. 0.

Lời giải.

Đặt $f(x) = x + 1$, $g(x) = x - 1$. Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 0$ và $g(x) > 0$ khi $x \rightarrow 1^+$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 20. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 8x + 1} + 2x)$ bằng

A. -2.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. 0.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 8x + 1} + 2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{8x + 1}{\sqrt{4x^2 + 8x + 1} - 2x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{8 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{4 + \frac{8}{x} + \frac{1}{x^2}} - 2} \right) \\ &= -2 \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 21. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3}$ bằng

A. 0.

B. $-\infty$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - |x|\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{2x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 22. Cho giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1 - \sqrt{5x+1}}{x - \sqrt{4x-3}} = \frac{a}{b}$ (phân số tối giản). Giá trị của $T = 2a - b$ là

A. $T = \frac{1}{b}$.

B. $T = -1$.

C. $T = 10$.

D. $T = \frac{9}{8}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1 - \sqrt{5x+1}}{x - \sqrt{4x-3}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 3x)(x + \sqrt{4x-3})}{(x^2 - 4x + 3)(x + 1 + \sqrt{5x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x + \sqrt{4x-3})}{(x-1)(x + 1 + \sqrt{5x+1})} \\ &= \frac{3(3+3)}{2(4+4)} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

Khi đó $a = 9$, $b = 8$. Vậy $T = 2a - b = 10$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 23. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & \text{khi } x > 2 \\ 2x^2 - x + 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ có giới hạn tại $x = 2$.

A. 1.

B. -1.

C. 2.

D. -2.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax + 1) = 2a + 5$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2 - x + 1) = 7$.

Hàm số có giới hạn tại $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow 2a + 5 = 7 \Leftrightarrow a = 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 24. Kết quả của $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x + 1}{x - 1}$ bằng

A. $+\infty$.B. $-\infty$.C. $\frac{2}{3}$.D. $\frac{1}{3}$.**Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x + 1}{x - 1} = -\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x + 1) = -1 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0 \\ x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0. \end{cases}$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 25. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 3}{x + 2}$ bằng

A. $\frac{-3}{2}$.B. -3 .C. -1 .D. 1 .**Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{-1 + 0}{1 + 0} = -1$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 26. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{1 - 2x}$.

A. $L = -\frac{3}{2}$.B. $L = 3$.C. $L = \frac{3}{2}$.D. $L = -\frac{1}{2}$.**Lời giải.**

Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 2} = -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 27. Cho giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{a}{b}$ trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a^2 + b^2$.

A. $S = 20$.B. $S = 17$.C. $S = 10$.D. $S = 25$.**Lời giải.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{1}{4}$. Suy ra $S = 17$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 28. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2}$.

A. $L = \frac{1}{4}$.B. $L = -\frac{1}{2}$.C. $L = -\frac{1}{4}$.D. $L = \frac{1}{2}$.**Lời giải.**

Ta có

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(2x - 1)}{(1 - x)(1 + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(2x - 1)}{1 + x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 29. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

A. 2.

B. 1.

C. -2.

D. -1.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 30. Cho biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax^2 + 1} - bx - 2}{x^3 - 3x + 2}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có kết quả là một số thực. Giá trị của biểu thức $a^2 + b^2$ bằng

A. $6 + 5\sqrt{3}$.

B. $\frac{45}{16}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. $87 - 48\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax^2 + 1} - bx - 2}{x^3 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + 1 - (bx + 2)^2}{(x^3 - 3x + 2)(\sqrt{ax^2 + 1} + bx + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(a - b^2)x^2 - 4bx - 3}{(x - 1)^2(x + 2)(\sqrt{ax^2 + 1} + bx + 2)}. \end{aligned}$$

Kết quả giới hạn là một số thực nên phương trình $(a - b^2)x^2 - 4bx - 3 = 0$ có nghiệm kép là $x = 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} \begin{cases} \Delta' = 0 \\ a - b^2 - 4b - 3 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 + 3a - 3b^2 = 0 \\ a - b^2 - 4b - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 3a = 0 \\ a = b^2 + 4b + 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 3(b^2 + 4b + 3) = 0 \\ a = b^2 + 4b + 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 + 12b + 9 = 0 \\ a = b^2 + 4b + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ a = -\frac{3}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $a^2 + b^2 = \frac{45}{16}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 31. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

A. 1.

B. -1.

C. 2.

D. -2.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 32. Tìm giới hạn $M = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 - x})$.

A. $M = -\frac{3}{2}$.

B. $M = \frac{1}{2}$.

C. $M = \frac{3}{2}$.

D. $M = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} M &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 - x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x^2 - x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{|x| \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 33. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}$ bằng $\frac{a}{b}$ (phân số tối giản). Giá trị của $a-b$ là

- A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{9}{8}$. C. 1. D. -1.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2-3x)(x+\sqrt{4x-3})}{(x^2-4x+3)(x+1+\sqrt{5x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+\sqrt{4x-3})}{(x-1)(x+1+\sqrt{5x+1})} = \frac{9}{8}.$$

$$\Rightarrow a=9, b=8 \Rightarrow a-b=1.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 34. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2018}\sqrt{4x^2+1}}{(2x+1)^{2019}}$.

- A. 0. B. $\frac{1}{2^{2018}}$. C. $\frac{1}{2^{2019}}$. D. $\frac{1}{2^{2017}}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2018}\sqrt{4x^2+1}}{(2x+1)^{2019}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{2019}\sqrt{4+\frac{1}{x}}}{x^{2019}\left(2+\frac{1}{x}\right)^{2019}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^{2019}} = \frac{2}{2^{2019}} = \frac{1}{2^{2018}}.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 35. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a-b$ là

- A. 1. B. -1. C. $\frac{9}{8}$. D. $\frac{1}{9}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)^2 - (5x+1)}{x+1+\sqrt{5x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - (4x-3)}{x+1+\sqrt{5x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+\sqrt{4x-3})(x-3)x}{(x+1+\sqrt{5x+1})(x-3)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+\sqrt{4x-3})}{(x+1+\sqrt{5x+1})(x-1)} = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Vậy $a=9, b=8$, suy ra $a-b=1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 36. Trong bốn giới hạn sau, giới hạn nào bằng $-\infty$?

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+4}{x-2}$. B. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x+4}{x-2}$. C. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3x+4}{x-2}$. D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+4}{x-2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x+4}{x-2} = -3, \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-3x+4}{x-2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3x+4}{x-2} = -\infty.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 37. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+3}{x+1}$ bằng

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải.

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+3}{x+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 38. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x+3}$ bằng

- A. $-\infty$. B. -1. C. $+\infty$. D. 1.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{3}{x^2}}}{1 + \frac{3}{x}} = -1.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 39. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$.

A. 2.**B.** $\frac{-1}{2}$.**C.** $\frac{1}{2}$.**D.** 1.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 40. Biết $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5 - x^2}}{\sqrt{x^2 + 16} - 4} = \frac{a}{\sqrt{b}}$, trong đó a là số nguyên, b là số nguyên tố. Giá trị của biểu thức $a + 2b$ bằng

A. 3.**B.** 8.**C.** 13.**D.** 14.**Lời giải.**

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5 - x^2}}{\sqrt{x^2 + 16} - 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\sqrt{x^2 + 16} + 4)}{x^2 (\sqrt{5} + \sqrt{5 - x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 16} + 4}{\sqrt{5} + \sqrt{5 - x^2}} = \frac{8}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Suy ra $a = 4$, $b = 5$. Vậy $a + 2b = 4 + 2 \cdot 5 = 14$.Chọn đáp án **(D)** □

Câu 41. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) \cdots (1 + 2018x) - 1}{x}$.

A. $2018 \cdot 2019$.**B.** 2019.**C.** 2018.**D.** $1009 \cdot 2019$.**Lời giải.**Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp, với mọi $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ thì

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) \cdots (1 + nx) - 1}{x} = \frac{n(n + 1)}{2}. \quad (1)$$

* Với $n = 1$ thì $VT = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ và $VP = \frac{1(1 + 1)}{2} = 1$.

Vậy $VT = VP$ nên (1) đúng với $n = 1$.* Giả sử (1) đúng với $n = k$, $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, có nghĩa là

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) \cdots (1 + kx) - 1}{x} = \frac{k(k + 1)}{2}.$$

* Xét $n = k + 1$, ta có

$$\begin{aligned} VT &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) \cdots (1 + kx)(1 + kx + x) - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) \cdots (1 + kx) - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) \cdots (x + kx)}{x} \\ &= \frac{k(k + 1)}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) \cdots (1 + k) \\ &= \frac{k(k + 1)}{2} + k + 1 = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = VP. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$, $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$.Bây giờ ta áp dụng với $n = 2018$ thì

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)(1 + 2x)(1 + 3x) \cdots (1 + 2018x) - 1}{x} = \frac{2018(2018 + 1)}{2} = 1009 \cdot 2019.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 42. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $+\infty$.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.

Ta có $\frac{x-1}{x} \leq \frac{x+\sin x}{x} \leq \frac{x+1}{x}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sin x}{x} = 1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 43. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+3}{x+1}$ bằng

A. 1.

B. $+\infty$.

C. -2.

D. $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+3}{x+1} = -\infty$ do $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x+3) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0 \\ x+1 < 0 \quad \forall x < -1. \end{cases}$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 44. Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x^2+x+4}$.

A. $-\frac{1}{6}$.

B. $-\infty$.

C. $+\infty$.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x^2+x+4} = \frac{-2+1}{(-2)^2-2+4} = -\frac{1}{6}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 45. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3}$ bằng

A. $-\infty$.

B. 0.

C. $+\infty$.

D. 1.

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3} = 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 46. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-6}{x+2}$ bằng

A. 2.

B. -2.

C. 3.

D. -3.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-6}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{6}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{2-0}{1+0} = 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 47. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-3}$ bằng

A. 2.

B. $-\frac{1}{3}$.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 48. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3}$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.

B. 1.

C. 2.

D. -3.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = 1.$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 49. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-3}$ bằng

A. $-\frac{2}{3}.$

B. 1.

C. 2.

D. $-\frac{1}{3}.$

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 50. Giá trị $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3}$ bằng

A. $L = -\infty.$

B. $L = 0.$

C. $L = +\infty.$

D. $L = 1.$

Lời giải.

Ta có $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{0}{6} = 0.$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 51. Giá trị $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3}$ bằng

A. $L = -\infty.$

B. $L = 0.$

C. $L = +\infty.$

D. $L = 1.$

Lời giải.

Ta có $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{0}{6} = 0.$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 52. Biểu thức $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$ bằng

A. 0.

B. $\frac{2}{\pi}.$

C. $\frac{\pi}{2}.$

D. 1.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 53. Giá trị $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1}$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. -2.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2.$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 54. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3x+5}{2-3x^2}.$

A. $\frac{1}{2}.$

B. $+\infty.$

C. $-\frac{1}{3}.$

D. $-\frac{2}{3}.$

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3x+5}{2-3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{\frac{2}{x^2} - 3} = -\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 55. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4}.$

A. 1.

B. 0.

C. $-\frac{3}{4}.$

D. $\frac{3}{4}.$

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 56. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

A. 0.

B. $-\infty$.

C. -1.

D. 1.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1} = -1.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 57. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$\frac{(2m^2 - 7m + 3)x^3 + x^2 - (m-1)x + 2}{(2-m)x^2 + 2x - 3} \leq 0$$

đúng với mọi x thuộc tập xác định của bất phương trình đó. Số phần tử của S bằng

A. 13.

B. 19.

C. 1.

D. 5.

Lời giải.

Giả sử m là số thực thỏa mãn yêu cầu bài toán.

— Với $m = 2$ bất phương trình trở thành $\frac{-3x^3 + x^2 - x + 2}{2x - 3} \leq 0$, bất phương trình không đúng với $x = 1$ nên không thỏa mãn ycbt.

— Với $m = 3$ bất phương trình trở thành $\frac{x^2 - 2x + 2}{-x^2 + 2x - 3} \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$ nên thỏa mãn ycbt.

— Với $m = \frac{1}{2}$ bất phương trình trở thành $\frac{x^2 + \frac{1}{2}x + 2}{\frac{3}{2}x^2 + 2x - 3} \leq 0$, bất phương trình không đúng với $x = 1$ nên không thỏa mãn ycbt.

— Với $m \neq 2, m \neq 3$ và $m \neq \frac{1}{2}$, đặt $f(x) = \frac{(2m^2 - 7m + 3)x^3 + x^2 - (m-1)x + 2}{(2-m)x^2 + 2x - 3}$ và đặt $A = \frac{2m^2 - 7m + 3}{2-m}$ thì $A \neq 0$.

Theo giả thiết, $f(x) \leq 0$ với mọi x thuộc tập xác định của $f(x)$. (1)

– Nếu $A < 0$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ mâu thuẫn với (1).

– Nếu $A > 0$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ mâu thuẫn với (1).

Vậy $S = \{3\}$, nên số phần tử của S là 1.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 58. Tính $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^3+3}$.

A. $L = 1$.B. $L = 0$.C. $L = 3$.D. $L = 2$.**Lời giải.**

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^3+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{3}{n^3}} = 0$. Vậy $L = 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 59. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{3x-2}{x+1} = -\infty.$

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = +\infty.$

C. $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{3x-2}{x+1} = -\infty.$

D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = -\frac{3}{2}.$

Lời giải.

— Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1 - (x - 2)^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 3}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 - \frac{3}{x}\right)}{x \left(-\sqrt{x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{2}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{3}{x}}{-\sqrt{x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{2}{x}} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

— Ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{3x-2}{x+1} = +\infty$

vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (3x-2) = -5 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x+1) = 0 \text{ và } x+1 < 0 \text{ khi } x \rightarrow (-1)^-. \end{cases}$

— Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty.$

— Ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{3x-2}{x+1} = -\infty.$

vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (3x-2) = -5 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+1) = 0 \text{ và } x+1 > 0 \text{ khi } x \rightarrow (-1)^+. \end{cases}$

Vậy $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{3x-2}{x+1} = -\infty$ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 60. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 16}{x - 2} = 12$. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{5f(x) - 16} - 4}{x^2 + 2x - 8}.$

A. $\frac{1}{5}.$

B. $\frac{5}{2}.$

C. $\frac{5}{12}.$

D. $\frac{1}{4}.$

Lời giải.

Do $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 16}{x - 2} = 12$ nên ta có $f(2) - 16 = 0$ hay $f(2) = 16$.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{5f(x) - 16} - 4}{x^2 + 2x - 8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(f(x) - 16)}{(x - 2)(x + 4) \left(\sqrt[3]{(5f(x) - 16)^2} + 4\sqrt[3]{5f(x) - 16} + 16 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 16}{x - 2} \cdot \frac{5}{(x + 4) \left(\sqrt[3]{(5f(x) - 16)^2} + 4\sqrt[3]{5f(x) - 16} + 16 \right)} \\ &= 12 \cdot \frac{5}{6 \cdot 48} = \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 61. Cho biết $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+ax^2} - bx - 2}{4x^3 - 3x + 1} = c$, với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tập nghiệm của phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$

trên $\mathbb{R}$ có số phần tử là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+ax^2} - bx - 2}{4x^3 - 3x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 + ax^2 - (bx + 2)^2}{(4x^3 - 3x + 1)(\sqrt{1+ax^2} + bx + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(a - b^2)x^2 - 4bx - 3}{(2x - 1)^2(x + 1)(\sqrt{1+ax^2} + bx + 2)}. \end{aligned}$$

Theo đề I tồn tại hữu hạn nên phương trình $(a - b^2)x^2 - 4bx - 3 = 0$ phải có nghiệm kép $x = \frac{1}{2}$. Tức là

$$\begin{cases} \Delta' = 0 \\ \frac{2b}{a - b^2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 + 3(a - b^2) = 0 \\ 4b = a - b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 3b = 0 \\ a = b^2 + 4b. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -3. \end{cases} \quad (\text{vì } a, b \neq 0)$$

Khi $a = -3, b = -3$ thì

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-12x^2 + 12x - 3}{(2x - 1)^2(x + 1)(\sqrt{1+ax^2} + bx + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-3}{(x + 1)(\sqrt{1 - 3x^2} - 3x + 2)} \\ &= \frac{-3}{\frac{3}{2} \left(\sqrt{1 - \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} + 2 \right)} = -2. \end{aligned}$$

Do đó, $a = -3, b = -3, c = -2$ nên phương trình $-3x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ vô nghiệm.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 62. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 + 8x + 5}$.

A. $L = -\frac{3}{2}$.

B. $L = \frac{1}{2}$.

C. $L = -\infty$.

D. $L = 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 + 8x + 5} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)(3x + 5)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 2}{3x + 5} = -\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 63. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$ bằng

A. Không tồn tại.

B. 0.

C. 5.

D. 4.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 1) = 5.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 64. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2018} + x^{2017} + \dots + x - 2018}{x^{2018} - 1}$ bằng

A. 2018.

B. $\frac{2019}{2018}$.

C. $\frac{2019}{2}$.

D. $\frac{2018}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2018} + x^{2017} + \dots + x - 2018}{x^{2018} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{2017} + 2x^{2016} + 3x^{2015} + \dots + 2017x + 2018)}{(x - 1)(x^{2017} + x^{2016} + \dots + x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2017} + 2x^{2016} + 3x^{2015} + \dots + 2017x + 2018}{x^{2017} + x^{2016} + \dots + x + 1} \\ &= \frac{2018 \cdot 2019}{2018} = \frac{2019}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2018} + x^{2017} + \dots + x - 2018}{x^{2018} - 1} = \frac{2019}{2}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 65. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$

A. $L = 0.$

B. $L = +\infty.$

C. $L = -\infty.$

D. $L = 1.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0 \\ x - 1 < 0, \forall x < 1. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } L = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 66. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1 - \sqrt{5x + 1}}{x - \sqrt{4x - 3}}$ bằng $\frac{a}{b}$ (phân số tối giản, $a > 0$). Giá trị của $a - b$ là

A. 1.

B. $\frac{1}{9}.$

C. -1.

D. $\frac{9}{8}.$

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1 - \sqrt{5x + 1}}{x - \sqrt{4x - 3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 3x)(x + \sqrt{4x - 3})}{(x - 1)(x - 3)(x + 1 + \sqrt{5x + 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x + \sqrt{4x - 3})}{(x - 1)(x + 1 + \sqrt{5x + 1})} \\ &= \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 9, b = 8$. Vậy $a - b = 1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 67. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 5}{-x + 3}$ bằng

A. $-\frac{5}{3}.$

B. -1.

C. 3.

D. -2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 5}{-x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x}}{-1 + \frac{3}{x}} = -2.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 68. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{3x - 2}{x + 1} = -\infty.$

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = +\infty.$

C. $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{3x - 2}{x + 1} = -\infty.$

D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = -\frac{3}{2}.$

Lời giải.

— Ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1 - (x - 2)^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 3}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 - \frac{3}{x}\right)}{x \left(-\sqrt{x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{2}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{3}{x}}{-\sqrt{x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{2}{x}} = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

— Ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{3x - 2}{x + 1} = +\infty$

$$\text{vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (3x - 2) = -5 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x + 1) = 0 \text{ và } x + 1 < 0 \text{ khi } x \rightarrow (-1)^-. \end{cases}$$

— Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty$.

— Ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{3x - 2}{x + 1} = -\infty$.

$$\text{vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (3x - 2) = -5 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x + 1) = 0 \text{ và } x + 1 > 0 \text{ khi } x \rightarrow (-1)^+. \end{cases}$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{3x - 2}{x + 1} = -\infty$ là mệnh đề sai.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 69. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 16}{x - 2} = 12$. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{5f(x) - 16} - 4}{x^2 + 2x - 8}$.

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{5}{12}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải.

Do $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 16}{x - 2} = 12$ nên ta có $f(2) - 16 = 0$ hay $f(2) = 16$.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{5f(x) - 16} - 4}{x^2 + 2x - 8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5(f(x) - 16)}{(x - 2)(x + 4) \left(\sqrt[3]{(5f(x) - 16)^2} + 4\sqrt[3]{5f(x) - 16} + 16 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 16}{x - 2} \cdot \frac{5}{(x + 4) \left(\sqrt[3]{(5f(x) - 16)^2} + 4\sqrt[3]{5f(x) - 16} + 16 \right)} \\ &= 12 \cdot \frac{5}{6 \cdot 48} = \frac{5}{24}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 70. Cho biết $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1 + ax^2} - bx - 2}{4x^3 - 3x + 1} = c$, với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tập nghiệm của phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$

trên $\mathbb{R}$ có số phần tử là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+ax^2} - bx - 2}{4x^3 - 3x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 + ax^2 - (bx + 2)^2}{(4x^3 - 3x + 1)(\sqrt{1+ax^2} + bx + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(a - b^2)x^2 - 4bx - 3}{(2x - 1)^2(x + 1)(\sqrt{1+ax^2} + bx + 2)}.\end{aligned}$$

Theo đề I tồn tại hữu hạn nên phương trình $(a - b^2)x^2 - 4bx - 3 = 0$ phải có nghiệm kép $x = \frac{1}{2}$. Tức là

$$\begin{cases} \Delta' = 0 \\ \frac{2b}{a - b^2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 + 3(a - b^2) = 0 \\ 4b = a - b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 + 3b = 0 \\ a = b^2 + 4b. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -3. \end{cases} \quad (\text{vì } a, b \neq 0)$$

Khi $a = -3, b = -3$ thì

$$\begin{aligned}I &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-12x^2 + 12x - 3}{(2x - 1)^2(x + 1)(\sqrt{1+ax^2} + bx + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-3}{(x + 1)(\sqrt{1 - 3x^2} - 3x + 2)} \\ &= \frac{-3}{\frac{3}{2}(\sqrt{1 - \frac{3}{4}} - \frac{3}{2} + 2)} = -2.\end{aligned}$$

Do đó, $a = -3, b = -3, c = -2$ nên phương trình $-3x^4 - 3x^2 - 2 = 0$ vô nghiệm.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 71. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 + 8x + 5}$.

A. $L = -\frac{3}{2}$. B. $L = \frac{1}{2}$. C. $L = -\infty$. D. $L = 0$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{3x^2 + 8x + 5} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)(3x + 5)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 2}{3x + 5} = -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 72. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$ bằng

A. Không tồn tại. B. 0. C. 5. D. 4.

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 1) = 5$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 73. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2018} + x^{2017} + \dots + x - 2018}{x^{2018} - 1}$ bằng

A. 2018. B. $\frac{2019}{2018}$. C. $\frac{2019}{2}$. D. $\frac{2018}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2018} + x^{2017} + \dots + x - 2018}{x^{2018} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{2017} + 2x^{2016} + 3x^{2015} + \dots + 2017x + 2018)}{(x - 1)(x^{2017} + x^{2016} + \dots + x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2017} + 2x^{2016} + 3x^{2015} + \dots + 2017x + 2018}{x^{2017} + x^{2016} + \dots + x + 1} \\ &= \frac{2018 \cdot 2019}{2018} = \frac{2019}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2018} + x^{2017} + \dots + x - 2018}{x^{2018} - 1} = \frac{2019}{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 74. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

A. $L = 0$.B. $L = +\infty$.C. $L = -\infty$.D. $L = 1$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0 \\ x - 1 < 0, \forall x < 1. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } L = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 75. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (a + 2)x + a + 1}{x^3 - 1}$

A. $\frac{2 - a}{3}$.B. $\frac{-2 - a}{3}$.C. $\frac{-a}{3}$.D. $\frac{a}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - (a + 2)x + a + 1}{x^3 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - a - 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - a - 1}{x^2 + x + 1} = \frac{-a}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 76. Trong các bộ số (a, b) là các số nguyên dương thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax} + \sqrt[3]{27x^3 + bx^2 + 5} \right) = \frac{7}{27},$$

tồn tại bộ số (a, b) thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

A. $a + 2b = 33$.B. $a + 2b = 34$.C. $a + 2b = 35$.D. $a + 2b = 36$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax} + \sqrt[3]{27x^3 + bx^2 + 5} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax} + 3x \right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{27x^3 + bx^2 + 5} - 3x \right).$$

$$\text{— } I_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax} + 3x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{\left(\sqrt{9x^2 + ax} - 3x \right)} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{\left(\sqrt{9 + \frac{a}{x}} + 3 \right)} = -\frac{a}{6}.$$

— Ta có

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{27x^3 + bx^2 + 5} - 3x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{bx^2 + 5}{\sqrt[3]{(27x^3 + bx^2 + 5)^2} + 3x\sqrt[3]{27x^3 + bx^2 + 5} + 9x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{b + \frac{5}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{27 + \frac{b}{x} + \frac{5}{x^3}} \right)^2 + 3 \cdot \sqrt[3]{27 + \frac{b}{x} + \frac{5}{x^3}} + 9} = \frac{b}{27}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } -\frac{a}{6} + \frac{b}{27} = \frac{7}{27}. \forall (a, b) \in \mathbb{Z}^+ \text{ nên } \begin{cases} a = 2 \\ b = 16. \end{cases}$$

Do đó $a + 2b = 34$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 77. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2}{x + 3}$.

A. $-\frac{2}{3}$.

B. 1.

C. 2.

D. -3.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = 1.$

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 78.** Trong các bộ số (a, b) là các số nguyên dương thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax} + \sqrt[3]{27x^3 + bx^2 + 5} \right) = \frac{7}{27},$$

tồn tại bộ số (a, b) thỏa mãn hệ thức nào sau đây?

A. $a + 2b = 33.$

B. $a + 2b = 34.$

C. $a + 2b = 35.$

D. $a + 2b = 36.$

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax} + \sqrt[3]{27x^3 + bx^2 + 5} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax} + 3x \right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{27x^3 + bx^2 + 5} - 3x \right).$$

$$\text{--- } I_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax} + 3x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{\left(\sqrt{9x^2 + ax} - 3x \right)} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{\left(\sqrt{9 + \frac{a}{x}} + 3 \right)} = -\frac{a}{6}.$$

--- Ta có

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{27x^3 + bx^2 + 5} - 3x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{bx^2 + 5}{\sqrt[3]{(27x^3 + bx^2 + 5)^2} + 3x\sqrt[3]{27x^3 + bx^2 + 5} + 9x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{b + \frac{5}{x^2}}{\left(\sqrt[3]{27 + \frac{b}{x} + \frac{5}{x^3}} \right)^2 + 3 \cdot \sqrt[3]{27 + \frac{b}{x} + \frac{5}{x^3}} + 9} = \frac{b}{27}. \end{aligned}$$

Suy ra $-\frac{a}{6} + \frac{b}{27} = \frac{7}{27}$. Vì $(a, b) \in \mathbb{Z}^+$ nên $\begin{cases} a = 2 \\ b = 16. \end{cases}$

Do đó $a + 2b = 34.$ Chọn đáp án **(B)** □**Câu 79.** Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3}.$

A. $-\frac{2}{3}.$

B. 1.

C. 2.

D. -3.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = 1.$

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 80.** $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}.$

B. $-\infty.$

C. 1.

D. $+\infty.$

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2}$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1 < 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$, hay $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 81. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-2}{1+2x}$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. -3.

D. $-\frac{2}{3}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-2}{1+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{\frac{1}{x} + 2} = 1.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 82. Tìm tất cả giá trị thực của tham số k để có $\int_1^k (2x-1) dx = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

A. $\begin{cases} k = -1 \\ k = 2 \end{cases}$.B. $\begin{cases} k = 1 \\ k = -2 \end{cases}$.C. $\begin{cases} k = 1 \\ k = 2 \end{cases}$.D. $\begin{cases} k = -1 \\ k = -2 \end{cases}$.

Lời giải.

$$\int_1^k (2x-1) dx = (x^2 - x) \Big|_1^k = k^2 - k$$

$$4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{x+1}+1} = 2. \text{ Ta có } k^2 - k = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 2. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 83. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x+1}{2x^3+2}$.

A. $\frac{1}{2}$.B. $+\infty$.C. $-\infty$.

D. 0.

Lời giải.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x+1}{2x^3+2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{2(x+1)(x^2-x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{2(x^2-x+1)} = 0.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 84. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{1-2x}$.

A. $L = -\frac{3}{2}$.B. $L = 3$.C. $L = \frac{3}{2}$.D. $L = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Tính } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{1-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 2} = -\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 85. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+4}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. -3.

C. $-\frac{3}{4}$.

D. 2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+4} = -3.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 86. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2017x-2}{2018x+5}$ bằng

A. $-\frac{2}{5}$.

B. 0.

C. 1.

D. $\frac{2017}{2018}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2017x-2}{2018x+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2017 - \frac{2}{x}}{2018 + \frac{5}{x}} = \frac{2017}{2018}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 87. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x) + g(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} + \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$

B. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x) + g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x)} + \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{g(x)}.$

C. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x) + g(x)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]}.$

D. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[3]{f(x) + g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} [\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}].$

Lời giải.

Câu hỏi lý thuyết.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 88. Tính $l = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}.$

A. $l = 0.$

B. $l = 3.$

C. $l = 1.$

D. $l = 2.$

Lời giải.

Ta có $l = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 1.$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 89. Cho m, n là các số thực khác 0. Nếu giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + mx + n}{x - 1} = 3$ thì $m \cdot n$ bằng

A. $-3.$

B. $-1.$

C. $3.$

D. $-2.$

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + mx + n.$

Ta có $f(1) = 0 \Leftrightarrow n = -1 - m.$

Do đó $f(x) = (x - 1)(x + 1 + m).$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + mx + n}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1 + m)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1 + m) = 3.$$

$$\Rightarrow 2 + m = 3 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow n = -2.$$

Vậy $m \cdot n = -2.$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 90. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - 2x)^2 x^3}{(x + 3)^5}.$

A. $1.$

B. $4.$

C. $-2.$

D. $-\frac{2}{3}.$

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - 2x)^2 x^3}{(x + 3)^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x} - 2\right)^2}{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^5} = 4.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 91. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2017x - 2}{2018x + 5}$ bằng

A. $-\frac{2}{5}.$

B. $\frac{2017}{2018}.$

C. $0.$

D. $1.$

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2017x - 2}{2018x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2017 - \frac{2}{x}}{2018 + \frac{5}{x}} = \frac{2017}{2018}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 92. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 2x + 3}$ bằng

A. $1.$

B. $0.$

C. $-3.$

D. $-\frac{2}{3}.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x^2+2x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = 0.$$

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 93.** Trong các giới hạn sau giới hạn nào có kết quả bằng 0?

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$. B. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-1}$. C. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^2+3x+2}$. D. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+5}{x+10}$.

Lời giải.

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^2+3x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x+1} = 4.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+5}{x+10} = \frac{1}{8}.$$

Chọn đáp án **(A)** □**Câu 94.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x+2}$ bằng

A. 2. B. 3. C. -1. D. 1.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 3.$$

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 95.** Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3x+2}{2x^2+1}$.

A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 2. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3x+2}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)** □**Câu 96.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. Chọn đáp án đúng.

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.
C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Lời giải.

Ta có:

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{-x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 97. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}$ có giá trị bằng

A. 1.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 0.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 98. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2018x + 3}{2x^2 + 2018x}$.

A. 2018.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{2018}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2018x + 3}{2x^2 + 2018x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2018}{x} + \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{2018}{x}} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 99. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ có giá trị bằng

A. 4.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. -4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 100. Tìm giá trị của tham số m để $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx - 2}{2x + 1} = 2$.

A. $m = 4$.

B. $m = -4$.

C. $m = 2$.

D. $m = -2$.

Lời giải.

Kết quả giới hạn là hữu hạn nên $m \neq 0$, khi $m \neq 0$ ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx - 2}{2x + 1} = \frac{m}{2}$.

Theo giả thiết ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx - 2}{2x + 1} = 2 \Rightarrow \frac{m}{2} = 2 \Leftrightarrow m = 4$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 101. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{1 - 3x}$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. 2.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{1 - 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{\frac{1}{x} - 3} = -\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 102. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 2$, hãy tìm $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{f(x) + 7} - 2}{x^2 - 4}$.

A. $-\frac{1}{24}$.

B. $-\frac{1}{8}$.

C. $\frac{1}{24}$.

D. $\frac{1}{8}$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 2 \Rightarrow f(2) = 1$.

$$I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{f(x) + 7} - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} \cdot \frac{1}{x + 2} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[3]{(f(x) + 7)^2} + 2 \cdot \sqrt[3]{f(x) + 7} + 4\right)} = \frac{1}{24}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 103. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{khi } x < 1 \\ 0 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. Không tồn tại.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow (1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (1)^-} (x^3 + 1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow (1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (1)^+} 0 = 0$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow (1)^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow (1)^+} f(x)$ nên $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ không tồn tại.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 104. Tính $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{1-x}$.

A. $I = 1$.B. $I = 2$.C. $I = -2$.D. $I = -1$.

Lời giải.

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{2}{x}\right)}{x \left(\frac{1}{x} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = -1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 105. Cho $f(x) = \frac{|x-2|}{2x-4}$. Kết luận nào dưới đây đúng?

A. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.B. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$.C. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2}$.D. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{2x-4} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{2x-4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Do đó không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 106. $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x-3}{2x+4}$ bằng

A. $+\infty$.

B. 1.

C. -2.

D. $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} (2x-3) = -7 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (2x+4) = 0 \\ 2x+4 > 0 \forall x > -2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x-3}{2x+4} = -\infty$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 107. Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = 2$. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x) + 2f(x) - 3}{x^2 - 3x + 2}$.

A. $L = 10$.B. $L = -10$.C. $L = 5$.D. $L = -5$.

Lời giải.

Từ giả thiết, ta suy ra $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$. Suy ra

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[f(x)-1][f^2(x)+f(x)+3]}{(x-1)(x-2)} = 2 \cdot \frac{1+1+3}{1-2} = -10.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 108. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+x+1)^{2018} + (x+2)^{2018} - 2 \cdot 3^{2018}}{(x-1)(x+2017)}$

A. $4 \cdot 3^{2017}$.B. 3^{2017} .C. $8 \cdot 3^{2017}$.D. $2 \cdot 3^{2017}$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (x^2+x+1)^{2018} + (x+2)^{2018}$. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+x+1)^{2018} + (x+2)^{2018} - 2 \cdot 3^{2018}}{(x-1)(x+2017)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x+2017)} = \frac{f'(1)}{2018}.$$

Mà $f'(x) = 2018(2x+1)(x^2+x+1)^{2017} + 2018(x+2)^{2017}$.

Nên $f'(1) = 2018 \cdot 4 \cdot 3^{2017}$. Vậy kết quả bằng $4 \cdot 3^{2017}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 109. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x + 2018)$ bằng

A. 2018.

B. $+\infty$.

C. 1.

D. $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x + 2018) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2018}{x^3} \right) \right] = -\infty \text{ (do } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2018}{x^3} \right) = 1).$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 110. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$.

A. Không tồn tại L .

B. $L = +\infty$.

C. $L = -\infty$.

D. $L = 0$.

Lời giải.

Dạng vô định $\infty - \infty$.

$$L = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x^2-4} = -\infty.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 111. Tính $M = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{2x+3}$.

A. $M = -\frac{2}{3}$.

B. $M = 0$.

C. $M = +\infty$.

D. $M = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } M = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 112. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$ bằng

A. 1.

B. $\frac{13}{4}$.

C. $-\frac{1}{56}$.

D. -1.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{7-x}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = -\frac{1}{56}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 113. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+2017}{x+2018}$ bằng

A. 2017.

B. $\frac{2017}{2018}$.

C. 2.

D. -2.

Lời giải.

Với mọi $x \neq 0$, ta có

$$\frac{2x+2017}{x+2018} = \frac{2 + \frac{2017}{x}}{1 + \frac{2018}{x}}.$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{2017}{x} \right) = 2 \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2018}{x} \right) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+2017}{x+2018} = \frac{2}{1} = 2.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 114. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2}$.

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-2} = -1.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 115. Giá trị $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 - 1}$ là

A. -2.

B. -1.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 2.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 116. Để $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 4}{mx - 2} = \frac{1}{2}$ thì giá trị m thuộc tập hợp nào?

A. $[3; 6]$.B. $[-3; 0]$.C. $[-6; -3]$.D. $[1; 3]$.

Lời giải.

Do $x \rightarrow -\infty$ nên coi $x < 0$. Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 4}{mx - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2 + x + 1}}{x} + \frac{4}{x}}{m - \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \frac{4}{x}}{m - \frac{2}{x}} = \frac{-2}{m}.$$

Vậy $m = -4$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 117. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 1}{(x + 2)^2}$ bằng

A. 0.

B. $-\infty$.C. $\frac{3}{16}$.D. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow -2} (x + 1) = -1 < 0.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2)^2 = 0.$$

$$\text{— } (x + 2)^2 > 0, \forall x \neq -2.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 1}{(x + 2)^2} = -\infty.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 118. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 1}$ bằng

A. 0.

B. $\frac{1}{3}$.C. $+\infty$.D. $-\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 1} = \frac{\sqrt{1} - 1}{1 + 1} = 0.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 119. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 2}{2018x - 1}$.

A. $\frac{5}{2018}$.

B. -2.

C. -5.

D. $-\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 2}{2018x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 + \frac{2}{x}}{2018 - \frac{1}{x}} = \frac{5}{2018}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 120. Biết rằng $b > 0$, $a + b = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax + 1} - \sqrt{1 - bx}}{x} = 2$. Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. $a^2 + b^2 > 10$.B. $a - b \geq 0$.C. $1 \leq a \leq 3$.D. $a^2 - b^2 > 6$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-bx} - 1}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{\sqrt[3]{ax+1}^2 + \sqrt[3]{ax+1} + 1} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-b}{\sqrt{1-bx} + 1} \\
&= \frac{a}{3} + \frac{b}{2}.
\end{aligned}$$

Ngoài ra $a + b = 5$ nên $a = 3$ và $b = 2$.Khi đó $a^2 - b^2 = 5 < 6$.Chọn đáp án **(D)** □**Câu 121.** Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}$.

- A. $-\infty$. B. $\frac{1}{4}$. C. $+\infty$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}.$$

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 122.** Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

- A. 0. B. -2. C. $-\infty$. D. 2.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\frac{1}{x}} = -2.$$

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 123.** Cho biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-7x+12}}{a|x|-17} = \frac{2}{3}$. Giá trị của a bằng

- A. -3. B. 3. C. 6. D. -6.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-7x+12}}{a|x|-17} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4-\frac{7}{x}+\frac{12}{x^2}}}{-x\left(a+\frac{17}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4-\frac{7}{x}+\frac{12}{x^2}}}{a+\frac{17}{x}} = \frac{2}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 3.$$

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 124.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-1}$ bằng

- A. -1. B. 1. C. 2. D. -2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 2.$$

Chọn đáp án **(C)** □**Câu 125.** $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2+3x-4}{x^2+4x}$ bằng

- A. 1. B. -1. C. $\frac{5}{4}$. D. $-\frac{5}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x - 1}{x} = \frac{5}{4}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 126. Xét các giới hạn sau

I. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} = 1;$

III. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} = -1;$

II. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} = -1;$

IV. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} = 1;$

Kết quả nào sau đây đúng?

A. I và III.

B. II và III.

C. II và IV.

D. I và IV.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x - 2)}{1 - x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = -1.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 127. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+5}}{x-3}$ bằng

A. 0.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+5}$, khi đó $f(3) = 0$. Dễ thấy hàm số có đạo hàm trên $[-1; +\infty)$ nên tồn tại $f'(3)$. Do đó

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+5}}{x - 3}$$

Mà $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+5)^2}}$ suy ra $f'(3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 128. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)$.

A. $\frac{7}{2}$.

B. $-\frac{7}{2}$.

C. $-\frac{3}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 + \frac{2}{x}\right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 + \frac{2}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(3 + \frac{2}{x}\right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1\right)} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 129. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{2x-4}$.

A. $L = -\frac{1}{2}$.

B. $L = -\frac{3}{4}$.

C. $L = 1$.

D. $L = \frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{2 - \frac{4}{x}} = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 130. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ bằng

A. $-\infty$.

B. 0.

C. 1.

D. -1.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = -1$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 131. Tính giới hạn sau $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt[3]{8x^6 - 4x^3}}$.

A. $\frac{3}{2}$.

B. 0.

C. 1.

D. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt[3]{8x^6 - 4x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(\sqrt[3]{8 - \frac{4}{x^3}}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{8 - \frac{4}{x^3}}} = \frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 132. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{3+x}$.

A. -1.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{3+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} - 1}{\frac{3}{x} + 1} = -1$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 133. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$.

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{5}{1} = 5$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 134. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}} = +\infty$ (với a là tham số). Giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 - 2a + 4$ là

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 1.

Lời giải.

Để $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-a)x-3}{x-\sqrt{x^2+1}} = +\infty$ thì $2-a < 0 \Rightarrow a > 2$.

Xét hàm số $f(a) = a^2 - 2a + 4$ với $a > 2$. Ta có bảng biến thiên sau

a	2	$+\infty$
$f(a)$	4	$+\infty$

Suy ra $\min P = 4$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 135. Cho a, b là các số nguyên và $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx - 5}{x - 1} = 7$. Tính $a^2 + b^2 + a + b$.

A. 18.

B. 1.

C. 15.

D. 5.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx - 5}{x - 1} = 7 \\
 \Leftrightarrow & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(ax + (a + b) - 5 + a + b)}{x - 1} = 7 \\
 \Leftrightarrow & \lim_{x \rightarrow 1} (ax + (a + b) - 5 + a + b) = 7 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} a(1) + a + b = 7 \\ -5 + a + b = 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 2a + b = 7 \\ a + b = 5 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} a = 2 \\ b = 3. \end{cases} \\
 \Rightarrow & a^2 + b^2 + a + b = 18.
 \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 136. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2}$.

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{3}{2}$.

D. 0.

Lời giải.

Ta có
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 137. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{1 - x}$.

A. -1.

B. -3.

C. 3.

D. 1.

Lời giải.

Ta có
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 - x - 1) = -3.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 138. Giá trị $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x + 1)(2 - x)}{x^2 + 3}$ bằng

A. -2.

B. 2.

C. 4.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x + 1)(2 - x)}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2 + \frac{1}{x})(\frac{2}{x} - 1)}{1 + \frac{3}{x^2}} = -2.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 139. Cho a, b là hai số dương thỏa mãn giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax - \sqrt{bx^2 - 2x + 2018})$ hữu hạn. Tính I .

A. $\frac{1}{a + \sqrt{b}}$.

B. $a - \sqrt{b}$.

C. $\frac{1}{a}$.

D. $\frac{2}{a + b}$.

Lời giải.

Ta thấy

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax - \sqrt{bx^2 - 2x + 2018})$$

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^2 - b)x^2 + 2x - 2018}{ax + \sqrt{bx^2 - 2x + 2018}}$$

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a^2 - b)x + 2 - \frac{2018}{x}}{a + \sqrt{b - \frac{2}{x} + \frac{2018}{x^2}}}$$

Từ giả thiết, ta được $\begin{cases} a^2 - b = 0 \\ I = \frac{2}{a + \sqrt{b}} \end{cases}$. Do vậy, $I = \frac{1}{a}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 140. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x + 1)^{2018} + (x + 2)^{2018} - 2 \cdot 3^{2018}}{(x - 1)(x + 2017)}$

A. $4 \cdot 3^{2017}$.

B. 3^{2017} .

C. $2 \cdot 3^{2017}$.

D. $8 \cdot 3^{2017}$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = (x^2 + x + 1)^{2018} + (x + 2)^{2018}$. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x + 1)^{2018} + (x + 2)^{2018} - 2 \cdot 3^{2018}}{(x - 1)(x + 2017)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2018 \cdot (x - 1)} = \frac{f'(1)}{2018}.$$

Mà $f'(x) = 2018 \cdot (x^2 + x + 1)^{2017} \cdot (2x + 1) + 2018 \cdot (x + 2)^{2017}$.

Nên $f'(1) = 2018 \cdot 4 \cdot 3^{2017}$. Vậy kết quả bằng $4 \cdot 3^{2017}$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 141. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 2}{2x^2 + 3}$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.

B. 4.

C. 2.

D. -2.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 2}{2x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(4 - \frac{2}{x^2})}{x^2(2 + \frac{3}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{3}{x^2}} = 2.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 142. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 + 2018)$ bằng

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 + 2018) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2018}{x^3} \right) \right] = -\infty$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 143. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2}{x^2 + 1}$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. -2.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{2}{x} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 144. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$ là

A. 7.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 145. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + bx + 1} - x) = 2$, khi đó b bằng

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. -4.

Lời giải.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + bx + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx + 1}{\sqrt{x^2 + bx + 1} + x} = \frac{b}{2}.$$

• Vậy $b = 4$.

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 146. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x}$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x} = \frac{2+2}{2} = 2.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 147. Cặp $(a; b)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 3$ là

A. $a = -3, b = 0$.B. $a = 3, b = 0$.C. $a = 0, b = -9$.D. Không tồn tại cặp $(a; b)$ thỏa mãn.

Lời giải.

$$\text{Theo đề bài ta có } x^2 + ax + b = (x - 3)x \Rightarrow a = -3, b = 0.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 148. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 2}{3x + 1}$.

A. $I = \frac{5}{3}$.B. $I = -\frac{2}{3}$.C. $I = 5$.D. $I = -2$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 2}{3x + 1} = \frac{5}{3}.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 149. Cặp $(a; b)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 3$ là

A. $a = -3, b = 0$.B. $a = 3, b = 0$.C. $a = 0, b = -9$.D. Không tồn tại cặp $(a; b)$ thỏa mãn.

Lời giải.

$$\text{Theo đề bài ta có } x^2 + ax + b = (x - 3)x \Rightarrow a = -3, b = 0.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 150. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 8}{x - 2}$ bằng

A. -2.

B. 4.

C. -4.

D. 2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{8}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 2.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 151. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 - 3x^3 + x + 1)$.

A. 0.

B. $+\infty$.C. $-\infty$.

D. -4.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 - 3x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(-4 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right) = +\infty.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 152. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b)) = 0$. Tính giá trị biểu thức $T = a - 4b$.

A. $T = 3$.B. $T = -2$.C. $T = -1$.D. $T = 5$.

Lời giải.

Từ giả thiết, đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x^2 - 3x + 1}$, khi $x \rightarrow +\infty$. Từ đó,

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 1}}{x} = 2, \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - 2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 1}{\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra $a - 4b = 5$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 153. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $+\infty$.

B. 2.

C. 1.

D. $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0$. Mặt khác, khi $x \rightarrow 1^+$ thì $x - 1 > 0$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = +\infty$.

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 154. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1}$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. $-\infty$.D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 155. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x}}{x + 1}$.

A. -2.

B. 2.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = 2.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 156. Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

A. $I = 1$.B. $I = 0$.C. $I = 2$.D. $I = +\infty$.

Lời giải.

$$I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 157. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{3 - x}$ bằng

A. -2.

B. $\frac{2}{3}$.

C. 1.

D. 2.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{3-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{3}{x}-1} = -2.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 158. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$. B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = -\infty$. C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \frac{2}{x}$, ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2 = 2 > 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, $x \rightarrow 0^+$ suy ra $x > 0$. Do đó, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$. Vậy, mệnh đề sai là $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = -\infty$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 159. Cho giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{ax^2+x+1} - \sqrt{x^2+bx-2}) = 1$. Tính $P = a \cdot b$.

A. 3. B. -3. C. 5. D. -5.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{ax^2+x+1} - \sqrt{x^2+bx-2}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(ax^2+x+1) - (x^2+bx-2)}{\sqrt{ax^2+x+1} + \sqrt{x^2+bx-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a-1)x^2 + (1-b)x + 3}{\sqrt{ax^2+x+1} + \sqrt{x^2+bx-2}}. \end{aligned}$$

Vì theo giả thiết dãy số có giới hạn hữu hạn khác 0 nên bậc tử = bậc mẫu. Do đó ta phải khử đi hệ số của bậc hai trên tử $\Leftrightarrow a-1=0 \Leftrightarrow a=1$.

Với $a=1$, ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a-1)x^2 + (1-b)x + 3}{\sqrt{ax^2+x+1} + \sqrt{x^2+bx-2}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-b)x + 3}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+bx-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{(1-b) + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{b}{x} - \frac{2}{x^2}}} \right) = \frac{b-1}{1+1}. \end{aligned}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Rightarrow \frac{b-1}{1+1} = 2 \Rightarrow b = 3.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow P = ab = 3.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 160. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x+1} + x - 2) = -\frac{3}{2}$. B. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty$.
C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-x+1} + x - 2) = +\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} (3x+2) = -1 < 0$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0$ và $x+1 < 0$ khi $x \rightarrow -1^-$.

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1} = +\infty.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 161. Tính giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}$.

A. $K = 0$. B. $K = 1$. C. $K = -2$. D. $K = 4$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} K &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{-\sqrt{4}}{1} = -2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 162. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{(x+2)^2}$ bằng

A. $-\infty$.

B. $\frac{3}{16}$.

C. 0.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2} (x+1) = -1 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2} (x+2)^2 = 0 \\ (x+2)^2 > 0, x \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{(x+2)^2} = -\infty.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 163. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c^2 + a = 18$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx} - cx) = -2$. Tính giá trị biểu thức $P = a + b + 5c$.

A. $P = 18$.

B. $P = 12$.

C. $P = 9$.

D. $P = 5$.

Lời giải.

Ta thấy

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx} - cx) &= -2 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a - c^2) \cdot x^2 + bx}{\sqrt{ax^2 + bx} + cx} &= -2 \end{aligned} \quad (1)$$

Từ (1), ta thấy a, b, c thỏa mãn hệ sau

$$\begin{aligned} &\begin{cases} a > 0 \text{ (vì } a \leq 0 \text{ trái giả thiết)} \\ a + c^2 = 18 \\ a - c^2 = 0 \\ \frac{b}{\sqrt{a} + c} = -2 \end{cases} \quad (2) \\ \Rightarrow &\begin{cases} a = 9 \\ c = -12 \\ c = 3 \text{ (loại } c = -3 \text{ vì (2)).} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $P = 12$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 164. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 165. Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{x - 1} = 5$. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{4f(x) + 9} + 3)}$ bằng

A. 10. B. 2. C. $\frac{5}{3}$. D. 1.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có $f(1) = 10$.

Vậy

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{4f(x) + 9} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x) - 10) \cdot (\sqrt{x} + 1)}{(x - 1) \cdot (\sqrt{4f(x) + 9} + 3)} = \frac{5 \cdot (\sqrt{1} + 1)}{\sqrt{4f(1) + 9} + 3} = 1.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 166. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 5}{x + 3}$.

A. $\frac{2}{3}$. B. $-\frac{5}{3}$. C. -5 . D. 2.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 5}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = 2$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 167. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{6\sqrt{x + 8} - x - 17}$.

A. $-\infty$.

B. 0.

C. $+\infty$.

D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{6\sqrt{x + 8} - x - 17} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 3x + 2)(6\sqrt{x + 8} + x + 17)}{-x^2 + 2x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 2)(6\sqrt{x + 8} + x + 17)}{-x + 1}. \end{aligned}$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 2)(6\sqrt{x + 8} + x + 17) = -36 < 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 1) = 0$ và $-x + 1 < 0$, với mọi $x > 1$ nên $I = +\infty$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 168. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 1}{x - 1}$ bằng

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. 2.

D. 0.

Lời giải.

Khi $x \rightarrow 1^+$, ta có $\begin{cases} 2x + 1 \rightarrow 3 \\ x - 1 \rightarrow 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases}$ suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 1}{x - 1} = +\infty$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 169. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x + 2}$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. -2 .

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 2.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 170. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 + x - 6}$ bằng

A. $\frac{8}{5}$.

B. 0.

C. $\frac{4}{5}$.

D. 2.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+2)}{x+3} = \frac{8}{5}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 171. Tìm giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x)$.

A. $I = -2$.

B. $I = -4$.

C. $I = 1$.

D. $I = -1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} = \frac{4}{-1 - 1} = -2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 172. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. $\frac{1}{4}$.

D. 0.

Lời giải.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 173. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{2x - 10}$ bằng

A. -1.

B. 4.

C. -4.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{2x - 10} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+3)}{2(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+3}{2} = 4.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 174. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x+5}$ bằng

A. 3.

B. -3.

C. $-\frac{1}{5}$.

D. 5.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{5}{x}} = 3.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 175. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2}$.

A. 2.

B. -2.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 2.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 176. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x^2 + 1)$.

A. $+\infty$.

B. 1.

C. Không tồn tại.

D. -1.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x^2 + 1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 = -1.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 177. Gọi a, b là các giá trị để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4} & \text{khi } x < -2 \\ x + 1 & \text{khi } x \geq -2 \end{cases}$ có giới hạn hữu hạn khi x

dần tới -2. Tính $3a - b$.

A. 24.

B. 8.

C. 12.

D. 4.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x + 1) = -1.$$

Suy ra $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -2 khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 + ax + b - 4}{x^2 - 4} = 0 (*).$$

Do $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 - 4) = 0$ nên điều kiện cần để có (*) là $\lim_{x \rightarrow -2^-} (2x^2 + ax + b - 4) = 0 \Rightarrow 2a - b = 4$.

Ngược lại, với $2a - b = 4$ ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 + ax + b - 4}{x^2 - 4} = 0 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x^2 + ax + 2a - 8}{x^2 - 4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x + a - 4}{x - 2} = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 8. \end{aligned}$$

Suy ra $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi x dần tới -2 $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 12 \end{cases}$.

Vậy $3a - b = 12$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 178. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{cx^2 + a}{x^2 + b}$.

A. a .B. b .C. c .D. $\frac{a+b}{c}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{cx^2 + a}{x^2 + b} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c + \frac{a}{x^2}}{1 + \frac{b}{x^2}} = \frac{c}{1} = c.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 179. Tính giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1} - 1}{x^2 - 3x}$.

A. $K = -\frac{2}{3}$.B. $K = \frac{2}{3}$.C. $K = \frac{4}{3}$.D. $K = 0$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} K &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4x+1} - 1)(\sqrt{4x+1} + 1)}{(x^2 - 3x)(\sqrt{4x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(x-3)(\sqrt{4x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{(x-3)(\sqrt{4x+1} + 1)} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 180. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$.

A. $\frac{5}{2}$.

B. $+\infty$.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{x+1} = \frac{5}{2}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 181. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{nếu } x > 0 \\ mx + m + \frac{1}{4} & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$ (với m là tham số). Tìm giá trị của tham số m

để hàm số có giới hạn tại $x = 0$.

A. $m = 1$.

B. $m = 0$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(mx + m + \frac{1}{4} \right) = m + \frac{1}{4}$.

Hàm số có giới hạn tại $x = 0$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Leftrightarrow m + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 182. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 3}}{3x + 2}$.

A. $-\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 3}}{3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}}{3 + \frac{2}{x}} = \frac{-2 + 1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 183. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$.

A. $L = -5$.

B. $L = 5$.

C. $L = 0$.

D. $L = -3$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+4) = 5$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 184. Trong bốn giới hạn dưới đây, giới hạn nào không tồn tại?

A. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(x+1)^2}$.

B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x^2+1}$.

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}}$.

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$.

Lời giải.

Ta có

— $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(x+1)^2} = -\infty$.

— $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$.

— $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}} = 0$.

— $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ không xác định.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 185. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3})$ bằng

- A. 0. B. 2. C. $-\infty$. D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1 - (x-3)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x}} \right)} = 0.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 186. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-1}$ bằng

- A. -1. B. 1. C. 2. D. -2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 2.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 187. Tính giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1} - 1}{x^2 - 3x}$.

- A. $K = -\frac{2}{3}$. B. $K = \frac{2}{3}$. C. $K = \frac{4}{3}$. D. $K = 0$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } K = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1} - 1}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(x-3)(\sqrt{4x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{(x-3)(\sqrt{4x+1} + 1)} = -\frac{2}{3}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 188. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 2. D. -1.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 2.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 189. Cho a, b là các số thực khác 0. Tìm điều kiện a, b để giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x} + ax}{bx - 1} = 3$?

- A. $\frac{a-1}{b} = 3$. B. $\frac{a+1}{b} = 3$. C. $\frac{-a-1}{b} = 3$. D. $\frac{a-1}{-b} = 3$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x} + ax}{bx - 1} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \frac{3}{x}} + a}{b - \frac{1}{x}} = 3 \Leftrightarrow \frac{-1 + a}{b} = 3.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 190. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 2} - x)$

- A. -4. B. -2. C. 4. D. 2.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 2} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x + 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 2} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = -2. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 191. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 1)$ bằng

- A. 2. B. 1. C. $+\infty$. D. 0.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 1) = 0$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 192. Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x + 3}{5x^4 + 3x + 1}$.

A. $L = 0$.

B. $L = 3$.

C. $L = \frac{3}{5}$.

D. $L = +\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(3 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} \right)}{x^4 \left(5 + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}}{5 + \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = \frac{3}{5}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 193. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2 + x - 3)$.

A. $+\infty$.

B. 2.

C. $-\infty$.

D. -3.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2 + x - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right).$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right) = 2 > 0$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2 + x - 3) = -\infty$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 194. Tính $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x}{2x + 3}$.

A. $L = 0$.

B. $L = \frac{-1}{2}$.

C. $L = \frac{2}{3}$.

D. $L = \frac{-1}{3}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - x}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3}{x} - 1}{2 + \frac{3}{x}} = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 195. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

A. $\frac{1}{12}$.

B. $\frac{13}{12}$.

C. $+\infty$.

D. $\frac{10}{11}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } y = f(x) = \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} = 2 \cdot \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} + \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x}.$$

$$\text{--- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{--- } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \left(4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{(8-x)^2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{(8-x)^2}} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 196. Tính $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 9}}$.

A. $-\infty$.

B. 0.

C. $\sqrt{6}$.

D. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{\sqrt{(x-3)(x+3)}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} = 0.$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 197. Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}.$

A. $L = -1.$

B. $L = 1.$

C. $L = 0.$

D. $L = \frac{\pi}{2}.$

Lời giải.

Ta có $L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = -1.$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 198. Cho các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3.$ Tính $M = \lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)].$

A. $M = 5.$

B. $M = 2.$

C. $M = -6.$

D. $M = 3.$

Lời giải.

Ta có $M = \lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)] = 3 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - 4 \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 6 - 12 = -6.$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 199. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = 0.$

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - 2x) = +\infty.$

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \frac{1}{2}.$

D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - 2x) = -\infty.$

Lời giải.

Tính các giới hạn đã cho ta được

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - 2x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - 2x) = +\infty.$$

Từ đó suy ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \frac{1}{2}$ là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 200. Cho số thực a thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2x^2+3} + 2017}{2x + 2018} = \frac{1}{2}.$ Khi đó giá trị của a là

A. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

B. $a = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$

C. $a = \frac{1}{2}.$

D. $a = \frac{-1}{2}.$

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2x^2+3} + 2017}{2x + 2018} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax\sqrt{2 + \frac{3}{x^2}} + 2017}{x\left(2 + \frac{2018}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2 + \frac{3}{x^2}} + \frac{2017}{x}}{2 + \frac{2018}{x}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Khi đó: $\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 201. Giá trị của m để $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1} + 4}{mx - 2} = \frac{1}{2}$ thuộc tập hợp nào?

A. $m \in [-3; 0].$

B. $m \in [-6; -3].$

C. $m \in [1; 3].$

D. $m \in [3; 6].$

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\left(\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \frac{4}{x}\right)}{mx - 2} = \frac{-2}{m}.$ Theo đề ta phải có $\frac{-2}{m} = \frac{1}{2}$ hay $m = -4 \in [-6; -3].$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 202. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} - \sqrt{1 - 2x}}{x}$.

- A. 2. B. -1. C. -2. D. 0.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} - \sqrt{1 - 2x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x(\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + \sqrt{1 - 2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + \sqrt{1 - 2x}} = \frac{0}{1 + 1} = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 203. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2}$.

- A. $L = \frac{1}{2}$. B. $L = \frac{1}{4}$. C. $L = -\frac{1}{4}$. D. $L = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 2x}{1 + x} = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 204. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} = 24$. Tính giới hạn sau

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{(x - 1)(\sqrt{2f(x)} + 4 + 6)}$$

- A. 24. B. $+\infty$. C. 2. D. 0.

Lời giải.

Vì $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} = 24$ nên $f(1) = 16$. Khi đó

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{(x - 1)(\sqrt{2f(x)} + 4 + 6)} = \frac{1}{12} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} = 2.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 205. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt[3]{1 + 3x}}{x^2}$.

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 0. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt[3]{1 + 3x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - (x + 1) + (x + 1) - \sqrt[3]{1 + 3x}}{x^2}.$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - (x + 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2(\sqrt{1 + 2x} + x + 1)} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + 1) - \sqrt[3]{1 + 3x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2((x + 1)^2 + (x + 1)\sqrt[3]{1 + 3x} + \sqrt[3]{(1 + 3x)^2})} = 1.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt[3]{1 + 3x}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 206. Tính $L = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 7)$.

- A. $L = 5$. B. $L = 9$. C. $L = 0$. D. $L = 7$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 7) = 1 + 1 + 7 = 9$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 207. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{3+2x}{x+2}$.

A. $-\infty$.

B. 2.

C. $+\infty$.D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} (3+2x) = -1 < 0$ và $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x+2) = 0$; $x+2 < 0$ khi $x \rightarrow (-2)^-$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{3+2x}{x+2} = +\infty$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 208. Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1}$.

A. 2.

B. 3.

C. -1.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 209. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^2 - 1}{x}$.

A. 4.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (4 + 4x) = 4$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 210. Tìm giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1 - \sqrt{x^2 - x - 2})$.

A. $I = \frac{3}{2}$.B. $I = \frac{1}{2}$.C. $I = \frac{17}{11}$.D. $I = \frac{46}{31}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1 - \sqrt{x^2 - x - 2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1 - \sqrt{x^2 - x - 2})(x+1 + \sqrt{x^2 - x - 2})}{(x+1 + \sqrt{x^2 - x - 2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2 - (x^2 - x - 2)}{(x+1 + \sqrt{x^2 - x - 2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+3}{(x+1 + \sqrt{x^2 - x - 2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 + \frac{3}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 211. Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} = 24$. Tính

$$I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{(x-1)(\sqrt{2f(x)} + 4 + 6)}.$$

A. 24.

B. $+\infty$.

C. 2.

D. 0.

Lời giải.

$$\forall \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} = 24 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 16) = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 16 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{2f(x)} + 4 + 6} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{(x - 1)(\sqrt{2f(x)} + 4 + 6)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{2f(x)} + 4 + 6} = 2.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 212. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\sqrt{x + 7} - 3}.$

A. $L = 6.$

B. $L = -4.$

C. $L = 4.$

D. $L = -6.$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{\sqrt{x + 7} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - x)(\sqrt{x + 7} + 3)}{x + 7 - 9} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - x)(\sqrt{x + 7} + 3)}{-(2 - x)} = -6$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 213. Tính $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x).$

A. $I = \frac{1}{2}.$

B. $I = +\infty.$

C. $I = 0.$

D. $I = \frac{3}{4}.$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x + 1} - 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 3x + 1 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1} + 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 214. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$

A. 0.

B. 4.

C. -4.

D. 2.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 215. Biết $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x + 1} - 1}{x} = \frac{a}{b}$, trong đó a, b là hai số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị biểu thức $P = a^2 + b^2.$

A. $P = 13.$

B. $P = 0.$

C. $P = 5.$

D. $P = 40.$

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x + 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3x + 1} + 1} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 3, b = 2 \Rightarrow P = a^2 + b^2 = 13.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 216. Tính $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{2x^2 - 3}}.$

A. $L = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

B. $L = \sqrt{2}.$

C. $L = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

D. $L = -\sqrt{2}.$

Lời giải.

Ta có

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{-\sqrt{2-\frac{3}{x^2}}} = -\sqrt{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 217. Cho hàm số $f(x) = \frac{x-2}{3-x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

B. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

C. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

D. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x-2) = 1 > 0, \lim_{x \rightarrow 3^+} (3-x) = 0 \text{ và } 3-x < 0 \text{ khi } x \rightarrow 3^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{3-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{\frac{3}{x}-1} = -1.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 218. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 0.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 219. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}, & x > 0 \\ mx + m + \frac{1}{4}, & x \leq 0 \end{cases}$ m là tham số. Tìm giá trị của tham số m để hàm số

có giới hạn tại $x = 0$.

A. $m = 1$.

B. $m = 0$.

C. $m = \frac{21}{2}$.

D. $m = \frac{-1}{2}$.

Lời giải.

Hàm số có giới hạn tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(mx + m + \frac{1}{4} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{4} = m + \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 220. Xác định $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2}$.

A. 0.

B. $-\infty$.

C. không xác định.

D. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 221. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2018} + x^{2017} + \dots + x - 2018}{x^{2018} - 1}$ bằng:

A. 2018.

B. $\frac{2019}{2018}$.

C. $\frac{2019}{2}$.

D. $\frac{2018}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2018} + x^{2017} + \dots + x - 2018}{x^{2018} - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{2018} - 1) + (x^{2017} - 1) + \dots + (x - 1)}{x^{2018} - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{2017} + x^{2016} + \dots + x + 1) + (x - 1)(x^{2016} + x^{2015} + \dots + x + 1) + \dots + (x - 1) \cdot 1}{(x - 1)(x^{2017} + x^{2016} + \dots + x + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{2017} + x^{2016} + \dots + x + 1) + (x^{2016} + x^{2015} + \dots + x + 1) + \dots + 1}{(x^{2017} + x^{2016} + \dots + x + 1)} \\
&= \frac{2018 + 2017 + \dots + 1}{2018} \\
&= \frac{2019}{2}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 222. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 3 chữ số?

A. 105.

B. 210.

C. 84.

D. 168.

Lời giải.

Gọi số tự nhiên cần tìm là $\overline{abc}$ trong đó, a, b, c được lấy từ tập hợp ban đầu 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, $a \neq 0$, $B(x_B; y_B)$.

Vì $a \neq 0$ nên a có 6 cách chọn

Số b lấy từ tập 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 nên b có 7 cách chọn.

Số tự nhiên cần tìm là số chẵn nên c có 4 cách chọn.

Vậy số các số tự nhiên chẵn cần tìm là $6 \cdot 7 \cdot 4 = 168$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 223. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11)$ là

A. 37.

B. 38.

C. 39.

D. 40.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11) = 3 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 + 11 = 37.$$

Chọn đáp án **A** □

Câu 224. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4|$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4| = |(\sqrt{3})^2 - 4| = 1.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 225. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2}$ là

A. $\sin \frac{1}{2}$.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. 0.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2} = 0 \cdot \sin \frac{1}{2} = 0.$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 226. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$ là

A. 1.

B. -2.

C. 2.

D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2} = \frac{(-1)^2 - 3}{(-1)^3 + 2} = -2.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 227. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{(2x - 1)(x^4 - 3)}$ là

A. 1.

B. -2.

C. 0.

D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{(2x - 1)(x^4 - 3)} = \frac{1 - 1^3}{(2 \cdot 1 - 1)(1^4 - 3)} = 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 228. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x - 1|}{x^4 + x - 3}$ là

A. $-\frac{3}{2}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $-\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x - 1|}{x^4 + x - 3} = \frac{|-1 - 1|}{1 - 1 - 3} = -\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 229. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x - 1}$ là

A. $-\frac{3}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - x}{x - 1} = \frac{\sqrt{3 + 1} + 1}{-1 - 1} = -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 230. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2 - x}{(2x - 1)(x^4 - 3)}}$ là

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\sqrt{5}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

D. 5.

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2 - x}{(2x - 1)(x^4 - 3)}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 3^2 - 3}{(2 \cdot 3 - 1)(3^4 - 3)}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 231. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x}}$ là

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải.

$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x}} = \sqrt[3]{\frac{2^2 - 2 + 1}{2^2 + 2 \cdot 2}} = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 232. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 4} - \sqrt{3x - 2}}{x + 1}$ là

A. $-\frac{3}{2}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. 0.

D. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 4} - \sqrt{3x - 2}}{x + 1} = \frac{\sqrt[3]{12 - 4} - \sqrt{6 - 2}}{3} = \frac{0}{3} = 0$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 233. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 15}{x - 2}$ là

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. $-\frac{15}{2}$.

D. 1.

Lời giải.

Vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 15) = -13 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0 \text{ \& } x - 2 > 0, \forall x > 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 15}{x - 2} = -\infty$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 234. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x + 2}}{\sqrt{x - 2}}$ là

A. $-\infty$.B. $+\infty$.C. $-\frac{15}{2}$.

D. Không xác định.

Lời giải.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x+2} = 2 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0 \text{ \& } \sqrt{x-2} > 0, \forall x > 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} = +\infty.$$

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 235.** Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|3x+6|}{x+2}$ làA. $-\infty$.

B. 3.

C. $+\infty$.

D. Không xác định.

Lời giải.Ta có $|x+2| = x+2$ với mọi $x > -2$, do đó:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|3x+6|}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{3|x+2|}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{3(x+2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} 3 = 3.$$

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 236.** Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ làA. $-\infty$.B. $+\infty$.C. $-\frac{1}{3}$.D. $\frac{1}{3}$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{(2-x)(1-2x)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{1-2x} = -\frac{1}{3}.$$

Chọn đáp án **(C)** □**Câu 237.** Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}$ là

A. -2.

B. 2.

C. 0.

D. $\frac{2}{\sqrt{15}}$.**Lời giải.**Ta có $x+3 > 0$ với mọi $x > -3$, nên:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}} &= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+3)(x+10)}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{x+3} \cdot (x+10)}{\sqrt{x^2+5}} \\ &= \frac{\sqrt{-3+3}(-3+7)}{\sqrt{(-3)^2+5}} = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)** □**Câu 238.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ làA. $+\infty$.

B. 2.

C. 4.

D. $-\infty$.**Lời giải.**

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{3x^2+1} = \sqrt{3 \cdot 1^2+1} = 2.$$

Chọn đáp án **(B)** □**Câu 239.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x < 1 \\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ làA. $+\infty$.

B. -1.

C. 0.

D. 1.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{1-x} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0 \text{ \& } 1-x > 0 (\forall x < 1). \end{cases}$$

Chọn đáp án **(A)** □**Câu 240.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2-3 & \text{với } x \geq 2 \\ x-1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ là

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. Không tồn tại.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 3) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 241. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} + 3 & \text{với } x \geq 2 \\ ax - 1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

A. $a = 1$.B. $a = 2$.C. $a = 3$.D. $a = 4$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 1) = 2a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x-2} + 3) = 3 \end{cases}$$

Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ tồn tại $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2a - 1 = 3 \Leftrightarrow a = 2$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 242. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{với } x > 3 \\ 1 & \text{với } x = 3 \\ 3 - 2x^2 & \text{với } x < 3 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$.B. Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.C. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6$.D. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -15$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 2x + 3) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3 - 2x^2) = -15 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

 $\Rightarrow$ không tồn tại giới hạn khi $x \rightarrow 3$.Vậy chỉ có khẳng định $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6$ sai.Chọn đáp án **C** □

Câu 243. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^3 + 1)$ là

A. 1.

B. $-\infty$.

C. 0.

D. $+\infty$.**Lời giải.**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^3 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{1}{x^3} \right) = -1 < 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 244. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x|^3 + 2x^2 + 3|x|)$ là

A. 0.

B. $+\infty$.

C. 1.

D. $-\infty$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} (|x|^3 + 2x^2 + 3|x|) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 2x^2 - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) = +\infty.$$

Giải nhanh: $|x|^3 + 2x^2 + 3|x| \sim |x|^3 \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow -\infty$.Chọn đáp án **B** □

Câu 245. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$ là

A. 0.

B. $+\infty$.C. $\sqrt{2} - 1$.D. $-\infty$.**Lời giải.**Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty : \sqrt{x^2 + 1} + x \sim \sqrt{x^2} + x = 2x \rightarrow +\infty$.Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 = 2 > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 246. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2})$ là

- A. $\sqrt[3]{3} + 1$. B. $+\infty$. C. $\sqrt[3]{3} - 1$. D. $-\infty$.

Lời giải.

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty : \sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2} \sim \sqrt[3]{3x^3} + \sqrt{x^2} = (\sqrt[3]{3} + 1)x \rightarrow +\infty$.

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = +\infty \text{ vì}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = \sqrt[3]{3} + 1 > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 247. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{4x^2 + 7x} + 2x)$ là

- A. 4. B. $-\infty$. C. 6. D. $+\infty$.

Lời giải.

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty : x(\sqrt{4x^2 + 7x} + 2x) \sim x(\sqrt{4x^2} + 2x) = 4x^2 \rightarrow +\infty$.

Đặt x^2 làm nhân tử chung:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{4x^2 + 7x} + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{4 + \frac{7}{x}} + 2 \right) = +\infty$$

$$\text{vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4 + \frac{7}{x}} + 2 \right) = 4 > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 248. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ là

- A. 0. B. $+\infty$. C. 3. D. Không xác định.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = \frac{12}{4} = 3.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 249. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$ là

- A. $-\frac{3}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $-\frac{5}{3}$. D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{5}{3}.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 250. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 + 6\sqrt{3}}{3 - x^2} = a\sqrt{3} + b$. Tính $a^2 + b^2$.

- A. 10. B. 25. C. 5. D. 13.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2x^3 + 6\sqrt{3}}{3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2(x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3)}{(\sqrt{3} - x)(\sqrt{3} + x)} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}} \frac{2(x^2 - \sqrt{3}x + 3)}{\sqrt{3} - x}$$

$$= \frac{2[(-\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) + 3]}{\sqrt{3} - (-\sqrt{3})} = \frac{18}{2\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 10.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 251. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x} \right|$ là

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{-x^2 - x + 6}{x^2 + 3x} \right| = \lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{(x+3)(x-2)}{x(x+3)} \right| = \lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{x-2}{x} \right| = \left| \frac{-3-2}{-3} \right| = \frac{5}{3}.$$

Chọn đáp án **C** □**Câu 252.** Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$ là

A. $\frac{1}{3}$.

B. 0.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải.Ta có $3-x > 0$ với mọi $x < 3$, do đó:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{(3-x)(9+3x+x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9+3x+x^2}} = \frac{\sqrt{3-3}}{\sqrt{9+3 \cdot 3+3^2}} = 0.$$

Chọn đáp án **B** □**Câu 253.** Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + \pi^{21}) \sqrt[3]{1-2x} - \pi^{21}}{x}$ là

A. $-\frac{2\pi^{21}}{7}$.

B. $-\frac{2\pi^{21}}{9}$.

C. $-\frac{2\pi^{21}}{5}$.

D. $\frac{1-2\pi^{21}}{7}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + \pi^{21}) \sqrt[3]{1-2x} - \pi^{21}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + \pi^{21})(\sqrt[3]{1-2x} - 1)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} x = -\frac{2\pi^{21}}{7}.$$

Chọn đáp án **A** □**Câu 254.** Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}}{x^2}$ là

A. 0.

B. $-\infty$.

C. 1.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2+x) - x}{x^2(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x}} = +\infty$$

vì $1 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x}) = 0$ và $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x} > 0$ với mọi $x > 0$.Chọn đáp án **D** □**Câu 255.** Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{4x+4} - 2}$ là

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{4x+4} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \left(\sqrt[3]{(4x+4)^2} + 2\sqrt[3]{4x+4} + 4 \right)}{(4x+4-8) \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2} + 2\sqrt[3]{4x+4} + 4 \right)}{4 \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1 \right)} = \frac{12}{12} = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **C** □**Câu 256.** Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$ là

A. $\frac{5}{6}$.

B. $\frac{13}{12}$.

C. $\frac{11}{12}$.

D. $-\frac{13}{12}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2\sqrt{1+x} - 2}{x} + \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sqrt{x+1} + 1} + \frac{1}{4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{(8-x)^2}} \right) = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 257. Biết rằng $b > 0$, $a + b = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} = 2$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $1 < a < 3$.B. $b > 1$.C. $a^2 + b^2 > 10$.D. $a - b < 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{ax+1} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt{1-bx}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{ax}{x \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1 \right)} + \frac{bx}{x(1 + \sqrt{1-x})} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1 \right)} + \frac{b}{(1 + \sqrt{1-x})} \right) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta được: } \begin{cases} a + b = 5 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ 2a + 3b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3, b = 2.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 258. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3}$ là

A. -2 .B. $+\infty$.C. 3 .D. 2 .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = 2.$$

$$\text{Giải nhanh: khi } x \rightarrow -\infty \text{ thì: } \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3} \sim \frac{2x^2}{x^2} = 2.$$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 259. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3}$ là

A. -2 .B. $+\infty$.C. $-\infty$.D. 2 .

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = -\infty.$$

$$\text{Giải nhanh: khi } x \rightarrow -\infty \text{ thì: } \frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3} \sim \frac{2x^3}{x^2} = 2x \rightarrow -\infty.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 260. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5}$ là

A. -2 .B. $+\infty$.C. 0 .D. $-\infty$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x^3} - \frac{7}{x^4} + \frac{11}{x^6}}{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^6}} = \frac{0}{3} = 0.$$

$$\text{Giải nhanh: khi } x \rightarrow -\infty \text{ thì: } \frac{2x^3 - 7x^2 + 11}{3x^6 + 2x^5 - 5} \sim \frac{2x^3}{3x^6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^3} \rightarrow 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 261. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$ là

A. -2 .B. $+\infty$.C. 3 .D. -1 .

Lời giải.

Khi $x \rightarrow -\infty$ thì $\sqrt{x^2} = -x \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} - x \sim \sqrt{x^2} - x = -x - x = -2x \neq 0$
 $\Rightarrow$ chia cả tử và mẫu cho x , ta được

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1} = -1.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 262. Biết rằng $\frac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ (với a là tham số). Tính giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 - 2a + 4$.

A. $P_{\min} = 1$.

B. $P_{\min} = 3$.

C. $P_{\min} = 4$.

D. $P_{\min} = 5$.

Lời giải.

Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $\sqrt{x^2} = x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x \sim \sqrt{x^2} - x = x - x = 0$.

$\Rightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((2-a)x-3)(\sqrt{x^2+1}+x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(2-a-\frac{3}{x}\right) \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right).$$

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right) = 4 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = +\infty$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2-a-\frac{3}{x}\right) = 2-a > 0 \Rightarrow a < 2.$$

$$\text{Giải nhanh: ta có } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = ((2-a)x-3)(\sqrt{x^2+1}+x)$$

$$\sim (2-a)x \cdot (\sqrt{x^2}+x) = 2(2-a)x \rightarrow +\infty \Leftrightarrow a < 2.$$

$$\text{Khi đó } P = a^2 - 2a + 4 = (a-1)^2 + 3 \geq 3, P = 3 \Leftrightarrow a = 1 < 2 \Rightarrow P_{\min} = 3.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 263. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ là

A. -2 .

B. -1 .

C. -2 .

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\text{Giải nhanh: khi } x \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1} \sim \frac{\sqrt{4x^2}}{x} = \frac{-2x}{x} = -2.$$

$$\text{Cụ thể: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{4}}{1} = -2.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 264. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x+2x}}$ là

A. $-\frac{1}{5}$.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải.

$$\text{Giải nhanh: khi } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x+2x}} \sim \frac{\sqrt{4x^2}-x}{\sqrt{9x^2+2x}} = \frac{2x-x}{3x+2x} = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Cụ thể: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x+2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x}-1}{\sqrt{9-\frac{3}{x}+2}} = \frac{1}{5}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 265. Biết rằng $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x+bx}} > 0$ là hữu hạn (với a, b là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a \geq 0$.

B. $L = -\frac{3}{a+b}$.

C. $L = \frac{3}{b-\sqrt{a}}$.

D. $b > 0$.

Lời giải.

Ta phải có $ax^2 - 3x > 0$ trên $(-\infty; \alpha) \Leftrightarrow a \geq 0$.

Ta có $x \rightarrow -\infty \Rightarrow \sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x \sim \sqrt{4x^2} - x = -3x \neq 0$.

Như vậy xem như “tử” là một đa thức bậc 1. Khi đó $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{ax^2 - 3x + bx}} > 0$ khi và chỉ khi $\sqrt{ax^2 - 3x + bx}$ là đa thức bậc 1.

Ta có $\sqrt{ax^2 - 3x + bx} \sim \sqrt{ax^2} + bx = (-\sqrt{a} + b)x \Rightarrow -\sqrt{a} + b \neq 0$.

Khi đó $\frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{ax^2 - 3x + bx}} \sim \frac{-3x}{-\sqrt{a} + b} = \frac{3}{b - \sqrt{a}} > 0 \Leftrightarrow b > \sqrt{a}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 266. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}}$ là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. 0.

C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. 1.

Lời giải.

Giải nhanh: $x \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}} \sim \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{2x^2}} = \frac{x}{-\sqrt{2}x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}}{-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 267. Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + ax)$ là $+\infty$.

A. $a > \sqrt{2}$.

B. $a < \sqrt{2}$.

C. $a > 2$.

D. $a < 2$.

Lời giải.

Giải nhanh: $x \rightarrow -\infty \Rightarrow \sqrt{2x^2 + 1} + ax \sim \sqrt{2x^2} + x = -\sqrt{2}x + ax = (a - \sqrt{2})x \rightarrow +\infty$

$\Leftrightarrow a - \sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow a < \sqrt{2}$.

Cụ thể: vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ nên $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + a \right) = +\infty$

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} + a \right) = a - \sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow a < \sqrt{2}$.

Chọn đáp án **B** □

Câu 268. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2)$ là

A. 1.

B. $+\infty$.

C. -1.

D. $-\infty$.

Lời giải.

Giải nhanh: $x \rightarrow -\infty \Rightarrow 2x^3 - x^2 \sim 2x^3 \rightarrow -\infty$.

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(2 - \frac{1}{x} \right) = -\infty$ vì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2 > 0. \end{cases}$

Chọn đáp án **D** □

Câu 269. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$ là

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. 1.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2-1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+1}{x^2-4} \right) = -\infty$.

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3 > 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2-4) = 0$ và $x^2-4 < 0$ với mọi $x \in (-2; 2)$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 270. Biết rằng $a + b = 4$ và $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right)$ hữu hạn. Tính giới hạn

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{b}{1-x^3} - \frac{a}{1-x} \right).$$

A. 1.

B. 2.

C. 1.

D. -2.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a + ax + ax^2 - b}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a + ax + ax^2 - b}{(1-x)(1+x+x^2)}.$$

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right) \text{ hữu hạn} \Leftrightarrow 1 + a \cdot 1 + a \cdot 1^2 - b = 0 \Leftrightarrow 2a - b = -1.$$

$$\text{Vậy ta có } \begin{cases} a + b = 4 \\ 2a - b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow L = - \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{a}{1-x} - \frac{b}{1-x^3} \right)$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(1-x)(1+x+x^2)} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{1+x+x^2} = 1.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 271. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+2x^2} - x)$ là

A. 0.

B. $+\infty$.C. $\sqrt{2} - 1$.D. $-\infty$.**Lời giải.**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+2x^2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 2} - 1 \right) = +\infty.$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + 2} - 1 \right) = \sqrt{2} - 1 > 0.$$

$$\text{Giải nhanh: } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \sqrt{1+2x^2} - x \sim \sqrt{2x^2} - x = \sqrt{2}x - x = (\sqrt{2} - 1)x \rightarrow +\infty.$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 272. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$ là

A. 0.

B. $+\infty$.C. $\frac{1}{2}$.D. $-\infty$.**Lời giải.**

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x \sim \sqrt{x^2} - x = x - x = 0 \Rightarrow \text{Nhân lượng liên hợp.}$$

$$\text{Giải nhanh: } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \sqrt{x^2+1} - x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \sim \frac{1}{\sqrt{x^2} + x} = \frac{1}{2x} \rightarrow 0.$$

$$\text{Cụ thể: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 273. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5x^2+2x} + x\sqrt{5}) = a\sqrt{5} + b$. Tính $S = 5a + b$.A. $S = 1$.B. $S = -1$.C. $S = 5$.D. $S = -5$.**Lời giải.**

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow \sqrt{5x^2+2x} + x\sqrt{5} \sim \sqrt{5x^2} + x\sqrt{5} = -\sqrt{5}x + x\sqrt{5} = 0 \Rightarrow \text{Nhân lượng liên hợp:}$$

$$\text{Giải nhanh: } x \rightarrow -\infty \Rightarrow \sqrt{5x^2+2x} + x\sqrt{5} = \frac{2x}{\sqrt{5x^2+2x} - x\sqrt{5}}$$

$$\sim \frac{2x}{\sqrt{5x^2} - x\sqrt{5}} = \frac{2x}{-2\sqrt{5}x} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Cụ thể: Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5x^2+2x} + x\sqrt{5}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{5x^2+2x} - x\sqrt{5}}.$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{5 + \frac{2}{x}} - \sqrt{5}} = \frac{2}{-2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{5}\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow S = -1.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 274. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+4x})$ làA. $\frac{7}{2}$.B. $-\frac{1}{2}$.C. $+\infty$.D. $-\infty$.**Lời giải.**

Khi $x \rightarrow +\infty \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x} \sim \sqrt{x^2} - \sqrt{x^2} = 0 \Rightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

$$\text{Giải nhanh: } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 4x}}$$

$$\sim \frac{-x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Cụ thể: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 4x}} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}} = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 275. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2})$ là

A. $\sqrt[3]{3} + 1$.

B. $+\infty$.

C. $\sqrt[3]{3} - 1$.

D. $-\infty$.

Lời giải.

Giải nhanh: $x \rightarrow -\infty \Rightarrow \sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2} \sim \sqrt[3]{3x^3} + \sqrt{x^2} = (\sqrt[3]{3} - 1)x \rightarrow -\infty$.

$$\text{Cụ thể: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = -\infty$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} - \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = \sqrt[3]{3} - 1 > 0.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 276. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2})$ là

A. $\frac{5}{6}$.

B. $+\infty$.

C. -1 .

D. $-\infty$.

Lời giải.

Khi $x \rightarrow +\infty \Rightarrow \sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \sim \sqrt{x^2} - \sqrt[3]{x^3} = x - x = 0 \Rightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

$$\text{Giải nhanh: } \sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} = \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right) + \left(x - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \right) \\ = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + \frac{x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 1} + \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} \sim \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} + \frac{x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[6]{x^6}} \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

$$\text{Cụ thể: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x + x - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + \frac{x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 1} + \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 277. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{2x - 1} - \sqrt[3]{2x + 1})$ là

A. 0.

B. $+\infty$.

C. -1 .

D. $-\infty$.

Lời giải.

$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \sqrt[3]{2x - 1} - \sqrt[3]{2x + 1} \sim \sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{2x} = 0 \Rightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

$$\text{Giải nhanh: } \sqrt[3]{2x - 1} - \sqrt[3]{2x + 1} = \frac{-2}{\sqrt[3]{(2x - 1)^2} + \sqrt[3]{4x^2 - 1} + \sqrt[3]{(2x + 1)^2}} \\ \sim \frac{-2}{\sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{4x^2}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{4x^2}} \rightarrow 0.$$

$$\text{Cụ thể: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{2x - 1} - \sqrt[3]{2x + 1}) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt[3]{(2x - 1)^2} + \sqrt[3]{(2x - 1)(2x + 1)} + \sqrt[3]{(2x + 1)^2}} = 0.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 278. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right]$ là

A. $+\infty$.

B. -1 .

C. 0.

D. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 1) = 0 - 1 = -1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 279. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}}$ là

A. 1.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{0 \cdot \sqrt{2}}{2} = 0$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 280. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}$ là

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $+\infty$.

D. $-\infty$.

Lời giải.

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty \Rightarrow x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} \sim x \cdot \sqrt{\frac{2x}{3x^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3+x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2(2x+1)}{3x^3+x^2+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{x}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 281. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\sin \pi x - \frac{1}{x^2} \right)$ là

A. 0.

B. -1.

C. π .

D. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\sin \pi x - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \sin \pi x - 1) = -1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 282. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}}$ là

A. 3.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. $-\infty$.

Lời giải.

Với $x \in (-1; 0)$ thì $x + 1 > 0$ và $\frac{x}{x-1} > 0$. Do đó

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x + 1)(x^2 - x + 1) \sqrt{\frac{x}{(x-1)(x+1)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \sqrt{x+1} (x^2 - x + 1) \sqrt{\frac{x}{x-1}} = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **(C)** □

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. B	4. C	5. A	6. D	7. B	8. C	9. B	10. D
11. C	12. D	13. C	14. C	15. B	16. A	17. C	18. B	19. A	20. A
21. D	22. C	23. A	24. B	25. C	26. A	27. B	28. B	29. D	30. B
31. B	32. C	33. C	34. B	35. A	36. C	37. A	38. B	39. C	40. D
41. D	42. C	43. D	44. A	45. B	46. A	47. A	48. B	49. C	50. B
51. B	52. B	53. D	54. C	55. D	56. C	57. C	58. B	59. A	60. B
61. A	62. A	63. C	64. C	65. C	66. A	67. D	68. A	69. B	70. A
71. A	72. C	73. C	74. C	75. C	76. B	77. B	78. B	79. B	80. B
81. B	82. A	83. D	84. A	85. B	86. D	87. C	88. C	89. D	90. B
91. B	92. B	93. A	94. B	95. D	96. A	97. B	98. B	99. A	100. A
101. C	102. C	103. D	104. D	105. D	106. D	107. B	108. A	109. D	110. C
111. D	112. C	113. C	114. C	115. C	116. C	117. B	118. A	119. A	120. D

121. B	122. B	123. B	124. C	125. C	126. A	127. D	128. D	129. D	130. D
131. A	132. A	133. D	134. A	135. A	136. B	137. B	138. A	139. C	140. A
141. C	142. A	143. A	144. B	145. C	146. B	147. A	148. A	149. A	150. D
151. B	152. D	153. A	154. A	155. B	156. C	157. A	158. B	159. A	160. B
161. C	162. A	163. B	164. C	165. D	166. D	167. C	168. A	169. A	170. A
171. A	172. C	173. B	174. A	175. A	176. D	177. C	178. C	179. A	180. A
181. B	182. A	183. B	184. D	185. A	186. C	187. A	188. C	189. A	190. B
191. D	192. C	193. C	194. B	195. B	196. B	197. A	198. C	199. C	200. A
201. B	202. D	203. D	204. C	205. D	206. B	207. C	208. A	209. A	210. A
211. C	212. D	213. D	214. B	215. A	216. D	217. B	218. B	219. B	220. D
221. C	222. D	223. A	224. B	225. D	226. B	227. C	228. D	229. A	230. C
231. B	232. C	233. A	234. B	235. B	236. C	237. C	238. B	239. A	240. C
241. B	242. C	243. D	244. B	245. B	246. B	247. D	248. C	249. D	250. A
251. C	252. B	253. A	254. D	255. C	256. B	257. A	258. D	259. C	260. C
261. D	262. B	263. C	264. D	265. C	266. C	267. B	268. D	269. A	270. C
271. B	272. A	273. A	274. B	275. D	276. A	277. A	278. B	279. C	280. B
281. B	282. C								

BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm $x_0 \in (a; b)$ nếu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Nếu tại điểm x_0 hàm số $y = f(x)$ không liên tục, thì được gọi là *gián đoạn* tại x_0 và điểm x_0 được gọi là *điểm gián đoạn* của hàm số $y = f(x)$.

Nhận xét.

Hàm số được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu ba điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn:

- ① $f(x)$ xác định tại x_0 . ② $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ tồn tại. ③ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại điểm x_0 nếu có ít nhất 1 trong 3 điều kiện trên không thỏa mãn.

Nếu sử dụng giới hạn một bên thì:

- ① Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ tồn tại và $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số được gọi là liên tục trái tại điểm x_0
- ② Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ tồn tại và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số được gọi là liên tục phải tại điểm x_0
- ③ Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Đặc trưng khác của tính liên tục tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$. Giả sử x_0 và x ($x \neq x_0$) là hai phần tử của $(a; b)$

■ Hiệu $x - x_0$, ký hiệu: Δx , được gọi là *số gia của đối số tại điểm x_0* . Ta có: $\Delta x = x - x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + \Delta x$.

■ Hiệu $y - y_0$, ký hiệu: Δy , được gọi là *số gia tương ứng của hàm số tại điểm x_0* . Ta có:

$$\Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Đặc trưng: dùng khái niệm số gia, ta có thể đặc trưng tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 như sau:

Định lý 1. Một hàm số $y = f(x)$, xác định trên $(a; b)$, là liên tục tại $x_0 \in (a; b)$ nếu và chỉ nếu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y$$

Chứng minh:

Thật vậy, ta có:

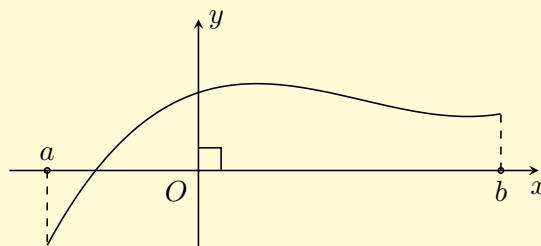
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

2 HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa 2. Ta có:

- ① Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trong khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mỗi điểm của khoảng đó.
- ② Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó:
- Liên tục trong khoảng $(a; b)$.
 - $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ (liên tục phải tại điểm a).
 - $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ (liên tục trái tại điểm b).

- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền trên khoảng đó.
- Khi ta nói hàm số $y = f(x)$ liên tục mà không chỉ ra trên khoảng nào thì có nghĩa là hàm số liên tục trên tập xác định của nó.



3 CÁC ĐỊNH LÝ VỀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

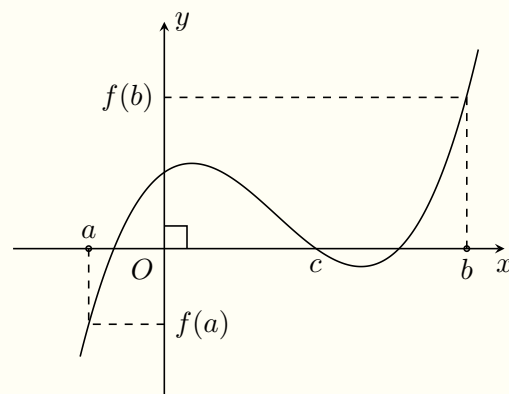
Định lý 2. Tổng, hiệu, tích, thương (với mẫu số khác 0) của các hàm số liên tục tại một điểm là hàm số liên tục tại điểm đó. Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

- ① Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại điểm x_0
- ② Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lý 3. Các hàm đa thức, hàm số hữu tỉ, hàm lượng giác là liên tục trên tập xác định của nó.

Định lý 4. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) > 0$, thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$



B CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm - Dạng I

Phương pháp:

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x \neq x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x = x_0 \end{cases}$.

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm x_0 , chúng ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = L$.

Bước 2: Tính $f(x_0) = f_2(x_0)$.

Bước 3: Đánh giá hoặc giải phương trình $L = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra kết luận.

Ví dụ 1.

- ① Xét tính liên tục của hàm số $y = g(x)$ tại $x_0 = 2$, biết:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 5 & \text{nếu } x = 2. \end{cases}$$

- ② Trong biểu thức xác định $g(x)$ ở trên, cần thay số 5 bởi số nào để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

Lời giải.

- ① Ta có: $g(2) = 5$; $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$,
 như vậy ta được $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) \neq g(2)$.
 Vậy hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 2$.

- ② Nếu thay 5 bằng 12 thì hàm số sẽ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

□

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau tại điểm $x_0 = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ x + a & \text{nếu } x = 1. \end{cases}$$

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f(1) = a + 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$,

Vậy ta có:

- Nếu $2 = a + 1 \Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow f(1) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, thì hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.
- Nếu $2 \neq a + 1 \Leftrightarrow a \neq 1 \Leftrightarrow f(1) \neq 2 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, thì hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

□

Dạng 2. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm - Dạng II**Phương pháp:**

$$\text{Cho hàm số } f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x < x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x \geq x_0 \end{cases}.$$

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục tại điểm x_0 , chúng ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tính $f(x_0) = f_2(x_0)$.

Bước 2: (Liên tục trái) Tính: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f_1(x) = L_1$.

Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1 = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra kết luận về liên tục trái.

Bước 3: (Liên tục phải) Tính: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f_2(x) = L_2$.

Đánh giá hoặc giải phương trình $L_2 = f_2(x_0)$, từ đó đưa ra kết luận về liên tục phải.

Bước 4: Đánh giá hoặc giải phương trình $L_1 = L_2$, từ đó đưa ra kết luận.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng:

- ① Hàm số: $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{với } x \leq 0 \\ x^2 + 2 & \text{với } x > 0 \end{cases}$ gián đoạn tại điểm $x = 0$.

- ② Mỗi hàm số $g(x) = \sqrt{x-3}$ và $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{với } x \leq 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{với } x > 1 \end{cases}$ liên tục trên tập xác định của nó.

Lời giải.

- ① Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1)^2 = 1$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x).$$

Tức là, hàm số gián đoạn tại điểm $x = 0$.

- ② Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Trước tiên ta thấy hàm số liên tục với mọi $x \neq 1$.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = 1$, ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-2} = -1, f(1) = -1.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

Tức là, hàm số gián đoạn tại điểm $x = 1$.

Vậy, liên tục trên tập xác định của nó.

□

Ví dụ 2. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

- ① Tìm a để $f(x)$ liên tục trái tại điểm $x = 1$.
- ② Tìm a để $f(x)$ liên tục phải tại điểm $x = 1$.
- ③ Tìm a để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } f(x) = \begin{cases} x - 2 & x > 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \\ 2 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

- ① Để $f(x)$ liên tục trái tại điểm $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ tồn tại và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - x) = 1 \text{ và } f(1) = a.$$

Vậy, điều kiện là $a = 1$.

- ② Để $f(x)$ liên tục phải tại điểm $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ tồn tại và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 2) = -1 \text{ và } f(1) = a.$$

Vậy, điều kiện là $a = -1$.

- ③ Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ trước hết phải có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow 1 = -1$ (mâu thuẫn).

Vậy không tồn tại a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

□

Dạng 3. Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng

Phương pháp áp dụng

Để xét tính liên tục hoặc xác định giá trị của tham số để hàm số liên tục trên khoảng I , chúng ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xét tính liên tục của hàm số trên các khoảng đơn.

Bước 2: Xét tính liên tục của hàm số tại các điểm giao.

Bước 3: Kết luận.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng:

a. Hàm số $f(x) = x^4 - x^2 + 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b. Các hàm số $f(x) = x^3 - x + 3$ và $g(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

a. Hàm số $f(x)$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$.

b. Ta lần lượt có nhận xét:

Hàm số $f(x)$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $g(x)$ là hàm phân thức nên nó liên tục trên tập xác định (tức là trên $\mathbb{R}$). □

Ví dụ 2. Chứng minh rằng:

a. Hàm số $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.

b. Các hàm số $f(x) = \sqrt{2x - 1}$ liên tục trên nửa khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right]$.

Lời giải.

a. Hàm số liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.

Với $x_0 \in (-2; 2)$, ta có: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{8 - 2x^2} = \sqrt{8 - 2x_0^2} = f(x_0)$.

Vậy, hàm số liên tục trên khoảng $(-2; 2)$.

Ngoài ra, sử dụng giới hạn một bên ta chứng minh được:

Hàm số $f(x)$ liên tục phải tại điểm $x_0 = -2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trái tại điểm $x_0 = 2$.

Vậy, hàm số liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.

b. Hàm số xác định trên nửa khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right]$.

Với $x_0 \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, ta có:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{2x - 1} = \sqrt{2x_0 - 1} = f(x_0)$.

Vậy, hàm số liên tục trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ngoài ra, sử dụng giới hạn một bên, ta chứng minh được:

Hàm số $f(x)$ liên tục phải tại điểm $x_0 = \frac{1}{2}$.

Vậy, hàm số liên tục trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. □

Ví dụ 3. Chứng tỏ rằng hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}.$$

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ liên tục với mọi $x \neq 0$.

Xét tính liên tục của $f(x)$ tại điểm $x = 0$.

Ta có:

$$\left| x \cos \frac{1}{x^2} \right| = |x| \cdot \left| \cos \frac{1}{x^2} \right| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \cos \frac{1}{x^2} \leq |x| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cos \frac{1}{x^2} \right) = 0.$$

Mặt khác $f(0) = 0$.

Do đó, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại điểm $x = 0$.

Vậy hàm số liên tục trên toàn trục số thực $\mathbb{R}$. □

Ví dụ 4. Xét tính liên tục của hàm số sau trên toàn trục số.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ ax + 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}.$$

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$

1. Khi $x < 1$, ta có $f(x) = x^2 + x$ là hàm số đa thức nên liên tục với $x < 1$.
2. Khi $x > 1$, ta có $f(x) = ax + 1$ là hàm số đa thức nên liên tục với $x > 1$.
3. Khi $x = 1$, ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + 1) = a + 1. \\ f(1) &= a + 1.\end{aligned}$$

Do đó:

- * Nếu $a = 1$ thì $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 2$, do đó hàm số liên tục tại $x_0 = 1$
- * Nếu $a \neq 1$ thì $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, do đó hàm số gián đoạn tại $x_0 = 1$.

Kết luận:

- Nếu $a = 1$, hàm số liên tục trên toàn trục số.
- Nếu $a \neq 1$, hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$ và gián đoạn tại $x_0 = 1$. □

Dạng 4. Sử dụng tính liên tục của hàm số để chứng minh

Phương pháp áp dụng

Cho phương trình $f(x) = 0$, để chứng minh phương trình có k nghiệm trong $[a, b]$, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1 : Chọn các số $a < T_1 < T_2 < \dots < T_{k-1} < b$ chia đoạn $[a, b]$ thành k đoạn thỏa

$$\text{mãn :} \quad \begin{cases} f(a) \cdot f(T_1) < 0 \\ \dots \\ f(T_{k-1}) \cdot f(b) < 0 \end{cases}$$

Bước 2: Kết luận về số nghiệm của phương trình trên $[a, b]$

Ví dụ 1. Chứng minh rằng phương trình $x^5 + x - 1 = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^5 + x - 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$ ta có : $f(-1) \cdot f(1) = -3 \cdot 1 = -3 < 0$

Vậy phương trình có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$ □

Ví dụ 2. Chứng minh rằng phương trình $x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^2 \cos x + x \sin x + 1$ liên tục trên khoảng $(0; \pi)$ ta có :

$$f(0) \cdot f(\pi) = 1 - \pi^2 < 0$$

Vậy phương trình có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$ □

Ví dụ 3. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 + x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có : $f(-1) \cdot f(0) = -1 \cdot 1 = -1 < 0$

Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(-1; 0)$. Do đó nó có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 □

Ví dụ 4. Chứng minh rằng phương trình $2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-7; 9)$.

Lời giải.

Đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$. Khi đó phương trình có dạng $2t^3 - 6t + 1 = 0$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 6t + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có :

$$f(-2) = -3; f(0) = 1; f(1) = -3; f(2) = 5$$

Ta có : $f(-2).f(0) = -3 < 0$ nên phương trình có 1 nghiệm $t_1 \in (-2; 0)$

Khi đó : $t_1 = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x_1 = 1 - t_1^3$ và $t_1 \in (1; 9)$

$f(0).f(1) = -3 < 0$ nên phương trình có 1 nghiệm $t_2 \in (0; 1)$

Khi đó : $t_2 = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x_2 = 1 - t_2^3$ và $t_2 \in (0; 1)$

$f(1).f(2) = -3 < 0$ nên phương trình có 1 nghiệm $t_3 \in (-7; 0)$

Khi đó : $t_3 = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x_3 = 1 - t_3^3$ và $t_3 \in (-7; 0)$

Vậy : Phương trình có 3 nghiệm thuộc khoảng $(-7; 9)$ □

Dạng 5. Sử dụng tính liên tục của hàm số để xét dấu hàm số

Phương pháp áp dụng:

Sử dụng kết quả : "Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và không triệt tiêu trên đoạn $[a; b]$ thì có dấu nhất định trên khoảng $(a; b)$ "

Ví dụ 1. Xét dấu hàm số : $f(x) = \sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} - \sqrt{1-2x}$

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4; \frac{1}{2}]$. Giải phương trình $f(x) = 0$. Ta có :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt{x+4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \\ 1-x+1-2x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)} = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \\ \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 2x+1 \geq 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x^2+7x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Như vậy trên các khoảng $[-4; 0)$ và $(0; \frac{1}{2}]$ hàm số $f(x)$ không triệt tiêu. Do đó :

Vì $f(-1) = \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$ nên $f(x) < 0 \forall x \in [-4; 0)$

Vì $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{9}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} > 0$ nên $f(x) > 0 \forall x \in (0; \frac{1}{2}]$ □

C CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hàm số $f(x) = \sqrt{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x+4}}$ liên tục trên:

A. $[-4; 3]$.

B. $[-4; 3)$.

C. $(-4; 3]$.

D. $[-\infty; -4] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x \leq -3 \end{cases} \Rightarrow \text{TXD: } \mathcal{D} = (-4; 3] \Rightarrow \text{hàm số liên tục trên } (-4; 3).$

Xét tại $x = 3$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\sqrt{3-x} + \frac{1}{\sqrt{x+4}} \right) = \frac{1}{\sqrt{7}} = f(3) \Rightarrow \text{Hàm số liên tục trái tại } x = 3.$$

Vậy hàm số liên tục trên $(-4; 3]$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 2. Hàm số $f(x) = \frac{x^3 + x \cos x + \sin x}{2 \sin x + 3}$ liên tục trên:

A. $[-1; 1]$.

B. $[1; 5]$.

C. $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

D. $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Vì $2 \sin x + 3 \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{TXD } \mathcal{D} = \mathbb{R} \Rightarrow \text{Hàm số liên tục trên } \mathbb{R}.$

Chọn đáp án **D** □

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ với $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ với mọi $x \neq 1$. Tính $f(1)$.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. -1.

Lời giải.Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên suy ra

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-3; 3]$ với $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}{x}$ với $x \neq 0$. Tính $f(0)$.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. 1.

D. 0.

Lời giải.Vì $f(x)$ liên tục trên $[-3; 3]$ nên suy ra

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $(-4; +\infty)$ với $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$ với $x \neq 0$. Tính $f(0)$.

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải.Vì $f(x)$ liên tục trên $m < -5$ nên suy ra

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+4} + 2) = 4.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 6. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $m = 0$.B. $m = 1$.C. $m = 2$.D. $m = 3$.**Lời giải.**Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, chứa $x = 2$. Theo giả thiết thì ta phải có

$$m = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3.$$

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 7. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $m = 0$.B. $m = 2$.C. $m = 4$.D. $m = 6$.**Lời giải.**Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết ta phải có

$$3 + m = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3$$

$$\Leftrightarrow m = 0.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 8. Tìm giá trị thực của tham số k để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ k + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $k = \frac{1}{2}$.B. $k = 2$.C. $k = -\frac{1}{2}$.D. $k = 0$.**Lời giải.**Hàm số $f(x)$ có TXĐ: $\mathcal{D} = [0; +\infty)$. Điều kiện bài toán tương đương với

$$k + 1 = y(1) = \lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 9. Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$ (với m là tham số). Khẳng

định nào dưới đây đúng?

A. $m \in (-3; 0)$.

B. $m \leq -3$.

C. $m \in [0; 5)$.

D. $m \in [5; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $(-1; +\infty)$. Theo giả thiết ta phải có

$$m = f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = -\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+1}+2) = -4.$$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 10. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ m & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

A. $m \in (-2; -1)$.

B. $m \leq -2$.

C. $m \in [-1; 7)$.

D. $m \in [7; +\infty)$.

Lời giải.

Với mọi $x \neq 0$ ta có $0 \leq |f(x)| = \left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right| \leq x^2 \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Theo giả thiết ta phải có: $m = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 11. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

B. $x = 0$.

C. $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$.

D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3\pi}{2} + k\pi \right) = \dots \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right) \cup \dots$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1 \neq 0 = f(0)$

$\Rightarrow f(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 12. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

liên tục tại $x = 1$.

A. $m = -\pi$.

B. $m = \pi$.

C. $m = -1$.

D. $m = 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Điều kiện bài toán tương đương với

$$\begin{aligned} m = f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x - \pi + \pi)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin \pi(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(-\pi) \cdot \frac{\sin \pi(x-1)}{\pi(x-1)} \right] (*). \end{aligned}$$

Đặt $t = \pi(x-1)$ thì $t \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow 1$. Do đó (*) trở thành:

$$m = \lim_{t \rightarrow 0} \left[(-\pi) \cdot \frac{\sin t}{t} \right] = -\pi.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 13. Biết rằng $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2} & \text{khi } x \neq \pi \\ m & \text{khi } x = \pi \end{cases}$

liên tục tại $x = \pi$.

A. $m = \frac{\pi}{2}$.

B. $m = -\frac{\pi}{2}$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều kiện của bài toán trở thành:

$$m = f(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2\cos^2 \frac{x}{2}}{(x - \pi)^2} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2\sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{(x - \pi)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pi} \left[\frac{\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \right]^2 \quad (*)$$

Đặt $t = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow \pi$. Khi đó $(*)$ trở thành: $m = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 14. Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x^4 + x}{x^2 + x} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại:

A. mọi điểm trừ $x = 0, x = 1$.

B. mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

C. mọi điểm trừ $x = -1$.

D. mọi điểm trừ $x = 0$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có TXD: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Để thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (-1; 0)$ và $(0; +\infty)$.

(i) Xét tại $x = -1$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3 = f(-1)$$

$\Rightarrow$ hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = -1$.

(ii) Xét tại $x = 0$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x + 1) = 1 = f(0)$$

$\Rightarrow$ hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 15. Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Hàm số $f(x) = \frac{x(x+1)}{x^2-1}$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (-1; 1)$ và $(1; +\infty)$.

(i) Xét tại $x = -1$, ta có $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} = f(-1)$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x = -1$.

(ii) Xét tại $x = 1$, ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2 x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ (1-m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải.

TXD: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$; $(2; +\infty)$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2). (*)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(2) = 4m^2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [(1-m)x] = 2(1-m) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} m^2 x^2 = 4m^2 \end{cases} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 4m^2 = 2(1-m) \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 17. Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x \in [0; 4] \\ 1+m & \text{khi } x \in (4; 6] \end{cases}$ liên tục trên $[0; 6]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m < 2$.

B. $2 \leq m < 3$.

C. $3 < m < 5$.

D. $m \geq 5$.

Lời giải.

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(0; 4)$ và $(4; 6)$. Khi đó hàm số liên tục trên đoạn $[0; 6]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 4$, $x = 0$, $x = 6$.

Tức là ta cần có

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = f(6) \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \end{cases} . (*)$$

$$\text{---} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \\ f(0) = \sqrt{0} = 0 \end{cases} ;$$

$$\text{---} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} (1+m) = 1+m \\ f(6) = 1+m \end{cases} ;$$

$$\text{---} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (1+m) = 1+m \\ f(4) = 1+m \end{cases}$$

Khi đó $(*)$ trở thành $1+m = 2 \Leftrightarrow m = 1 < 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. Khi đó hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi nó liên tục tại $x = 1$, tức là ta cần có

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1). (*)$$

Ta có

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x > 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \\ 2-x & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2-x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow (*)$ không thỏa mãn với mọi $a \in \mathbb{R}$. Vậy không tồn tại giá trị thỏa yêu cầu.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 19. Biết rằng $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ (với a là tham số). Khẳng định nào dưới đây về giá trị a là đúng?

- A. a là một số nguyên. B. a là một số vô tỉ. C. $a > 5$. D. $a < 0$.

Lời giải.

Hàm số xác định và liên tục trên $[0; 1)$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1).(*)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} [(x+1)(\sqrt{x}+1)] = 4 \end{cases} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow a = 4.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 20. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. B. $f(x)$ không liên tục trên $(0; 2)$.
C. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$. D. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Để thấy hàm số liên tục trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-(\sqrt{2-x}+1)] = -2 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 1.$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 21. Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x-3}-x} & \text{khi } x > 3 \\ 1 - a^2x & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$.

A. $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. C. $-\frac{4}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải.

Điều kiện bài toán trở thành: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(3) = 1 - 3a^2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{4x-3}-x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-2)(\sqrt{4x-3}+x)}{1-x} = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (1 - a^2x) = 1 - 3a^3. \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow a_{\min} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ a^2x + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $a_{\max} = 3$. B. $a_{\max} = 0$. C. $a_{\max} = 1$. D. $a_{\max} = 2$.

Lời giải.

Ta cần có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2).(*)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(2) = 2a^2 - \frac{7}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} = \frac{1}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(a^2x + \frac{1}{4}\right) = 2a^2 - \frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow a = \pm 1 \Rightarrow a_{\max} = 1.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 23. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.
 B. $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$.
 C. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.
 D. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - \cos x) = 1 - \cos 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{0+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x = 0.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 24. Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ x-1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Hàm số liên tục tại $x = -1$.
 B. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty, -1); (1; +\infty)$.
 C. Hàm số liên tục tại $x = 1$.
 D. Hàm số liên tục trên khoảng $(-1, 1)$.

Lời giải.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; -1), (-1; 1), (1; +\infty)$.

$$\begin{aligned} \text{— Ta có } & \begin{cases} f(-1) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x-1) = -2 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x = -1. \\ \text{— Ta có } & \begin{cases} f(1) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 1. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & \text{khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

- A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.
 B. mọi điểm trừ $x = 0$.
 C. mọi điểm trừ $x = 1$.
 D. mọi điểm trừ $x = 0$ và $x = 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Để thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 0), (0; 1)$ và $(1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 0.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \Rightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **A**

□

$$\text{Câu 26. Cho hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x < 3, x \neq 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \\ \sqrt{x + 1} & \text{khi } x \geq 3 \end{cases} \text{ Hàm số liên tục tại:}$$

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x = 1$.

C. mọi điểm trừ $x = 3$.

D. mọi điểm trừ $x = 1$ và $x = 3$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$ và $(3; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x = 1.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(3) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 1) = 4 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x = 3.$$

Chọn đáp án **D**

□

$$\text{Câu 27. Số điểm gián đoạn của hàm số } h(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 3x - 1 & \text{khi } x > 2 \end{cases} \text{ là:}$$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải.

Hàm số $y = h(x)$ có TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y = h(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ và $(2; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} h(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ không liên tục tại } x = 0.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} h(2) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 1) = 5 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 2.$$

Chọn đáp án **A**

□

$$\text{Câu 28. Tính tổng } S \text{ gồm tất cả các giá trị } m \text{ để hàm số } f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ m^2x + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases} \text{ liên tục tại}$$

$x = 1$.

A. $S = -1$.

B. $S = 0$.

C. $S = 1$.

D. $S = 2$.

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Điều kiện bài toán trở thành $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1).(*)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (m^2x + 1) = m^2 + 1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow m^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow m = \pm 1 \Rightarrow S = 0. \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2 \end{cases}$$

Chọn đáp án **B**

□

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x \cos x & \text{khi } x < 0 \\ \frac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0 \leq x < 1 \\ x^3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại

A. mọi điểm thuộc $x \in \mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x = 0$.

C. mọi điểm trừ $x = 1$.

D. mọi điểm trừ $x = 0; x = 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Để thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ và $(1; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x \cos x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{1+x} = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 0.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ không liên tục tại } x = 1.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = -4x^3 + 4x - 1$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1)$.

C. Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-2; 0)$.

D. Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

(i) Hàm $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$(ii) \text{ Ta có } \begin{cases} f(-1) = -1 < 0 \\ f(-2) = 23 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm trên $(-2; -1)$, mà $(-2; -1) \subset (-2; 0) \subset (-\infty; 1)$. (1)

$$(iii) \text{ Ta có } \begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có nghiệm thuộc } \left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Kết hợp với (1) suy ra có các nghiệm thỏa: $-3 < x_1 < -1 < 0 < x_2 < \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 31. Cho phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1; 1)$.

B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.

C. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2; 1)$.

D. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0; 2)$.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + x + 1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có

$$(i) \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-1) = -3 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (-1; 0).$$

$$(ii) \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (0; 1).$$

$$(iii) \begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 15 \end{cases} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow f(x) = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (1; 2).$$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ đã cho có các nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1 < x_3 < 2$

Chọn đáp án **D**

□

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-2; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 2)$. Ta có

$$\text{— } \begin{cases} f(-2) = -3 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \cdot f(-1) < 0 \Rightarrow (1) \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (-2; -1).$$

$$\text{— } \begin{cases} f(-1) = 1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow (1) \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (-1; 0).$$

$$\text{— } \begin{cases} f(2) = 1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(2) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow (1) \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } (0; 2).$$

Như vậy phương trình (1) có ít nhất ba thuộc khoảng $(-2; 2)$. Tuy nhiên phương trình $f(x) = 0$ là phương trình bậc ba có nhiều nhất ba nghiệm. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có đúng nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ sao cho $f(-1) = 2$, $f(4) = 7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x) = 5$ trên đoạn $[-1; 4]$:

A. Vô nghiệm.

B. Có ít nhất một nghiệm.

C. Có đúng một nghiệm.

D. Có đúng hai nghiệm.

Lời giải.

Ta có $f(x) = 5 \Leftrightarrow f(x) - 5 = 0$. Đặt $g(x) = f(x) - 5$. Khi đó

$$\begin{cases} g(-1) = f(-1) - 5 = 2 - 5 = -3 \\ g(4) = f(4) - 5 = 7 - 5 = 2 \end{cases} \Rightarrow g(-1) \cdot g(4) < 0.$$

Vậy phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 4)$ hay phương trình $f(x) = 5$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 4)$

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 34. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để phương trình $x^3 - 3x^2 + (2m - 2)x + m - 3 = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$?

A. 19.

B. 18.

C. 4.

D. 3.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + (2m - 2)x + m - 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1 < -1 < x_2 < x_3$. Khi đó

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Ta có

$$f(-1) = (-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_3) > 0 \text{ (do } x_1 < -1 < x_2 < x_3).$$

$$\text{Mà } f(-1) = -m - 5 \text{ nên suy ra } -m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < -5.$$

Thử lại: Với $m < -5$, ta có

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ nên tồn tại } a < -1 \text{ sao cho } f(a) < 0. (1)$$

$$\text{— Do } m < -5 \text{ nên } f(-1) = -m - 5 > 0. (2)$$

$$\text{— } f(0) = m - 3 < 0. (3)$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ nên tồn tại } b > 0 \text{ sao cho } f(b) > 0. (4)$$

Từ (1) và (2), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; -1)$;

Từ (2) và (3), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$;

Từ (3) và (4), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0; +\infty)$.

Vậy khi $m < -5$ thỏa mãn $\Rightarrow [m \in (-10; 10)], m \in \mathbb{Z}, m \in \{-9; -8; -7; -6\}$. □

Câu 35. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x+a & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $\frac{15}{4}$.B. $-\frac{15}{4}$.C. $\frac{1}{4}$.

D. 1.

Lời giải.

— $f(2) = a + 4$.

— $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2) - 4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{1}{4}$.

— Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{1}{4} = a + 4 \Leftrightarrow a = -\frac{15}{4}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 36. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 2x + a & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $a = \frac{15}{4}$. B. $a = -\frac{15}{4}$. C. $a = \frac{1}{4}$. D. $a = 1$.

Lời giải.

Ta có $f(2) = a + 4$ và

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{4}.$$

Hàm số liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow a + 4 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{15}{4}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a; b]$ là

A. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$. B. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.
C. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$. D. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a; b]$ là $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ m + \frac{1-x}{1+x} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = 0$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(m + \frac{1-x}{1+x} \right) = m + 1 = f(0).$$

$$f(x) \text{ liên tục tại } x = 0 \text{ khi } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m = -2.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+2} - 2} & \text{khi } x > 2 \\ m^2x - 4m + 6 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$, m là tham số. Có bao nhiêu giá trị của m để

hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$?

A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải.

Ta có $f(2) = 2m^2 - 4m + 6$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (m^2x - 4m + 6) = 2m^2 - 4m + 6.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+2} - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2 - 3x + 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{x + 2 - 4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+2} + 2)}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} [(x-1)(\sqrt{x+2} + 2)] \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 6 = 4 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Vậy $m = 1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 40. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ mx - 4 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $m = 3$.

B. $m = 2$.

C. $m = -2$.

D. Không tồn tại m .

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có

$$— f(2) = 2m - 4.$$

$$— \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2.$$

$$— \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (mx - 4) = 2m - 4.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ khi

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2m - 4 = 2 \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy $m = 3$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 41. Tìm m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\sqrt{x-2} & \text{khi } x \geq 2 \\ 5x - 5m + m^2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $m = 2; m = 3$.

B. $m = -2; m = -3$.

C. $m = 1; m = 6$.

D. $m = -1; m = -6$.

Lời giải.

TXĐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

+ Xét trên $(2; +\infty)$ khi đó $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x-2}$.

$\forall x_0 \in (2; +\infty): \lim_{x \rightarrow x_0} (x_0^2 + 2\sqrt{x_0-2}) = x_0^2 + 2\sqrt{x_0-2} = f(x_0) \Rightarrow$ hàm số liên tục trên $(2; +\infty)$.

+ Xét trên $(-\infty; 2)$ khi đó $f(x) = 5x - 5m + m^2$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số liên tục trên $(-\infty; 2)$.

+ Xét tại $x_0 = 2$, ta có $f(2) = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + 2\sqrt{x-2}) = 4; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (5x - 5m + m^2) = m^2 - 5m + 10.$$

Để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ thì nó phải liên tục tại $x_0 = 2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 5m + 10 = 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^{2016} + x - 2}{\sqrt{2018x + 1} - \sqrt{x + 2018}} & \text{khi } x \neq 1 \\ k & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm k để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

- A. $k = 2\sqrt{2019}$. B. $k = \frac{2017\sqrt{2018}}{2}$. C. $k = 1$. D. $\frac{2016}{2017}\sqrt{2019}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2016} + x - 2}{\sqrt{2018x + 1} - \sqrt{x + 2018}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{2016} - 1 + x - 1)(\sqrt{2018x + 1} + \sqrt{x + 2018})}{2018x + 1 - (x + 2018)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)[(x^{2015} + x^{2014} + \dots + 1) + 1](\sqrt{2018x + 1} + \sqrt{x + 2018})}{2018(x - 1) - (x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(x^{2015} + x^{2014} + \dots + 1) + 1](\sqrt{2018x + 1} + \sqrt{x + 2018})}{2017} \\ &= \frac{2017 \cdot 2\sqrt{2019}}{2017} = 2\sqrt{2019}. \end{aligned}$$

Vậy để hàm số liên tục tại $x = 1$ thì $k = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2\sqrt{2019}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{2x + a}{x^2 + 1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giá trị của a để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ là

A. 1. B. -2. C. 3. D. 4.

Lời giải.

Ta xét $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 - 2) = 0$ và $f(1) = 0$

$$\text{và } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x + a}{x^2 + 1} = \frac{a + 2}{2}.$$

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \frac{a + 2}{2} = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 44. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ ax + 3 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $a = \frac{1}{6}$. B. $a = -1$. C. $a = -\frac{4}{3}$. D. $a = \frac{4}{3}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với $x \neq 2$ thì hàm số đã cho liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$, $(2; +\infty)$.

Như vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi nó liên tục tại $x = 2$.

Ta có $f(2) = 2a + 3$.

Mặt khác

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x - 2)}{(x - 2)(\sqrt[3]{16x^2} + 2\sqrt[3]{4x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{\sqrt[3]{16x^2} + 2\sqrt[3]{4x} + 4} = \frac{1}{3}.$$

Hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$ khi $2a + 3 = \frac{1}{3}$ hay $a = -\frac{4}{3}$.

Vậy với $a = -\frac{4}{3}$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 45. Cho hàm số $y = \begin{cases} \frac{1 - x^3}{1 - x} & \text{khi } x < 1 \\ 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hãy chọn kết luận đúng.

- A. y liên tục phải tại $x = 1$. B. y liên tục tại $x = 1$.
C. y liên tục trái tại $x = 1$. D. y liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Viết lại hàm số $y = \begin{cases} 1 + x + x^2 & , \text{khi } x < 1 \\ 1 & , \text{khi } x \geq 1. \end{cases}$

Có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 + x + x^2) = 3$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \neq 3$.

Vậy y liên tục phải tại $x = 1$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 46. Tìm giá trị của tham số a để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ a & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 3$.

A. $a = 0$. B. $a = 1$. C. $a = -1$. D. $a = 2$.

Lời giải.

Khi $x \neq 3$ ta có $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2) = 1$.

Khi $x = 3$ ta có $f(3) = a$.

Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow 1 = a$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 47. Tìm m để hàm số $y = \begin{cases} \frac{2\sqrt[3]{x} - x - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $-\frac{4}{3}$. B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt[3]{x} - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(\sqrt[3]{x} - 1) - (x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} - 1 \right) = -\frac{1}{3}.$$

Dễ thấy hàm số liên tục khi $x \neq 1$. Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{3} = m + 1 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}.$$

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m = -\frac{4}{3}$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 48. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại

$x = 1$.

A. $m = 0$. B. $m = 6$. C. $m = 4$. D. $m = 2$.

Lời giải.

Ta có:

$$\text{— } f(1) = m + 3.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 3 = m + 3 \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2a - \frac{5}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)$

liên tục tại $x = 0$.

A. $a = -\frac{3}{4}$. B. $a = \frac{4}{3}$. C. $a = -\frac{4}{3}$. D. $a = \frac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ta lại có } f(0) = 2a - \frac{5}{4}.$$

$$\text{Để hàm số liên tục tại } x = 0 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \frac{1}{4} = 2a - \frac{5}{4} \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 50. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2a - \frac{5}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)$

liên tục tại $x = 0$.

A. $a = -\frac{3}{4}$.

B. $a = \frac{4}{3}$.

C. $a = -\frac{4}{3}$.

D. $a = \frac{3}{4}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 (\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ta lại có } f(0) = 2a - \frac{5}{4}.$$

$$\text{Để hàm số liên tục tại } x = 0 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \frac{1}{4} = 2a - \frac{5}{4} \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 51. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x < -1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ liên tục tại $x = -1$.

A. $m = -\frac{3}{2}$.

B. $m = -\frac{5}{2}$.

C. $m = \frac{3}{2}$.

D. $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\text{— } f(-1) = -m + 2.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -m + 2.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x+2}{x-1} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x = -1 \Leftrightarrow f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) \Leftrightarrow -m + 2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 52. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

A. $a = 0$.

B. $a = -1$.

C. $a = 2$.

D. $a = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2;$$

$$\text{— } f(1) = a.$$

$$\text{— } \text{Để hàm số liên tục tại điểm } x_0 = 1 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a = 2.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 53. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ m & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $m = 3$. B. $m = 1$. C. $m = 2$. D. $m = 0$.

Lời giải.

Hàm số liên tục tại $x = 2$ khi $m = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 54. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1}, & \text{nếu } x > 1 \\ mx + m + \frac{1}{4}, & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$, (m là tham số). Giá trị m để hàm số liên tục trên

$\mathbb{R}$ là

A. $m = 0$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = 2$. D. $m = 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Trên $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$ hàm số $f(x)$ liên tục.

Xét tính liên tục của $f(x)$ tại $x = 1$.

Ta có $f(1) = 2m + \frac{1}{4}$.

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5}{\sqrt{5x-1}+2} = \frac{5}{4}$.

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (mx + m + \frac{1}{4}) = 2m + \frac{1}{4}$.

Ta có $f(x)$ liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2m + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 55. Cho các mệnh đề:

1. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại $x_0 \in (a; b)$ sao cho $f(x_0) = 0$.
2. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.
3. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục, đơn điệu trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trên $(a; b)$.

Trong ba mệnh đề trên

- A. Có đúng hai mệnh đề sai. B. Cả ba mệnh đề đều đúng.
C. Cả ba mệnh đề đều sai. D. Có đúng một mệnh đề sai.

Lời giải.

Theo tính chất hàm số liên tục thì mệnh đề 1 sai, mệnh đề 2, 3 đúng.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 56. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} -8 + 4a - 2b + c > 0 \\ 8 + 4a + 2b + c < 0 \end{cases}$. Khi đó số giao điểm của đồ thị hàm số

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$ với trục Ox là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ bậc ba nên có đồ thị cắt Ox tại nhiều nhất 3 điểm. (1)

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, suy ra $\exists \alpha < -2$ sao cho $f(\alpha) < 0$.

Lại có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, suy ra $\exists \beta > 2$ sao cho $f(\beta) > 0$.

Hơn nữa $y(-2) = -8 + 4a - 2b + c > 0$ và $y(2) = 8 + 4a + 2b + c < 0$.

Từ đó suy ra $y(\alpha) \cdot y(-2) < 0$, $y(-2) \cdot y(2) < 0$, $y(2) \cdot y(\beta) < 0$.

Do đó đồ thị hàm số cắt Ox tại ít nhất 3 điểm. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại đúng ba điểm.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 57. Cho các mệnh đề:

1. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại $x_0 \in (a; b)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

2. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.
 3. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục, đơn điệu trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trên $(a; b)$.

Trong ba mệnh đề trên

- A. Có đúng hai mệnh đề sai. B. Cả ba mệnh đề đều đúng.
 C. Cả ba mệnh đề đều sai. D. Có đúng một mệnh đề sai.

Lời giải.

Theo tính chất hàm số liên tục thì mệnh đề 1 sai, mệnh đề 2, 3 đúng.

Chọn đáp án **D** □

Câu 58. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} -8 + 4a - 2b + c > 0 \\ 8 + 4a + 2b + c < 0 \end{cases}$. Khi đó số giao điểm của đồ thị hàm số

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$ với trục Ox là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Lời giải.

Hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ bậc ba nên có đồ thị cắt Ox tại nhiều nhất 3 điểm. (1)

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, suy ra $\exists \alpha < -2$ sao cho $f(\alpha) < 0$.

Lại có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, suy ra $\exists \beta > 2$ sao cho $f(\beta) > 0$.

Hơn nữa $y(-2) = -8 + 4a - 2b + c > 0$ và $y(2) = 8 + 4a + 2b + c < 0$.

Từ đó suy ra $y(\alpha) \cdot y(-2) < 0$, $y(-2) \cdot y(2) < 0$, $y(2) \cdot y(\beta) < 0$.

Do đó đồ thị hàm số cắt Ox tại ít nhất 3 điểm. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại đúng ba điểm.

Chọn đáp án **D** □

Câu 59. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{khi } x < -2 \\ m & \text{khi } x \geq -2 \end{cases}$. Tìm m để tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

- A. $m = 5$. B. $m = -1$. C. $m = -3$. D. $m = 3$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} m = m$ và $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (1 - x^2) = -3$.

Để tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ thì $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \Leftrightarrow m = -3$

Chọn đáp án **C** □

Câu 60. Cho hàm số $y = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{nếu } x \neq 3 \\ m & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$. Hàm số đã cho liên tục tại $x = 3$ khi m bằng

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 4$. D. $m = -4$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục tại $x = 3$ khi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = m \\ &\Leftrightarrow m = -4. \end{aligned}$$

Chọn đáp án **D** □

Câu 61. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$ ($a < b$). Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số liên tục trên $(a; b)$ khi và chỉ khi hàm số liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.
 B. Hàm số liên tục trên $[a; b]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
 C. Cho $x_0 \in (a; b)$, hàm số liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
 D. Cho $x_0 \in (a; b)$, hàm số có giới hạn là một số thực L tại x_0 khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

Lời giải.

Hàm số liên tục trên $(a; b)$ khi và chỉ khi hàm số liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

Chọn đáp án **A** □

Câu 62. Hàm số nào trong các hàm số sau liên tục tại điểm $x = 1$?

A. $h(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ 3x-1, & x < 1 \end{cases}$

B. $f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$

C. $g(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ 2x-3, & x < 1 \end{cases}$

D. $k(x) = \sqrt{1-2x}$

Lời giải.

Xét hàm số $h(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ 3x-1, & x < 1 \end{cases}$. Ta có

$$h(1) = 2; \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x-1) = 2.$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = h(1) = 2.$$

Vậy $h(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Chọn đáp án **A**

□

Câu 63. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $m = -1$.

B. $m = -2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 2$.

Lời giải.

Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = m \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = m \Leftrightarrow m = -1.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 64. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x = 1$?

A. $y = \frac{x-1}{x^2+x+1}$

B. $y = \frac{x^2+2}{x-1}$

C. $y = (x-1)(x^2+x+1)$

D. $y = \frac{x^2-x+1}{x+1}$

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+2}{x-1} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+2}{x-1} = -\infty$ nên hàm số $y = \frac{x^2+2}{x-1}$ gián đoạn tại điểm $x = 1$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 65. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ -2ax+1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$.

Xác định a để hàm số liên tục tại điểm $x = 2$.

A. $a = 2$.

B. $a = 1$.

C. $a = -1$.

D. $a = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = 5$ và $\lim_{x \rightarrow 2} (-2ax+1) = -4a+1$.

Để hàm số liên tục tại điểm $x = 2$ thì $-4a+1 = 5 \Leftrightarrow a = -1$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 66. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x > 2 \\ x^2+m & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $m = -1$.

B. $m = 0$.

C. $m = 3$.

D. $m = -6$.

Lời giải.

$f(2) = 4+m$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4+m$. Hàm số liên tục tại $x = 2$ khi

$$4+m = 3 \Leftrightarrow m = -1.$$

Chọn đáp án **A**

□

Câu 67. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ a & \text{khi } x = 0. \end{cases}$ Tìm a để $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

A. 1.

B. -1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải.

Hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = a \Leftrightarrow a = 1$.

Chọn đáp án **A** □

Câu 68. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + m & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x - 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$.

A. $m = 2$.B. $m = 1$.C. $m = 0$.D. $m = 3$.**Lời giải.** $f(2) = 4 + m$;

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + m) = 4 + m.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) = 5.$$

Hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4 + m = 5 \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án **B** □

Câu 69. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 7x - 6}{x - 3} & \text{khi } x > 3 \\ x^2 + 5mx + 2 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

A. $m = 7$.B. $m = 3$.C. $m = 2$.D. $m = 0$.**Lời giải.**Tập xác định của hàm số $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với $x > 3$ thì $f(x)$ là hàm số phân thức hữu tỉ nên nó liên tục trên khoảng $(3; +\infty)$.

Với $x < 3$ thì $f(x)$ là hàm số đa thức nên nó liên tục trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) = 3^2 + 15m + 2 = 15m + 11.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^2 - 7x - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(3x + 2)(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x + 2) = 11.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ khi hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 3$, tức là

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Leftrightarrow 15m + 11 = 11 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ khi $m = 0$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 70. Giá trị của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2m - \frac{5}{4}x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$ là

A. 3.

B. $\frac{4}{3}$.C. $\frac{1}{8}$.D. $\frac{1}{2}$.**Lời giải.**

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2m - \frac{5}{4}x\right) = 2m \text{ và } f(0) = 2m.$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 2m = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \frac{1}{8}.$$

Chọn đáp án **C** □

Câu 71. Giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{nếu } x > 1 \\ ax - \frac{1}{2} & \text{nếu } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$ là

A. $\frac{1}{2}$. B. -1 . C. 1 . D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(1) = a - \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(ax - \frac{1}{2} \right) = a - \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 72. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x > 4 \\ mx+1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục trên

$\mathbb{R}$.

A. $m = -8$ hoặc $m = \frac{7}{4}$.

B. $m = 8$ hoặc $m = -\frac{7}{4}$.

C. $m = -\frac{7}{4}$.

D. $m = \frac{7}{4}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 4)$, $(4; +\infty)$. Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi liên tục tại điểm $x = 4$.

Hàm số liên tục tại điểm $x = 4$ khi $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 8 = 4m + 1 \Leftrightarrow m = \frac{7}{4}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 73. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } \cos x \geq 0 \\ 1 + \cos x & \text{nếu } \cos x < 0 \end{cases}$. Hỏi hàm số f có bao nhiêu điểm gián đoạn trên khoảng $(0; 2018)$?

A. 2018.

B. 1009.

C. 542.

D. 321.

Lời giải.

Do các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Ta xét hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \\ 1 + \cos x & \text{nếu } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$

Ta xét $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (1 + \cos x) = 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Tương tự $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Do đó hàm số liên tục tại $x = \frac{\pi}{2}$.

Mặt khác, ta xét $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \sin x = -1 = f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Tương tự $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} (1 + \cos x) = 1 \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. Do đó hàm số gián đoạn tại $x = \frac{3\pi}{2}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} \sin x = 0 = f(2\pi)$.

Vậy điểm gián đoạn của hàm số có dạng $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.

Để $x \in (0; 2018)$ suy ra $0 < \frac{3\pi}{2} + k2\pi < 2018 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < k < \frac{1}{2\pi} \left(2018 - \frac{3\pi}{2}\right)$, vì $k \in \mathbb{Z}$ suy ra $k \in \{0, 1, 2, \dots, 320\}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 74. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(I) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

(II) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

(III) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

A. Chỉ (II). B. Chỉ (I) và (III). C. Chỉ (II) và (III). D. Chỉ (I).

Lời giải.

Hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ có tập xác định $[0; +\infty) \setminus \{1\}$.

Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1 \Rightarrow$ (I) đúng.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ (III) đúng.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 75. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ m & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$, với m tham số thực. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = -1$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = 2$.

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 76. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} & \text{khi } x \neq \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & \text{khi } x = \sqrt{3} \end{cases}$ Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

(I). $f(x)$ liên tục tại $x = \sqrt{3}$.

(II). $f(x)$ gián đoạn tại $x = \sqrt{3}$.

(III). $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. Chỉ I và II.

B. Chỉ I và III.

C. Cả I, II, III đều đúng.

D. Chỉ II và III.

Lời giải.

Với $x_0 \in (-\infty; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} = \frac{x_0^2-3}{x_0-\sqrt{3}} = f(x_0)$. Suy ra hàm số liên tục với mọi $x_0 \in (-\infty; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ (1)

Ta có $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x-\sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} (x+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} = f(\sqrt{3})$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 77. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x}{x+1} & \text{với } x < 0, x \neq -1 \\ 1 & \text{với } x = -1 \\ \sqrt{x} \cos x & \text{với } x \geq 0. \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ liên tục tại mọi điểm, trừ điểm $x = -1$.

C. $f(x)$ liên tục tại mọi điểm, trừ điểm $x = 0$.

D. $f(x)$ liên tục tại mọi điểm, trừ điểm $x = 0$ và $x = 1$.

Lời giải.

Ta có:

$f(x) = \sqrt{x} \cos x$ với $x \geq 0$ nên $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$.

$f(x) = \frac{x^3-x}{x+1}$ với $x < 0, x \neq -1$ nên $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; 0)$.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} x(x-1) = 2 \neq f(-1)$, suy ra $f(x)$ gián đoạn tại $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x+1)} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos x = 0 = f(0). \text{ Vậy } f(x) \text{ liên tục tại } x = 0.$$

Vậy $f(x)$ liên tục tại mọi $x \neq -1$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 78. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{với } x \neq 2 \\ 2m + 1 & \text{với } x = 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của m sau đây để hàm số $f(x)$

liên tục tại $x = 2$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. -1.

Lời giải.

TXĐ: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$x = 2 \in \mathcal{D}, f(2) = 2m + 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 1.$$

$$\text{Để hàm số liên tục tại } x = 2 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 1 = 2m + 1 \Leftrightarrow m = 0.$$

Chọn đáp án **(A)** □

Câu 79. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2 x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ (1 - m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 = 2(1 - m)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 80. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ -2ax + 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục tại điểm $x = 2$.

A. $a = 2$.

B. $a = \frac{1}{2}$.

C. $a = 1$.

D. $a = -1$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 3) = 2 + 3 = 5.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2ax + 1) = -2a \cdot 2 + 1 = -4a + 1.$$

$$f(2) = -4a + 1.$$

Khi đó, để hàm số liên tục tại $x = 2$ thì

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 5 = -4a + 1 \Leftrightarrow a = -1.$$

Vậy $a = -1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 81. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ mx + 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 2$.

- A. $m = \frac{17}{2}$. B. $m = \frac{15}{2}$. C. $m = \frac{13}{2}$. D. $m = \frac{11}{2}$.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12.$$

$$f(2) = 2m + 1$$

Hàm số liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow m = \frac{11}{2}$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 82. Tìm P để hàm số $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}, \forall x > 1 \\ 6Px - 3, \forall x \leq 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $P = \frac{5}{6}$. B. $P = \frac{1}{2}$. C. $P = \frac{1}{6}$. D. $P = \frac{1}{3}$.

Lời giải.

/Tập xác định của hàm số : $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Với $x > 1$ và $x < 1$ hàm số xác định nên liên tục.

Xét tại $x = 1$, ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = 6P - 3 = y(1)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 3) = -2$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} y = y(1) \Leftrightarrow 6P - 3 = -2 \Leftrightarrow P = \frac{1}{6}$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 83. Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} & , \text{ với } x \neq 1 \\ 2ax - 1 & , \text{ với } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $a - b$.

- A. 0. B. -1. C. -5. D. 7.

Lời giải.

Nếu $x = 1$ không là nghiệm của $x^2 + ax + b = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} (x) = \infty$, nên hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$, vô lý.

Vậy $x = 1$ là nghiệm của $x^2 + ax + b = 0$, hay $a + b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -a - 1$.

Khi đó: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - a - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1 + a) = 2 + a$.

Mà $f(1) = 2a - 1$, nên để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $2 + a = 2a - 1 \Leftrightarrow a = 3$, suy ra $b = -4$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 84. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

- A. $m = 3$. B. $m = 1$. C. $m = \frac{3}{4}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $f(1) = m$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{3}{4}$. Do đó, hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 85. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - m & \text{khi } x \geq 0 \\ mx + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $m = 1$. B. $m = 0$. C. $m = -1$. D. $m = -2$.

Lời giải.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 0$. Do đó,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} - m) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (mx + 1) = -1 \Leftrightarrow m = -1.$$

Chọn đáp án **C**

□

Câu 86. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 8 + a^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số liên tục tại $x = 1$.

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

Để hàm số liên tục tại $x = 1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$. Do giả thiết ta có $f(1) = 8 + a^2$ và

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(ax+2) \cdot (x-1)}{\sqrt{x+3} - 2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(ax+2) \cdot (x-1) (\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{(ax+2) \cdot (x-1) (\sqrt{x+3} + 2)}{x-1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[(ax+2) \cdot (\sqrt{x+3} + 2) \right] \\ &= 4(a+2) = 4a + 8. \end{aligned}$$

Suy ra $4a + 8 = 8 + a^2 \Leftrightarrow a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases}$. Vậy tồn tại 2 giá trị của a để hàm số liên tục tại $x = 1$.

Chọn đáp án **D**

□

Câu 87. Hàm số nào trong các hàm số dưới đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y = |x|$.B. $y = \frac{x}{x+1}$.C. $y = \sin x$.D. $y = \frac{x}{|x|+1}$.

Lời giải.

Hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ nên không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **B**

□

Câu 88. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) \geq x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x$, $\forall x > 0$ và $f(1) = -1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0; +\infty)$.B. phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(0; 1)$.C. phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(1; 2)$.D. phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(2; 5)$.

Lời giải.

Ta có $x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x \geq 2\sqrt{2x^2} - 2x \geq 0 \forall x > 0$, nên $f'(x) > 0 \forall x > 0$, hay hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Suy ra $f(0) < f(1) = -1$ và $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(0; +\infty)$.

Mà

$$f(2) = f(1) + \int_1^2 f'(x) dx \geq \int_1^2 \left(x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x \right) dx = \frac{16}{5} > 0.$$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 89. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 8 + a^2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số liên tục tại $x = 1$?

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(ax+2)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} [(ax+2)(\sqrt{x+3}+2)] = 4a+8$.

Lại có $f(1) = 8 + a^2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 4a+8 = 8+a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=4 \end{cases}$.

Vậy có 2 giá trị của tham số a thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Chọn đáp án **D** □

Câu 90. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{khi } |x| \leq 1 \\ x+1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
 B. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
 C. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
 D. Hàm số gián đoạn tại $x = \pm 1$.

Lời giải.

Ta có

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sin \pi x = \sin \pi = 0$. Suy ra hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \sin \pi x = \sin(-\pi) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0$; $f(-1) = \sin(-\pi) = 0$. Suy ra hàm số liên tục tại $x = -1$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 91. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x+a-1 & \text{nếu } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$. Tìm tất cả giá trị của a để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 0$.

- A. $a = 1$. B. $a = 3$. C. $a = 2$. D. $a = 4$.

Lời giải.

Ta có $f(0) = a-1$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x+a-1) = a-1$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x(\sqrt{1+2x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+2x}+1} = 1$.

Hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow a-1 = 1 \Leftrightarrow a = 2$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 92. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x > 4 \\ mx+1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 4$.

- A. $m = -8$. B. $m = 8$. C. $m = -\frac{7}{4}$. D. $\frac{7}{4}$.

Lời giải.

Hàm số liên tục khi $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 8 = 4m+1 \Leftrightarrow m = \frac{7}{4}$.

Chọn đáp án **D** □

Câu 93. Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$?

- A. $2x^2 - 3x + 4 = 0$. B. $(x-1)^5 - x^7 - 2 = 0$.
 C. $3x^4 - 4x^2 + 5 = 0$. D. $3x^{2017} - 8x + 4 = 0$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = 3x^{2017} - 8x + 4 = 0$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f(0) = 4$; $f(1) = -1 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = -4 < 0$ suy ra phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 94. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2m + 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = \frac{13}{2}$.

C. $m = \frac{11}{2}$.

D. $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$, $f(2) = 2m + 1$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 12 = 2m + 1 \Leftrightarrow m = \frac{11}{2}.$$

Chọn đáp án **(C)**

□

Câu 95. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$.

A. $-\frac{3}{4}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. 0.

D. 2.

Lời giải.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + mx) = m + 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{4}.$$

Và $f(1) = m + 1$. Khi đó hàm số liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, hay

$$m + 1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}$$

Chọn đáp án **(A)**

□

Câu 96. Giá trị của b để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2b + 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$ là

A. $\frac{1}{4}$.

B. $-\frac{3}{4}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $-\frac{3}{8}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{4}; \text{ và } f(2) = 2b + 1.$$

$$\text{Hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } x = 2 \text{ khi và chỉ khi } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{1}{4} = 2b + 1 \Leftrightarrow b = -\frac{3}{8}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 97. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$.

B. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

C. $f(\sqrt{2}) < 0$.

D. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

Lời giải.

Ta thấy mệnh đề: $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ và mệnh đề: $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$ xung khắc nhau, do đó ta chỉ cần kiểm tra tính liên tục của hàm $f(x)$ tại $x = 0$.

$$\text{Ta có } f(0) = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}.$$

Do $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$. Vậy hàm số gián đoạn tại $x = 0$.

Chọn đáp án **(D)**

□

Câu 98. Tìm a để các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{ax^2+(2a+1)x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 3 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{6}$. D. 1.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{x(ax+2a+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{(ax+2a+1)(\sqrt{4x+1}+1)} = \frac{2}{2a+1}.$$

Hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{2a+1} = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 99. Tìm a để hàm số $y = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a+2x & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$.

A. $a = \frac{1}{4}$. B. $a = 1$. C. $a = -\frac{15}{4}$. D. $a = 4$.

Lời giải.

Ta có $f(2) = 4 + a$ và

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}.$$

Do đó hàm số liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow a = -\frac{15}{4}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 100. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

A. $a = \frac{1}{8}$. B. $a = +\infty$. C. $a = -\frac{1}{8}$. D. $a = \frac{2-\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathcal{D} = [-3; +\infty) \setminus \{-1\}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-(x+3)}{(x-1)(x+1)(2+\sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x+1)(2+\sqrt{x+3})} = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a = -\frac{1}{8}$.

Chọn đáp án **C** □

Câu 101. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ \sqrt{x^2+1}-m & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = -2$. D. $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Với $x > 0$, ta có $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

Với $x < 0$, ta có $f(x) = \sqrt{x^2+1}-m$ liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Tại $x = 0$, ta có

$$\text{— } f(0) = 1 - m.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sqrt{x^2+1}-m) = 1 - m.$$

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 1 - m = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 102. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $a = \frac{1}{2}$.

B. $a = -1$.

C. $a = -\frac{1}{2}$.

D. $a = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + 1) = a + 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} = f(1)$.

Hàm $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$.

Chọn đáp án **(C)** □

Câu 103. Trong các hàm số

$$f_1(x) = \sin x, f_2(x) = \sqrt{x+1}, f_3(x) = x^3 - 3x \text{ và } f_4(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x-1} & \text{khi } x \geq 1 \\ 2-x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

có tất cả bao nhiêu hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải.

— Hàm số $f_2(x) = \sqrt{x+1}$ không liên tục trên $\mathbb{R}$ vì có tập xác định $\mathcal{D} = [-1; +\infty)$.

— Hàm số $f_1(x) = \sin x$, $f_3(x) = x^3 - 3x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

— Ta xét tính liên tục của hàm số $f_4(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x-1} & \text{khi } x \geq 1 \\ 2-x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Hàm số $f_4(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Ta cần xét tính liên tục tại $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f_4(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + \sqrt{x-1}) = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^-} f_4(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2-x) = 1.$$

Vậy hàm số $f_4(x)$ liên tục tại $x = 1$ và do đó liên tục trên $\mathbb{R}$.

Kết luận: Có tất cả ba hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 104. Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} & \text{khi } x > 4 \\ 3x - m & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 4$ khi m nhận giá trị là

A. 44.

B. -20.

C. 20.

D. -44.

Lời giải.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (3x - m) = 12 - m$.

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x+4)(\sqrt{x}+2) = 32.$$

Mặt khác: $f(4) = 12 - m$.

Hàm số liên tục tại $x_0 = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 4^+} = \lim_{x \rightarrow 4^-} = f(4) \Leftrightarrow 12 - m = 32 \Leftrightarrow m = -20$.

Chọn đáp án **(B)** □

Câu 105. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ x + m & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi m nhận giá trị

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = -1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + m) = 1 + m$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = f(1) = 0$.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ thì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn đáp án **(D)** □

Câu 106. Tính $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 12x + 35}{25 - 5x}$.

A. $\frac{2}{5}$.

B. $-\frac{2}{5}$.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 12x + 35}{25 - 5x} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x-7)}{5(5-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x+7}{5} \\ &= \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án **A**

Câu 107. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi } x \neq 4 \\ a+2 & \text{khi } x = 4 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số

a để hàm số liên tục tại $x_0 = 4$.

A. $a = \frac{5}{2}$.

B. $a = -\frac{11}{6}$.

C. $a = 3$.

D. $a = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5}} \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

$f(4) = a + 2$.

Hàm số liên tục tại $x_0 = 4$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) \Leftrightarrow a + 2 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow a = -\frac{11}{6}$.

Chọn đáp án **B**

Câu 108. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{|2x^2 - 7x + 6|}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ a + \frac{1-x}{2+x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Biết a là giá trị để hàm số $f(x)$ liên tục tại

$x_0 = 2$, tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $-x^2 + ax + \frac{7}{4} > 0$.

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(a + \frac{1-x}{2+x}\right) = a - \frac{1}{4} = f(2)$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2x^2 - 7x + 6|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x+3) =$

-1 . Hàm số liên tục tại $x_0 = 2 \Leftrightarrow a - \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$.

$-x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{4} > 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{4} < x < 1$ suy ra $x = -1, x = 0$.

Chọn đáp án **D**

Câu 109. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm

$x = 2$.

A. $m = -3$.

B. $m = 1$.

C. $m = 3$.

D. $m = -1$.

Lời giải.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$.

Để $f(x)$ liên tục tại $x = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = m \Leftrightarrow m = 3$.

Chọn đáp án **C**

Câu 110. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+6}{3x^2-27}, x \neq \pm 3 \\ -\frac{1}{9}, x = \pm 3 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm x thuộc khoảng $(-3; 3)$.
 B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = -3$.
 C. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 3$.
 D. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Với $x \neq \pm 3$ thì $f(x) = \frac{2x+6}{3x^2-27}$ là hàm phân thức nên liên tục với $\forall x \neq \pm 3$.

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+6}{3x^2-27} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x+3)}{3(x+3)(x-3)} = \infty$ nên hàm số không liên tục tại $x = 3$.

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x+6}{3x^2-27} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)}{3(x+3)(x-3)} = \frac{-1}{9}$ nên hàm số liên tục tại $x = -3$.

Chọn đáp án **C**

□

Câu 111. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - m & \text{với } x \geq 0 \\ mx + 2 & \text{với } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $m = 2$. B. $m = \pm 2$. C. $m = -2$. D. $m = 0$.

Lời giải.

— Với $x > 0$ thì $f(x) = 2\sqrt{x} - m$ liên tục.

— Với $x < 0$ thì $f(x) = mx + 2$ liên tục.

— Tại $x = 0$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x} - m) = -m.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (mx + 2) = 2.$$

$f(0) = -m$. Nên, hàm số liên tục tại $x = 0$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -m = 2 \Leftrightarrow m = -2.$$

Vậy, hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m = -2$.

Chọn đáp án **C**

□

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. D	4. B	5. C	6. D	7. A	8. C	9. B	10. C
11. A	12. A	13. C	14. B	15. B	16. A	17. A	18. C	19. A	20. D
21. A	22. C	23. C	24. A	25. A	26. D	27. A	28. B	29. C	30. B
31. D	32. D	33. B	35. B	36. B	37. B	38. B	39. A	40. A	41. A
42. A	43. B	44. C	45. A	46. B	47. A	48. A	49. D	50. D	51. D
52. C	53. A	54. B	55. D	56. D	57. D	58. D	59. C	60. D	61. A
62. A	63. A	64. B	65. C	66. A	67. A	68. B	69. D	70. C	71. C
72. D	73. D	74. B	75. A	76. B	77. B	78. A	79. C	80. D	81. D
82. C	83. D	84. C	85. C	86. D	87. B	88. C	89. D	90. C	91. C
92. D	93. D	94. C	95. A	96. D	97. D	98. C	99. C	100. C	101. B
102. C	103. D	104. B	105. D	106. A	107. B	108. D	109. C	110. C	111. C