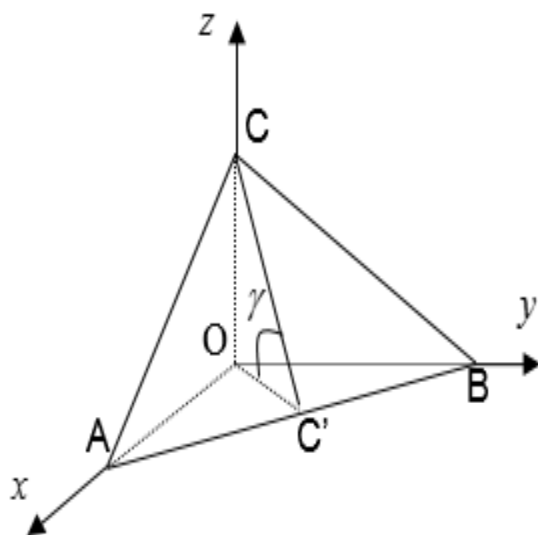


Hình học không gian lớp 12



PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN



Tác giả : Phương Nguyễn

LỜI NÓI ĐẦU

Như các bạn đều biết , môn Toán là một môn rất quan trọng và có tầm ảnh hưởng rất lớn tới việc xét tuyển vào Đại Học hay Cao Đẳng sau này. Do đó để có được số điểm cao trong môn này , ta cần phải có 1 vốn kiến thức cần thiết và hiểu rõ những khái niệm , bản chất toán học. Và trong chuyên đề ngày hôm nay mình sẽ đề cập đến 1 trong 3 câu hình học luôn xuất hiện trong đề thi đại học. Đó chính là các bài toán về hình học không gian thuần túy (cổ điển) với phương pháp gắn hệ trục Oxyz và giải như một bài toán giải tích bình thường. Đa số trong các bài toán này, mình thường thấy các bạn chỉ làm được 1/2 yêu cầu đề bài (giống mình lúc trước hihi :v). Các câu hỏi còn lại như tìm khoảng cách giữa 1 điểm đến đường thẳng hay tìm khoảng cách giữa 2 đường thẳng hoặc chứng minh song song, vuông góc v.v..... các bạn đều bỏ (và mình cũng vậy :v). Lý do là bởi vì bạn đã quên 1 số kiến thức về hình học ở lớp 11 và các cách tư duy dựng hình. Vì thế mình sẽ giúp các bạn vượt qua các bài toán ấy bằng phương pháp tọa độ hóa này ☺

Ưu điểm :

- ✓ Dễ hiểu
- ✓ Dễ làm
- ✓ Công việc chính là chỉ tính toán
- ✓ Không cần chứng minh nhiều
- ✓ Phù hợp với các bạn học hình yếu

Nhược điểm :

- ✗ Tính toán dễ sai
- ✗ Đôi khi sẽ chậm hơn so với cách cổ điển
- ✗ Ít được sử dụng
- ✗ Đôi khi nhìn rất dễ lộn

Phần đầu tiên

Các kiến thức quan trọng (cần nhớ hết :v)

1.Các công thức về hình học

* Diện tích các hình:

✓ Tam giác thường (hoặc vuông như trong hình)

$$\text{✎ } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B = \frac{1}{2} AC \cdot CB \cdot \sin C = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} = pr$$

(với AD là đường cao, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, p là nửa chu vi , r là bán kính đường tròn nội tiếp)

* Mở rộng :

- Hệ thức lượng trong tam giác vuông (như hình vẽ)

$$AC^2 = CD \cdot CB$$

$$AB^2 = BD \cdot BC$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow AD = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$$

$$AD^2 = BD \cdot CD$$

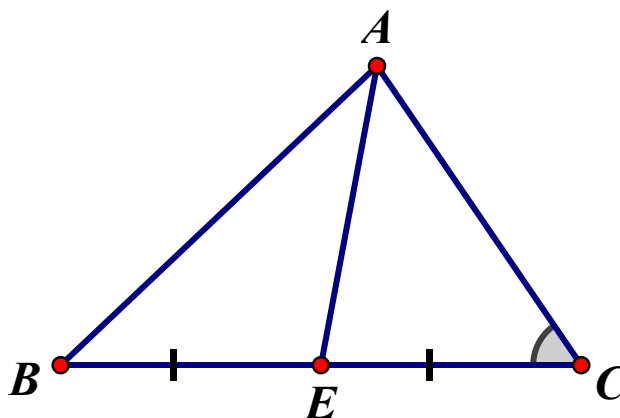
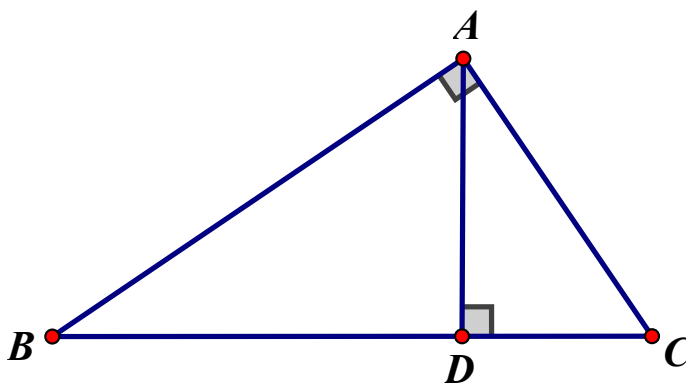
$$AB \cdot AC = AD \cdot BC$$

- Hệ thức lượng trong mọi tam giác :
(ví dụ tam giác thường như hình vẽ)

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos C$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

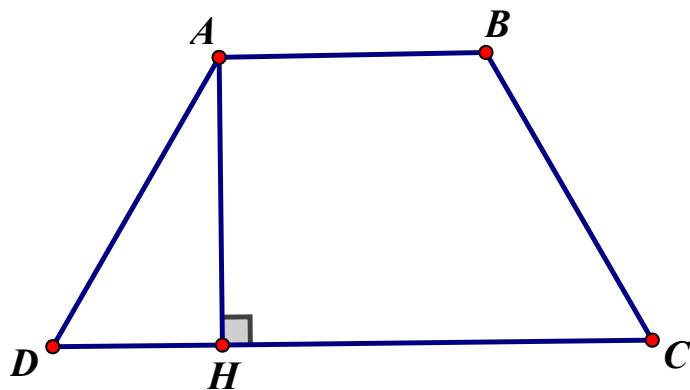
$$AE^2 = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) - \frac{1}{4}BC^2$$



✓ Hình thang (thường , cân , vuông)

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD).AH}{2}$$

$$AH \perp DC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$$

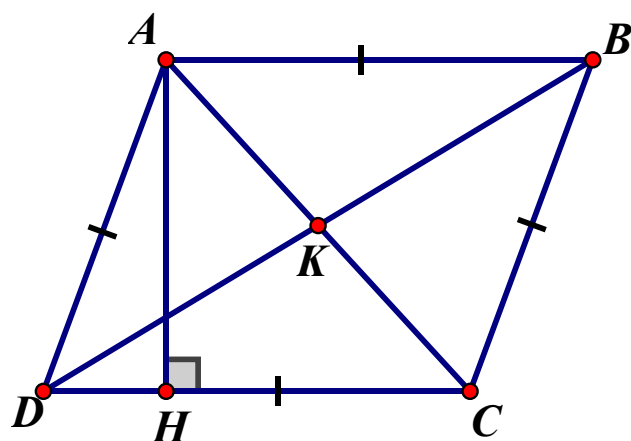


✓ Hình bình hành

$$S_{ABCD} = AB.AH = 2S_{ABC} = 2S_{ADC}$$

$$AB = BC = CD = DA$$

$$AH \perp DC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$$

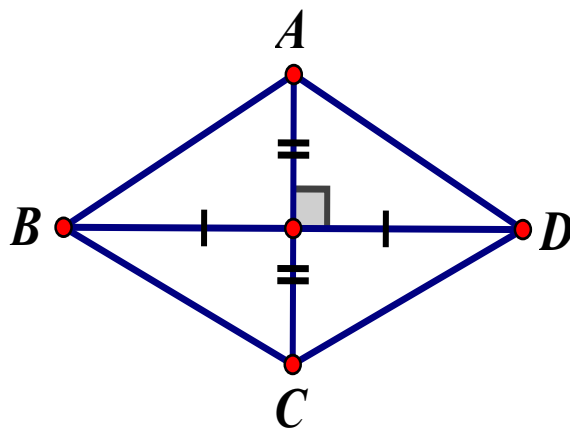


✓ Hình thoi

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD$$

$$AC \perp BD \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

$$AB = BC = CD = DA$$

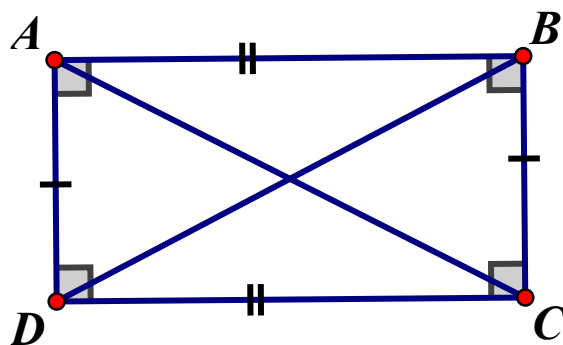


✓ Hình chữ nhật

$$S_{ABCD} = AB.BC$$

$$AB = DC$$

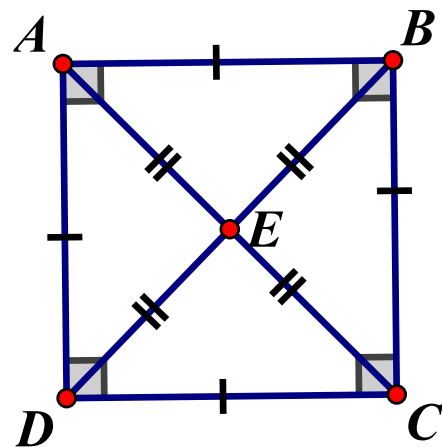
$$AD = BC$$



✓ Hình vuông

$$S_{ABCD} = AB^2 = BC^2 = CD^2 = AD^2$$

$$AB = BC = CD = DA$$



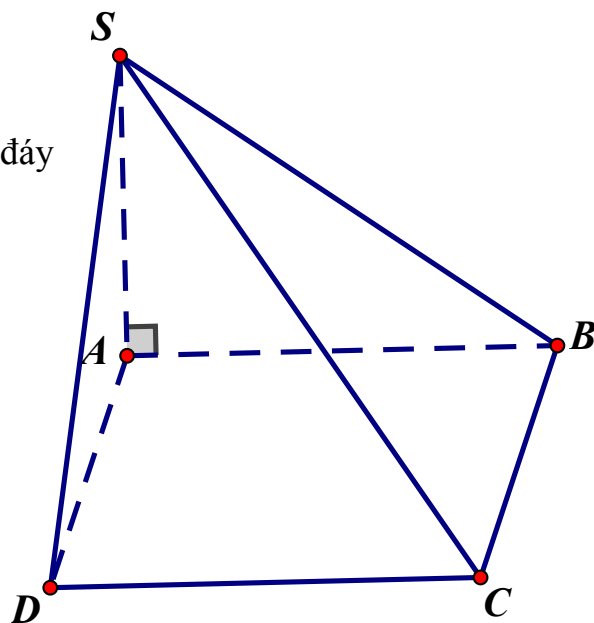
2. Các công thức tính thể tích các hình

✓ Thể tích khối chóp

Cách tính : Lấy đường cao nhân diện tích đáy rồi chia 3

Ví dụ như hình vẽ thì :

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD}$$



Chú ý :

- **Hình chóp tam giác đều** thì có đáy là tam giác đều và có các cạnh bên bằng nhau nhưng không bằng cạnh đáy (tức là các mặt bên là tam giác cân)
- **Hình chóp đều** thì có đáy là tam giác đều, các cạnh bên bằng nhau và bằng với cạnh đáy (các mặt bên cũng là tam giác đều).
- Còn **hình chóp có đáy là tam giác đều** và các cạnh bên không bằng nhau thì đề bài sẽ ghi là "Cho hình chóp có đáy là tam giác đều" và không nói gì thêm.

✓ Thể tích khối lăng trụ

Cách tính : Giống như hình chóp nhưng không có chia 3

Ví dụ như hình vẽ thì :

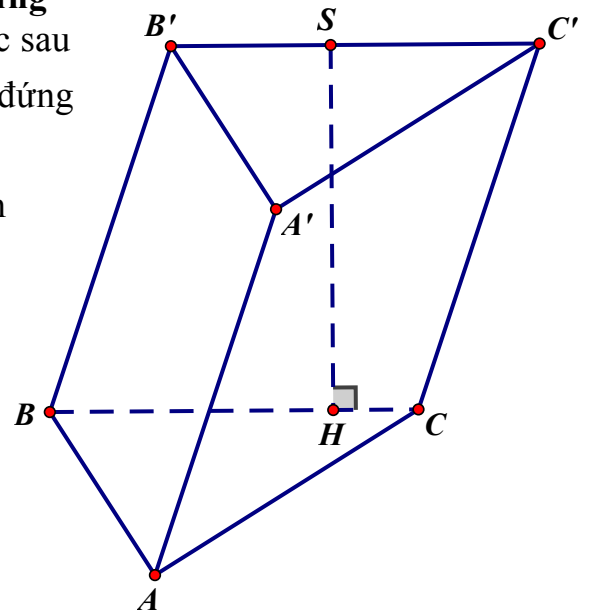
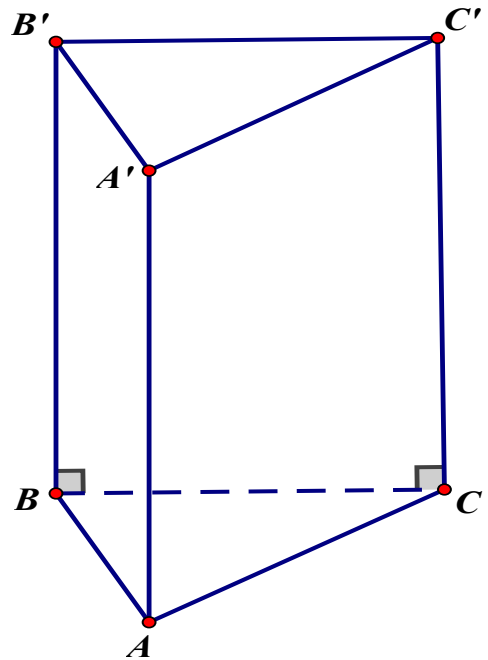
$$V_{SABC} = BB' \cdot S_{ABC}$$

Chú ý :

- Với **lăng trụ** thì có 2 loại : **Lăng trụ đứng** và **lăng trụ xiên** . Như hình vẽ ở trên thì đó là lăng trụ đứng và đối với loại này thì các **cạnh bên đều là đường cao và vuông góc với đáy**, loại này rất dễ làm. Vậy còn lăng trụ xiên thì sao? Lăng trụ xiên là loại lăng trụ mà các bạn nhìn nó khác xa hoàn toàn so với lăng trụ đứng, méo méo, và chỉ có 1 đường cao :D. Ví dụ như hình vẽ kế bên :D

Vậy khi nào chúng ta biết đó là **lăng trụ đứng** hay **xiên** để mà vẽ? Rất dễ, hãy theo quy tắc sau

- Khi đề bài không nói gì 🖐️ lăng trụ đứng
- Khi đề bài có yếu tố **hình chiếu** của 1 điểm lên đáy 🖐️ lăng trụ xiên



3. Các công thức về hệ trục tọa độ OXYZ

✓ Vector trong không gian:

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$

Độ dài vector : $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Tổng hiệu 2 vector $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$

Nhân một số với 1 vector : $k \cdot \vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$

Hai vector bằng nhau $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

$\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

Ba vector đồng phẳng $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$

Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Tích có hướng $[\vec{a}, \vec{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$

Góc tạo bởi 2 vector $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Thể tích tứ diện ABCD
(đôi khi nhiều bài cần dùng) $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$

✓ Phương trình đường thẳng

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vtcp $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ với $a_1.a_2.a_3 \neq 0$

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Từ đó có thể suy ra phương trình chính tắc của d :

$$(d): \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

✓ Phương trình mặt phẳng

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

✓ Phương trình mặt cầu :

Mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R

$$\text{Khi đó (S): } \begin{cases} \text{Dạng 1 : } (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \\ \text{Dạng 2 : } x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \\ R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \quad (a^2 + b^2 + c^2 - d > 0) \end{cases}$$

✓ Góc, khoảng cách

$$\text{Góc giữa 2 đường thẳng} \quad \cos(d_1, d_2) = \frac{|\vec{u}_{d_1} \cdot \vec{u}_{d_2}|}{|\vec{u}_{d_1}| \cdot |\vec{u}_{d_2}|}$$

với $\vec{u}_{d_1}$ và $\vec{u}_{d_2}$ lần lượt là vtcp của d_1 và d_2

Góc giữa 2 mặt phẳng $\cos((\alpha), (\beta)) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}$
 với $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ lần lượt là vtpt của $(\alpha), (\beta)$

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng $\sin(d, (\alpha)) = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_\alpha|}$

Khoảng cách từ điểm $I(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d(I, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau

$$d_{(d_1, d_2)} = \frac{|\left[\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2} \right] \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}|}{\left| \left[\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2} \right] \right|}$$

với M_1, M_2 lần lượt là các điểm bất kì nằm trên d_1, d_2

** Đây là toàn bộ các công thức quan trọng mà các bạn cần phải ghi nhớ để có thể làm tốt phần hình không gian bằng phương pháp tọa độ này. Sỡ dĩ cũng đã có nhiều bạn đã nhớ hết, nhưng để cho chắc chắn mình cũng đã liệt kê lại nhằm giúp cho các bạn có thể hệ thống lại các kiến thức và bổ sung những cái mà mình còn thiếu sót.
 Nếu các bạn đã đọc đến đây thì chắc các bạn cũng đã nhớ gần 80% rồi :D, và giờ mình cùng chuyển sang phần chính nhé :D*

Phần 2: Phương pháp giải toán

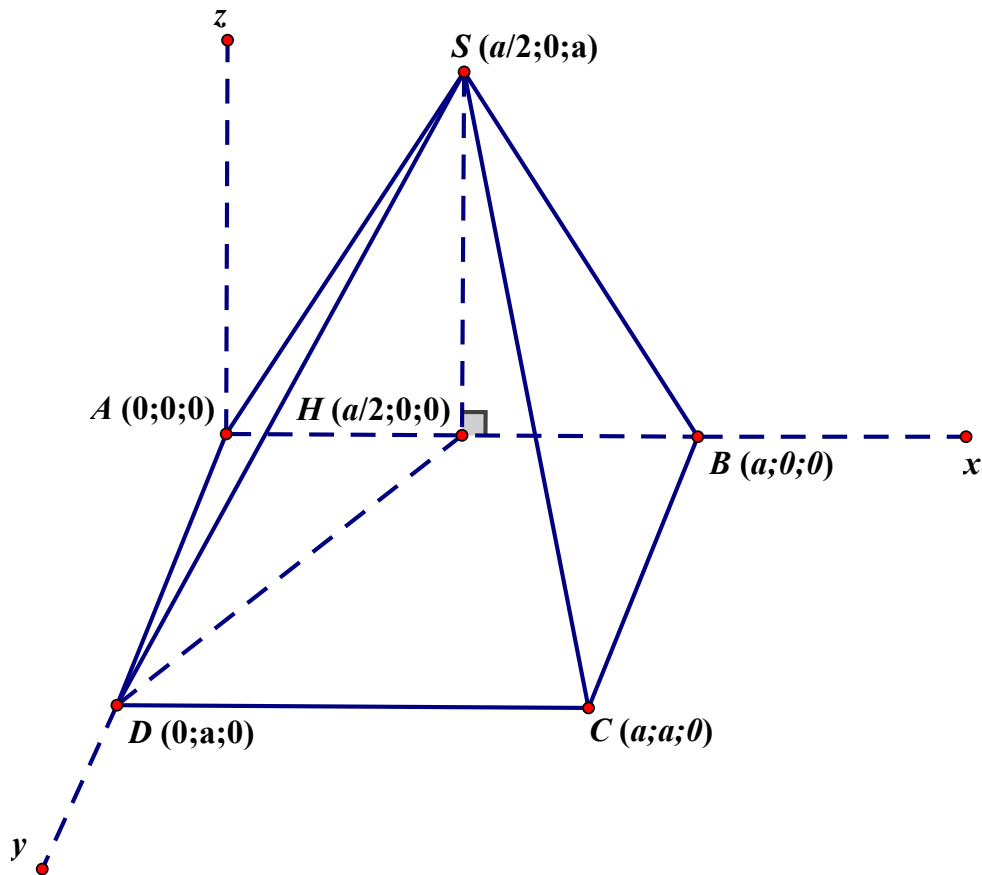
Với phương pháp này , các bạn chỉ cần quan tâm cho mình đó là đáy của nó là hình gì thôi , không cần quan tâm đến đường cao, không cần biết đó là lăng trụ hay chóp (vì 2 hình này đều như nhau về cách dựng hệ trục nếu 2 đáy giống nhau) Và sau đây là cách dựng khi gặp 1 số loại hình sau :

- Nếu hình chóp, lăng trụ có đáy là hình vuông, hình chữ nhật, hình thang vuông, tam giác vuông thì dựng hệ trục với A là gốc tọa độ (nếu tam giác vuông ở A thì dựng ở A, vuông ở B thì dựng ở B).
- Nếu hình chóp, lăng trụ có đáy là tam giác cân hoặc đều thì kẻ đường cao và dùng chân đường cao làm gốc tọa độ
- Nếu hình chóp, lăng trụ có đáy là hình thoi thì chọn giao điểm 2 đường chéo làm gốc tọa độ.

Phần 3: Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1 (với đáy là hình vuông) :

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông độ dài cạnh bằng a , $SD = \frac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm của cạnh AB. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa 2 đường thẳng SC và BD.



Hướng dẫn : Đầu tiên đi vẽ hình , và chọn A là gốc tọa độ như trên. Vì hình vuông có độ dài a nên $AB=BC=CD=AC=a$, do đó điểm B có tọa độ là $(a,0,0)$ vì nằm trên trục hoành và mặt khác điểm D có tọa độ là $(0,a,0)$ do nằm trên trục tung. Tới đây ta có thể dễ dàng tìm được tọa độ điểm C bằng cách sử dụng công thức 2 vector bằng nhau (ở đây là $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \\ z_B - z_A = z_D - z_C \end{cases} \Rightarrow C(a; a; 0)$$

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABCD) đồng thời là trung điểm AB. Do đó tọa độ của H là $\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$. Và để tìm được tọa độ điểm S, chúng ta phải có được độ dài SH, để tính độ dài SH ta sẽ đi tính DH, khi tính được DH kết hợp với độ dài SD đề bài cho ta tìm được SH qua việc sử dụng định lý pitago trong tam giác SDH vuông tại H

-Áp dụng định lí pitago trong tam giác vuông ADH vuông tại A

$$\Rightarrow DH = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

-Áp dụng định lí pitago trong tam giác vuông SDH vuông tại H

$$\Rightarrow SH = a$$

Từ đó suy ra $S \left(\frac{a}{2}; 0; a \right)$ Vì H là hình chiếu của S nên S và H sẽ có cùng tung độ, hoành độ, chỉ khác nhau cao độ và cao độ ở đây của S là độ dài SH=a.

Tìm xong tất cả các đỉnh ta thấy bài toán trở nên dễ dàng hơn rất nhiều
Khi đó :

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} SH . S_{ABCD} = \frac{1}{3} a . a^2 = \frac{a^3}{3} \text{ (đvtt)}$$

Và cuối cùng là câu tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng SC và BD (vì đây là bài đầu tiên nên mình sẽ nói chi tiết hết các cách làm)

Đầu tiên chúng ta sẽ đi tính tích vô hướng 2 vector

$$\overrightarrow{SC} = \left(\frac{a}{2}; a; -a \right)$$

$$\overrightarrow{BD} = (-a; a; 0)$$

$$[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BD}] = \left(a^2; a^2; \frac{3}{2}a^2 \right)$$

Sau đó lần lượt trên 2 vector này chọn lần lượt 1 điểm có tọa độ đơn giản . Ví dụ ở đây, mình chọn điểm B trên BD và điểm C trên SC

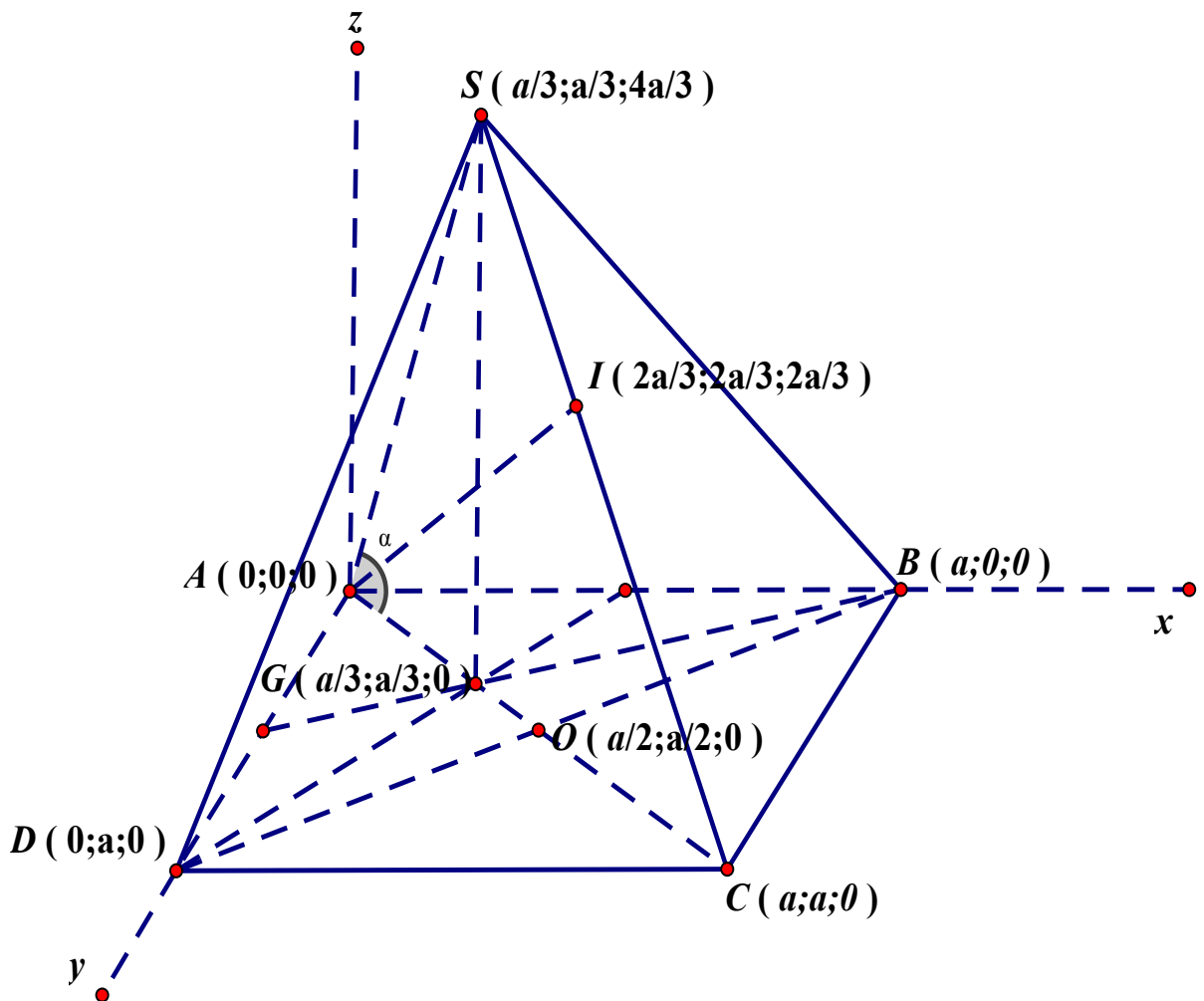
$$\text{Từ đó suy ra } \overrightarrow{BC} = (0; a; 0)$$

Áp dụng công thức khoảng cách 2 đường thẳng

$$d(SC, BD) = \frac{|[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BC}|}{|[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{BD}]|} = \frac{|a^3|}{\sqrt{\frac{17}{4}a^4}} = \frac{a^3}{\frac{a^2\sqrt{17}}{2}} = \frac{2a\sqrt{17}}{17}$$

Một ví dụ khác

Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ là trọng tâm G của tam giác BAD . SA tạo với đáy một góc α biết $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên SC . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách 2 đường thẳng AI và SD theo a .



Hướng dẫn: Giống như bài trên vì đây là hình chóp có đáy là hình vuông nên ta sẽ chọn luôn A làm gốc tọa độ và có SG là đường cao. Từ đó áp dụng các hệ thức vectơ bằng nhau như bài ví dụ vừa này ta dễ dàng tìm được tọa độ các điểm B, C, D, O.

Vì G là trọng tâm tam giác BAD

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_D}{3} = \frac{a}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_D}{3} = \frac{a}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_D}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; 0\right)$$

Ta có : $AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Mà $AG = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ (do G là trọng tâm tam giác ABD)

Theo đề bài thì AG là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABCD)

Suy ra góc α chính là góc SAG và $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$

Tam giác SAG vuông tại G (gt)

$$\Rightarrow SG = AG \cdot \tan \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4}{3}a$$

Từ đó suy ra $S\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{4a}{3}\right)$ Vì G là hình chiếu của S nên S và G sẽ có cùng tung độ, hoành độ, chỉ khác nhau cao độ và cao độ ở đây của S là độ dài $SG = \frac{4}{3}a$.

Khi đó :

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SG = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{4}{3} a = \frac{4}{9} a^3 \text{ (đvtt)}$$

Và bây giờ chúng ta cùng chuyển sang ý thứ 2 của bài toán . Vì đề bài chỉ nói I là hình chiếu vuông góc của A lên SC nên chúng ta không thể tìm được ngay tọa độ điểm I (nếu cho I là trung điểm của SC thì chúng ta sẽ dễ dàng hơn) . Vậy bây giờ làm như thế nào ? Rất đơn giản , việc tìm tọa độ điểm I lúc này cũng giống như làm 1 bài toán OXYZ với yêu cầu tìm hình chiếu của 1 điểm lên đoạn thẳng . Trước tiên chúng ta hãy viết phương trình đường thẳng SC :

$$\text{Ta có : } \overrightarrow{SC} = \left(\frac{2a}{3}; \frac{2a}{3}; -\frac{4a}{3} \right)$$

$\Rightarrow$ Chọn $\overrightarrow{u_{SC}} = \frac{3}{2a} \overrightarrow{SC} = (1; 1; -2)$ (làm như vậy để đơn giản a trong vtcp $\overrightarrow{SC}$ từ đó giúp chúng ta viết pttts trở nên dễ dàng ít xuất hiện a giảm bớt quá trình tính toán)

$$\text{Đường thẳng SC : } \begin{cases} \text{qua } C(a; a; 0) \\ \text{VTCP } \overrightarrow{u_{SC}} = (1; 1; -2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{PTTS dt SC : } \begin{cases} x = a + t \\ y = a + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -2t \end{cases}$$

$$\text{Vì } I \in SC \Rightarrow I(a + t; a + t; -2t)$$

Vì I là hình chiếu của A lên SC

$$\Rightarrow \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u_{SC}} \cdot \overrightarrow{AI} = 0 \Rightarrow t = \frac{-a}{3}$$

$$\Rightarrow I \left(\frac{2}{3}a; \frac{2}{3}a; \frac{2}{3}a \right)$$

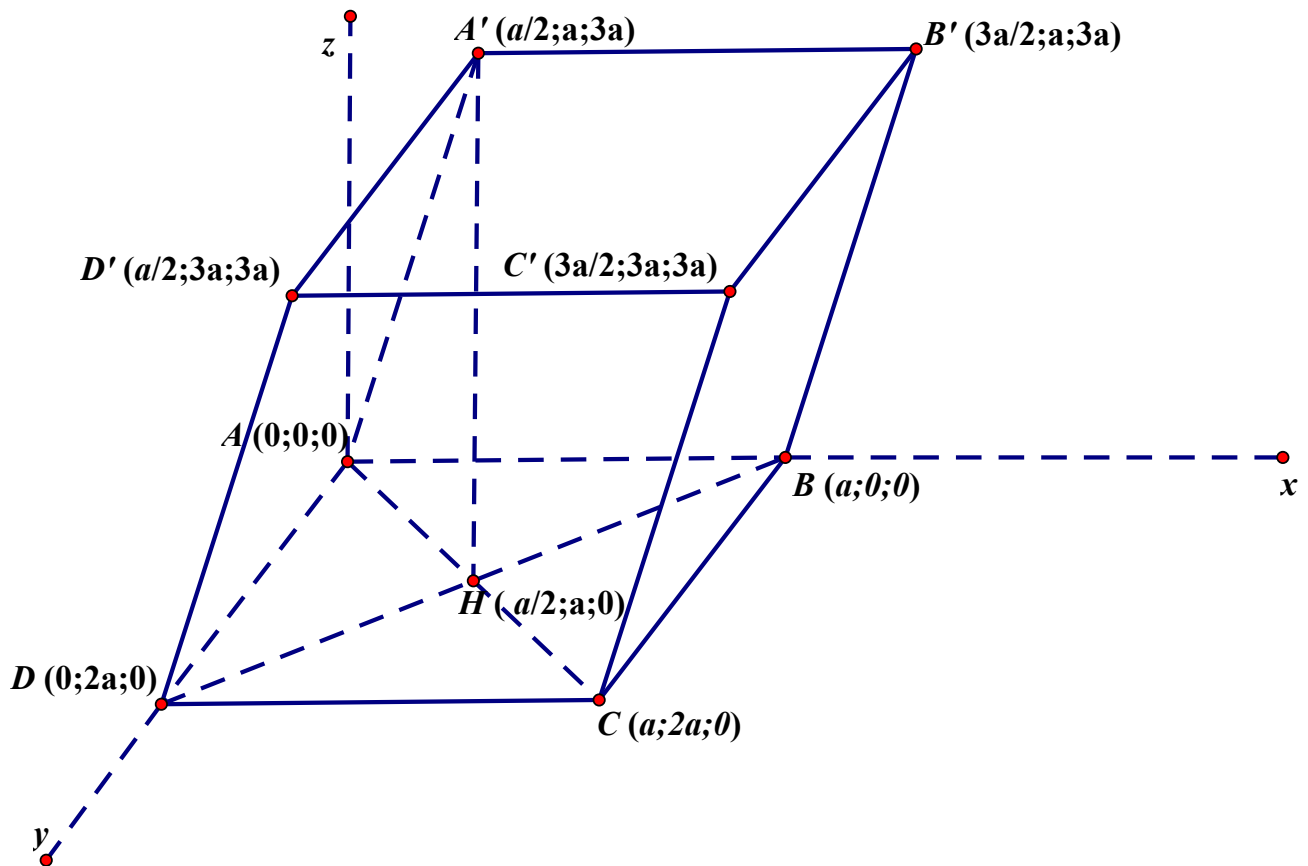
Tìm được điểm I bài toán coi như đã được giải quyết và bây giờ nhiệm vụ của chúng ta chỉ là đi tính toán

$$\text{Ta có : } \begin{cases} \overrightarrow{AI} = \left(\frac{2a}{3}; \frac{2a}{3}; \frac{2a}{3} \right) \\ \overrightarrow{SD} = \left(\frac{-a}{3}; \frac{2a}{3}; \frac{-4a}{3} \right) \\ \overrightarrow{AD} = (0; a; 0) \\ [\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{SD}] = \left(\frac{-4a^2}{3}; \frac{2a^2}{3}; \frac{2a^2}{3} \right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(AI, SD) = \frac{|[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{SD}] \cdot \overrightarrow{AD}|}{\|[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{SD}]\|} = \frac{\left| \frac{2a^3}{3} \right|}{\frac{2a\sqrt{6}}{3}} = \frac{\frac{2a^3}{3}}{\frac{2a\sqrt{6}}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Ví dụ 2 (với đáy là hình chữ nhật)

Cho lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình chữ nhật AB=a, AD=2a. Hình chiếu vuông góc của của điểm A' trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H trùng với giao điểm của AC và BD, A'H=3a. Tính thể tích khối lăng trụ ABCD.A'B'C'D' và khoảng cách từ B' đến mặt phẳng (A'BD) theo a



Hướng dẫn : Rõ ràng khi đọc đề bài ta có thể thấy được đây là hình lăng trụ xiên do có yếu tố hình chiếu vuông góc của 1 điểm lên mặt phẳng đáy. Từ đó ta tiến hành đi vẽ hình, với đáy là hình chữ nhật nên ta chọn A làm gốc tọa độ. Khi chọn xong ta có thể xác định được tọa độ các điểm A,B,D,C,H,A' và bây giờ nhiệm vụ bây giờ chỉ còn là tính toán. Vì bài này chúng ta chỉ cần biết tọa độ các điểm A,B,D,C,H,A' nên sẽ khá dễ dàng. Với nhiều bài thì chúng ta sẽ cần phải biết hết tọa độ các điểm mới có thể tính toán được. Vì thế lấy ví dụ như bài này, mình cũng đã tính hết trên hình để cho các bạn thấy. Muốn tìm tọa độ các điểm ở trên như D' chúng ta chỉ cần sử dụng 2 vector bằng nhau đó là $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'}$ và tương tự với $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'}$ $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'}$ chúng ta dễ dàng tìm được tọa độ điểm C', B'. Khi tìm xong các điểm, bài toán sẽ trở nên dễ dàng

Khi đó :

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = a \cdot 2a \cdot 3a = 6a^3 \text{ (đvtt)}$$

Bây giờ chúng ta sẽ đến với ý còn lại của bài toán. Để tìm khoảng cách của B' đến (A'BD) chúng ta cần phải biết phương trình tổng quát của (A'BD)

Đầu tiên chúng ta sẽ đi tìm vector pháp tuyến của (A'BD):

$$\begin{aligned} \left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{BD} \right] &= (6a^2; 3a^2; 0) \\ \text{nên chọn } \overrightarrow{n_{(A'BD)}} &= \frac{1}{a^2} \left[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{BD} \right] = (6; 3; 0) \end{aligned}$$

(làm như thế này để đơn giản a trong tích có hướng, từ đó chúng ta có thể viết phương trình dễ dàng không dính dáng nhiều tới a trong đó)

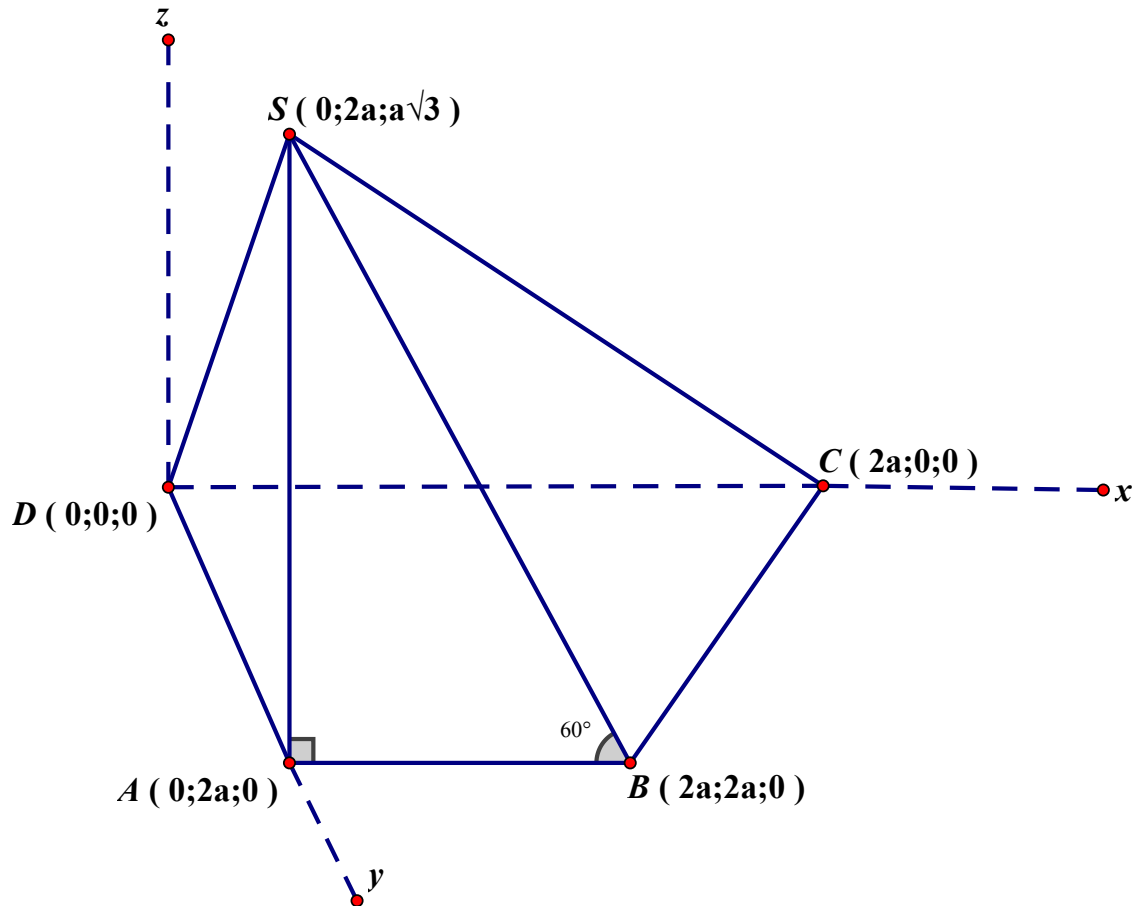
$$\begin{aligned} \text{Ta có } (A'BD) &\begin{cases} \text{qua } A' \left(\frac{a}{2}; a; 3a \right) \\ \text{vtpt } \overrightarrow{n_{(A'BD)}} = (6; 3; 0) \end{cases} \\ \Rightarrow (A'BD) &: 6 \left(x - \frac{a}{2} \right) + 3(y - a) = 0 \\ \Rightarrow (A'BD) &: 6x + 3y - 6a = 0 \end{aligned}$$

Vậy ta tính được khoảng cách từ B' đến (A'BD)

$$d(B', (A'BD)) = \frac{\left| 6 \cdot \frac{3a}{2} + 3a - 6a \right|}{\sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{6a}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$$

Ví dụ 3 : (với đáy là hình thang vuông)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$)
 $AD = DC = 2a$, $AB = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy đồng thời SB tạo với đáy 1 góc 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABCD và tính góc giữa 2 đường thẳng SB và DC



Hướng dẫn: Với những dữ kiện đề bài cho ta có thể dễ dàng xác định được CD là đáy lớn, AB là đáy nhỏ, AD là chiều cao hình thang ABCD và $CD=2AB$. Chọn D làm gốc tọa độ và từ đó chúng ta có thể dễ dàng tính được tọa độ điểm B bằng hệ thức vectơ theo dữ kiện đề bài: $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$. Lúc này chỉ còn tọa độ điểm S, với việc tìm được độ dài SA là bài toán sẽ trở nên dễ dàng.

Nhận thấy : AB là hình chiếu vuông góc của SB lên (ABCD)

Tam giác SAB vuông tại A suy ra $SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

Khi đó

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} SA = \frac{1}{3} \frac{(CD + AB)}{2} AD \cdot SA = \frac{1}{3} \frac{(2a + a)}{2} 2a \cdot a\sqrt{3} = a^3 \sqrt{3} \quad (\text{đvtt})$$

Ý thứ nhất đã xong, bây giờ chúng ta cùng chuyển sang ý thứ hai của bài toán. Để tính góc giữa 2 đường thẳng SB và DC chúng ta chỉ cần tính 2 vector $\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{DC}$ rồi áp dụng công thức mình đã đưa là xong

Ta có

$$\overrightarrow{SB} = (a; 0; -a\sqrt{3})$$

$$\overrightarrow{DC} = (2a; 0; 0)$$

Đặt $\cos \alpha = \cos(SB, DC)$

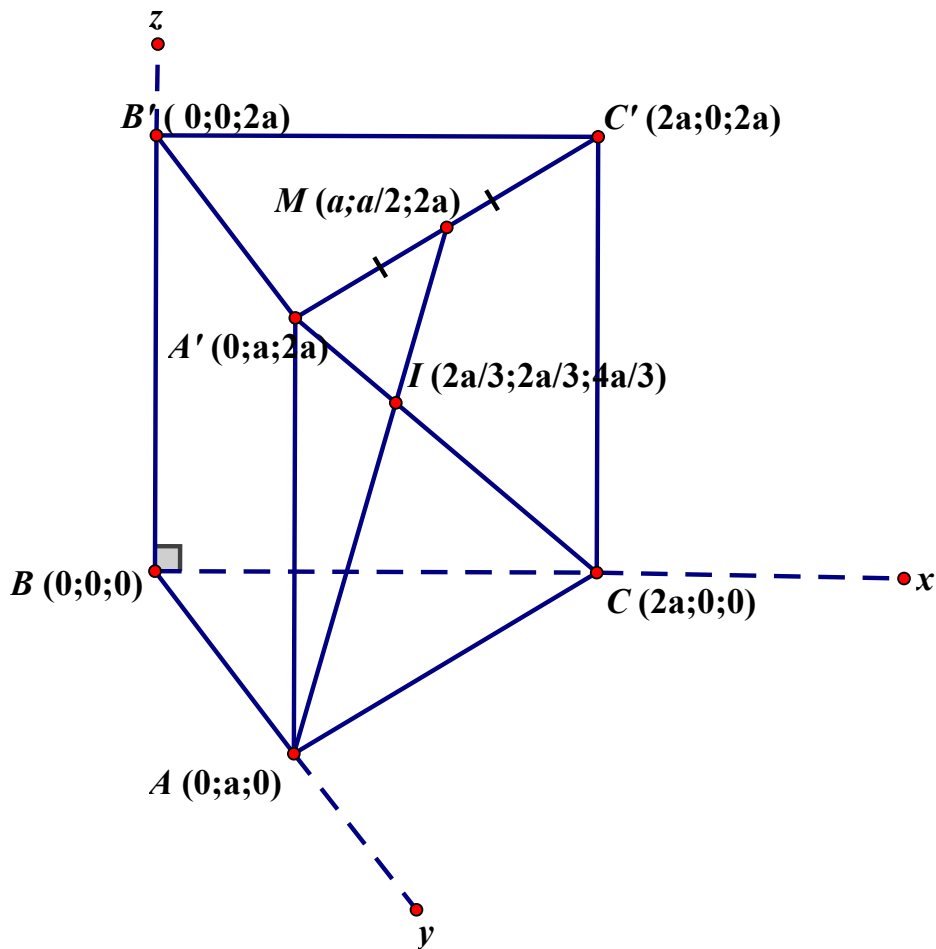
$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{SB}| \cdot |\overrightarrow{DC}|} = \frac{|2a^2|}{\sqrt{4a^2} \sqrt{4a^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Vậy góc giữa 2 đường thẳng SB và DC là 60°

Ví dụ 4 (với đáy là tam giác vuông)

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại B. AB=a, AA'=2a và A'C=3a . Gọi M là trung điểm của cạnh A'C' , I là giao điểm của AM và A'C. Tính thể tích khối tứ diện IABC và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC) theo a



Hướng dẫn : Đọc qua đề bài chúng ta có thể thấy ngay đây là hình lăng trụ đứng , đáy là tam giác vuông tại B nên ta chọn luôn B làm gốc tọa độ. Với dữ kiện đề bài chúng ta chỉ có thể xác định được tọa độ 4 đỉnh A,A',B,B'. Và bây giờ nhiệm vụ của chúng ta là đi tìm các đỉnh còn lại và hóa giải các yêu cầu bài toán.Đầu tiên chúng ta sẽ dễ dàng tính được độ dài cạnh AC với tam giác A'AC vuông tại A

Áp dụng định lí pytago trong tam giác A'AC vuông tại A

$$\Rightarrow AC = \sqrt{A'C^2 - A'A^2} = \sqrt{(3a)^2 - (2a)^2} = a\sqrt{5}$$

Áp dụng định lí pytago trong tam giác ABC vuông tại B

$$\Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - a^2} = 2a$$

Vậy C (2a;0;0) $\Rightarrow$ C'(2a;0;2a) do các cạnh bên A'A , B'B , C'C có cùng cao độ

Và bây giờ chỉ còn tọa độ điểm I là chúng ta chưa có. Vậy tìm điểm I như thế nào? Rất dễ, nhận thấy I là giao điểm của A'C và AM. Vì thế nếu chúng ta có được phương trình đường thẳng A'C và AM chúng ta sẽ tìm được tọa độ I

$$\begin{aligned} \text{Đường thẳng AM : } & \begin{cases} \text{qua A } (0; a; 0) \\ \text{VTCP } \overrightarrow{AM} = (a; \frac{-a}{2}; 2a) \end{cases} \\ & \Rightarrow \text{PTTS AM: } \begin{cases} x = at \\ y = a - \frac{a}{2}t \quad (t \in R) \\ z = 2at \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Đường thẳng A'C : } & \begin{cases} \text{qua C } (2a; 0; 0) \\ \text{VTCP } \overrightarrow{A'C} = (2a; -a; -2a) \end{cases} \\ & \Rightarrow \text{PTTS A'C: } \begin{cases} x = 2a + 2at_1 \\ y = -at_1 \\ z = -2at_1 \end{cases} \quad (t_1 \in R) \end{aligned}$$

Gọi I thuộc AM suy ra $I \left(at; a - \frac{a}{2}t; 2at \right)$

$$\text{Ta có hệ : } \begin{cases} at - 2at_1 = 2a \\ \frac{-a}{2}t + at_1 = -a \\ 2at + 2at_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ t_1 = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I \left(\frac{2}{3}a; \frac{2}{3}a; \frac{4}{3}a \right)$$

$$\text{Khi đó } V_{IABC} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}] \cdot \overrightarrow{IC} \right| = \frac{4}{9} a^3 \text{ (đvtt)}$$

Và giờ chúng ta sẽ đến ý tiếp theo là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (IBC)

$$[\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}] = \left(0; \frac{-8a^2}{3}; \frac{4}{3}a^2 \right)$$

$$\text{Nên chọn } \overrightarrow{n}_{(IBC)} = \frac{1}{a^2} [\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}] = \left(0; \frac{-8}{3}; \frac{4}{3} \right)$$

$$\text{Ta có : (IBC) : } \begin{cases} \text{qua B(0;0;0)} \\ \text{VTPT } \overrightarrow{n_{(IBC)}} = \left(0; \frac{-8}{3}; \frac{4}{3}\right) \end{cases}$$

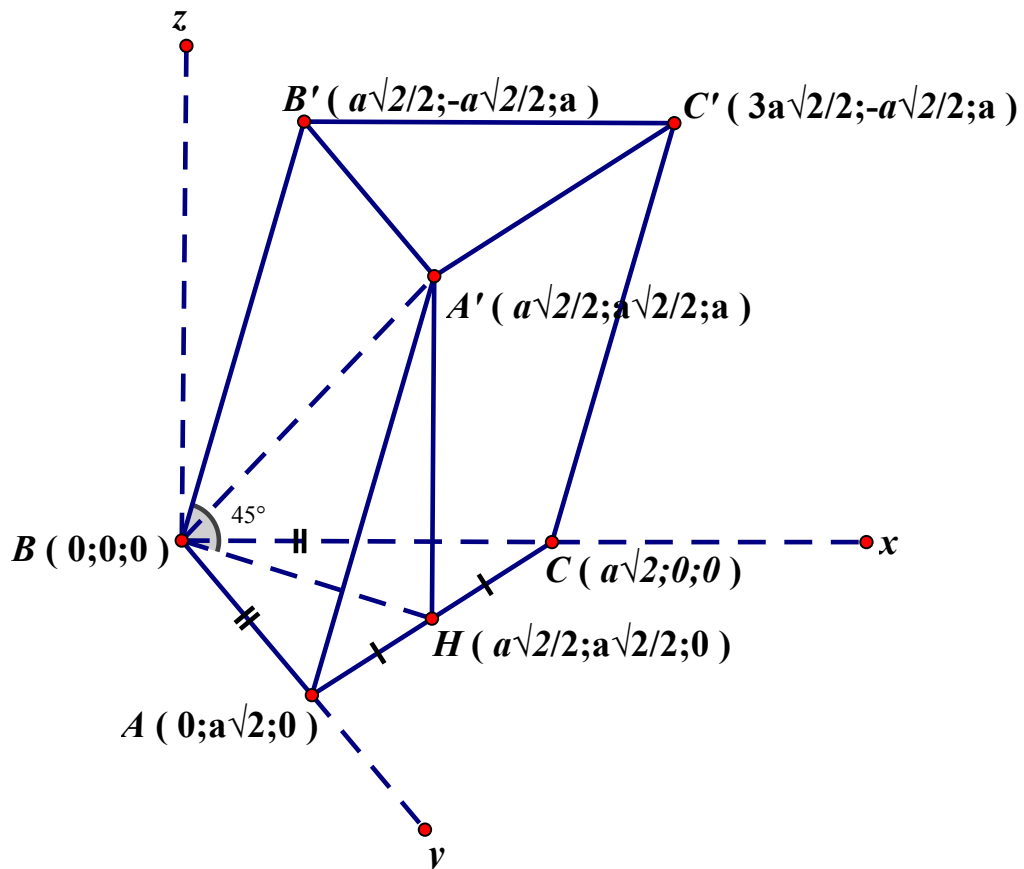
$$\Rightarrow (IBC) : -8y + 4z = 0$$

Vậy khoảng cách từ A đến (IBC) là :

$$d(A, (IBC)) = \frac{|-8a|}{\sqrt{(-8)^2 + 4^2}} = \frac{8a}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$$

Một ví dụ khác :

Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , AC=2a , Hình chiếu vuông góc của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AC , đường thẳng A'B tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45° . Tính theo a thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' và chứng minh A'B vuông góc B'C (Trích đề thi ĐH 2016)



Hướng dẫn: Rõ ràng khi đọc đề bài ta có thể thấy được đây là hình lăng trụ xiên. Với đáy là tam giác vuông cân tại B nên ta chọn B làm gốc tọa độ và AC là cạnh huyền bằng $2a$ nên suy ra 2 cạnh còn lại có độ dài là $a\sqrt{2}$ bằng việc sử dụng định lý Pytago đồng thời $BH = \frac{AC}{2} = a$

Từ đó ta dễ dàng tìm được tọa độ các đỉnh còn lại qua việc sử dụng các vectơ bằng nhau như những bài trước.

Nhận thấy : góc giữa đường thẳng A'B và mặt phẳng (ABC) là góc A'BH

Ta có : $A'H = BH \tan 45^\circ = a$

Khi đó :

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{1}{2} BC \cdot BA \cdot A'H = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a = a^3 \text{ (đvtt)}$$

Giờ chúng ta cùng chuyển sang ý tiếp theo của bài toán. Đề bài yêu cầu chúng ta chứng minh A'B vuông góc B'C. Vậy làm như thế nào đây? Rất đơn giản, hãy chứng minh vectơ A'B vuông góc vectơ B'C qua tích vô hướng của chúng bằng 0

Ta có :

$$\overrightarrow{A'B} = \left(\frac{-a\sqrt{2}}{2}, \frac{-a\sqrt{2}}{2}, -a \right)$$

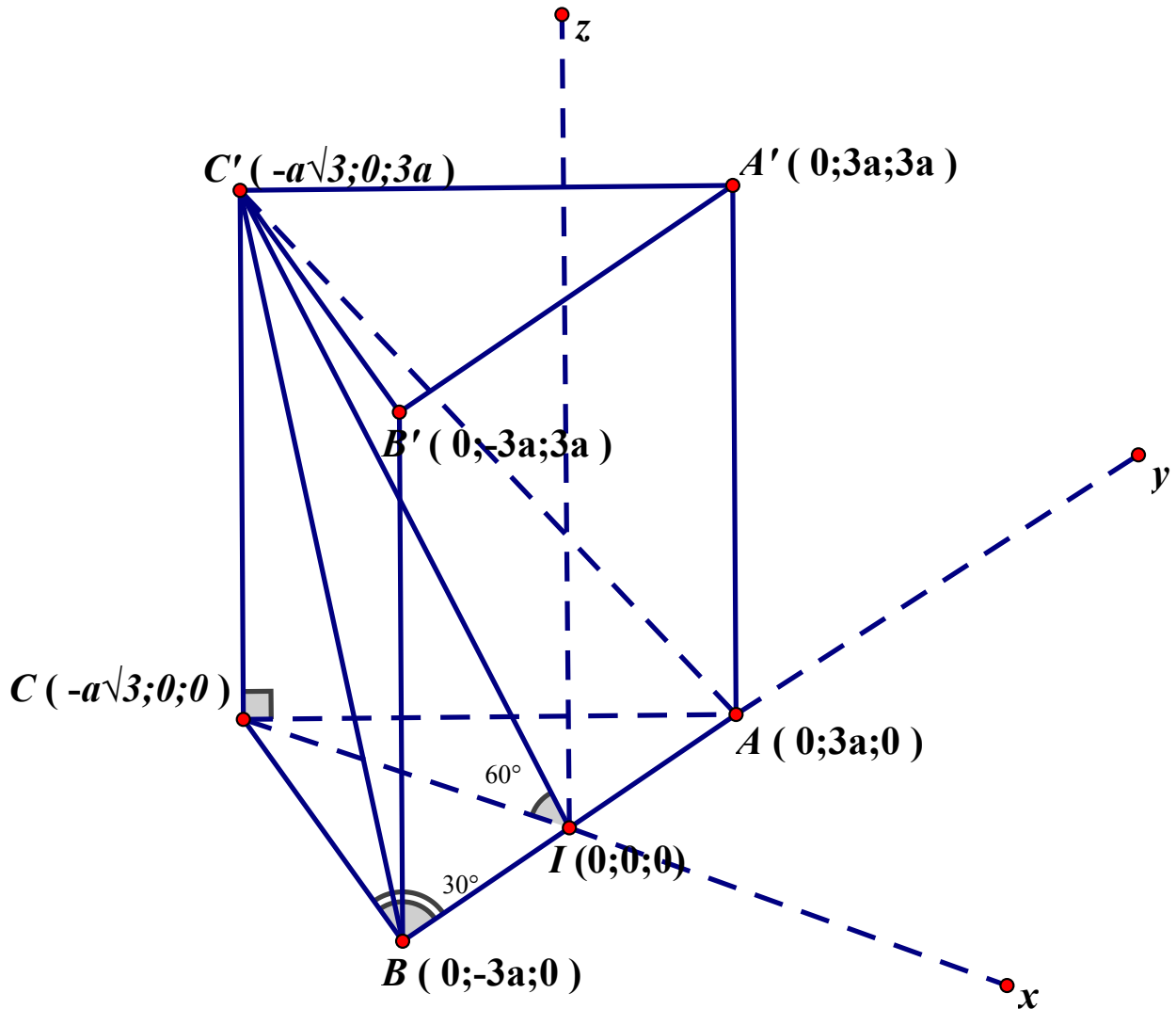
$$\overrightarrow{B'C} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{2}, -a \right)$$

$$\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{B'C} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B} \perp \overrightarrow{B'C}$$

Vậy A'B vuông góc B'C (đpcm)

Ví dụ 5 (với đáy là tam giác cân) :

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C , $AB = 6a$, góc $ABC = 30^\circ$, góc giữa 2 mặt phẳng $(C'AB)$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C$ và AB theo a .



Hướng dẫn : Với loại hình lăng trụ này chúng ta sẽ chọn chân đường cao của tam giác làm gốc tọa độ giống như hình trên . Vì bài này là tam giác cân nên chân đường cao cũng chính là trung điểm ($IB = IA = \frac{AB}{2} = \frac{6a}{2} = 3a$) . Do nằm ngược chiều trục tung nên B (0;-3a;0)

Ta có : IC là hình chiếu của IC' lên (ABC)

Mà $AB \perp IC \Rightarrow AB \perp IC'$ (định lí 3 đường vuông góc)

Suy ra góc giữa 2 mặt phẳng (C'AB) và (ABC) là góc C'IC

$$\Rightarrow IC = IB. \tan 30^0 = 3a. \frac{\sqrt{3}}{3} = a\sqrt{3}$$

Do C nằm ngược chiều trục hoành nên $C(-a\sqrt{3};0;0)$

$$\text{Ta có : } CC' = IC. \tan 60^0 = a\sqrt{3}. \sqrt{3} = 3a$$

$$\Rightarrow C'(-a\sqrt{3};0;3a)$$

$$\Rightarrow A'(0;3a;3a) ; B'(0;-3a;3a)$$

$$\text{Khi đó : } BC=AC=\frac{IB}{\cos 30^0} = \frac{6a}{\sqrt{3}} = 2a\sqrt{3}$$

Ta có :

$$V_{ABC.A'B'C'} = CC'.S_{ABC} = CC'.\frac{1}{2}BC.BA.\sin 30^0 = 3a.\frac{1}{2}2a\sqrt{3}.6a.\sin 30^0 = 9\sqrt{3}a^3 \quad (\text{đvtt})$$

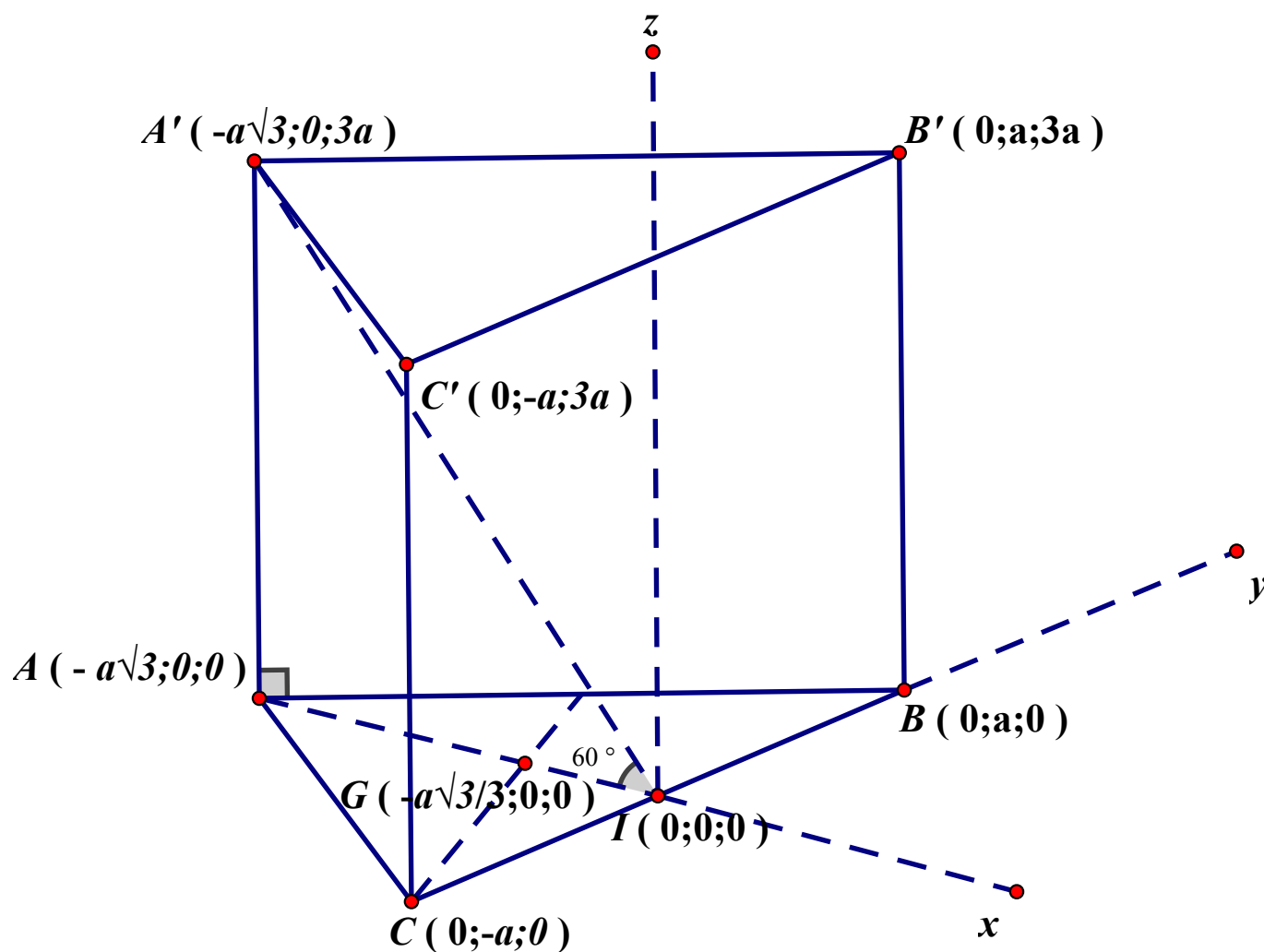
Tiếp theo là yêu cầu tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng B'C và AB

$$\begin{cases} \overrightarrow{B'C} = (a\sqrt{3}; -3a; 3a) \\ \overrightarrow{AB} = (0; -6a; 0) \\ \overrightarrow{BC} = (-a\sqrt{3}; 3a; 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(B'C, AB) = \frac{\left| [\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{AB}] \cdot \overrightarrow{BC} \right|}{\left| [\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{AB}] \right|} = \frac{\left| -18\sqrt{3}a^3 \right|}{12\sqrt{3}a^2} = \frac{18\sqrt{3}a^3}{12\sqrt{3}a^2} = \frac{3a}{2}$$

Ví dụ 6 (với đáy là tam giác đều) :

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều , $AB=2a$. Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa 2 đường thẳng $C'G$ và AB



Hướng dẫn : Với hình lăng trụ có đáy là tam giác đều ta vẫn làm như tam giác cân . Gọi I là trung điểm BC nhưng do đây là tam giác đều nên I cũng chính là chân đường cao . Từ đó chúng ta có thể dễ dàng suy ra được tọa độ 2 điểm B và C

Ta có : AI là hình chiếu của A'I trên (ABC)

Mà BC vuông góc AI

Suy ra BC vuông góc A'I (định lí 3 đường vuông góc)

Do đó góc giữa 2 mặt phẳng (A'BC) và (ABC) là góc A'IA

$$\Rightarrow A'A = AI \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3a$$

$$\Rightarrow A'(-a\sqrt{3}; 0; 3a) ; B'(0; a; 3a) ; C'(0; -a; 3a)$$

Khi đó :

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'A \cdot S_{ABC} = 3a \cdot \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}a^3 \text{ (đvtt)}$$

Ta có : G là trọng tâm tam giác ABC

$$\Rightarrow G\left(\frac{-a\sqrt{3}}{3}; 0; 0\right)$$

$$\overrightarrow{C'G} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}; -a; 3a\right)$$

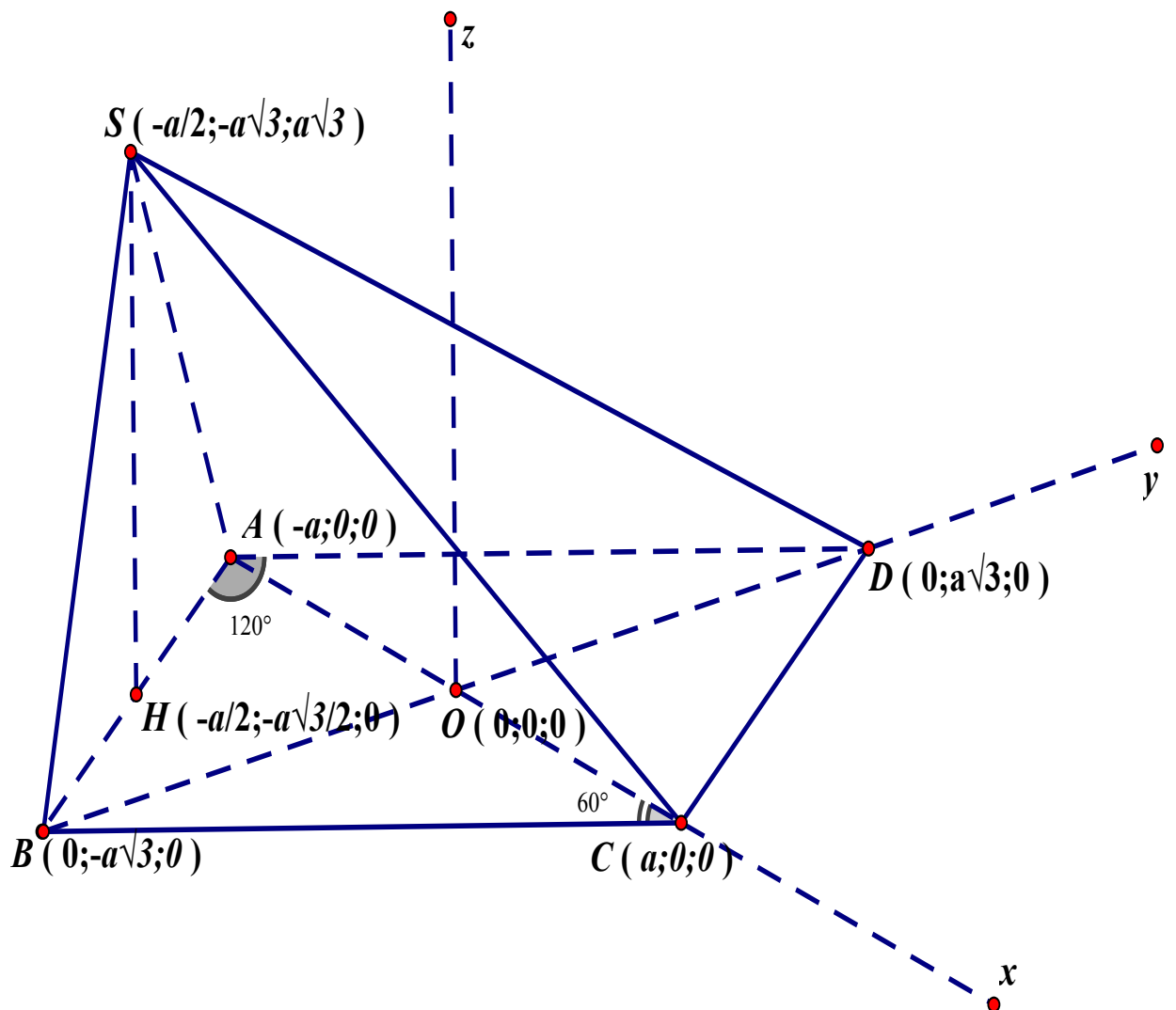
$$\overrightarrow{AB} = (a\sqrt{3}; a; 0)$$

$$\overrightarrow{BC'} = (0; -2a; 3a)$$

$$\Rightarrow d(C'G, AB) = \frac{|\overrightarrow{C'G} \cdot \overrightarrow{AB}|}{\|\overrightarrow{C'G}\| \cdot \|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{|a^3 \sqrt{3}|}{\frac{2\sqrt{93}a^2}{3}} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{93}a^2}{3}} = \frac{3\sqrt{31}}{62} a$$

Ví dụ 7 (với đáy là hình thoi) :

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi , cạnh $2a$. SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABCD . Góc $BAD = 120^\circ$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và SC theo a .



Hướng dẫn : Do đây là hình chóp có đáy là hình thoi nên chúng ta sẽ chọn giao điểm của 2 đường chéo làm gốc tọa độ như hình trên . Vì đường chéo của hình thoi cũng là phân giác nên góc BCA bằng góc BAC và bằng góc BAD chia 2 (60^0) từ đó suy ra BAC là tam giác đều có cạnh bằng $2a$, đường cao BO, tương tự cho tam giác DAC . Sau đó chúng ta dễ dàng tính được tọa độ các điểm ABCD như những bài trước

Tam giác SAB là tam giác đều có $AB = 2a$

Suy ra $SA=AB=SB=2a$

Gọi H là trung điểm AB $\Rightarrow SH \perp AB$ (vì SAB là tam giác đều)

$$\Rightarrow H\left(\frac{-a}{2}; \frac{-a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \text{ (gt)} \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \subset (SAB) \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

Vì SAB là tam giác đều và SH là đường cao $\Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S\left(\frac{-a}{2}; \frac{-a\sqrt{3}}{2}; a\sqrt{3}\right)$$

Khi đó :

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} . SH = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} BD . AC . SH = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} . 2a\sqrt{3} . 2a . a\sqrt{3} = 2a^3 \text{ (dvtt)}$$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (a; -a\sqrt{3}; 0) \\ \overrightarrow{SC} = \left(\frac{3}{2}a; a\sqrt{3}; -a\sqrt{3}\right) \\ \overrightarrow{BC} = (a; a\sqrt{3}; 0) \\ [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}] = \left(3a^2; a^2\sqrt{3}; \frac{5a^2\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(AB, SC) = \frac{|\overrightarrow{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}]} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}]}|} = \frac{|6a^3|}{\frac{\sqrt{123}}{2}a^2} = \frac{4a\sqrt{123}}{41}$$

Phần cuối : Các bài tập tự luyện

✓ Bài tập 1:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông độ có độ dài cạnh bằng a , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AC với $HC=2AH$. Biết góc giữa mặt phẳng (SBC) với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) theo a .

✓ Bài tập 2:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $BD = 2a$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAD) theo a .

✓ Bài tập 3:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Gọi điểm H là trung điểm của đoạn AI , SH vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và tam giác SAC vuông tại S . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) theo a .

✓ Bài tập 4:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAD vuông tại S , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA = 3HD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Biết $SA = 2\sqrt{3}a$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ bằng 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ M đến (ABC) .

✓ Bài tập 5:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = CD = a$ và SA vuông góc mặt phẳng đáy. Biết góc giữa mặt phẳng (SBC) với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa 2 đường thẳng SC và AB theo a .

✓ Bài tập 6

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 3a$, $CD = BC = a$ và SA vuông góc mặt phẳng đáy. Biết góc giữa mặt phẳng (SBC) với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a .

✓ Bài tập 7

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , tam giác SBC là tam giác đều độ dài cạnh bằng a và mặt phẳng (SBC) vuông góc mặt phẳng (ABC) . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa 2 đường thẳng SA và BC theo a .

✓ Bài tập 8

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , có $BC = 2a$, $AB = a$ và mặt bên $BCC'B'$ là hình vuông. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa 2 đường thẳng AA' và BC' theo a .

✓ Bài tập 9

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $AB = AC = a$, góc BAC bằng 30° và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a .

✓ Bài tập 10

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC = a\sqrt{3}$ góc BAC bằng 120° . Gọi I là trung điểm của cạnh AB , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của đoạn CI . Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a .

✓ Bài tập 11

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều độ dài cạnh bằng a , có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách giữa 2 đường thẳng SB và AC theo a .

✓ Bài tập 12

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều có độ dài cạnh bằng a , đỉnh A' có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC và $A'A = a$. Tính góc tạo bởi cạnh bên với mặt phẳng đáy (ABC) và tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a .

✓ Bài tập 13

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AB = 2a$ và góc BAD bằng 120° . Hình chiếu vuông góc của đỉnh S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ là giao điểm H của 2 đường chéo và $SH = \frac{a}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và góc tạo bởi 2 mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$ theo a .

✓ Bài tập 14

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AC = 2a$ và $BD = 4a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa 2 đường thẳng AD và SC theo a .

Lời kết

Đây là toàn bộ các kiến thức mà mình biết được về phương pháp tọa độ trong không gian và hệ thống nó lại cho các bạn qua tập tài liệu này . Vì đây là sản phẩm đầu tay cộng thêm việc kiến thức còn hạn chế qua việc trình bày do đó trong các hình vẽ thì mình không thể kí hiệu hết các góc vuông như giả thiết đề bài cho và các hệ trục tọa độ mình không gắn mũi tên vào được mà chỉ chấm điểm vào thôi nên các bạn thông cảm nhé :D . Còn trong bài làm thực tế thì các bạn phải vẽ đúng , kí hiệu đầy đủ và khi vẽ các trục tọa độ thì phải vẽ nét liền và kí hiệu mũi tên vào nhé :D . Các loại hình hay gặp trong đề thi mình cũng đã liệt kê và các hướng xử lý cho nên nếu các bạn hiểu và áp dụng được thì câu hình học không gian này trong đề thi các bạn sẽ dễ dàng vượt qua được . Đối với phương pháp này thì có nhiều bạn bảo là không thích vì nó mất hết tư duy hình học , mình thì cũng không phản đối gì vì mục đích mình viết tài liệu này nhằm giúp các bạn học yếu hình có thể tự tin làm chủ được nó trong đề thi đại học mà không cần chú tâm quá nhiều đến các phương pháp giải cổ điển :D nhờ đó mà có thêm thời gian ôn tập các kiến thức quan trọng khác . Hy vọng các bạn sẽ thích !

Chúc các bạn học tốt

