

KẾ HOẠCH HOẠT ĐỘNG

Học kỳ II

Tuần	Thứ	Nội dung
20		
21		
22		

23		
24		
25		
26		

27		
28		
29		

30		
31		
32		
33		

34		
35		

ĐẠI SỐ & GIẢI TÍCH

Chương 3. DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG & CẤP SỐ NHÂN

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

A. LÝ THUYẾT

Bước 1. Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$

Bước 2. Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$. (giả thiết quy nạp)

Bước 3. Chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = \dots\dots\dots$

Chú ý

✓ Trong bước 3, ta phải sử dụng giả thiết quy nạp (Bước 2) để chứng minh cho $n = k + 1$

✓ Nếu đề yêu cầu chứng minh mệnh đề đúng với $n \geq p$, ở Bước 1, ta sẽ kiểm tra mệnh đề đúng với $n = \dots\dots\dots$, còn giả thiết quy nạp thì $n = k \geq \dots\dots\dots$

Ví dụ: Chứng minh rằng

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

b) $n^3 - n$ chia hết cho 3, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

c) $3^n > 3n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $n \geq 2$

B. THỰC HÀNH

3.1.1. Chứng minh rằng các đẳng thức sau đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

b) $2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1) = \frac{n(3n + 1)}{2}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$

d) $1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{6}$

e) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$

f) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n + 1}{2n}$

g) $1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$

h) $1.4 + 2.7 + 3.10 + \dots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$

3.1.2. Với $n \in \mathbb{N}^*$, chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $3^n > 3n + 1, \forall n \geq 2$

b) $3^{n-1} > n(n + 2), \forall n \geq 4$

c) $2^{n+1} > 2n + 3, \forall n \geq 2$

d) $2^{n-3} > 3n - 1, \forall n \geq 8$

e) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}, \forall n \geq 2$

f) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}, \forall n \geq 2$

3.1.3. Chứng minh rằng với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

a) $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3

b) $13^n - 1$ chia hết cho 6

c) $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9

d) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7

e) $7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5

DÃY SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA

1. Định nghĩa dãy số

Mỗi số u xác định trên tập các số nguyên dương được gọi là một **dãy số vô hạn** (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$u: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \mapsto u(n) = u_n$$

- (u_n) : dãy số (u_n)
- u_1 : số hạng
- u_n : số hạng thứ n , còn gọi là số hạng

2. Định nghĩa dãy số hữu hạn

Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{N}^*$, được gọi là dãy số hữu hạn.

Khi đó dãy số có m số hạng, với số hạng đầu u_1 và số hạng cuối u_m .

Ví dụ 1. -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13 là một dãy số hữu hạn có $u_1 = \dots$ và $u_7 = \dots$

II. CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

1. Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

Ví dụ 2. Viết 5 số hạng đầu của dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2^n}{3n-1}$.

2. Dãy số cho bằng phương pháp mô tả

Ví dụ 3. Dãy số (u_n) với các số hạng là giá trị gần đúng thiếu của số π với sai số tuyệt đối 10^{-n} thì $u_1 = 3,1$; $u_2 = 3,14$; $u_3 = 3,131$; $u_4 = 3,1415$; ...

3. Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi

Ví dụ 4. Dãy số Fibonacci được xác định bởi công thức truy hồi sau

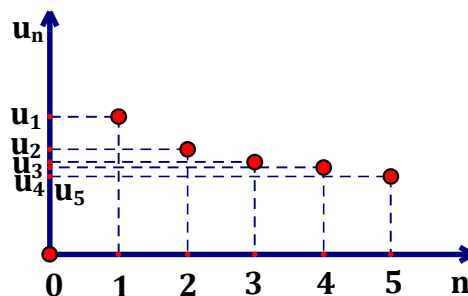
$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases} \quad \text{với } n \geq 3$$

Hãy liệt kê 5 số hạng đầu của dãy số trên.

III. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA DÃY SỐ

Vì dãy số là một hàm số trên $\mathbb{N}^*$ nên ta có thể biểu diễn dãy số bằng đồ thị. Khi đó, trong mặt phẳng tọa độ, dãy số được biểu diễn bằng các điểm có tọa độ $(n; u_n)$.

Ví dụ 5. Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n+1}{n}$ có biểu diễn hình học như sau:



IV. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM VÀ DÃY SỐ BỊ CHẶN

1. Dãy số tăng, dãy số giảm

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số** nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số** nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 6. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) sau, biết:

a) $u_n = 2n - 1$

b) $u_n = \frac{1}{n}$

2. Dãy số bị chặn

Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn** nếu tồn tại số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn** nếu tồn tại số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới

Ví dụ 7. Dãy số Fibonacci bị chặn dưới vì $u_n \geq \dots, \forall n \in \mathbb{N}^*$;

Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$ bị chặn vì $\dots < \frac{1}{n} \leq \dots, \forall n \in \mathbb{N}^*$

B. THỰC HÀNH

3.2.1. Viết 5 số hạng đầu của các dãy số có số hạng tổng quát u_n cho bởi công thức:

a) $u_n = \frac{n}{2^n - 1}$

b) $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$

c) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

d) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

e) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_1 = 15, u_2 = 9 \\ u_{n+1} = u_n - u_{n-1} \end{cases}$

3.2.2. Bằng phương pháp quy nạp, hãy chứng minh các công thức số hạng tổng quát sau:

a) $u_n = 3n - 4$ với $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$

b) $u_n = \sqrt{n+8}$ với $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$

3.2.3. Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n của các dãy số (u_n) cho bởi:

a) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$

3.2.4. Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n) , biết:

a) $u_n = \frac{5n}{3^{n+1}}$

b) $u_n = \frac{2^{n+2}}{\sqrt{n}}$

c) $u_n = \frac{2n+1}{3n-2}$

d) $u_n = \frac{2-n}{\sqrt{n}}$

e) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$

f) $u_n = (-1)^n \frac{n+3}{n+4}$

g) $u_n = \frac{n^n + n + 1}{n^2 + 1}$

h) $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$

3.2.5. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) , biết:

$$\text{a) } u_n = \cos \frac{\pi}{2n}$$

$$\text{b) } u_n = (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n}$$

$$\text{c) } u_n = 2n^2 - 1$$

$$\text{d) } u_n = \frac{1}{n(n+2)}$$

$$\text{e) } u_n = \frac{1}{2^n - 1}$$

$$\text{f) } u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n}$$

CẤP SỐ CỘNG

A. LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA

Cấp số cộng là một số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi d .

Số d được gọi là công của cấp số cộng.

$$u_{n+1} = \quad + d, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Ví dụ 1. Ba bài kiểm tra một tiết của bạn Nhân lập thành một cấp số cộng, trong đó điểm hai bài đầu lần lượt là 1,2 và 3,6. Hỏi điểm kiểm tra một tiết lần 3 của Nhân được bao nhiêu điểm?

II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + \quad d, \quad \forall n \geq 2$$

Ví dụ 2. Bạn Nhân hít đất mỗi lần chỉ được 10 cái. Bạn quyết tâm nâng con số này lên bằng cách luyện tập, cứ mỗi ngày sẽ tăng thêm 2 cái. Hỏi sau một tuần, bạn Nhân sẽ hít đất được mấy cái?

III. TÍNH CHẤT

Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là:

$$u_{k-1} + u_{k+1} = \quad u_k, \quad \forall k \geq 2$$

Ví dụ 3. Ba bài kiểm tra một tiết của bạn Nhân lập thành một cấp số cộng, trong đó bài đầu và bài cuối lần lượt là 1,2 và 3,6. Hỏi điểm kiểm tra một tiết lần 2 của Nhân được bao nhiêu điểm?

IV. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ CỘNG

Cho cấp số cộng (u_n) . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + \quad) = \frac{n}{2}(\quad u_1 + [\quad]d)$$

Ví dụ 4. Bạn Nhân trồng 3003 cây theo hình một tam giác như sau: hàng thứ 1 có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây... Hỏi có bao nhiêu hàng?

B. THỰC HÀNH

3.3.1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng, khi đó, hãy tìm công sai của cấp số cộng đó:

a) $u_n = n^2$

b) $u_n = \frac{n}{2} - 3$

c) $u_n = \frac{7-3n}{2}$

d) $u_n = (-1)^n + 2n$

3.3.2. Hãy điền các số thích hợp vào ô trống:

u_1	d	u_n	n	S_n
-2		55	20	
	-4		15	120
3	$\frac{4}{27}$	7		
		17	12	72
2	-5			-205

3.3.3. Tìm số hạng đầu và công sai của các cấp số cộng sau:

a) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_2 - u_4 = 5 \\ u_1^2 + u_2^2 = 25 \end{cases}$

3.3.4. Một cấp số cộng có 16 số hạng, biết tổng của số hạng đầu và cuối là 45. Hãy tính tổng của các số hạng đó.

3.3.5. Cho một cấp số cộng có $u_5 + u_{31} = 24$. Tính tổng 35 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

3.3.6. Cho cấp số cộng có $u_{2000} + u_{2011} = 500$. Tính tổng 4010 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

3.3.7. Số đo ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm số đo ba góc đó.

3.3.8. Tính các tổng sau:

a) $P = 15 + 20 + 25 + \dots + 7515$

b) $S = 1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + \dots + 2^2 - 1^2$

CẤP SỐ NHÂN

A. LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA

Cấp số nhân là một số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q .

Số q được gọi là công của cấp số nhân.

$$u_{n+1} = \dots q, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Ví dụ 1. Ba bài kiểm tra một tiết của bạn Nhân lập thành một cấp số nhân, trong đó điểm hai bài đầu lần lượt là 1,2 và 2,4. Hỏi điểm kiểm tra một tiết lần 3 của Nhân được bao nhiêu điểm?

II. SỐ HẠNG TỔNG QUÁT

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, \forall n \geq 2$$

Ví dụ 2. Bạn Nhân thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới, và diện tích bề mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp. Biết rằng diện tích mặt đế tháp là 12288 m^2 . Tính diện tích mặt trên cùng.

III. TÍNH CHẤT

Trong một cấp số nhân, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích của hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là:

$$u_{k-1} \cdot u_{k+1} = u_k^2, \forall k \geq 2$$

Ví dụ 3. Ba bài kiểm tra một tiết của bạn Nhân lập thành một cấp số nhân, trong đó bài đầu và bài cuối lần lượt là 1,2 và 7,5. Hỏi điểm kiểm tra một tiết lần 2 của Nhân được bao nhiêu điểm?

IV. TỔNG n SỐ HẠNG ĐẦU CỦA MỘT CẤP SỐ NHÂN

Cho cấp số nhân (u_n) . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Ví dụ 4. Để đón Tết, hai bạn Bình và Dương quyết định lì xì lẫn nhau trong suốt 15 ngày theo quy tắc sau: ngày thứ nhất, Bình lì xì Dương 1 triệu, còn Dương lì xì Bình 1 nghìn; kể từ ngày thứ hai, Bình vẫn lì xì Dương 1 triệu nhưng Dương sẽ lì xì cho Bình số tiền gấp đôi của ngày hôm trước. Hỏi sau khi kết thúc, ai nhận được nhiều tiền lì xì hơn?

B. THỰC HÀNH

3.4.1. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân, khi đó, hãy tìm công bội của cấp số nhân đó:

a) $u_n = n + 3$

b) $u_n = 2^n$

c) $u_n = \frac{5}{2^n}$

d) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$

3.4.2. Tìm số hạng đầu và công bội của các cấp số nhân sau:

a) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 \cdot u_5 = 25 \\ u_2 + u_3 + u_4 = 31 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 64 \end{cases}$

3.4.3. Tìm cấp số nhân có 6 số hạng, biết rằng tổng của năm số hạng đầu là 31 và tổng của năm số hạng sau là 62.

3.4.4. Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh X là 1,4%. Biết rằng số dân của tỉnh hiện nay là 1,8 triệu người. Hỏi với mức tăng như vậy thì sau 5 năm, 10 năm số dân của tỉnh đó là bao nhiêu?

3.4.5. Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần.

A. Hỏi một tế bào sau 10 lần phân chia sẽ thành bao nhiêu tế bào?

B. Nếu có 10^5 tế bào thì sau hai giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

3.4.6. Tính các tổng sau:

a) $A = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{10}$

b) $B = -27 + 81 - 243 + \dots + 531441$

c) $C = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^9}$

ÔN TẬP CHƯƠNG 3

Câu 1. Với mọi số nguyên dương n , tổng $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ bằng

- A. $\frac{1}{n+1}$ B. $\frac{n}{n+1}$ C. $\frac{n}{n+2}$ D. $\frac{n+1}{n+2}$

Câu 2. Với mọi số nguyên dương n , tổng $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$ bằng

- A. n^2 B. $(n-1)^2$ C. $(n+1)^2$ D. $(2n-1)^2$

Câu 3. Bất đẳng thức $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}$ đúng với số những số nguyên nào sau đây?

- A. $n \geq 0$ B. $n \geq 1$ C. $n \geq 2$ D. $n \geq 3$

Câu 4. Với $n = 2$, đẳng thức $2 + 5 + 8 + \dots + (3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$ trở thành

- A. $2 = \frac{2(3 \cdot 2 + 1)}{2}$ B. $2 = \frac{1(3 \cdot 1 + 1)}{2}$ C. $2 + 5 = \frac{2(3 \cdot 2 + 1)}{2}$ D. $2 + 5 = \frac{1(3 \cdot 1 + 1)}{2}$

Câu 5. Với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, bất đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $3^n > 4n+1$ B. $3^n > 4n+2$ C. $3^n > 3n+2$ D. $3^n > 3n+5$

Câu 6. Với mọi số nguyên dương n , tổng $n^3 + 11n$ chia hết cho

- A. 4 B. 6 C. 9 D. 12

Câu 7. Với mọi số nguyên dương n , tổng $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ chia hết cho

- A. 5 B. 7 C. 4 D. 19

Câu 8. Tổng các góc trong một đa giác lồi n cạnh, với $n \geq 3$, là

- A. $n \cdot 180^\circ$ B. $(n-1) \cdot 180^\circ$ C. $(n-2) \cdot 180^\circ$ D. $(2n-5) \cdot 180^\circ$

Câu 9. Tìm số nguyên p nhỏ nhất để $2^n > 2n+1$ với mọi số nguyên $n \geq p$.

- A. $p = 2$ B. $p = 3$ C. $p = 4$ D. $p = 5$

Câu 10. Tìm tất cả các số nguyên dương n để $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 > 2018$.

- A. $n \geq 17$ B. $n \geq 18$ C. $n \geq 19$ D. $n \geq 20$

Câu 11. Dãy số (u_n) : xác định bởi $u_n = 2n-1$ là

- A. Dãy các số tự nhiên B. Dãy các số tự nhiên lẻ
C. Dãy các số tự nhiên chẵn D. Dãy số 1; 1; 1; 1; ...

Câu 12. Số hạng thứ 5 của dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ là

- A. 2 B. 5 C. 8 D. 11

Câu 13. Số hạng tổng quát của dãy số (u_n) : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$ là

- A. $u_n = \sqrt{2}$ B. $u_n = \sqrt{2n-1}$ C. $u_n = \sqrt{3n-2}$ D. $u_n = \sqrt{n}$

Câu 14. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Tổng của 10 số hạng đầu bằng

- A. 55 B. 220 C. 286 D. 165

Câu 15. Hãy cho biết tính đơn điệu của dãy số (u_n) : $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

- A. Tăng B. Giảm

C. Không tăng không giảm

D. Vừa tăng vừa giảm

Câu 16. Hãy cho biết tính đơn điệu của dãy số $u_n = 5\cos n$ và $u_n = 3 \cdot (-1)^n$.

A. Tăng

B. Giảm

C. Không tăng không giảm

D. Vừa tăng vừa giảm

Câu 17. Dãy số nào sau đây đơn điệu?

A. $u_n = 3 \cdot (-1)^n$

B. $u_n = \left(-\frac{1}{7}\right)^n$

C. $u_n = 5\cos n$

D. $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$

Câu 18. Kết luận nào sau đây đúng về dãy số $(u_n): u_n = \frac{1}{n(n+1)}$?

A. (u_n) bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$

B. (u_n) bị chặn trên bởi 1

C. (u_n) bị chặn dưới bởi 0

D. Cả a, b, c đều đúng

Câu 19. Kết luận nào sau đây đúng về dãy số $(u_n): u_n = \frac{2n}{n+1}$?

A. (u_n) bị chặn dưới

B. (u_n) bị chặn trên

C. (u_n) bị chặn

D. (u_n) không bị chặn

Câu 20. Dãy số nào sau đây bị chặn?

A. $u_n = 2n+1$

B. $u_n = \frac{n^2}{n+1}$

C. $u_n = 2^n$

D. $u_n = \frac{2n}{n+1}$

Câu 21. Dãy số nào sau đây là một cấp số cộng?

A. $-6; -3; 3; 6; 9; \dots$

B. $\dots; 2; 4; 8; 12; 16; \dots$

C. $1; 2; 4; 8; 16; \dots$

D. $x-3; x; x+3$

Câu 22. Dãy số nào sau đây là một cấp số cộng?

A. $u_n = (-1)^n$

B. $u_n = 3n-2$

C. $u_n = 3^n - 2$

D. $u_n = 2^{n-1}$

Câu 23. Số đo ba góc của một tam giác lập thành một cấp số cộng, kết quả nào sau đây có thể xảy ra:

A. $40^\circ; 60^\circ; 80^\circ$

B. $30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$

C. $10^\circ; 60^\circ; 110^\circ$

D. Cả A, B, C đều đúng

Câu 24. Một tứ giác có số đo bốn góc lập thành một cấp số cộng. Biết rằng một góc có số đo 30° , tìm các góc còn lại.

A. $75^\circ; 120^\circ; 165^\circ$

B. $72^\circ; 114^\circ; 156^\circ$

C. $70^\circ; 110^\circ; 150^\circ$

D. $80^\circ; 110^\circ; 135^\circ$

Câu 25. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng có $u_4 = 10$ và $u_7 = 19$:

A. $u_1 = 1$ và $d = 3$

B. $u_1 = 1$ và $d = 2$

C. $u_1 = 2$ và $d = 2$

D. $u_1 = 2$ và $d = 3$

Câu 26. Cho một cấp số cộng có $u_5 = 19$ và $u_{10} = 34$. Số hạng thứ 20 có giá trị bằng

A. 54

B. 94

C. 64

D. 104

Câu 27. Một cấp số cộng có $u_4 = -12$ và $u_{14} = 18$. Tổng của 16 số hạng đầu tiên bằng

A. 24

B. -24

C. 26

D. -25

Câu 28. Cho cấp số cộng có $S_{10} = 100$ và $S_{100} = 10$. Khi đó S_{110} bằng

A. 90

B. -90

C. 110

D. -110

Câu 29. Xác định x để ba số $1-x; x^2; 1+x$ lập thành một cấp số cộng.

A. 1

B. ..

C. ± 1

D. 0

Câu 30. Tính tổng $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 99$:

A. 2500

B. 50

C. 100

D. 250

Câu 31. Dãy số nào sau đây không phải cấp số nhân?

A. $-1; -\frac{1}{5}; -\frac{1}{25}; -\frac{1}{125}$ B. $-\frac{1}{8}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; 1$ C. $\sqrt[4]{2}; 2\sqrt[4]{2}; 4\sqrt[4]{2}; 8\sqrt[4]{2}$ D. $1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}$

Câu 32. Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

A. $u_n = 7 - 3n$ B. $u_n = 7 - 3^n$ C. $u_n = 7 \cdot 3^n$ D. $u_n = 3(n - 7)$

Câu 33. Cấp số nhân (x_n) có $x_2 = -3$ và $x_4 = -27$. Tìm số hạng đầu và công bội của nó?

A. $\begin{cases} x_1 = -1 \text{ và } q = -3 \\ x_1 = 1 \text{ và } q = 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x_1 = -1 \text{ và } q = 3 \\ x_1 = 1 \text{ và } q = -3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x_1 = 3 \text{ và } q = -1 \\ x_1 = -3 \text{ và } q = 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x_1 = 3 \text{ và } q = 1 \\ x_1 = -3 \text{ và } q = -1 \end{cases}$

Câu 34. Cấp số nhân (a_n) có $a_2 = -3$ và $a_4 = -27$. Tìm số hạng thứ 10 của nó?

A. ± 1024 B. ± 19683 C. 19683 D. -19683

Câu 35. Tìm x, y sau cho dãy số x, 12, y, 192 lập thành một cấp số nhân?

A. $\begin{cases} x = 3; y = 48 \\ x = 4; y = 36 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -3; y = -48 \\ x = 2; y = 72 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 3; y = 48 \\ x = -3; y = -48 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 3; y = -48 \\ x = -3; y = 48 \end{cases}$

Câu 36. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 5$, $q = 3$ và $S_n = 200$. Tìm n.

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Câu 37. Một tứ giác lồi có số đo các góc lập thành một cấp số nhân. Biết rằng số đo của góc thứ ba gấp 9 lần số đo của góc nhỏ nhất. Hãy tìm số đo của các góc trong tứ giác đó?

A. $5^\circ; 15^\circ; 45^\circ; 225^\circ$ B. $9^\circ; 27^\circ; 81^\circ; 243^\circ$ C. $7^\circ; 21^\circ; 63^\circ; 269^\circ$ D. $8^\circ; 32^\circ; 72^\circ; 248^\circ$

Câu 38. Tính tổng $S = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{12}$?

A. $\frac{1}{9}(10^{13} - 1)$ B. $10^{13} - 1$ C. $\frac{1}{9}(1 - 10^{13})$ D. Đáp án khác

Câu 39. Cho cấp số nhân (u_n) có $S_2 = 4$ và $S_3 = 13$. Tìm S_5 .

A. 121 hoặc $\frac{181}{16}$ B. 121 hoặc $\frac{35}{16}$ C. 144 hoặc $\frac{185}{16}$ D. 141 hoặc $\frac{183}{16}$

Câu 40. Bạn Cảnh gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu (lãi kép). Hỏi sau 10 năm, số tiền cả vốn lẫn lãi mà Cảnh nhận được là khoảng bao nhiêu?

A. 196.715.000 đồng B. 196.716.000 đồng C. 183.845.000 đồng D. 183.846.000 đồng

Chương 4. GIỚI HẠN

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1. Ta nói dãy số (u_n) có **giới hạn là 0** khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (hay $\lim u_n = 0$) hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$

Định nghĩa 2. Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là số a (hay v_n dần tới a) khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - a) = 0$.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ (hay $\lim v_n = a$) hay $v_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n^3 - 5n + 1}{2018 + 2n^2 - n^3}$. Ghi các giá trị tương ứng vào bảng sau:

n	1	10	100	999	999999	999999999
u_n						

◊ Khi $n \rightarrow +\infty$ thì $u_n \rightarrow \dots$

2. Một vài giới hạn hữu hạn

$$\checkmark \lim \frac{1}{n} = 0$$

$$\checkmark \lim c = c \quad (c \text{ là hằng số})$$

$$\checkmark \lim \frac{1}{n^k} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\checkmark \lim q^n = 0 \quad \text{nếu } -1 < q < 1$$

II. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

$$\checkmark \lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$$

$$\checkmark \lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$$

$$\checkmark \lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n$$

$$\checkmark \lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$$

$$\checkmark \text{Nếu } u_n \geq 0 \text{ với mọi } n \text{ thì } \lim u_n \geq 0 \text{ và } \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{\lim u_n}$$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim \left[\frac{1}{n^3} - \left(\frac{3}{5} \right)^n + 2016 \right]$$

$$\text{b) } \lim \frac{3 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + 1}$$

$$\text{c) } \lim \frac{3n^2 - n}{1 + n^2}$$

$$\text{d) } \lim \frac{\sqrt{1 + 4n^2}}{1 - 2n}$$

$$\text{e) } \lim \frac{3^n - 2.5^n}{7 + 3.5^n}$$

III. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cấp số nhân _____hạn (u_n) có công bội q ($-1 < q < 1$), được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

VD: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots$

$$S = \lim S_n = \frac{u_1}{1 - q}$$

Ví dụ 3. Tính các tổng sau:

a) $S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

b) $S_2 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \dots$

IV. GIỚI HẠN VÔ CỰC

1. Định nghĩa

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$

2. Một vài giới hạn đặc biệt

$$\checkmark \lim n^k = \infty, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\checkmark \lim q^n = \begin{cases} \infty & \text{nếu } q > 1 \\ 0 & \text{nếu } 0 < q < 1 \end{cases}$$

3. Định lí

✓ $\begin{cases} \lim u_n = a > 0 \\ \lim v_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim(u_n \cdot v_n) =$	✓ $\begin{cases} \lim u_n = a < 0 \\ \lim v_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim(u_n \cdot v_n) =$
✓ $\begin{cases} \lim u_n = a > 0 \\ \lim v_n = 0 \\ v_n > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} =$	✓ $\begin{cases} \lim u_n = a < 0 \\ \lim v_n = 0 \\ v_n > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} =$
✓ $\begin{cases} \lim u_n = a \\ \lim v_n = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} =$	

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim(3n^2 - 2n - 5)$

b) $\lim \frac{2 + 3n^2 - 5n^3}{2n - 3}$

B. THỰC HÀNH

4.1.1. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{6n-1}{3n^2+2}$

b) $\lim \frac{3n^2+n-5}{2n^2+1}$

c) $\lim \frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$

d) $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3-2n}}{5+3n}$

e) $\lim \frac{\sqrt{9n^2+2n-3n}}{4n+3}$

f) $\lim \frac{n^2+\sqrt[3]{1+n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$

g) $\lim \frac{3^n-2.5^n}{7+3.5^n}$

h) $\lim \frac{5^n+11^{n+1}}{3^{n+1}+11^n}$

i) $\lim(\sqrt{n^2+n+1}-n)$

j) $\lim(\sqrt{4n^2-2n}-2n)$

k) $\lim(n-\sqrt[3]{n^3+2n^2})$

4.1.2. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim(n^3-2n^2-n+1)$

b) $\lim(-n^2+5n-2)$

c) $\lim\sqrt[3]{2n^6+5n^3-7n}$

d) $\lim(2^n-3^n)$

e) $\lim \frac{5n^3-3n+1}{1-n^2}$

f) $\lim(\sqrt{n^2+n+1}+n)$

g) $\lim(\sqrt{4n^2-2n}+2n)$

4.1.3. Tính các tổng sau:

a) $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

b) $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

c) $C = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \dots$

4.1.4. Hãy viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số:

a) 0,333...

b) -0,111...

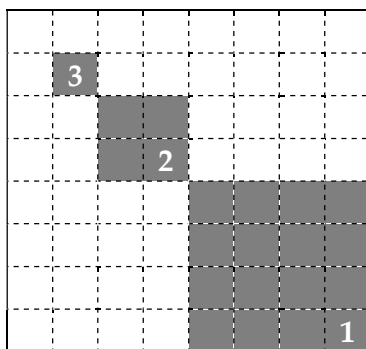
c) 0,999...

d) -1,020202...

e) 0,353535...

f) 3,123123123...

4.1.5. Để trang hoàng cho căn hộ của mình, chú chuột Mickey quyết định tô màu một miếng bìa hình vuông cạnh bằng 1. Nó tô màu xám các hình vuông nhỏ được đánh số lần lượt là 1, 2, 3, ..., n, ..., trong đó cạnh hình vuông kế tiếp bằng một nửa cạnh hình vuông trước đó.



Giả sử quy trình tô màu của Mickey có thể tiến ra vô hạn.

- Gọi u_n là diện tích của hình vuông màu xám thứ n . Tính u_1 , u_2 , u_3 và u_n .
- Tính $\lim S_n$ với $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$.

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$. Ghi các giá trị tương ứng vào bảng sau:

x	5,99	5,9999	5,999999	6	6,01	6,0001	6,000001
$f(x)$							

◇ Khi $x \rightarrow 6$ thì $f(x) \rightarrow ?$

Nhận xét

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow x_0} x =$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow x_0} c = , \text{ với } c \text{ là hằng số}$$

2. Định lí về giới hạn hữu hạn

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad \checkmark \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad \checkmark \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \text{ nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

$$\checkmark \text{ Nếu } f(x) \geq 0 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 3x + 2016) =$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} =$$

3. Giới hạn một bên

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

Số L được gọi là **giới hạn bên phải** của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

$$\text{Kí hiệu: } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

Số L được gọi là **giới hạn bên trái** của hàm số $y = f(x)$ khi $x \rightarrow x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

$$\text{Kí hiệu: } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \end{cases}$$

Ví dụ 3. Tìm giới hạn của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra (nếu có):

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 5x + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2 - 3 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1 \qquad \text{b) } f(x) = |x - 2| \text{ tại } x_0 = 2$$

II. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$

Nhận xét

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} =$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = \quad, \text{ với } c \text{ là hằng số}$$

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + x - 1)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + x - 1}{3 + x^2}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{5 - 2x}$$

III. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn vô cực

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$, ta có $f(x_n) \rightarrow -\infty$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow +\infty$.

Nhận xét

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = -\infty$$

2. Một vài giới hạn đặc biệt

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty \quad \text{với } k \in \mathbb{N}^*$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{khi } k \text{ lẻ} \\ -\infty & \text{khi } k \text{ chẵn} \end{cases}$$

3. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x) \cdot g(x)$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của thương $\frac{f(x)}{g(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của g(x)	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	
$L > 0$	0	+	
		−	
$L < 0$		+	
		−	

Ví dụ 5. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-7}{(x-2)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-7}{x-2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-7}{x-2}$

B. THỰC HÀNH

4.2.1. Tìm các giới hạn sau:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 2x + 1) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^3 - 3x)(x+1)}{x^2 + 3} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2}{x^3 - x - 6}} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \left| \frac{x^3 - 3x + 2}{-x - 4} \right| \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{x + 2} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2} \\ \text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3} - 3}{x - 6} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 4} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x} - 1}{x} \end{array}$$

4.2.2. Tìm các giới hạn sau:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{17}{x^2 + 1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 6}{4 - x} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + x - 1}{3 + x^2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 + x - 1}{3 + x} \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + x - 1) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{2|x| + 1} & \text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{9x^2 + 2x}) & \\ \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{5 - 2x} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x + 4}{(x - 3)^2} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^3 + 3x^2}}{(x^2 - 2x)^2} & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 7}{x - 1} \\ \text{l) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 7}{x - 1} & \text{m) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 3|} & \text{n) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 3|} & \text{p) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 3|} \end{array}$$

4.2.3. Tìm giới hạn của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x & \text{khi } x < 0 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 0 & \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ 4x^2 - 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1 \\ \text{c) } f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{khi } x \leq 4 \\ \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{khi } x > 4 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 4 & \text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1 \\ \text{e) } f(x) = \begin{cases} \frac{9 - x^2}{x - 3} & \text{khi } x < 3 \\ 1 - x & \text{khi } x \geq 3 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 3 & \text{f) } f(x) = \begin{cases} |2x - 8| & \text{khi } x \geq 3 \\ \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 3|} & \text{khi } x < 3 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 3 \end{array}$$

4.2.4. Hãy chỉ ra lỗi sai trong các lời giải sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{1 - \frac{3}{x}}}{x\left(\frac{2}{x} - 3\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}}}{\frac{2}{x} - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 - 0}}{0 - 3} = \frac{1}{3} & \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3x}{|x - 3|} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} x = -3 & \end{array}$$

HÀM SỐ LIÊN TỤC

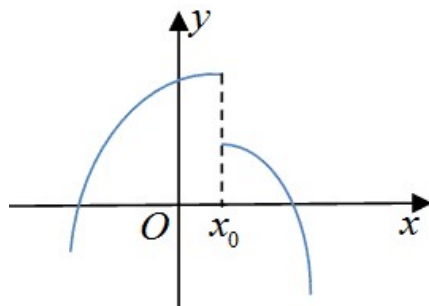
A. LÝ THUYẾT

I. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

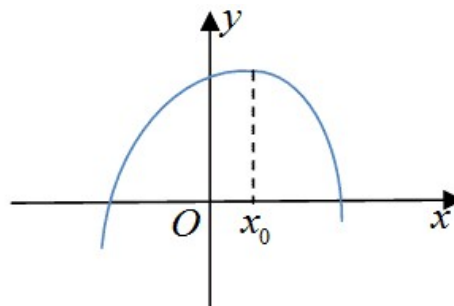
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục tại x_0** nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \dots$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 thì ta gọi là **tại x_0** .



Đồ thị hàm số gián đoạn tại x_0



Đồ thị hàm số liên tục tại x_0

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ tại $x_0 = 3$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ tại $x_0 = -2$

c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ tại $x_0 = 3$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$

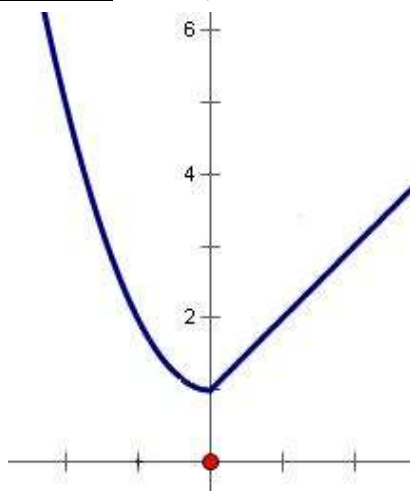
II. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại điểm của khoảng đó.

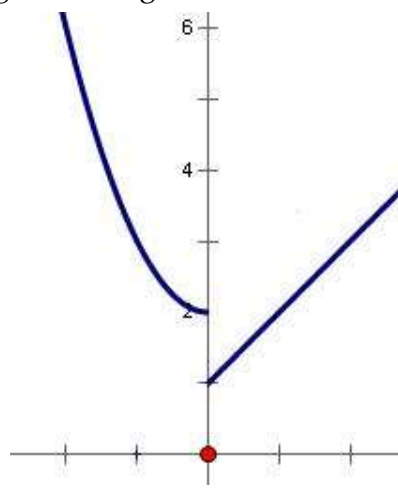
Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$, đồng thời $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \dots$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \dots$

Ví dụ 2. Hàm số $f(x) = x^2 - 3x + 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Nhận xét: Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là “đường” trên khoảng đó.



Liên tục trên $\mathbb{R}$



Gián đoạn trên $\mathbb{R}$

III. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Định lý 1

- ✓ Hàm đa thức liên tục trên
- ✓ Hàm phân thức hữu tỉ và các hàm số lượng giác liên tục trên của tập xác định của chúng.

Ví dụ 3. Hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x - 2}$ liên tục trên

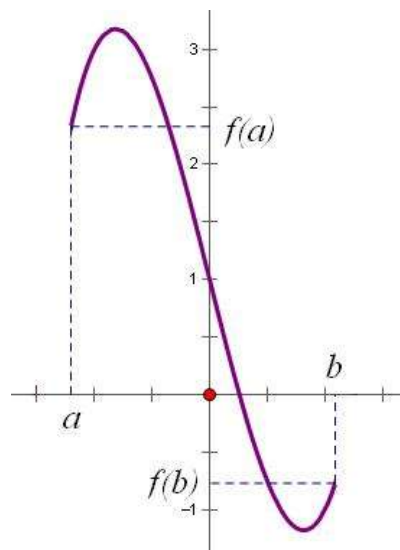
Định lý 2

Giả sử hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đều liên tục tại x_0 . Khi đó:

- ✓ Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ cũng liên tục tại x_0 .
- ✓ Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ cũng liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lý 3

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$.



Ví dụ 4. Chứng minh rằng phương trình

- a) $x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(0; 1)$
- b) $\cos x = x$ có nghiệm.

B. THỰC HÀNH

4.3.1. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

a) $f(x) = 2x^3 - 5x + 7$ tại $x_0 = 2$

b) $f(x) = \frac{2x-3}{3x-2}$ tại $x_0 = \frac{2}{3}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ tại $x_0 = 2016$

d) $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-3}$ tại $x_0 = 3$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x+1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$

f) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ 4x^2-1 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ tại $x_0 = -1$

g) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 4 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ tại $x_0 = 3$

h) $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \leq 4 \\ \frac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x > 4 \end{cases}$ tại $x_0 = 4$

i) $f(x) = \begin{cases} x^3-x+1 & \text{khi } x > 1 \\ 3x+2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$

j) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{khi } x > 5 \\ (x-5)^2+3 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases}$ tại $x_0 = 5$

4.3.2. Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^3 + 3x^2 + 5x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(0;1)$

b) $4x^4 + 2x - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt trên khoảng $(-1;1)$

c) $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm

d) $\sin x = x$ có nghiệm

e) $x^5 - 3x + 3 = 0$ có nghiệm

f) $x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ có nghiệm

g) $x^3 - 3x + 1 = 0$ có đúng ba nghiệm

h) $x^3 + x^2 - 8x + 1 = 0$ có đúng ba nghiệm

ÔN TẬP CHƯƠNG 4

Câu 1. $\lim \frac{2n^3 - 3n^2 + n + 5}{n^3 - n^2 + 7}$ bằng

- A. -3 B. 1 C. 2 D. 0

Câu 2. $\lim (5n - n^2 + 1)$ bằng

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. 5 D. -1

Câu 3. $\lim \frac{3n^3 + 2n - 1}{2n^2 - n}$ bằng

- A. 1 B. 0 C. $+\infty$ D. $\frac{3}{2}$

Câu 4. $\lim \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ bằng

- A. 1 B. -1 C. $+\infty$ D. 0

Câu 5. $\lim (\sqrt{n^2 - 2n + 3} - n)$ bằng

- A. 1 B. -1 C. $+\infty$ D. 0

Câu 6. $\lim (\sqrt{n^2 - 2n + 3} + n)$ bằng

- A. 1 B. -1 C. $+\infty$ D. 0

Câu 7. $\lim (n - \sqrt[3]{8n^3 + 3n + 2})$ bằng

- A. $-\infty$ B. -1 C. $+\infty$ D. 0

Câu 8. $\lim (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 3n + 2})$ bằng

- A. $-\infty$ B. $+\infty$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 9. $\lim (5^n - 2^n)$ bằng

- A. $-\infty$ B. $+\infty$ C. 3 D. $\frac{5}{2}$

Câu 10. $\lim (3 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n + 7^n)$ bằng

- A. $-\infty$ B. $+\infty$ C. 3 D. -5

Câu 11. $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$ bằng

- A. 1 B. 7 C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{7}{5}$

Câu 12. Tổng $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \dots$ bằng

- A. $\frac{20}{81}$ B. $\frac{61}{243}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$

Câu 13. Số thập phân 0,515151... viết dưới dạng phân số là

- A. $\frac{17}{33}$ B. $\frac{51}{100}$ C. $\frac{5151}{10000}$ D. $\frac{515151}{1000000}$

Câu 14. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{3}}$ bằng

A. $+\infty$

B. 0

C. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

Câu 15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ bằng

A. 1

B. 4

C. -2

D. -4

Câu 16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$ bằng

A. 1

B. 0

C. $+\infty$

D. $-\infty$

Câu 17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - 2x^3)$ bằng

A. -2

B. 3

C. $+\infty$

D. $-\infty$

Câu 18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x - 2x^3)$ bằng

A. -2

B. 3

C. $+\infty$

D. $-\infty$

Câu 19. Khẳng định nào sau đây không đúng?

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = +\infty$

B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = +\infty$

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}{3x - 4} = \frac{1}{3}$

D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}{3x - 4} = \frac{1}{3}$

Câu 20. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right)$ bằng

A. 0

B. -1

C. 1

D. $-\infty$

Câu 21. Khẳng định nào sau đây đúng nhất?

A. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} = -1$

C. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{x-3}$ không tồn tại

D. Cả A, B, C đều đúng

Câu 22. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-7}{x-2}$ bằng

A. $+\infty$

B. $-\infty$

C. 3

D. $\frac{7}{2}$

Câu 23. Giới hạn nào sau đây là vô cực?

A. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x}}$

B. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 + 2x^2}{(x^2 - x - 6)^2}$

C. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2 - x}{(2x-1)(x^4-3)}}$

D. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(2x-1)}{x^4 + x + 1}$

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 5x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2-3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 7$

B. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$

C. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 7$

D. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 7$

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-5} & \text{khi } x \geq 3 \\ \frac{x^2-m}{x+2} & \text{khi } x < 3 \end{cases}$. Tìm m để f(x) có giới hạn khi $x \rightarrow 3$?

A. 19

B. 1

C. -1

D. -19

Câu 26. Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} & \text{khi } x > 1 \\ mx+2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ có giới hạn tại điểm $x_0 = 1$?

- A. 2 B. -1 C. 1 D. 3

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \frac{3x+2}{x-7}$. Mệnh đề nào sau đây đúng nhất?

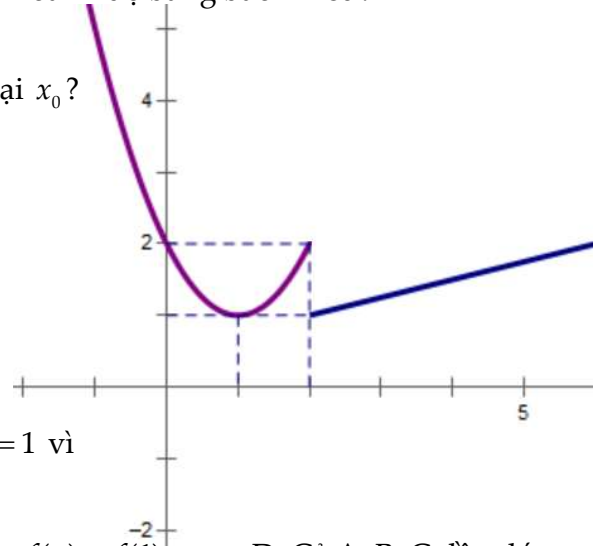
- A. $f(x)$ liên tục tại mọi điểm B. $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 7$
C. $f(x)$ liên tục tại mọi điểm, trừ $x_0 = 7$ D. $f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = 2019$

Câu 28. Hàm số có đồ thị ở hình bên gián đoạn tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 29. Trường hợp nào làm cho hàm số $f(x)$ gián đoạn tại x_0 ?

- A. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ không tồn tại
B. $f(x_0)$ không tồn tại
C. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$
D. Cả A, B, C đều đúng



Câu 30. Hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{khi } x > 1 \\ x^2+3 & \text{khi } x < 1 \\ 1-5x & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ gián đoạn tại $x_0 = 1$ vì

- A. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ B. $f(1)$ không tồn tại C. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ D. Cả A, B, C đều đúng

Câu 31. Hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{2x-5}}{4-x}$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

- A. $\left[\frac{5}{2}; 4\right)$ và $(4; +\infty)$ B. $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$ C. $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ D. $\mathbb{R}$

Câu 32. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ 2mx-3 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 33. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x-m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 2$?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{khi } x > 1 \\ x^2+3 & \text{khi } x < 1 \\ k^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm k để $f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = 1$?

- A. $k = \pm 2$ B. $k \neq \pm 2$ C. $k \neq 2$ D. $k \neq \pm 1$

Câu 35. Phương trình $8x^4 - 24x^3 + 8x - 1 = 0$ có đúng bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(-1; 3)$?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 36. Phương trình $2x^4 - 5x^2 + x + 1 = 0$

- A. Không có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$ B. Không có nghiệm trên khoảng $(-2; 0)$
C. Chỉ có một nghiệm trên khoảng $(-2; 1)$ D. Có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $(0; 2)$

Chương 5. ĐẠO HÀM

ĐỊNH NGHĨA & Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A. LÝ THUYẾT

I. ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

1. Các bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm

a) Bài toán tìm vận tốc tức thời

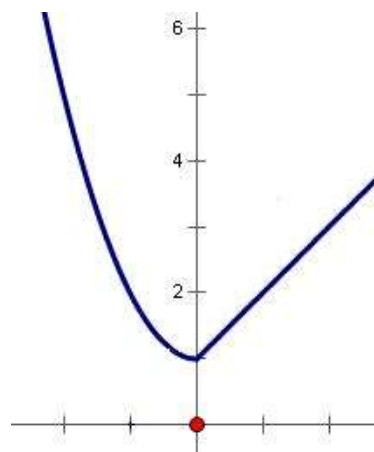
Quãng đường s của chuyển động của một chất điểm là một hàm số của thời gian t . Khi đó, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là giới hạn sau (nếu có):

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

b) Bài toán tìm cường độ tức thời

Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian t . Khi đó, cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là giới hạn sau (nếu có):

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$$



2. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 và kí hiệu là (hoặc $y'(x_0)$), tức là:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Chú ý

✓ Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ được gọi là của x tại x_0 .

✓ Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ được gọi là tương ứng của f .

Như vậy: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

3. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

Bước 1. Giả sử Δx là số gia của x tại x_0 . Khi đó: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Bước 2. Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Bước 3. Tìm $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

a) $f(x) = x^2$ tại $x_0 = 3$

b) $f(x) = x^3$ tại $x_0 = 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$

4. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

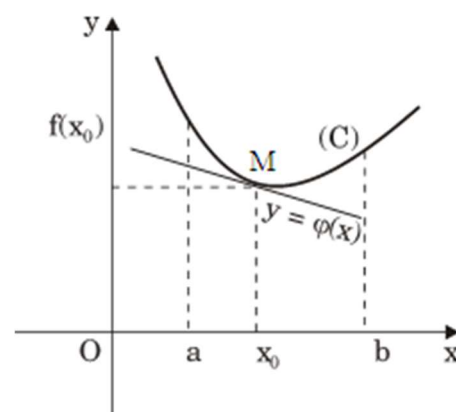
Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

5. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và có đạo hàm tại $x_0 \in (a;b)$. Gọi (C) là đồ thị của hàm số đó. Khi đó, $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(x_0; f(x_0))$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$



Ví dụ 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$

- a) Tại điểm $N(1;1)$
- b) Tại điểm có hoành độ bằng 2
- c) Tại điểm có tung độ bằng -1
- d) Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3

6. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

- a) Vận tốc tức thời: $v(t_0) = s'(t_0)$
- b) Cường độ tức thời: $I(t_0) = Q'(t_0)$

II. ĐẠO HÀM TRÊN MỘT KHOẢNG

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ nếu nó có đạo hàm tại điểm x trên khoảng đó.

Ví dụ 3: Hàm số $y = x^2$ có đạo hàm $y' = 2x$ trên $\mathbb{R}$; $y = \frac{1}{x}$ có đạo hàm $y' = -\frac{1}{x^2}$ trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

B. THỰC HÀNH

5.1.1. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$

- a) Tại điểm $M(-1; -1)$
- b) Tại điểm có hoành độ bằng 2
- c) Tại điểm có tung độ bằng -8
- d) Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3

5.1.2. Viết phương trình tiếp tuyến của đường hypebol $y = \frac{1}{x}$

- a) Tại điểm $N\left(\frac{1}{2}; 2\right)$
- b) Tại điểm có hoành độ bằng -1
- c) Tại điểm có tung độ bằng 3
- d) Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$

5.1.3. Cho đường cong (C): $y = x^3 - 3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C)

- a) Tại điểm $K(1; -2)$
- b) Tại điểm có hoành độ bằng -1
- c) Tại giao điểm của (C) với trục tung
- d) Tại giao điểm của (C) với trục hoành

5.1.4. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C): $y = \frac{3x+1}{1-x}$, biết tiếp tuyến đó

- a) Có hệ số góc $k = 1$
- b) Song song với $d_1: y = \frac{1}{4}x - 2016$
- c) Song song với $d_2: 4x - y + 3 = 0$
- d) Vuông góc với $d_3: 2x + 2y - 9 = 0$

QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A. LÝ THUYẾT

I. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

y	y'
x^n	
$\frac{1}{x}$	
$\sqrt{x}$	
x	
Hằng số C	
$\sin x$	
$\cos x$	
$\tan x$	
$\cot x$	

II. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG

Định lí

$$\checkmark (u+v)' =$$

$$\checkmark (u-v)' =$$

$$\checkmark (u.v)' =$$

$$\checkmark \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

Hệ quả

$$\checkmark (k.u)' = k.u' \quad (k \text{ là hằng số})$$

$$\checkmark \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

$$a) y = \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + 3\sqrt{x}$$

$$b) y = 2 \sin x - 3 \cos x$$

$$c) y = \frac{1-2x}{x+3}$$

III. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

1. Hàm hợp

Ví dụ 2: $y = (1-2x^3)^{10}$; $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2016}$... là các hàm hợp.

2. Đạo hàm của hàm hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Ví dụ 3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (1 - 2x^3)^{10}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2016}$

c) $y = \cos(x^3 - 1) - \cot 3x$

B. THỰC HÀNH

5.2.1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$

b) $y = 5\sin x - 3\cos x$

c) $y = (x^3 - 2)(1 - x^2)$

d) $y = \frac{3x+1}{1-x}$

e) $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

f) $y = x \cot x$

g) $y = 2\sin x \cos x$

h) $y = \frac{\cos x}{\sin x}$

k) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

5.2.2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 + x + 1)^4$

b) $y = \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^5}$

c) $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$

d) $y = (x - 2)\sqrt{x^2 + 3}$

e) $y = \tan(1 + x^2)$

f) $y = \sin \sqrt{1 + x^2}$

g) $y = \sqrt{1 + 2\cot x}$

h) $y = \frac{x+2}{1+\cos^2 x}$

i) $y = \tan^2 x - \cot x^2$

j) $y = (\sin x + \cos x)^2$

k) $y = \sin(\sin x)$

5.2.3. Cho $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Tìm x để

a) $y' > 0$

b) $y' < 3$

5.2.4. Giải bất phương trình sau:

a) $y' \geq 0$, với $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

b) $y' < 0$, với $y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$

c) $y' > 0$, với $y = \frac{2x - 1}{x^2 + x + 4}$

d) $y' \leq 0$, với $y = \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2}$

5.2.5. Cho hai hàm số $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ và $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$. Giải bất phương trình $f'(x) \leq g'(x)$.

5.3.6. Giải phương trình $y' = 0$, biết

a) $y = 3\cos x + 4\sin x + 5x$

b) $y = \cos^2 x + \sin x$

VI PHÂN

A. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Ta gọi tích $f'(x).\Delta x$ là **vi phân** của hàm số $y = f(x)$ tại x ứng với số gia Δx , kí hiệu là $df(x)$ hoặc dy , tức là

$$dy = f'(x) \Delta x$$

Ví dụ 1. Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 5x + 1$

b) $y = \sin^3 x$

2. Ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x$$

Ví dụ 2. Tính giá trị gần đúng của $\sqrt{99}$ và $\sqrt{3,99}$ (lấy 4 chữ số thập phân).

B. BÀI TẬP

5.3.1. Tìm vi phân của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 5x + 1$

b) $y = \sin^3 x$

c) $y = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x})$

d) $y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 1}$

e) $y = \frac{\sin x}{x}$

f) $y = \tan^2 x$

5.3.2. Tính gần đúng các giá trị sau (lấy 4 chữ số thập phân):

a) $\sqrt{3,99}$

b) $\sqrt{8,99}$

c) $\sqrt{9,01}$

d) $\sqrt{16,02}$

e) $\cos 91^\circ$

f) $\tan 44^\circ$

ĐẠO HÀM CẤP HAI

A. LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA

✓ Đạo hàm cấp 2: $y'' = (y')'$

✓ Đạo hàm cấp 3: $y''' = (y'')'$

✓ Đạo hàm cấp 4: $y^{(4)} = (y''')'$

✓ Đạo hàm cấp 4: $y^{(5)} = (y^{(4)})'$

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm các cấp của hàm số $y = x^5$.

II. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

Xét chuyển động của một chất điểm xác định bởi phương trình $s = f(t)$, khi đó

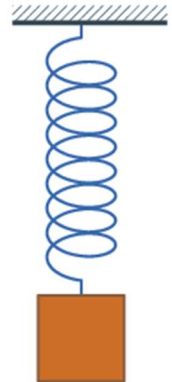
✓ Vận tốc tức thời: $v(t) = f'(t)$

✓ Gia tốc tức thời: $a(t) = v'(t) = f''(t)$

Ví dụ 2. Dao động điều hòa của con lắc lò xo có phương trình li độ là

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

trong đó A, ω, φ là những hằng số, và t là biến thời gian. Hãy tìm vận tốc và gia tốc.



B. THỰC HÀNH

5.4.1. Tìm đạo hàm cấp hai và cấp ba của các hàm số sau:

- | | | | |
|--|--------------------------|--------------------------|------------------------|
| a) $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x + 8$ | b) $y = 3x^4 - 4x^2 + 7$ | c) $y = \frac{x-3}{x+4}$ | d) $y = \sqrt{3x-x^3}$ |
| e) $y = \sin x$ | f) $y = \cos x$ | g) $y = \tan x$ | h) $y = \cos^2 x$ |

5.4.2. Chứng minh các hệ thức sau với các hàm số được chỉ ra:

- | | |
|--|---|
| a) $y^3 y'' + 1 = 0$, với $y = \sqrt{2x-x^2}$ | b) $x^2 y'' - 2(x^2 + y^2)(1+y) = 0$, với $y = x \tan x$ |
|--|---|

ÔN TẬP CHƯƠNG 5

Câu 1. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x+1}$ tại điểm $x_0 = 1$?

- A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + |x+1|}{x}$. Tính $f'(-1)$?

- A. 2 B. 1 C. 0 D. Không tồn tại

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x > 1 \\ x^2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Phát biểu nào sau đây không đúng?

- A. $f'(1^+) = \frac{1}{2}$ B. $f'(1^-) = 2$ C. $f'(1) = 1$ D. $f'(1)$ không tồn tại

Câu 4. Số gia của hàm số $f(x) = x^3$ ứng với $x_0 = 2$ và $\Delta x = 1$ bằng bao nhiêu?

- A. -19 B. 19 C. 7 D. -7

Câu 5. Số gia của hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ứng với x và Δx là

- A. $\Delta x(\Delta x + 2x - 4)$ B. $2x + \Delta x$ C. $\Delta x(2x - 4\Delta x)$ D. $2x - 4\Delta x$

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-1; 3)$ là

- A. $y = -3x$ B. $y = 3 - x$ C. $y = 6 - 9x$ D. $y = -9x - 6$

Câu 7. Phương trình tiếp tuyến của đường cong (C): $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là

- A. $y = 2 - x$ B. $y = x + 2$ C. $y = x - 1$ D. $y = -x - 3$

Câu 8. Phương trình tiếp tuyến của đường cong (C): $y = x^4 + 2x^2 - 1$ tại điểm có tung độ $y_0 = 2$ là

- A. $y = 8x - 6$ và $y = -8x - 6$ B. $y = 8x - 6$ và $y = -8x + 6$
C. $y = 8x - 8$ và $y = -8x + 8$ D. $y = 41x - 17$

Câu 9. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ với hệ số góc $k = -9$ có phương trình là

- A. $y = -9x - 11$ B. $y = -9x - 27$ C. $y = -9x + 43$ D. $y = -9x + 11$

Câu 10. Tìm phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ biết rằng nó song song với đường thẳng $d: y = 1 - 4x$?

- A. $y = -4x - 2$ và $y = -4x + 14$ B. $y = -4x + 21$ và $y = -4x + 14$
C. $y = -4x + 2$ và $y = -4x + 1$ D. $y = -4x + 12$ và $y = -4x + 14$

Câu 11. Đạo hàm của hàm số $y = 4\sqrt{x} - 2x^5$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A. $\frac{1}{\sqrt{x}} - 10x^4$ B. $\frac{4}{\sqrt{x}} - 10x^4$ C. $\frac{2}{\sqrt{x}} - 10x^4$ D. $-\frac{2}{\sqrt{x}} - 10x^4$

Câu 12. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A. $\frac{-3}{(x+2)^2}$ B. $\frac{3}{(x+2)^2}$ C. $\frac{-5}{(x+2)^2}$ D. $\frac{5}{(x+2)^2}$

Câu 13. Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - x + 1)^5$ là

- A. $4(x^2 - x + 1)^4(2x - 1)$ B. $5(x^2 - x + 1)^4$ C. $5(x^2 - x + 1)^4(2x - 1)$ D. $(x^2 - x + 1)^4(2x - 1)$

Câu 14. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} + 3 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ là

A. $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

B. $f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

C. $f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

D. $f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

Câu 15. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ là

A. $f'(x) = \begin{cases} -x & \text{khi } x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

B. $f'(x) = \begin{cases} -x & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

C. $f'(x) = \begin{cases} -x & \text{khi } x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{khi } x > 1 \\ -1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

D. $f'(x) = \begin{cases} -x & \text{khi } x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{khi } x > 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = 1 + 4x^2 - 2x^4$. Tập hợp các giá trị của x để $f'(x) < 0$ là

- A. $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$ B. $(-1; 0)$ C. $(1; +\infty)$ D. $(-\infty; 0)$

Câu 17. Đạo hàm của hàm số $y = 2\sin 3x \cdot \cos 5x$ là biểu thức nào sau đây?

- A. $30\cos 3x \cdot \sin 5x$ B. $2\cos 2x - 8\cos 8x$ C. $8\cos 8x - 2\cos 2x$ D. $30\sin 5x - 30\cos 3x$

Câu 18. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\cot x}$ là

A. $\frac{-1}{\sin^2 x \cdot \sqrt{\cot x}}$

B. $\frac{-1}{2\sin^2 x \cdot \sqrt{\cot x}}$

C. $\frac{1}{2\sqrt{\cot x}}$

D. $\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cot x}}$

Câu 19. Cho hai hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ và $g(x) = \frac{1}{4}\cos 4x$. Chọn mệnh đề đúng:

- A. $f'(x) - g'(x) = 0$ B. $2f'(x) - 3g'(x) = 1$ C. $3f'(x) + 2g'(x) = -1$ D. $f'(x) = g'(x) + \frac{1}{4}$

Câu 20. Tìm đạo hàm cấp 4 của hàm số $y = \frac{1}{x}$?

A. $-\frac{4}{x^5}$

B. $\frac{4!}{x^5}$

C. $-\frac{4!}{x^5}$

D. $-\frac{4!}{x^6}$

Câu 21. Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là

- A. $24m/s^2$ B. $17m/s^2$ C. $14m/s^2$ D. $12m/s^2$

Câu 22. Phương trình chuyển động của một chất điểm $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ với s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tìm gia tốc tức thời tại thời điểm vận tốc bằng 0.

- A. $10m/s^2$ B. $12m/s^2$ C. $8m/s^2$ D. $16m/s^2$

HÌNH HỌC

Chương 3. VECTO TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC PHÉP TOÁN VỀ VECTO TRONG KHÔNG GIAN

1. Định nghĩa

Vecto trong không gian là một đoạn thẳng. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B. Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y} \dots$

2. Phép cộng và phép trừ vectơ trong không gian

✓ Quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

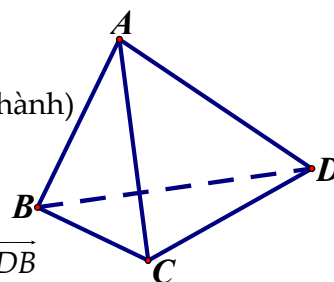
✓ Quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (ABCD là hình bình hành)

✓ Quy tắc trừ: $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$



✓ Quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

3. Phép nhân vectơ với một số

✓ I là trung điểm AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \text{ (M tùy ý)}$$

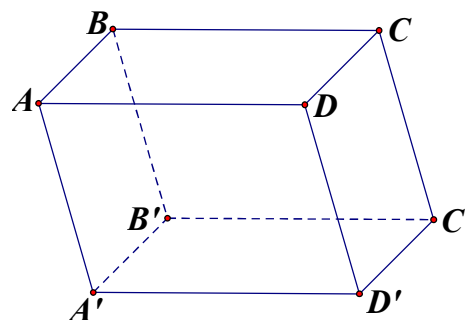
✓ G là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \text{ (M tùy ý)}$$

Ví dụ 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC, G là trọng tâm tam giác BCD.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

b) Xác định trọng tâm S của tứ diện ABCD.



II. ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẪNG CỦA BA VECTO

1. Định nghĩa

Trong không gian, 3 vectơ được gọi là đồng phẳng nếu của chúng cùng
..... với một mặt phẳng.

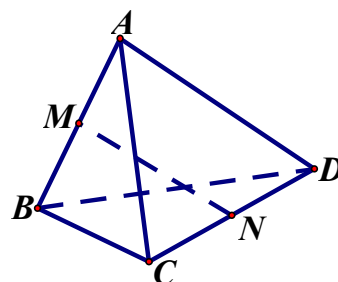
2. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Định lí 1. Trong không gian cho 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow \exists m, n \text{ sao cho } \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

Cặp số m, n là duy nhất.

Ví dụ 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng ba vectơ $\vec{BC}$, $\vec{AD}$, $\vec{MN}$ đồng phẳng.



Định lí 2. Trong không gian cho ba vectơ không đồng phẳng $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Khi đó với mọi vectơ $\vec{x}$ ta đều tìm được một bộ ba số m, n, p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Ngoài ra bộ ba số m, n, p là

B. THỰC HÀNH

3.1.1. Cho hình bình hành ABCD. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa hình bình hành. Chứng minh rằng: $\vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SB} + \vec{SD}$.

3.1.2. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng:

a) $\vec{AD} + \vec{BC} = 2\vec{MN}$

b) Ba vectơ $\vec{MN}$, $\vec{AC}$, $\vec{BD}$ đồng phẳng

3.1.3. Cho tứ diện ABCD. Hãy xác định điểm S sao cho $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = \vec{0}$.

3.1.4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Trên các cạnh AD, BC lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $\vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AD}$ và $\vec{BQ} = \frac{2}{3}\vec{BC}$. Chứng minh rằng M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. LÝ THUYẾT

I. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO TRONG KHÔNG GIAN

1. Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \widehat{BAC} \quad (0^\circ \leq \widehat{BAC} \leq 180^\circ)$$

2. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})} \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Chú ý

$$\checkmark \vec{u} \cdot \vec{u} = u^2 = |\vec{u}|^2$$

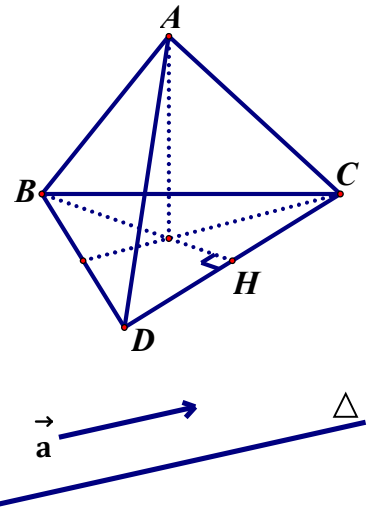
$$\checkmark \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

Ví dụ 1. Cho tứ diện đều ABCD có H là trung điểm CD. Tính:

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$

c) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD})$



II. VECTO CHỈ PHƯƠNG CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

1. Định nghĩa

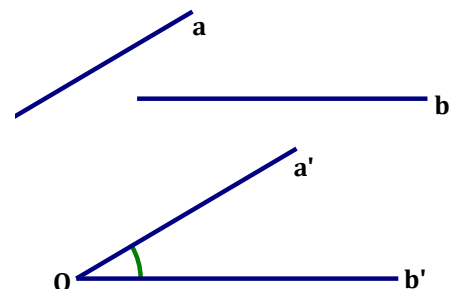
Vecto chỉ phương của một đường thẳng là vectơ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng đó.

2. Nhận xét

✓ Nếu $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì vectơ $k\vec{a}$ (với $k \neq 0$) cũng là vectơ chỉ phương của Δ .

✓ Một đường thẳng trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một và một vectơ của nó.

✓ Hai đường thẳng song song có cùng vectơ chỉ phương.



III. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Định nghĩa

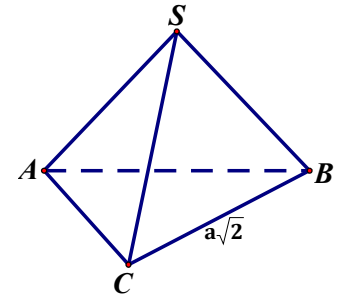
Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm O và lần lượt với a và b .

2. Nhận xét

✓ Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b , ta có thể chọn điểm O thuộc một trong hai đường thẳng.

✓ Nếu a có vectơ chỉ phương $\vec{u}$, b có vectơ chỉ phương $\vec{v}$ và $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$. Khi đó góc giữa a và b bằng α nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ và bằng $180^\circ - \alpha$ nếu $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC .



IV. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Định nghĩa

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

Kí hiệu: $a \perp b$

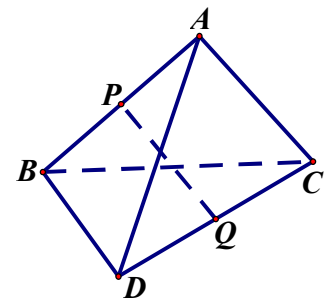
2. Nhận xét

✓ Nếu a có vectơ chỉ phương $\vec{u}$, b có vectơ chỉ phương $\vec{v}$ thì: $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

✓ Cho hai đường thẳng song song. Nếu một đường thẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

✓ Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc song song.

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng: $AB \perp PQ$.



B. THỰC HÀNH

3.2.1. Cho hình lập phương ABCD.EFGH, cạnh a.

- Hãy xác định góc giữa các cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{GF}$.
- Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$.
- Tính độ dài cạnh BH.

3.2.2. Cho tứ diện ABCD.

- Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
- Từ đẳng thức trên chứng tỏ rằng nếu tứ diện ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$.

3.2.3. Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

A. LÝ THUYẾT

I. ĐỊNH NGHĨA

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) .

Nhận xét:
$$\left. \begin{array}{l} \Delta \perp (\alpha) \\ d \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

Định lý

Nếu một đường thẳng vuông góc với đường thẳng nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

$$\left. \begin{array}{l} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = I \\ \Delta \perp a \\ \Delta \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \perp$$

Hệ quả

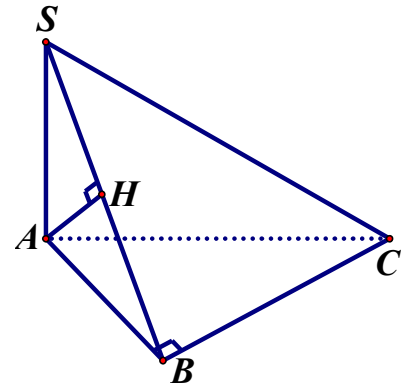
Nếu một đường thẳng vuông góc với cạnh của một tam giác thì nó cũng với cạnh thứ ba của tam giác đó.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \perp AB \\ \Delta \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \perp$$

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại B và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$.

b) Gọi AH là đường cao của ΔSAB . Chứng minh $AH \perp SC$.

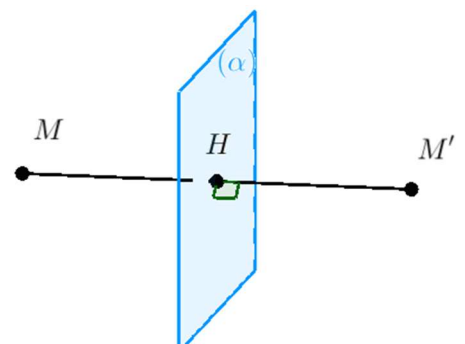


III. TÍNH CHẤT

✓ Tính chất 1: Có mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

✓ Tính chất 2: Có đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

✓ Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng: là đi qua của đoạn thẳng đó, đồng thời với đoạn thẳng đó.



IV. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG - VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

✓ Tính chất 1:

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng với đường thẳng kia.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì với nhau.

✓ Tính chất 2:

a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng với mặt phẳng kia.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì với nhau.

✓ Tính chất 3:

a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng với a .

b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng với nhau.

V. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC VÀ ĐỊNH LÝ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC

1. Phép chiếu vuông góc

Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) . Phép chiếu theo phương lên mặt phẳng (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α) .

2. Định lý ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α) . Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α) . Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) .

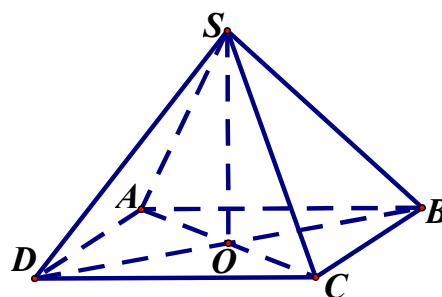
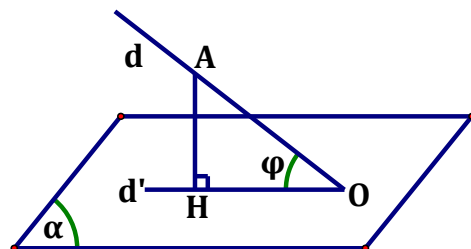
* Trường hợp đường thẳng Δ vuông góc với (α) thì $(\Delta, (\alpha)) = \dots\dots\dots$

* Trường hợp đường thẳng Δ không vuông góc với (α) thì $(\Delta, (\alpha)) = (\Delta, d)$, trong đó d là của Δ lên (α) .

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA = SB = SC = SD = a$. Gọi O là giao điểm của AC và BD .

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$.



3.3.1. Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và DBC là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC. Gọi I là trung điểm BC, gọi AH là đường cao của tam giác AID. Chứng minh rằng:

- 3.3.2.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi và có $SA = SB = SC = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:

- 3.3.3.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

- 3.3.4.** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B; $SA \perp (ABC)$; $AB = BC = a$; $SA = a\sqrt{3}$.

- b) Gọi AH và AK lần lượt là đường cao của $\triangle SAB$ và $\triangle SAC$. Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

A. LÝ THUYẾT

I. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

1. Định nghĩa

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt với hai mặt phẳng đó.

Chú ý: Nếu hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng

2. Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau

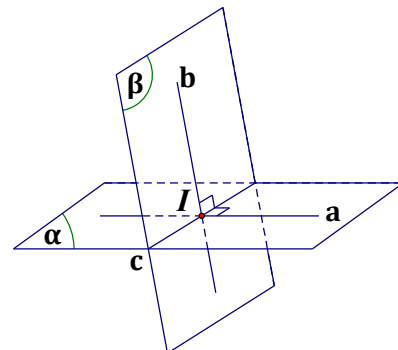
Bước 1. Xác định giao tuyến $c = (\alpha) \cap (\beta)$

Bước 2. Chọn một điểm $I \in c$

Bước 3. Trong (α) , dựng đường thẳng $a \perp c$ và $a \cap c = I$

Trong (β) , dựng đường thẳng $b \perp c$ và $b \cap c = I$

Khi đó, $((\alpha), (\beta)) = (\angle aIb)$.



Ví dụ 1. Cho tứ diện ABCD có ABC và DBC là các tam giác cân có chung cạnh BC. Hãy xác định góc giữa hai mặt (ABC) và (DBC).

3. Diện tích hình chiếu của một đa giác

Cho H là một đa giác nằm trong mặt phẳng (α) . Gọi H' là hình chiếu vuông góc của H lên mặt phẳng (β) . Khi đó:

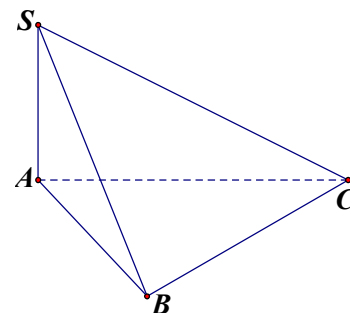
$$S_{H'} = S_H \cdot \cos((\alpha), (\beta))$$

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều ABC cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = \frac{a}{2}$.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC)

b) Xác định hình chiếu vuông góc của ΔSAB lên mặt đáy

c) Tính diện tích ΔSBC



II. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

1. Định nghĩa

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng

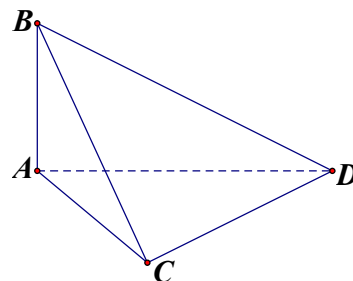
Kí hiệu: $(\alpha) \perp (\beta)$

2. Các định lí

Định lí 1. Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \subset (\alpha) \\ \Delta \perp (\beta) \end{array} \right\} \Leftrightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$

Ví dụ 3. Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc. Chứng minh rằng các mặt bên (ABC), (ABD), (ACD) cũng đôi một vuông góc.



Hệ quả 1: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Hệ quả 2: Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (α) ta dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì đường thẳng này nằm mặt phẳng (α) .

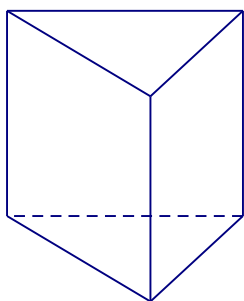
Định lí 2: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

III. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

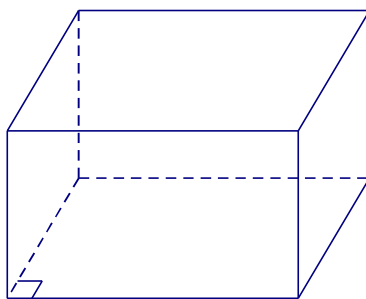
1. Định nghĩa

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên với các mặt đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là của hình lăng trụ đứng.

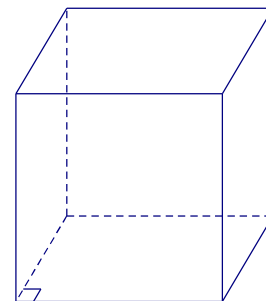
- Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác... được gọi tương ứng là hình lăng trụ tam giác, lăng trụ đứng tứ giác, lăng trụ đứng ngũ giác...
- Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều được gọi là hình lăng trụ
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình đứng.
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là hình
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông được gọi là hình



Hình lăng trụ đứng tam giác



Hình hộp chữ nhật



Hình lập phương

2. Nhận xét

Các mặt bên của hình lăng trụ đứng luôn với mặt đáy và đều là hình

IV. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

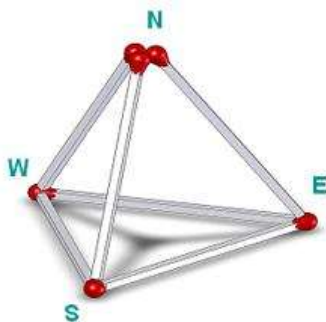
1. Hình chóp đều

• Định nghĩa: Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác và có chân đường cao trùng với đa giác đáy.

• Nhận xét:

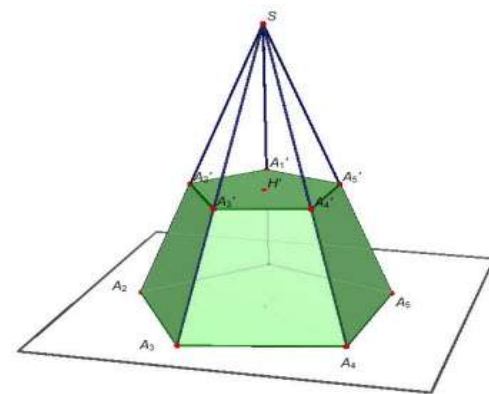
✓ Hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác bằng nhau, và tạo với mặt đáy các góc

✓ Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc



2. Hình chóp cắt đều

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cắt đều.



B. THỰC HÀNH

3.4.1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và $SA = SB = SC = SD$. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (ABCD)$

b) $(SAC) \perp (SBD)$

3.4.2. Cho tứ diện $SABC$ có $SA \perp (ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B và $SA = AB = 2a$, $BC = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm AB .

a) Tính đường cao AI của $\triangle AMC$

b) Tính $((SMC), (ABC))$

c) Tính diện tích tam giác SBC

KHOẢNG CÁCH

A. LÝ THUYẾT

I. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, MẶT PHẪNG

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Nếu K là hình chiếu của điểm O trên Δ thì $d(O, \Delta) = \dots\dots$

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Nếu K là hình chiếu của điểm O trên (α) thì $d(O, (\alpha)) = \dots\dots$

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a , các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

Gọi M là giao điểm của AC và BD.

a) Chứng minh rằng SM là đường cao của hình chóp.

b) Tính độ dài đường cao của hình chóp.

II. KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG, GIỮA HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

1. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Cho đường thẳng $\Delta // (\alpha)$ và M là một điểm bất kì trên Δ . Khi đó $d(\Delta, (\alpha)) = d(M, (\alpha))$.

2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

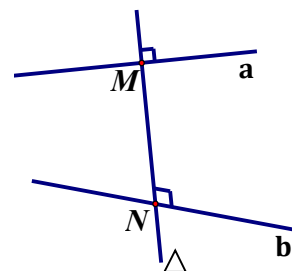
$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) // (\beta) \\ M \in (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta))$$

III. ĐƯỜNG VUÔNG GÓC CHUNG VÀ KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

1. Định nghĩa

✓ Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và cùng vuông góc với hai đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc của a và b .

✓ Nếu đường thẳng vuông góc chung Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b lần lượt tại M, N thì $d(a, b) = \dots\dots$



2. Cách tìm đường vuông góc chung của 2 đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b .

- Gọi (β) là mặt phẳng chứa b và song song với a .
- Gọi (α) là mặt phẳng chứa a và vuông góc với (β) .
- Gọi $c = (\alpha) \cap (\beta)$ và $N = b \cap c$
- Gọi Δ là đường thẳng đi qua N và vuông góc với a .

Khi đó Δ là đường vuông góc chung.

Ví dụ 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

- Chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của AB và CD .
- Tính khoảng cách giữa AB và CD .

B. THỰC HÀNH

3.5.1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$.

- Tính khoảng cách $d(B, (SAC))$.
- Tính khoảng cách $d(A, (SBD))$.
- Tính khoảng cách $d(SA, BC)$.
- Tính khoảng cách $d(SC, BD)$.

3.5.2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

- Tính diện tích tam giác SBC .
- Tính khoảng cách từ A đến mặt (SBC) .

3.5.3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = AC = a\sqrt{2}$, cạnh bên $AA' = 2a$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của cạnh BC .

- Tính số đo góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) .
- Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy của lăng trụ.

ÔN TẬP CHƯƠNG 3

Câu 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$
 C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = -4\overrightarrow{NM}$ D. $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MN}$

Câu 2. Cho tứ giác ABCD nằm trên mặt phẳng (α) và một điểm S tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ B. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$
 C. Nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$ thì ABCD là hình bình hành
 D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ khi và chỉ khi O là giao điểm của AC và BD

Câu 3. Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng là:

- A. Có hai số x, y sao cho $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ B. Có ba số x, y, z sao cho $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$
 C. Có hai số x, y không đồng thời bằng 0 sao cho $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$
 D. Có ba số x, y, z không đồng thời bằng 0 sao cho $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$

Câu 4. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng. Khi đó, ba vectơ nào sau đây đồng phẳng?

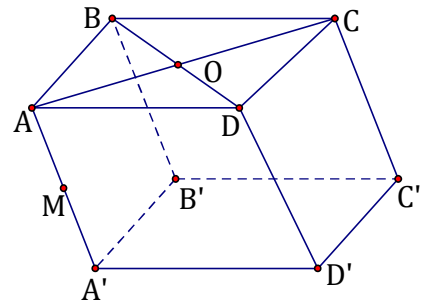
- A. $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{0}$, $\vec{c}$ B. $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a}$, $2\vec{b}$ C. $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{b}$ D. $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{c}$, $2(\vec{a} + \vec{b})$

Câu 5. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Khi đó, ba vectơ nào sau đây đồng phẳng?

- A. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{D'B'}$ B. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA'}$
 C. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CC'}$ D. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC'}$

Câu 6. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M là trung điểm của AA', O là tâm của hình bình hành ABCD (như hình). Ba vectơ nào sau đây đồng phẳng?

- A. $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C}$ B. $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'D'}$
 C. $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{DC'}$, $\overrightarrow{B'C}$ D. $\overrightarrow{MO}$, $\overrightarrow{A'D}$, $\overrightarrow{B'C'}$



Câu 7. Cho tứ diện ABCD có G là trọng tâm $\triangle BCD$. Khi đó

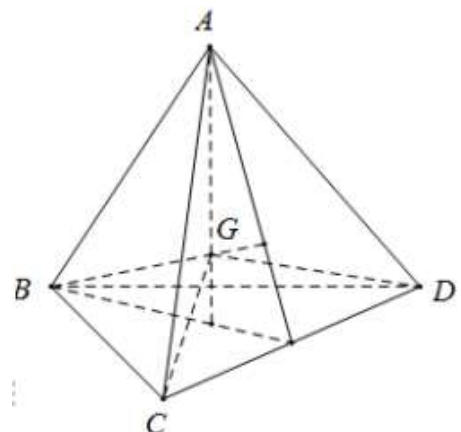
- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA})$
 C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ D. $\overrightarrow{AG} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

Câu 8. Cho tứ diện ABCD có trọng tâm G (như hình). Khi đó:

- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA})$
 C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ D. $\overrightarrow{AG} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

Câu 9. Cho tứ diện đều ABCD, cạnh a. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

- A. a^2 B. 0 C. $\frac{a^2}{2}$ D. $-\frac{a^2}{2}$



Câu 10. Cho tứ diện đều ABCD, cạnh a. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng

- A. a^2 B. 0 C. $\frac{a^2}{2}$ D. $-\frac{a^2}{2}$

Câu 11. Hai đường thẳng a, b lần lượt có các vectơ chỉ phương là $\vec{u}$, $\vec{v}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng a, b. Khi đó

- A. $\varphi = (\vec{u}, \vec{v})$ B. $\cos \varphi = \cos(\vec{u}, \vec{v})$ C. $\varphi = 180^\circ - (\vec{u}, \vec{v})$ D. $\cos \varphi = |\cos(\vec{u}, \vec{v})|$

Câu 12. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng d thì song song với nhau
B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng d thì vuông góc với nhau
C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng d thì cắt nhau
D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng d thì có thể chéo nhau

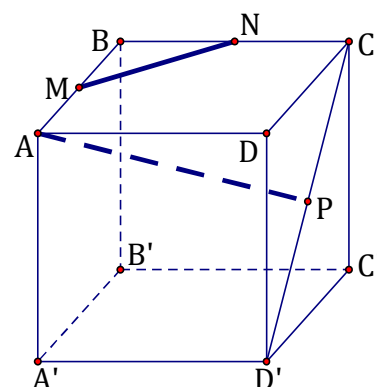
Câu 13. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh a. Mệnh đề nào sau đây không đúng?

- A. $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{CC'} = -a^2$ B. $\overrightarrow{AD'} \cdot \overrightarrow{AB'} = a^2$
C. $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{CD'} = 0$ D. $AC' = a\sqrt{3}$

Câu 14. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, C'D' (như hình). Xác định số đo góc giữa hai đường thẳng MN và AP.

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Gợi ý: Tam giác ACD' đều.



Câu 15. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm I sao cho $SA = SC$ và $SB = SD$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $SI \perp (ABCD)$ B. $AC \perp (SBD)$ C. $BD \perp (SAC)$ D. $SA \perp (ABCD)$

Câu 16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I sao cho $SA = SC$ và $SB = SD$. Mệnh đề nào sau đây không đúng?

- A. $SI \perp (ABCD)$ B. $AC \perp (SBD)$ C. $BD \perp (SAC)$ D. $SA \perp (ABCD)$

Câu 17. Cho tứ diện ABCD có ACD và BCD là hai tam giác cân có chung cạnh đáy CD. Gọi M là trung điểm CD. Mệnh đề nào sau đây đúng nhất?

- A. $AM \perp (BCD)$ B. $BM \perp (BCD)$ C. $CD \perp (BAM)$ D. $AM \perp (BAM)$

Câu 18. Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc. Mệnh đề nào sau đây đúng nhất?

- A. $AB \perp (ACD)$ B. $AB \perp CD$ C. $AC \perp BD$ D. Cả A, B, C đều đúng

Câu 19. Cho hình chóp đều ABCD. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Mệnh đề nào sau đây không đúng?

- A. $AG \perp CD$ B. $AG \perp (BCD)$ C. $BG \perp (ACD)$ D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$

Câu 20. Cho tứ diện ABCD có ACD và BCD là hai tam giác cân có chung cạnh đáy CD. Gọi M là trung điểm CD. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng CD là

- A. (BAM) B. (BCD) C. (ACD) D. AB

Câu 21. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm I sao cho $SA = SC$ và $SB = SD$. Hình chiếu của đường thẳng SB trên mặt phẳng (ABCD) là

- A. AB B. CB C. DB D. IB

Câu 22. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm I và $SI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Số đo góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABCD) bằng

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Câu 23. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. $SC \perp (ABCD)$ và $SC = a$. Số đo góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABCD) bằng

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Câu 24. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC vuông tại A và $BC = SB = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của BC. Tính số đo góc giữa SA và (ABC).

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°

Câu 25. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Nếu $a \perp b$ và $a \perp (P)$ thì $b // (P)$ B. Nếu $a // b$ và $a \perp (P)$ thì $b \perp (P)$
C. Nếu $a // (P)$ và $a \perp b$ thì $b \perp (P)$ D. Cả A, B, C đều sai

Câu 26. Một hình chóp tam giác là hình chóp đều khi và chỉ khi

- A. Đường cao của hình chóp đi qua trọng tâm của đáy
B. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau
C. Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau
D. Đáy là tam giác đều và các cạnh bên có độ dài bằng nhau

Câu 27. Cho tứ diện đều ABCD. Cosin của góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 28. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến c và một điểm $A \in (P)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Nếu $a \subset (P)$ thì $a \perp (Q)$ B. Nếu $a \perp (Q)$ thì $a \subset (P)$
C. Nếu $a \perp c$ và $A \in a$ thì $a \perp (Q)$ D. Nếu $a \perp (Q)$ và $A \in a$ thì $a \subset (P)$

Câu 29. Cho hai mặt phẳng (P), (Q) và một đường thẳng a. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Nếu $(P) // (Q)$ và $a \perp (P)$ thì $a \perp (Q)$ B. Nếu $(P) \perp (Q)$ và $a \perp (P)$ thì $a // (Q)$
C. Nếu $(P) \perp (Q)$ và $a // (P)$ thì $a \perp (Q)$ D. Cả a, b, c đều sai

Câu 30. Cho đường thẳng $a \perp (P)$. Qua a, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P)?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số

Câu 31. Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P). Qua a, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P)?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. Vô số

Câu 32. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi

- A. Mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều vuông góc với mặt phẳng kia
B. Hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng vuông góc với nhau
C. Mặt phẳng này chứa đường thẳng vuông góc với đường thẳng kia
D. Mỗi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều vuông góc với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng kia

Câu 33. Hình nào trong các hình sau đây không có đủ 6 mặt là hình chữ nhật?

- A. Hình lập phương B. Hình lăng trụ tứ giác đều

C. Hình hộp đứng

D. Hình hộp chữ nhật

Câu 34. Hình nào trong các hình sau đây có tất cả các cạnh bằng nhau?

A. Hình hộp chữ nhật

B. Hình hộp

C. Hình lăng trụ đều

D. Hình hộp thoi

Câu 35. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước là 3, 4, 5 thì độ dài đường chéo của nó là

A. 50

B. $5\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{5}$

D. 12

Câu 36. Hình lập phương có cạnh bằng 7 thì đường chéo có độ dài là

A. 147

B. $3\sqrt{7}$

C. $7\sqrt{3}$

D. 21

Câu 37. Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Kết luận nào sau đây không đúng?

A. $(ABC) \perp (ACD)$

B. $(ABC) \perp (ABD)$

C. $(ACD) \perp (ABD)$

D. $(ABC) \perp (BCD)$

Câu 38. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Chọn kết luận **sai**.

A. $(SAC) \perp (SBD)$

B. $(SAC) \perp (ABCD)$

C. $(SAB) \perp (ABCD)$

D. $(SBD) \perp (ABCD)$

Câu 39. Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AB = AC = AD = a$. Tính $\tan((ABC), (DBC))$.

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

Câu 40. Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AB = AC = a$, $AD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính số đo góc $((ABC), (DBC))$.

A. 45°

B. $54^\circ 44'$

C. $35^\circ 16'$

D. $26^\circ 34'$

Câu 41. Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AB = AC = a$, $AD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính diện tích tam giác BCD.

A. $\frac{a^2}{2}$

B. $a^2\sqrt{2}$

C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{a^2}{2\sqrt{2}}$

Câu 42. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và $SA = SB = SC = SD = a$. Tính cosin của góc $((SAB), (SAD))$.

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $-\frac{1}{3}$

Câu 43. Cho tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau và $AB = AC = AD = a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD).

A. a

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $a\sqrt{2}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 44. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Mệnh đề nào sau đây chưa đúng?

A. Khoảng cách giữa a và (P) bằng khoảng cách giữa a và đường thẳng $b \subset (P)$ sao cho $a // b$

B. Khoảng cách giữa a và (P) bằng khoảng cách giữa a và hình chiếu của nó trên (P)

C. Khoảng cách giữa a và (P) bằng khoảng cách giữa a và đường thẳng $b \subset (P)$ sao cho $a \perp b$

D. Khoảng cách giữa a và (P) bằng khoảng cách giữa a và đường thẳng $b \subset (P)$ sao cho a và b không song song

Câu 45. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó

- B. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt đi qua hai đường thẳng đó
- C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.
- D. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng song song lần lượt cắt hai đường thẳng đó

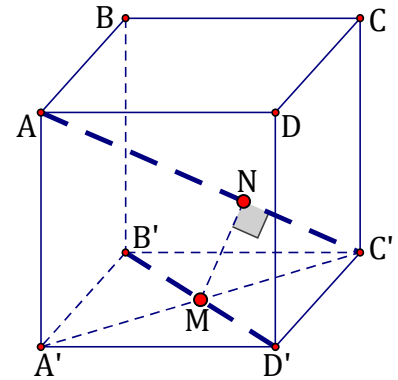
Câu 46. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

- A. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn thẳng ngắn nhất nối hai điểm thuộc hai đường thẳng đó
- B. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng đó
- C. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau cắt cả hai đường thẳng đó
- D. Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau vuông góc với mặt phẳng song song với hai đường thẳng đó

Câu 47. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Hãy chỉ ra đoạn vuông góc chung của AB và $A'D'$?

- A. AA' B. BD' C. BC D. $B'D$

Câu 48. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'D'$, bạn Trần đã giải như sau:



Bước 1 Gọi $M = B'D' \cap A'C'$
 Từ điểm M, dựng $MN \perp AC'$ (1)

Bước 2 Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên

$$\left. \begin{array}{l} B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp AA' \end{array} \right\} \Rightarrow B'D' \perp (AA'C') \Rightarrow B'D' \perp MN \quad (2)$$

Bước 3 Từ (1) và (2) suy ra MN là đoạn vuông góc chung của AC' và $B'D'$.
 Ta thấy $\triangle AA'C'$ và $\triangle MNC'$ đồng dạng vì

Bước 4
$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}' = 90^\circ \\ \hat{C}' \text{ chung} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{AA'} = \frac{MC'}{AC'} \Rightarrow MN = \frac{AA' \cdot MC'}{AC'} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Từ đó suy ra $d(AC', B'D') = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Lời giải trên đúng hay sai. Nếu sai thì sai từ bước nào?

- A. Đúng B. Sai từ Bước 2
 C. Sai từ Bước 3 D. Sai từ Bước 4

Câu 49. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông tâm I, cạnh a và $SI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{a}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. a

