

Câu 1. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 2$ (1).

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số (1).

b) Tìm m để phương trình $-x^2 + 2x - 2 - m = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn:

$$x_1 < -1 < 3 < x_2.$$

Câu 2. a) Giải bất phương trình sau: $(x^2 + 4x)\sqrt{2x^2 + 5x - 3} \geq 0$

b) Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}.$$

c) Tìm m để bất phương trình: $-2 < \frac{x^2 - 4x + m}{x^2 - 2x + 3} \leq 3$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

Câu 3. Cho tam giác ABC ; đặt $a = BC, b = AC, c = AB$. Gọi M là điểm tùy ý.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ theo a, b, c .

b) Giả sử $a = \sqrt{6}$ cm, $b = 2$ cm, $c = (1 + \sqrt{3})$ cm. Tính số đo góc nhỏ nhất của tam giác ABC và diện tích tam giác ABC .

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là hình chiếu của A lên BD ; I là trung điểm của BH . Biết đỉnh $A(2;1)$, phương trình đường chéo BD là: $x + 5y - 19 = 0$, điểm $I\left(\frac{42}{13}; \frac{41}{13}\right)$.

a) Viết phương trình tham số đường thẳng AH . Tìm tọa độ điểm H ?

b) Viết phương trình tổng quát cạnh AD .

Câu 5. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 2$ (1).

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số (1).

b) Tìm m để phương trình $-x^2 + 2x - 2 - m = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn: $x_1 < -1 < 3 < x_2$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

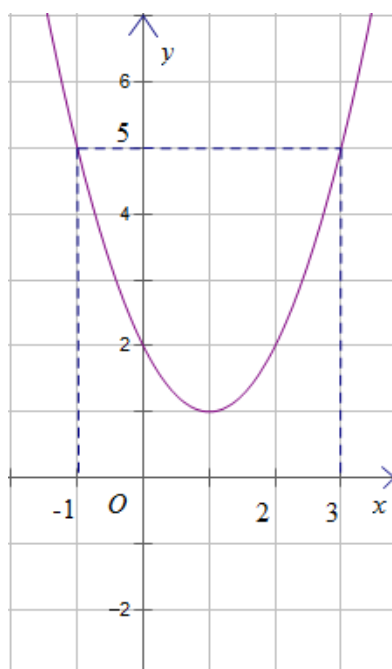
Tọa độ đỉnh $I(1;1)$.

Hệ số $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	1	$+\infty$

+ Đồ thị: (P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$. (P) đi qua các điểm $A(0;2)$; $B(2;2)$.



b) $-x^2 + 2x - 2 - m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = -m$. (1)

Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của (P) với đường thẳng $d: y = -m$, trong đó (d) là đường thẳng luôn song song hoặc trùng với Ox .

Dựa vào đồ thị (P) ta thấy phương trình (1) có nghiệm thỏa mãn $x_1 < -1 < 3 < x_2 \Leftrightarrow -m > 5 \Leftrightarrow m < -5$.

Câu 2.

a) Giải bất phương trình sau: $(x^2 + 4x)\sqrt{2x^2 + 5x - 3} \geq 0$

b) Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}.$$

c) Tìm m để bất phương trình: $-2 < \frac{x^2 - 4x + m}{x^2 - 2x + 3} \leq 3$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

Lời giải

a) Điều kiện $2x^2 + 5x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$

+ Ta thấy $x = -3, x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

+ Khi $\begin{cases} x < -3 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$ thì $2x^2 + 5x - 3 > 0$, suy ra $\sqrt{2x^2 + 5x - 3} > 0$ nên:

$$(x^2 + 4x)\sqrt{2x^2 + 5x - 3} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Suy ra trường hợp này bất phương trình có tập nghiệm $S_2 = (-\infty; -4] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; -4] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \cup \{-3\}.$

b)
$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Ta có: $2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2xy + y + xy - 2x^2 + x - 2y + 4x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow y(y - 2x + 1) + x(y - 2x + 1) - 2(y - 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y + x - 2)(y - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ y = 2x - 1 \end{cases}.$$

Như thế:

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 2 - x \\ x^2 + (2 - x)^2 + x + (2 - x) - 4 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + (2x - 1)^2 + x + (2x - 1) - 4 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 2 - x \\ 2x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2x - 1 \\ 5x^2 - x - 4 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{4}{5} \\ y = -\frac{13}{5} \end{cases} \end{cases}.$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y)$ là: $(1; 1); \left(-\frac{4}{5}; -\frac{13}{5}\right).$

c) Ta có $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên:

$$-2 < \frac{x^2 - 4x + m}{x^2 - 2x + 3} \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 4x - 6 < x^2 - 4x + m \\ x^2 - 4x + m \leq 3x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 8x + m + 6 > 0 & (1) \\ 2x^2 - 2x + 9 - m \geq 0 & (2) \end{cases}.$$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để mỗi bất phương trình (1), (2) nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Ta thấy:

$$(1) \text{ đúng với mọi } x \text{ thuộc } \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta_1' = 4^2 - 3(m+6) < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}.$$

$$(2) \text{ đúng với mọi } x \text{ thuộc } \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta_2' = 1^2 - 2(9-m) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{17}{2}.$$

$$\text{Vậy } m \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{17}{2}\right].$$

Câu 3. Cho tam giác ABC ; đặt $a = BC, b = AC, c = AB$. Gọi M là điểm tùy ý.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$ theo a, b, c .

d) Giả sử $a = \sqrt{6}$ cm, $b = 2$ cm, $c = (1 + \sqrt{3})$ cm. Tính số đo góc nhỏ nhất của tam giác ABC và diện tích tam giác ABC .

Lời giải

a) Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

Ta có $P = MA^2 + MB^2 + MC^2 = \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2$.

$$\text{Với } \begin{cases} \vec{MA}^2 = (\vec{MG} + \vec{GA})^2 = MG^2 + 2\vec{MG} \cdot \vec{GA} + GA^2 \\ \vec{MB}^2 = (\vec{MG} + \vec{GB})^2 = MG^2 + 2\vec{MG} \cdot \vec{GB} + GB^2 \\ \vec{MC}^2 = (\vec{MG} + \vec{GC})^2 = MG^2 + 2\vec{MG} \cdot \vec{GC} + GC^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 = 3MG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Khi đó $P = 3MG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2)$ và $P \min \Leftrightarrow MG^2 \min \Leftrightarrow MG \min \Leftrightarrow M \equiv G$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} GA^2 = \frac{4}{9}m_a^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \\ GB^2 = \frac{4}{9}m_b^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right) = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \\ GC^2 = \frac{4}{9}m_c^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } P_{\min} = \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

b)

* Ta có $a = \sqrt{6}$ cm, $b = 2$ cm, $c = (1 + \sqrt{3})$ cm.

Vì $b = \min\{a, b, c\}$ suy ra góc B trong tam giác ABC có số đo nhỏ nhất.

Áp dụng định lý Cosin trong tam giác ABC , ta được:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$\Leftrightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{6 + (1 + \sqrt{3})^2 - 4}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot (1 + \sqrt{3})} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = 45^\circ.$$

Vậy $B = 45^\circ$.

$$* \text{ Diện tích tam giác } ABC: S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}.$$

Vậy $S = \sqrt{3}$ (đvdt).

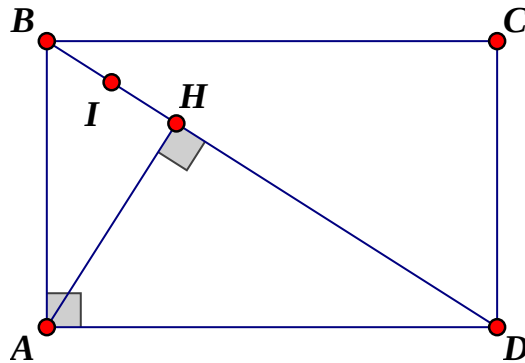
Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H là hình chiếu của A lên BD ; I là trung điểm của BH . Biết đỉnh $A(2;1)$, phương trình đường chéo BD là: $x + 5y - 19 = 0$, điểm $I\left(\frac{42}{13}; \frac{41}{13}\right)$.

c) Viết phương trình tham số đường thẳng AH . Tìm tọa độ điểm H ?

d) Viết phương trình tổng quát cạnh AD .

Lời giải

a)



$BD: x + 5y - 19 = 0$ có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{BD} = (1; 5)$.

$AH \perp BD$ nên AH nhận véc tơ pháp tuyến của $BD: \vec{n}_{BD} = (1; 5)$ làm véc tơ chỉ phương của mình. Vậy AH qua $A(2;1)$ có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{AH} = (1; 5)$ nên phương trình tham số của đường thẳng AH là: $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$.

b) $\{H\} = AH \cap BD$ nên tọa độ H thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 5t \\ x + 5y - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 5t \\ t = \frac{6}{13} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{32}{13}; \frac{43}{13}\right).$$

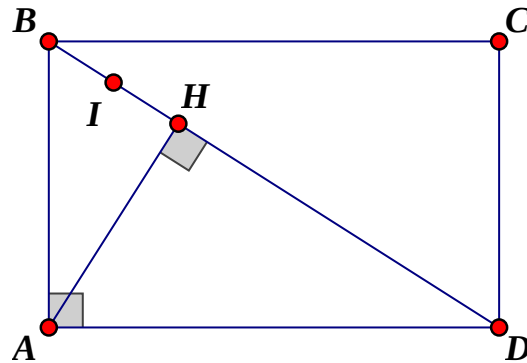
Vì $I\left(\frac{42}{13}; \frac{41}{13}\right)$ là trung điểm BH với $H\left(\frac{32}{13}; \frac{43}{13}\right)$ nên tọa độ $B(4;3)$.

Có $AD \perp AB$ nên đường thẳng AD nhận véc tơ $\overrightarrow{AB}(2;2)$ làm véc tơ pháp tuyến.

Đường thẳng AD đi qua điểm $A(2;1)$ và có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}(2;2)$ nên có phương trình tổng quát là: $2(x-2)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x+y-3=0$.

Lời giải

a)



$BD: x+5y-19=0$ có vtpt là $\vec{n}_{BD}=(1;5)$.

$AH \perp BD$ nên vtcp $\vec{u}_{AH} = \text{vtpt } \vec{n}_{BD} = (1;5)$.

Vậy $AH: \begin{cases} \text{qua } A(2;1) \\ \text{vtcp } \vec{u}_{AH} = (1;5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=1+5t \end{cases}$.

b) $\{H\} = AH \cap BD$ nên tọa độ H thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1+5t \\ x+5y-19=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=1+5t \\ t=\frac{6}{13} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{32}{13}; \frac{43}{13}\right).$$

Vì $I\left(\frac{42}{13}; \frac{41}{13}\right)$ là trung điểm BH với $H\left(\frac{32}{13}; \frac{43}{13}\right)$ nên tọa độ $B: \begin{cases} x_B = 2x_I - x_H \\ y_B = 2y_I - y_H \end{cases} \Rightarrow B(4;3)$.

$\overrightarrow{AB}=(2;2)$.

Có $AD \perp AB$ nên vtpt $\vec{n}_{AD} = \overrightarrow{AB} = (2;2)$.

Vậy $AD: \begin{cases} \text{qua } A(2;1) \\ \text{vtpt } \vec{n}_{AD} = (2;2) \end{cases} \Leftrightarrow 2(x-2)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x+y-3=0$.

Câu 5. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn: $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Lời giải:

Do $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$ nên $a, b, c \in (0;1)$.

$$\text{Ta có } \frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{1-a^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2, \forall a \in (0;1)$ (1).

Thật vậy $\frac{1}{1-a^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} a \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt{3}} \geq a(1-a^2) \Leftrightarrow \frac{4}{27} \geq a(1-a^2)(1-a^2)$ (*).

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ba số dương $2a^2, (1-a^2), (1-a^2)$ ta có:

$$2a^2 \cdot (1-a^2) \cdot (1-a^2) \leq \frac{(2a^2 + 1-a^2 + 1-a^2)^3}{27} = \frac{8}{27} \Rightarrow a^2 \cdot (1-a^2) \cdot (1-a^2) \leq \frac{4}{27} \\ \Rightarrow a \cdot (1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $2a^2 = 1-a^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy (*) luôn đúng.

Tương tự ta có: $\frac{b}{1-b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2, \forall b \in (0;1)$ (2). Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow b = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\frac{c}{1-c^2} \geq c \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2, \forall c \in (0;1) \text{ (3). Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Lấy (1), (2), (3) cộng theo vế ta có: $\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.