

HÀM SỐ (hàm ẩn)

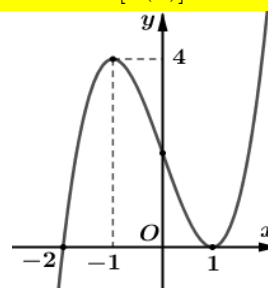
Vận dụng cao

Phần 1. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

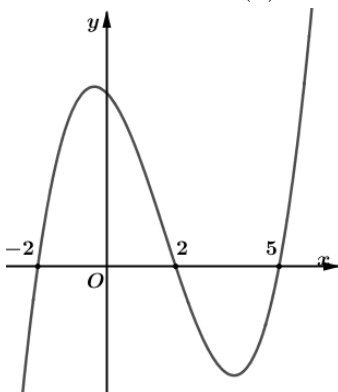
Vấn đề 1. Cho đồ thị $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây sai ?

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-2;1)$.
- B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$
- C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2.
- D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.



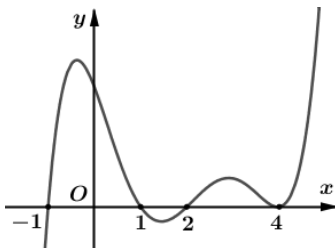
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(0;2)$.
- B. $(1;3)$.
- C. $(-\infty;-1)$.
- D. $(-1;+\infty)$.

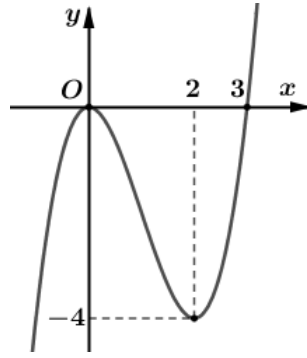
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

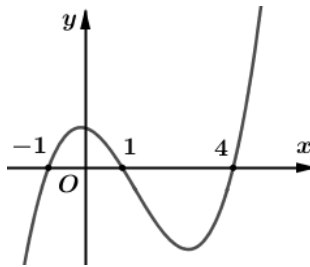
- A. $(-1;0)$.
- B. $(-\infty;0)$.
- C. $(0;1)$.
- D. $(1;+\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới. Hàm số $g(x) = f(2 + e^x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây ?



- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-1; 3)$. D. $(-2; 1)$.

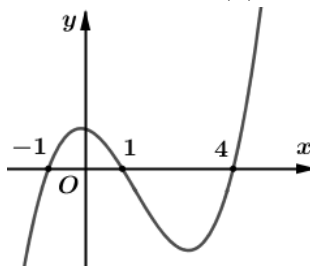
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = 2^{f(3-2x)}$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. C. $(1; 2)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(|3 - x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

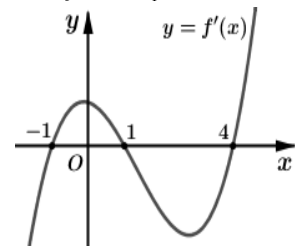
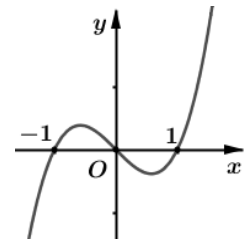
- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 2)$. C. $(2; 3)$. D. $(4; 7)$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

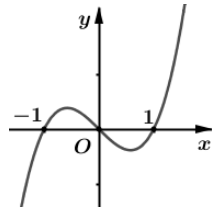
- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; +\infty)$.
C. $(-1; 0)$. D. $(0; 1)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; -1)$.
C. $(-1; 0)$. D. $(1; 2)$.



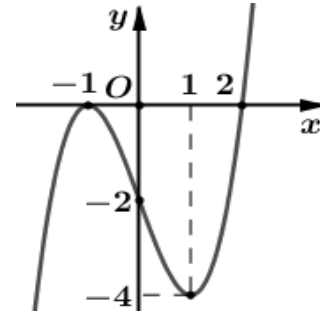
Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(x^3)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

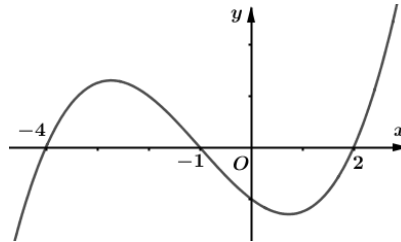
- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(0; 1)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?



- A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
 B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
 C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.
 D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

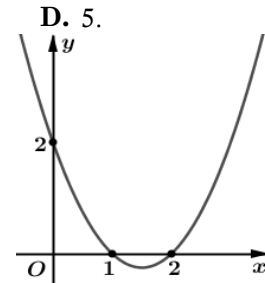


Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 5)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến ?

- A. 2. B. 3. C. 4.

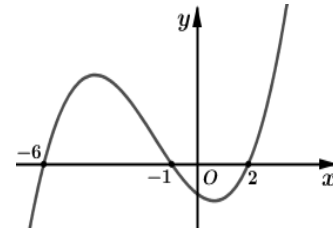
Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(1 - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(1; 2)$. B. $(0; +\infty)$.
 C. $(-2; -1)$. D. $(-1; 1)$.



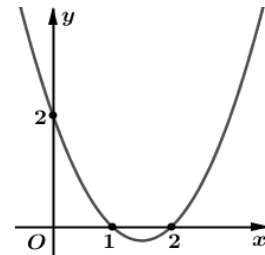
Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(2; 3)$. B. $(-2; -1)$.
 C. $(0; 1)$. D. $(-1; 0)$.

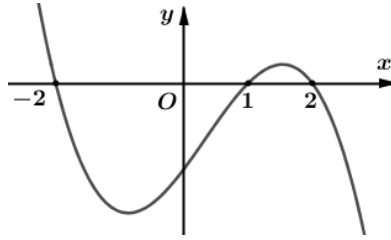


Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(1; 2)$. B. $(-\infty; 0)$.
 C. $(-\infty; 2)$. D. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.



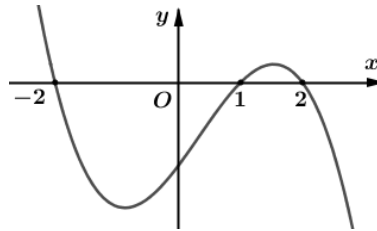
Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f(-2) = f(2) = 0$



Hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. B. $(-2; -1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(1; 2)$.

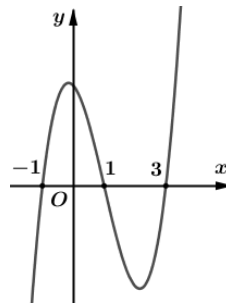
Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-2) = f(2) = 0$.



Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-2; -1)$. B. $(1; 2)$. C. $(2; 5)$. D. $(5; +\infty)$.

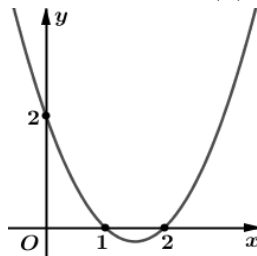
Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; -1 - 2\sqrt{2})$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(1; 2\sqrt{2} - 1)$. D. $(2\sqrt{2} - 1; +\infty)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

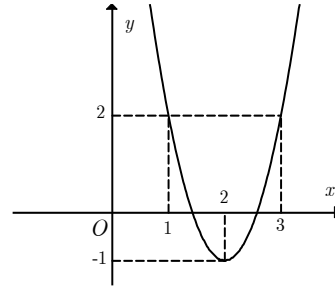


Hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2})$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-\infty; \frac{1}{2})$. C. $(\frac{1}{2}; +\infty)$. D. $(-1; +\infty)$.

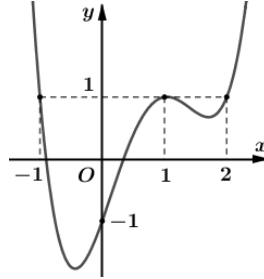
Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $g(x) = f'(x-2) + 2$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-1; 1)$.
 B. $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.
 C. $(-\infty; 2)$.
 D. $(2; +\infty)$.



Vấn đề 2. Cho đồ thị $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)] + g(x)$.

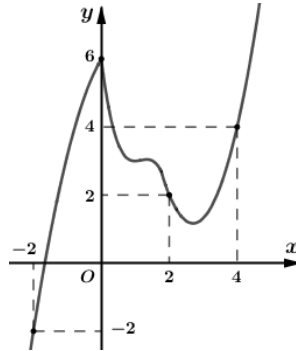
Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Đặt $g(x) = f(x) - x$, khẳng định nào sau đây là đúng ?

- A. $g(2) < g(-1) < g(1)$.
 B. $g(-1) < g(1) < g(2)$.
 C. $g(-1) > g(1) > g(2)$.
 D. $g(1) < g(-1) < g(2)$.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

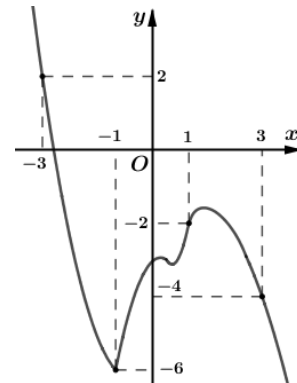


Hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây ?

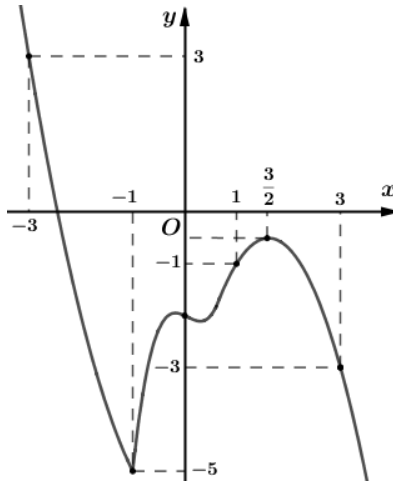
- A. $(-\infty; -2)$.
 B. $(-2; 2)$.
 C. $(2; 4)$.
 D. $(2; +\infty)$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = 2f(x) + (x+1)^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-3; 1)$.
 B. $(1; 3)$.
 C. $(-\infty; 3)$.
 D. $(3; +\infty)$.



Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-3;1)$. B. $(-2;0)$. C. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. D. $(1;3)$.

Vấn đề 3. Cho bảng biến thiên $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Hàm số $g(x) = f\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $\left(-1;\frac{1}{4}\right)$. B. $\left(\frac{1}{4};1\right)$. C. $\left(1;\frac{5}{4}\right)$. D. $\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	3	1	-1	2	4

Hàm số $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-4;-2)$. B. $(-2;0)$. C. $(0;2)$. D. $(2;4)$.

Vấn đề 4. Cho biểu thức $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 4x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; -6)$. B. $(-6; 6)$. C. $(-6\sqrt{2}; 6\sqrt{2})$. D. $(-6\sqrt{2}; +\infty)$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-2; 2)$. B. $(-\infty; -3)$. C. $(-\infty; -3) \cup (0; 3)$. D. $(3; +\infty)$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hỏi số thực nào dưới đây thuộc khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + 2)$?

- A. -2 . B. -1 . C. $\frac{3}{2}$. D. 3 .

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; 1)$. C. $(0; 2)$. D. $(2; 4)$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-4).t(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $t(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; -1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(1; 2)$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (1-x)(x+2).t(x) + 2018$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $t(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(1-x) + 2018x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; 3)$. B. $(0; 3)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(3; +\infty)$.

Vấn đề 5. Cho biểu thức $f'(x, m)$. Tìm m để hàm số $f[u(x)]$ đồng biến, nghịch biến.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m < 100$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$?

- A. 18. B. 82. C. 83. D. 84.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x^2 + mx + 9)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$?

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x^2 + mx + 5)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 7.

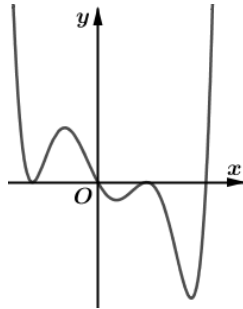
Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(3x^4 + mx^3 + 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Phần 2. Cực trị của hàm số

Vấn đề 1. Cho đồ thị $f'(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 1. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị hàm số $y = f'(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là



A. 2.

B. 3.

C. 4.

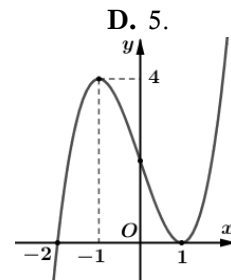
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $y = f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2		1		3		$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

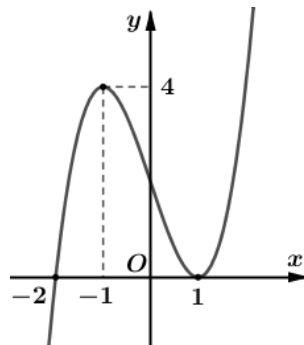
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) < 0$, đồng thời đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f^2(x)$ là

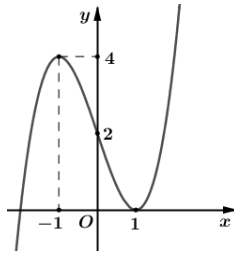
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

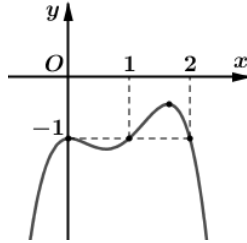
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x - 2017) - 2018x + 2019$ là

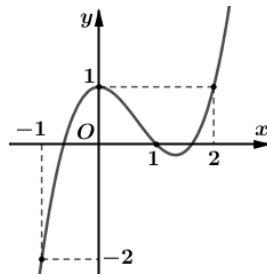
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + x$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây ?



- A. $x = 0$. B. $x = 1$.
C. $x = 2$. D. Không có điểm cực tiểu.

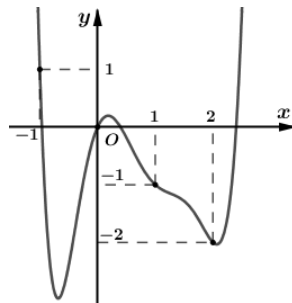
Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại

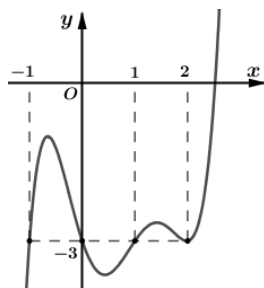
- A. $x = -1$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2$ đạt cực tiểu tại điểm



- A. $x = -1$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = f(x) + 3x$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



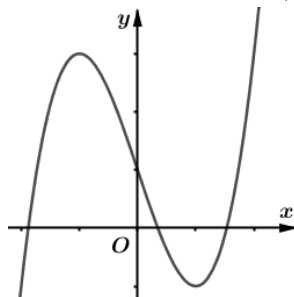
A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 7.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Hỏi hàm số $g(x) = f(|x|) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Câu 11. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số

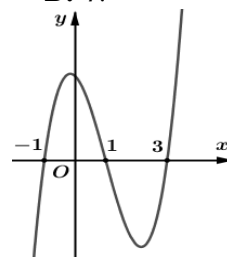
$g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ là

A. 1.

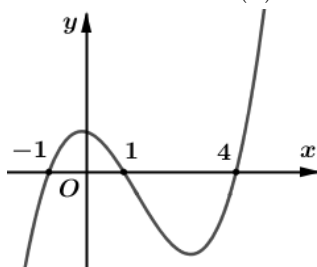
B. 2.

C. 3.

D. 4.



Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$ là

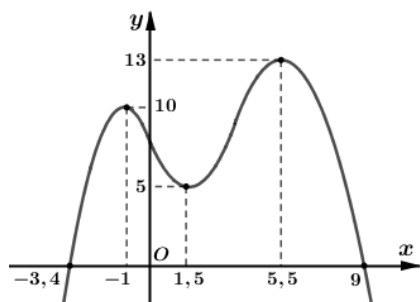
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$. Đặt $g(x) = f(x) - mx + 5$. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để hàm số $g(x)$ có đúng hai điểm cực trị ?



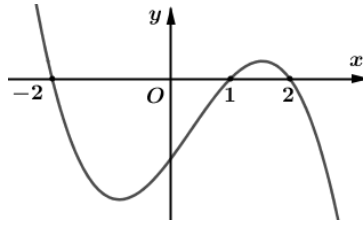
A. 4.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

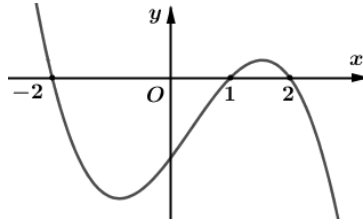
Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị ?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x|+m)$ có 5 điểm cực trị ?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. Vô số.

Vấn đề 2. Cho biểu thức $f'(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(3-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại

- A. $x = 0$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = 3$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)^2(x-2)+1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2-1)(x-4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3-x)$ có bao nhiêu điểm cực đại ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-4)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 3 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x).f'''(x) = x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = [f'(x)]^2 - 2f(x).f''(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 6.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x).f'(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|)$ là

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)^4(x^2-4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|)$ là

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^4(x^2+4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|)$ là

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 5.

Vấn đề 3. Cho biểu thức $f'(x, m)$. Tìm m để hàm số $f[u(x)]$ có n điểm cực trị

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m > -10$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2+m^2-3m-4)^3(x+3)^5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 1 điểm cực trị?

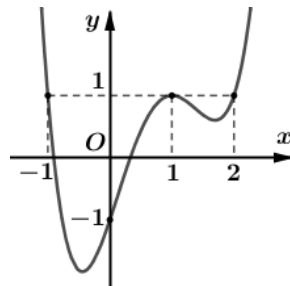
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 15. B. 16. C. 17. D. 18.

Vấn đề 4. Cho đồ thị $f(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = f(x) - x$ đạt cực đại tại



- A. $x = -1$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $x = 2$.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên.

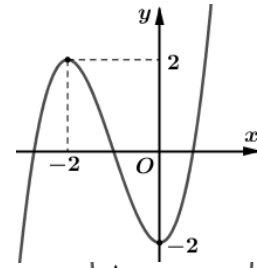
Hàm số $g(x) = f(-x^2 + 3x)$ có bao nhiêu điểm cực đại ?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.



Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Đồ thị của hàm

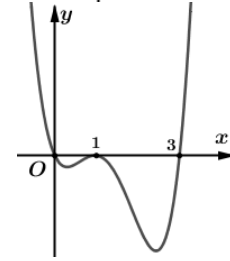
số $g(x) = [f(x)]^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, bao nhiêu điểm cực tiểu ?

A. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

B. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.

C. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

D. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.



Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm

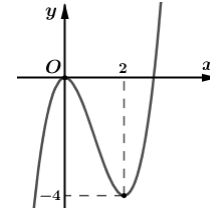
số $g(x) = f[f(x)]$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3.

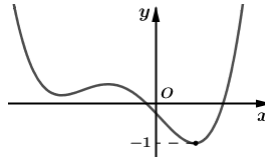
B. 4.

C. 5.

D. 6.



Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = 2^{f(x)} - 3^{f(x)}$.



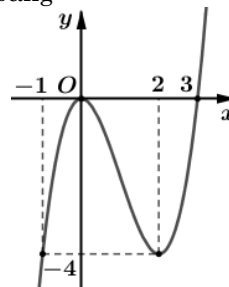
A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$ có tổng tung độ của các điểm cực trị bằng



A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên.

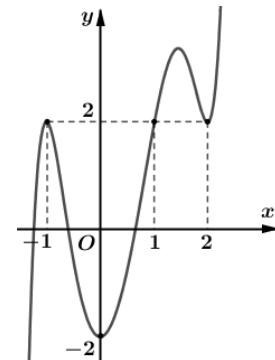
Đồ thị hàm số $h(x) = |2f(x) - 3|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 4.

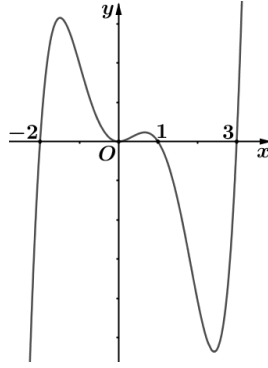
B. 5.

C. 7.

D. 9.

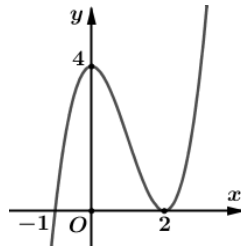


Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|) + 2018$ là



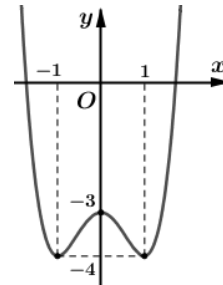
- A. 2. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$ là



- A. 1. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số $g(x) = f(|x - 2|) + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 2. B. 3.
C. 5. D. 7.

Vấn đề 5. Cho bảng biến thiên của hàm $f(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm $f[u(x)]$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
f'	$-$		$+$	0	$-$	0	$+$
f	$+\infty$						$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 1 2 1

Hàm số $g(x) = 3f(x) + 1$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?

- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = \pm 1$. D. $x = 0$.

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
f'	$-$	0	$+$	0	$+$
f	$+\infty$	-2	2	$+\infty$	

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-1	2	$-\infty$	

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(3 - x)$.

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2018	-2018	$+\infty$	

Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = |f(x - 2017) + 2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$f(-1)$	$f(3)$	$+\infty$	

Hỏi số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(|x|)|$ nhiều nhất là bao nhiêu ?

A. 5.

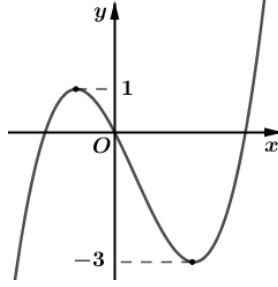
B. 7.

C. 11.

D. 13.

Vấn đề 6. Cho đồ thị $f(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x,m)]$.

Câu 46. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x) + m|$ có 3 điểm cực trị là



A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.

B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.

C. $m = -1$ hoặc $m = 3$.

D. $1 \leq m \leq 3$.

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	11	4	$+\infty$	

Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi

A. $m \in (4; 11)$.

B. $m \in \left[2; \frac{11}{2}\right]$.

C. $m \in \left(2; \frac{11}{2}\right)$.

D. $m = 3$.

Câu 48. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2}\right|$ có 5

điểm cực trị bằng

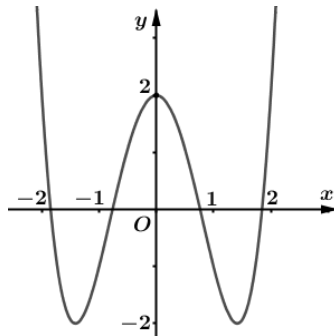
A. -2016.

B. -496.

C. 1952.

D. 2016.

Câu 49. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $g(x) = |f(x) - m|$ có 5 điểm cực trị.

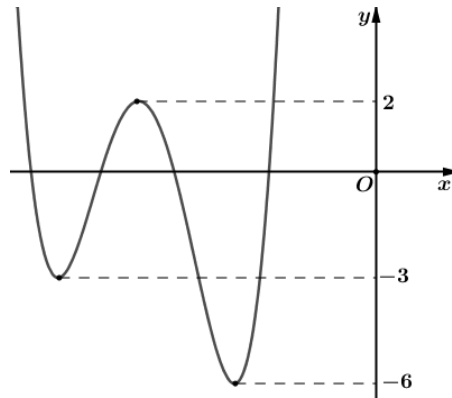
A. $-2 < m < 2$.

B. $m > 2$.

C. $m \geq 2$.

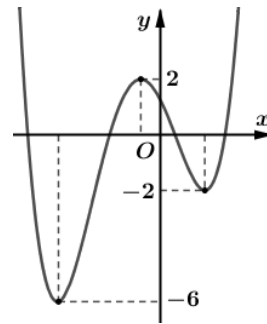
D. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x + 2018) + m|$ có 7 điểm cực trị ?



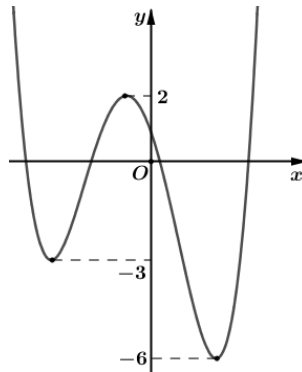
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 6.

Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x + 2018) + m^2|$ có 5 điểm cực trị ?



- A. 1. B. 2.
C. 4. D. 5.

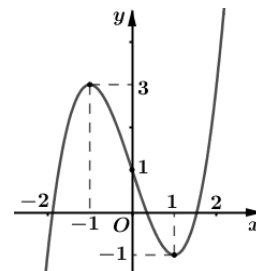
Câu 52. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-4; 4]$ để hàm số $g(x) = |f(x - 1) + m|$ có 5 điểm cực trị ?

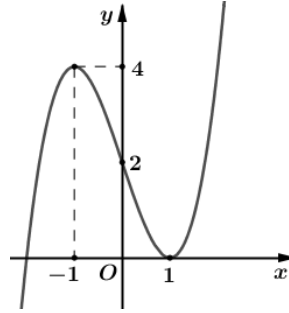
- A. 3. B. 5. C. 6. D. 7.

Câu 53. Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Với $m < -1$ thì hàm số $g(x) = f(|x + m|)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



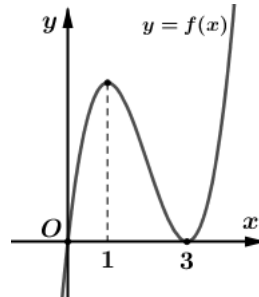
- A. 1. B. 2.
C. 3. D. 5.

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị.



- A. $m < -1$. B. $m > -1$. C. $m > 1$. D. $m < 1$.

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có đúng 3 điểm cực trị.

- A. $m > \frac{1}{4}$. B. $m \geq \frac{1}{4}$. C. $m < 1$. D. $m \leq 1$.

Vấn đề 7. Cho biểu thức $f(x, m)$. Tìm m để hàm số $f[u(x)]$ có n điểm cực trị

Câu 56. Hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1$ và 0 . Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 57. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

- A. $-2 < m < \frac{5}{4}$. B. $-\frac{5}{4} < m < 2$. C. $\frac{5}{4} < m < 2$. D. $\frac{5}{4} < m \leq 2$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x) = mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị ?

- A. 7. B. 9. C. 10. D. 11.

Câu 59. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị nhận hai điểm $A(0; 3)$ và $B(2; -1)$ làm hai điểm cực trị. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = |ax^2|x + bx^2 + c|x| + d|$.

- A. 5. B. 7. C. 9. D. 11.

Câu 60. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $\begin{cases} a > 0 \\ d > 2018 \\ a + b + c + d - 2018 < 0 \end{cases}$.

Hàm số $g(x) = |f(x) - 2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 61. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $\begin{cases} -8 + 4a - 2b + c > 0 \\ 8 + 4a + 2b + c < 0 \end{cases}$. Hàm số

$g(x) = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Câu 62. Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 1$ với $m, n \in \mathbb{R}$ và $\begin{cases} m + n > 0 \\ 7 + 2(2m + n) < 0 \end{cases}$. Hàm số

$g(x) = |f(|x|)|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2.

B. 5.

C. 9.

D. 11.

Câu 63. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (-1; 0), x_2 \in (1; 2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ biết $a > 0, c > 2018$ và $a + b + c < 2018$. Số cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) - 2018|$ là

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Câu 65. Cho hàm số $f(x) = (m^4 + 1)x^4 + (-2^{m+1}.m^2 - 4)x^2 + 4^m + 16$ với m là tham số thực.

Hàm số $g(x) = |f(x) - 1|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

----- HẾT -----

HÀM SỐ 2

VẬN DỤNG CAO

Phần 3. GTLN – GTNN CỦA HÀM SỐ

Vấn đề 1) Cho đồ thị hàm số $f(x)$. Hỏi GTLN-GTNN của hàm số $f[u(x)] + g(x)$

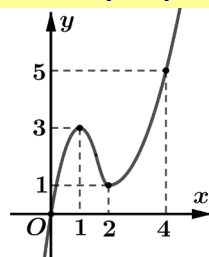
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là GTLN – GTNN của hàm số $g(x) = f[2(\sin^4 x + \cos^4 x)]$. Tổng $M + m$ bằng

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.



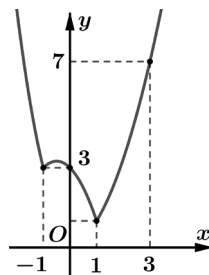
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là hình bên. Gọi M, m theo thứ tự là GTLN – GTNN của hàm số $y = |f(x) - 2|^3 - 3(f(x) - 2)^2 + 5$ trên đoạn $[-1; 3]$. Tích $M.m$ bằng

A. 2.

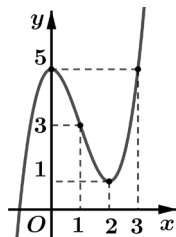
B. 3.

C. 54.

D. 55.



Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Ký hiệu $g(x) = f(2\sqrt{2x} + \sqrt{1-x}) + m$. Tìm điều kiện của tham số m sao cho $\max_{[0;1]} g(x) > 2 \min_{[0;1]} g(x)$.



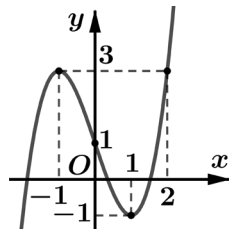
A. $m > 4$.

B. $m < 3$.

C. $0 < m < 5$.

D. $m < 2$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Tìm m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.



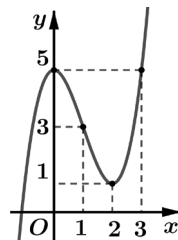
A. $m = -13$.

B. $m = -12$.

C. $m = -1$.

D. $m = 3$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Ký hiệu $g(x) = f(x^3 - x^2 + x + 2) + 3m$, với m là tham số thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = m^2 + 3 \max_{[0;1]} g(x) + 4 \min_{[0;1]} g(x) + m$



A. -150 .

B. -102 .

C. -50 .

D. 4 .

Vấn đề 2) Tìm GTLN – GTNN của hàm số $f(x), f(|x|), |f(x)|$

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{x} + m}{\sqrt{x} + 1}$ với m là tham số thực và $m > 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 4]$ nhỏ hơn 3.

A. $m \in (1; 3)$.

B. $m \in (1; 3\sqrt{5} - 4)$.

C. $m \in (1; \sqrt{5})$.

D. $m \in (1; 3]$.

Câu 7. Gọi M, m lần lượt là GTLT–GTNN của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (a + 2)x + a + 3$ (với a là tham số thực) trên đoạn $[1 - 2a; 2a - 3]$. Tính $P = \frac{m + M}{2}$.

A. $P = 1$.

B. $P = \frac{3}{2}$.

C. $P = 3$.

D. $P = 6$.

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{x^2 + 2}$ với $a \neq 0$ và a, b là các tham số thực. Biết $\max y = 6$, $\min y = -2$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ bằng

A. -3 .

B. $-\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. 3 .

Câu 9. Biết hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có M, m lần lượt là GTLN-GTNN của hàm số trên đoạn $[0;2]$. Trong các hàm số sau, hàm số nào cũng có GTLN và GTNN trên đoạn $[0;2]$ tương ứng là M và m ?

- A. $y = f\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)$. B. $y = f\left(\sqrt{2(\sin x + \cos x)}\right)$.
C. $y = f\left(2\sqrt{(\sin^3 x + \cos^3 x)}\right)$. D. $y = f\left(x + \sqrt{2-x^2}\right)$.

Câu 10. Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-1;1]$ thỏa mãn $f(x) > 0, g(x) > 0$ với mọi $x \in [-1;1]$ và $f'(x) \geq g'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [-1;1]$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = 2f(x)g(x) - g^2(x)$ trên đoạn $[-1;1]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $m = h(-1)$. B. $m = h(0)$. C. $m = h(1)$. D. $m = \frac{h(-1) + h(1)}{2}$.

Câu 11. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90| + m$ trên đoạn $[-5;5]$ bằng 2018. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng ?

- A. $m < 1618$. B. $1600 < m < 1700$. C. $m = 400$. D. $1500 < m < 1600$.

Câu 12. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left|\frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20\right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20.

Tổng các phần tử của S bằng

- A. -195. B. 105. C. 210. D. 300.

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left|\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}(m^2 - 2)x^3 - m^2x^2 + m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ luôn bé hơn hoặc bằng 5 ?

- A. 0. B. 4. C. 7. D. 8.

Câu 14. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \left|x^4 - 4x^3 + 4x^2 + \frac{a}{3}\right|$ trên đoạn $[0;2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-7;4]$ sao cho $M \leq 2m$?

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 10.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng 4 ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên $[0;\ln 4]$ bằng 6 ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x + 1} \right|$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 2 ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 18. Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng 2. Tổng các phần tử của tập S bằng

- A. 0. B. 20. C. 24. D. 40.

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + 3| + 4mx$ lớn hơn 2 ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$. Có bao nhiêu số nguyên $m < 10$ để với mọi bộ ba số thực $a, b, c \in [1; 3]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh một tam giác ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m + 2$. Có bao nhiêu số nguyên dương $m < 2018$ sao cho với mọi bộ ba số thực phân biệt $a, b, c \in [-1; 3]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh một tam giác nhọn ?

- A. 1968. B. 1969. C. 1970. D. 2008.

Vấn đề 3) Cho biết hàm số $f(x)$ đạt GTLN (GTNN) tại $x_0 \in (a; b)$. Hỏi trên khoảng $(c; d)$ hàm số đạt GTLN (GTNN) tại điểm nào

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có $\min_{(-\infty; 0)} f(x) = f(-1)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ bằng

- A. $c + 8a$. B. $c - \frac{7a}{16}$. C. $c + \frac{9a}{16}$. D. $c - a$.

Câu 23. Biết hàm số $f(x) = (m+1)(x+1)^4 - (2m-n+1)(x+1)^2 - 8m-4n$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(-\infty; 0)$ tại $x = -3$. Hỏi trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ hàm số đã cho có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu ?

- A. 10. B. 11. C. 12. D. 13.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = (x+2)^2(ax^2 + 2ax - a - b - 1) - 8a - 4b$. Biết rằng trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = -3$. Hỏi trên đoạn $[-1; 3]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm nào ?

- A. $x = -1$. B. $x = \frac{1}{2}$. C. $x = 2$. D. $x = 3$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + cx + d$ ($a \neq 0$) có $\min_{(-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm $f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

- A. $d - 16a$. B. $d - 11a$. C. $2a + d$. D. $8a + d$.

Vấn đề 4) Bài toán tìm tham số m để GTLN của hàm số đạt GTNN

Câu 26. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 4$.

Câu 27. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - x^2 + (m^2 + 1)x - 4m - 7|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = m_0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m_0 \in [-3; -2]$. B. $m_0 \in (-2; -1)$. C. $m_0 \in [-1; 0]$. D. $m_0 \in (0; 3)$.

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left| \frac{x - m^2 + m}{x + 1} \right|$ trên đoạn $[1; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$. C. $m = \frac{5 \pm \sqrt{165}}{10}$. D. $m = 2$.

Câu 29. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left| \frac{\ln x + 1}{\sqrt{\ln^2 x + 1}} + m \right|$ trên đoạn $[1; e^2]$ có giá trị nhỏ nhất là

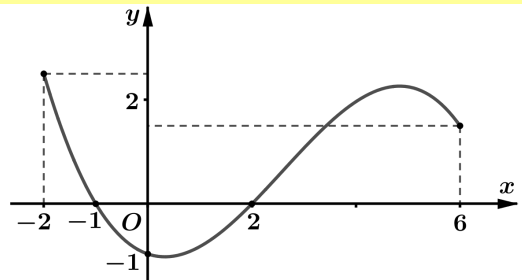
- A. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2} - 1}{4}$. C. $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{1 + \sqrt{2}}{4}$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = |2x - x^2 - \sqrt{(x+1)(3-x)} + m|$ với m là tham số thực. Khi giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất thì khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m \in (0; 1)$. B. $m \in (1; 2)$. C. $m \in (2; 3)$. D. $m \in (3; 4)$.

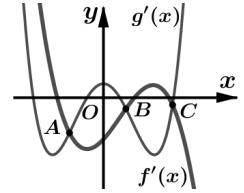
Vấn đề 5) Cho đồ thị hàm số $f'(x)$. Hỏi GTLN-GTNN của hàm số $f[u(x)] + g(x)$

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-1)$.
 B. $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-2)$.
 C. $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(6)$.
 D. $\max_{[-2; 6]} f(x) = \max\{f(-1), f(6)\}$.

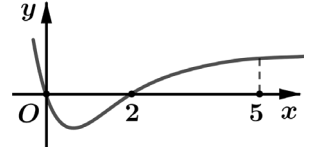
Câu 32. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong nét đậm và $y = g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ. Gọi ba giao điểm A, B, C của đồ thị $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ trên hình vẽ



lần lượt có hoành độ là a, b, c . Giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; c]$ bằng

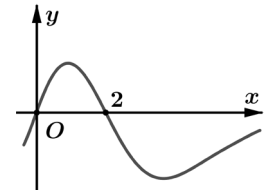
- A. $h(0)$. B. $h(a)$. C. $h(b)$. D. $h(c)$.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0; 5]$ lần lượt là



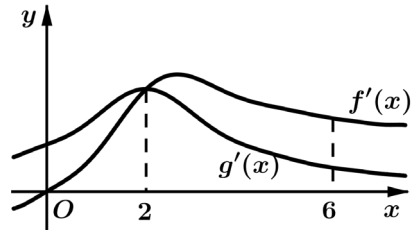
- A. $f(0); f(5)$. B. $f(2); f(0)$. C. $f(1); f(5)$. D. $f(2); f(5)$.

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Hỏi trong các giá trị $f(0), f(1), f(3), f(4)$ giá trị nào là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$?



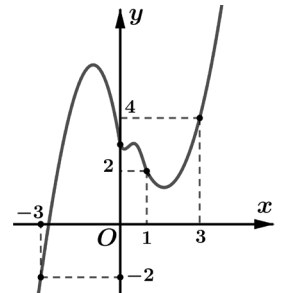
- A. $f(0)$. B. $f(1)$. C. $f(3)$. D. $f(4)$.

Câu 35. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ lần lượt là



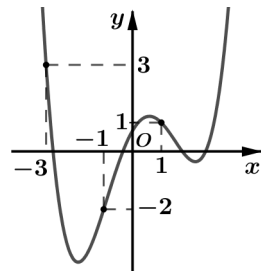
- A. $h(6), h(2)$. B. $h(2), h(6)$. C. $h(0), h(2)$. D. $h(2), h(0)$.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Xét hàm số $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$, mệnh đề nào sau đây đúng ?



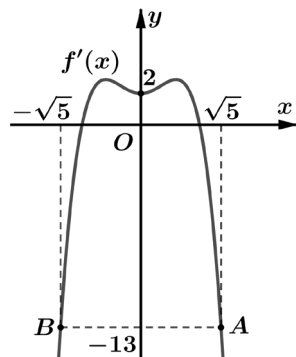
- A. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$. B. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.
C. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.
D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên $[3;3]$.

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét hàm $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$, mệnh đề nào sau đây đúng ?



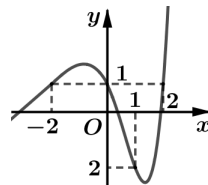
- A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$. B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.
C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$. D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Xét hàm $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là tham số thực. Để $g(x) \leq 0$ với mọi $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$, khẳng định nào sau đây đúng ?



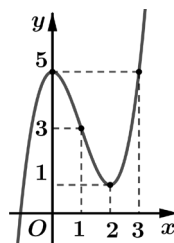
- A. $m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$. B. $m \leq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$.
C. $m \leq \frac{2}{3}f(0) - 2\sqrt{5}$. D. $m \geq \frac{2}{3}f(-\sqrt{5}) - 4\sqrt{5}$.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-2; 2]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Khẳng định nào sau đây đúng ?



- A. $g(0) > g(-2) > g(2)$. B. $g(2) > g(0) > g(-2)$.
C. $g(2) > g(-2) > g(0)$. D. $g(0) > g(2) > g(-2)$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = 3f(x) + x^3 - 15x + 1$ trên đoạn $[0; 3]$ là

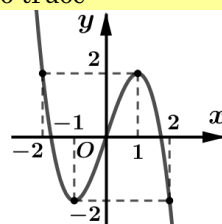


- A. $g(0)$. B. $g(1)$.
C. $g(2)$. D. $g(3)$.

Phần 4. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Vấn đề 1) Tìm số đường tiệm cận thông qua đồ thị cho trước

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x+2}{f(x)+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



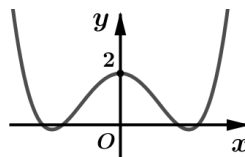
A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 2. Cho hàm trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2018x}{f(x)[f(x)-1]}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ?



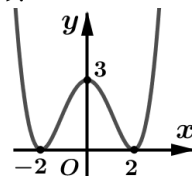
A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 9.

Câu 3. Cho hàm trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2018}{f(x)} + 2019$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ?



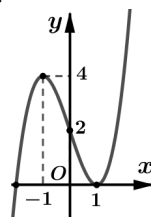
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^2-1}{f^2(x)-4f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



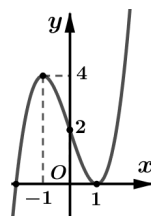
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x-1)(x^2-1)}{f^2(x)-2f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



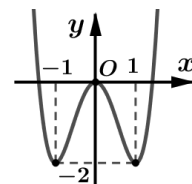
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 6. Cho hàm trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x(x-1)(x+1)^2}{f^2(x)+2f(x)}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



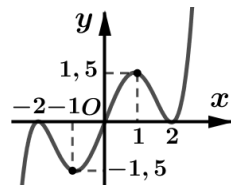
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 7. Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^3 - x}{4f^3(x) - 9f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



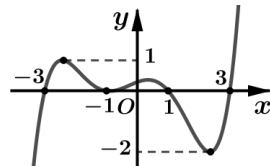
A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Câu 8. Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{f^2(x) + f(x) - 2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



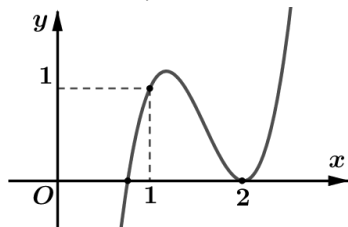
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 9. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



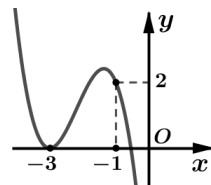
A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 10. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



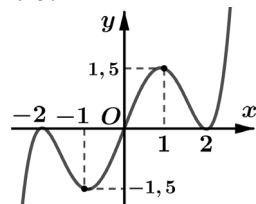
A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 11. Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x - 2\sqrt{x-1}}{4f^3(x) - 9f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



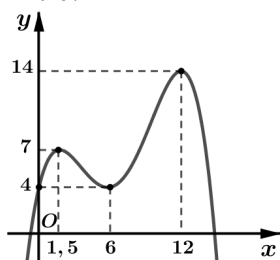
A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Câu 12. Cho hàm bậc bốn $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2x^2 + 5x - 4x\sqrt{2x+1}}{f^2(x) - 11f(x) + 28}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



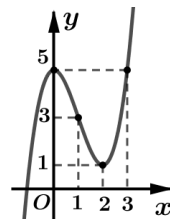
A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 13. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x-1)(x-2)-2\sqrt{x^2-3x+1}}{f^2(x)-6f(x)+5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



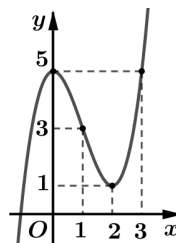
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 14. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{10x+9} + \sqrt{5-2x}}{8f^2(x)-13f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



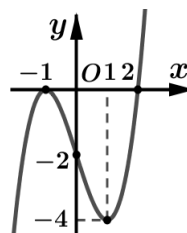
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 15. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Vấn đề 2) Tìm số đường tiệm cận thông qua bảng biến thiên

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x)-m}$ có ba đường tiệm cận đứng?

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	4	-5	4	$-\infty$

A. $m < -5$.

B. $m = -5$.

C. $-5 < m < 4$.

D. $-5 \leq m < 4$.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận cận (chỉ tính đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang)?

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	$+$
f	$-\infty$	$+\infty$	1	0

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 18. Hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, có bảng biến thiên như hình bên. Gọi k, l lần lượt là số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x)-1}$. Tính $k+l$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
y	$-\infty$	$+\infty$	1	$+\infty$	0

A. $k+l=2$.

B. $k+l=3$.

C. $k+l=4$.

D. $k+l=5$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f^2(x)-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

x	$-\infty$	$-0,5$	$+\infty$
f'		+	+
f	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 20. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 2x}{f^2(x) - 4}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
f'	+	+	0	-	0	+
f			4		$+\infty$	
	$-\infty$	2		1		

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(3-x)-2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	3	0	$+\infty$	

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(3-x)-4}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	3	0	$+\infty$	

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{\log_2 f^2(x) - 4}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	5	2	$+\infty$	

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2018}{e^{f^2(x)} - e}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	3	1	$-\infty$	

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 25. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến

thiên như hình. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{|f(x)|-1}$

có bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

Vấn đề 3) Tìm số đường tiệm cận thông qua biểu thức của hàm số

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$. Tìm tất cả

các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)+2}$ có duy nhất một tiệm

cận ngang.

A. $m = -1$.

B. $m = 2$.

C. $m \in \{-1; -2\}$.

D. $m \in \{-1; 2\}$.

Câu 27. Có bao nhiêu số nguyên của tham số thực $m \in [-3; 6]$ để đồ thị hàm số

$y = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-2x-m+2}-x-1}$ có đúng 4 đường tiệm cận ?

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

Câu 28. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-mx-3m}}$ có

đúng hai tiệm cận đứng.

A. $m \in (-\infty; -12) \cup (0; +\infty)$.

B. $m \in (0; +\infty)$.

C. $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

D. $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Câu 29. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{12+\sqrt{4x-x^2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có

đúng hai tiệm cận đứng.

A. $m \in \left[4; \frac{9}{2}\right)$.

B. $m \in \left[4; \frac{9}{2}\right]$.

C. $m \in [8; 9)$.

D. $m \in (0; 9]$.

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{1}{[x^2-(2m+1)x+2m]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của

tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

A. $m \in (0; 1)$.

B. $m \in [0; 1]$.

C. $m \in (0; 1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

D. $m \in (-\infty; 1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 31. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-1; 3]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{2x - \sqrt{mx^2 + 1}}{(x-1)^2}$ có đường tiệm cận đứng ?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 32. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a để đồ thị hàm số $y = ax + \sqrt{4x^2 + 1}$ có tiệm cận ngang ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2 + 1}}$ có hai tiệm cận ngang.

- A. $m < 0$. B. $m = 0$. C. $m > 0$. D. $m \in \emptyset$.

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x + \sqrt{mx^2 + 4}}$ có đúng một tiệm cận ngang ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = e^{\frac{3x - \sqrt{mx^2 + 1}}{x - \sqrt{(2018-m)x^2 + 1}}}$ có hai tiệm cận ngang ?

- A. 2016. B. 2017. C. 2018. D. 2019.

Phần 5. TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ

Vấn đề 1) Tìm nghiệm của phương trình thông qua biểu thức

Câu 1. Cho hàm số $g(x) = x^2 + 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Tìm m để phương trình $f[g(x)] - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A. $-3 < m < -1$. B. $-3 < m \leq -1$. C. $-3 \leq m \leq -1$. D. $m > -1$.

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x) + m}) = x^3 - m$ có nghiệm $\forall x \in [1; 2]$ biết $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$.

- A. 15. B. 16. C. 17. D. 18.

Câu 3. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình bậc ba $x^3 - 3x^2 + 2(1-m)x + 16 + 2m = 0$ có nghiệm nằm trong đoạn $[2; 4]$.

- A. $m \geq \frac{11}{2}$. B. $\frac{20}{3} \leq m \leq 8$. C. $m \leq 8$. D. $\frac{11}{2} \leq m \leq 8$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt thì phương trình $2f(x)f''(x) = [f'(x)]^2$ có bao nhiêu nghiệm ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 5. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ (với $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0; b \neq 0$) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. Khi đó đồ thị hàm số $g(x) = [f'(x)]^2 - f''(x) \cdot f(x) = 0$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

- A. 0. B. 2. C. 4. D. 6.

Vấn đề 2) Tìm nghiệm của phương trình thông qua bảng biến thiên

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Gọi h là số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 3$ và k là số nghiệm của phương trình $f(|x|) = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	-		- 0 +	
f	2 ↘ $-\infty$	$+\infty$	↗ 2 ↘ $+\infty$	

- A. $h + k = 4$. B. $h + k = 6$. C. $h + k = 7$. D. $h + k = 8$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Với m là tham số thực bất kỳ, phương trình $f(|x| + m) = 0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	+		+ 0 -	
f	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$-\infty$	↗ 3 ↘ $-\infty$	

- A. 3. B. 5 C. 6. D. 7.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 8]$, biết $f(1) = f(3) = f(8) = 2$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 8]$?

x	-1	2	5	8	
f'	-	0	+	0	-
f	4			4	
		-3			2

- A. 1. B. 7. C. 8. D. 9.

Câu 9. Cho hàm số $u(x)$ liên tục trên $[0; 5]$ và có bảng biến thiên như hình. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $\sqrt{3x} + \sqrt{10 - 2x} = m \cdot u(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0; 5]$?

x	0	1	2	3	5
u	4 ↘ 1 ↗ 3 ↘ 1 ↗ 3				

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$ và có bảng biến thiên như hình. Tổng các giá trị $m \in \mathbb{Z}$ sao cho phương trình $f(x - 1) = \frac{m}{x^2 - 6x + 12}$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $[2; 4]$ bằng

x	1	2	3
y'	+	0	-
y	-6 ↗ -1 ↘ -3		

- A. -297. B. -294. C. -75. D. -72.

Vấn đề 3) Tìm nghiệm của phương trình thông qua đồ thị

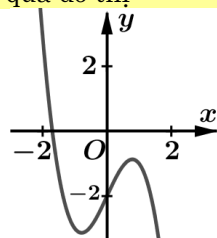
Câu 11. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $[f(x)]^2 = 4$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 6.



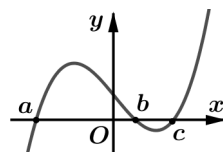
Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm a, b, c ($a < b < c$) như hình vẽ. Biết $f(b) < 0$, hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



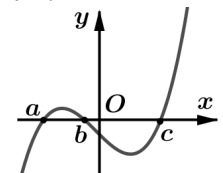
Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm a, b, c ($a < b < c$) như hình vẽ. Biết $f(a) > 0$, hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành nhiều nhất bao nhiêu điểm ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



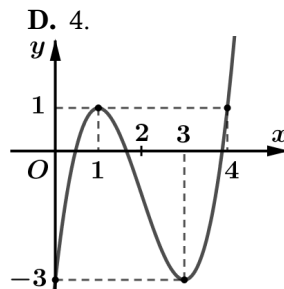
Câu 14. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $[f(x)]^3 - 6[f(x)]^2 + 9f(x) - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 9.



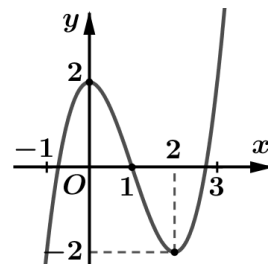
Câu 15. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $(x^3 - 3x^2 + 2)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 2)^2 + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực dương phân biệt ?

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 9.



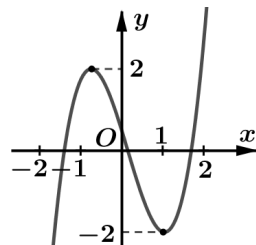
Câu 16. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f[f(x)] = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt ?

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 9.



Câu 17. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi m là số nghiệm thực của phương trình $f[f(x)] = 1$.

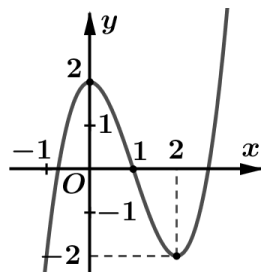
Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $m = 3$.

B. $m = 4$.

C. $m = 7$.

D. $m = 9$.



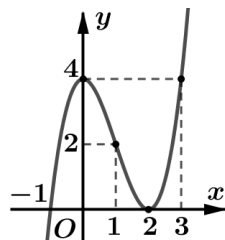
Câu 18. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $\frac{f[f(x)]}{3f^2(x) - 5f(x) + 4} = 1$ có bao nhiêu nghiệm thực ?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 8.



Câu 19. Cho hàm bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.

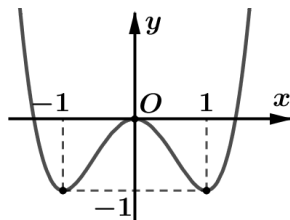
Phương trình $\sqrt{f[\sqrt{f(x)}]} + 2 = f(x) + 1$ có bao nhiêu nghiệm

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



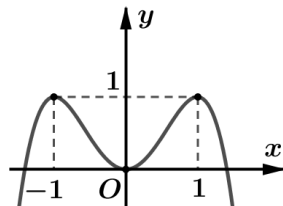
Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f[f(\cos 2x)] = 0$?

A. 1 điểm.

B. 3 điểm.

C. 4 điểm.

D. Vô số.



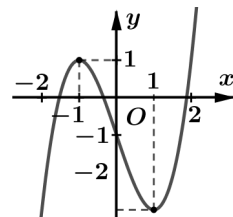
Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f[f(\cos x) - 1] = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 6.



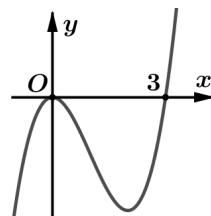
Câu 22. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thực của phương trình $f(\sqrt{-x^2 + 4x - 3}) = -2$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



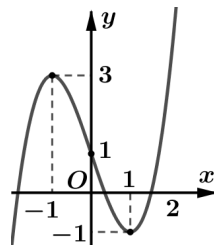
Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi phương trình $f(|x - 2|) = -\frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 6.



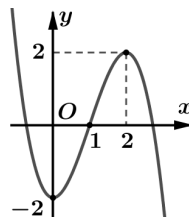
Câu 24. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó phương trình $2|f(|x^3 - 1|)| - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm lớn hơn 1 ?

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 8.



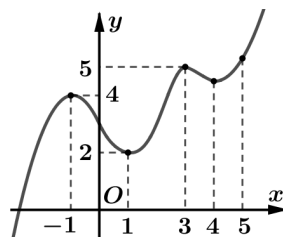
Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



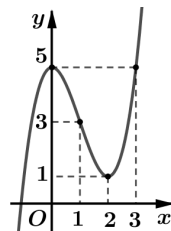
Câu 26. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Với m là tham số thực bất kì thuộc đoạn $[0; 5]$, hỏi phương trình $f(x^3 - x^2 + 6x) = \sqrt{2m} + \sqrt{5 - m}$ có bao nhiêu nghiệm thực ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



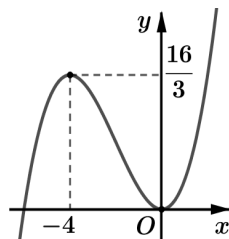
Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Với m là tham số bất kì thuộc $[0;1]$. Phương trình $f(x^3 - 3x^2) = 3\sqrt{m} + 4\sqrt{1-m}$ có bao nhiêu nghiệm thực ?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 9.



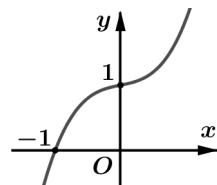
Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(6\sin x + 8\cos x) = f(m(m+1))$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$?

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 6.



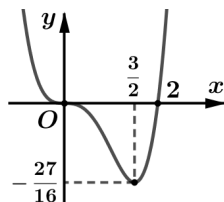
Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|2\sin x|) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



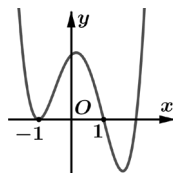
Câu 30. Cho hàm số $y = (x^2 - 1) \cdot f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $f(x) = \frac{x}{|x^2 - 1|}$ thuộc khoảng nào sau đây ?

A. $(0;2)$.

B. $(1;3)$.

C. $(2;4)$.

D. $(3;5)$.



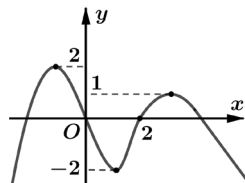
Câu 31. Cho hàm số $g(x) = (x-2) \cdot f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi với m thuộc khoảng nào dưới đây thì phương trình $f(x)|x-2| = m$ có nhiều nghiệm nhất ?

A. $(-2;0)$.

B. $(0;1)$.

C. $(1;2)$.

D. $(0;2)$.



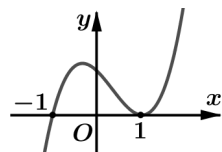
Câu 32. Cho hàm số $y = (x-1) \cdot f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = m^2 - m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)|x-1|$ tại hai điểm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-1;1]$.

A. $m > 0$.

B. $m > 1$ hoặc $m < 0$.

C. $m < 1$.

D. $0 < m < 1$.



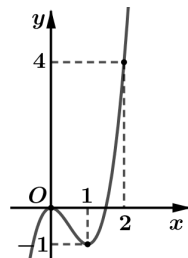
Câu 33. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2$. Sử dụng đồ thị đã cho tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $16|x|^3 - 12x^2(x^2 + 1) = m(x^2 + 1)^3$ có nghiệm.

A. $-1 \leq m \leq 0$.

B. $-1 \leq m \leq 4$.

C. $1 \leq m \leq 4$.

D. Với mọi m .



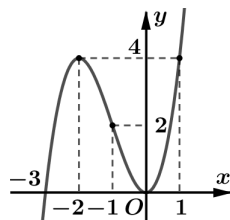
Câu 34. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2$. Sử dụng đồ thị đã cho tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{-x^3 + m}$ có hai nghiệm thực âm phân biệt.

A. $-1 \leq m \leq 1$.

B. $-1 \leq m < 1$.

C. $-1 < m < 1$.

D. $m = -4$.



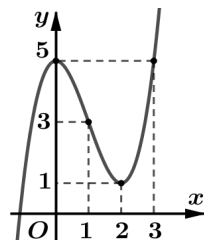
Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{2x} + \sqrt{3-x} = m.f(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0; 3]$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



HÀM SỐ (hàm ẩn)

Vận dụng cao

Phần 1. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

1. Cho đồ thị $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)]$ 02
2. Cho đồ thị $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)] + g(x)$ 14
3. Cho bảng biến thiên $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)]$ 17
4. Cho biểu thức $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)]$ 18
5. Cho biểu thức $f'(x, m)$. Tìm m để hàm số $f[u(x)]$ đồng biến, nghịch biến..... 21

Phần 2. Cực trị của hàm số

Kí hiệu $f[u(x)]$ là các hàm số hợp; hàm tổng, hàm chứa trị tuyệt đối.

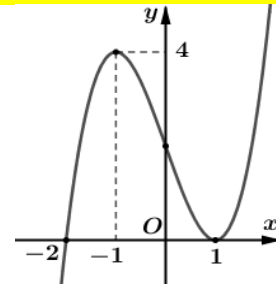
1. Cho đồ thị $f'(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x)]$ 23
2. Cho biểu thức $f'(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x)]$ 31
3. Cho biểu thức $f'(x, m)$. Tìm m để hàm số $f[u(x)]$ có n điểm cực trị..... 34
4. Cho đồ thị $f(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x)]$ 36
5. Cho bảng biến thiên của hàm $f(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x)]$ 42
6. Cho đồ thị $f(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x, m)]$ 44
7. Cho biểu thức $f(x, m)$. Tìm m để hàm số $f[u(x)]$ có n điểm cực trị..... 49

Phần 1. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Vấn đề 1. Cho đồ thị $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Khẳng định nào sau đây sai ?

- A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-2;1)$.
- B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$
- C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2.
- D. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.



Lời giải. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta thấy:

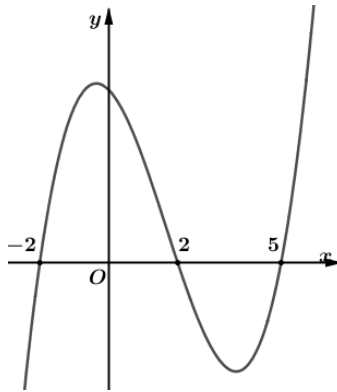
- $f'(x) > 0$ khi $\begin{cases} -2 < x < 1 \\ x > 1 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$, $(1;+\infty)$.

Suy ra A đúng, B đúng.

- $f'(x) < 0$ khi $x < -2 \longrightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. Suy ra D đúng.

Dùng phương pháp loại trừ, ta **chọn C**.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(0;2)$.
- B. $(1;3)$.
- C. $(-\infty;-1)$.
- D. $(-1;+\infty)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x > 5 \end{cases}$.

Ta có $g'(x) = -2f'(3-2x)$.

$$\text{Xét } g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3-2x < 2 \\ 3-2x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \\ x < -1 \end{cases}$$

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$ và $(-\infty;-1)$. **Chọn C**.

Cách 2. Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) = 0 \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} 3-2x = -2 \\ 3-2x = 2 \\ 3-2x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$0,5$	$2,5$	$+\infty$		
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g							

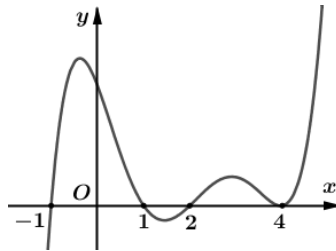
Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn C**.

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ ta chọn $x=0 \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$, suy ra $3-2x=3$

$\xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(3-2x) = f'(3) < 0$. Khi đó $g'(0) = -f'(3) > 0$.

Nhận thấy các nghiệm của $g'(x)$ là nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-1; 0)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$.

Ta có $g'(x) = -2f'(1-2x)$.

Xét $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x < -1 \\ 1 < 1-2x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -\frac{1}{2} < x < 0 \end{cases}$.

Vậy $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ và $(1; +\infty)$. **Chọn D.**

Cách 2. Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2f'(1-2x) = 0 \xleftarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \begin{cases} 1-2x = -1 \\ 1-2x = 1 \\ 1-2x = 2 \\ 1-2x = 4 (\text{nghiệm kép}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-1,5$		$-0,5$		0		1		$+\infty$
g'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g										

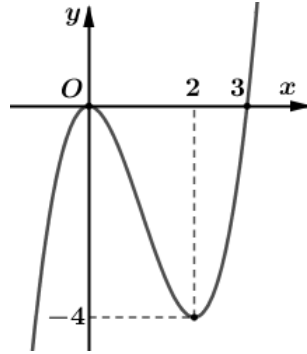
Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn D**.

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=2 \in (1; +\infty)$, suy ra $1-2x=-3$

$\xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(1-2x) = f'(-3) < 0$. Khi đó $g'(2) = -2f'(-3) > 0$.

Nhận thấy các nghiệm $x = -\frac{1}{2}; x = 0$ và $x = 1$ của $g'(x)$ là các nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu; nghiệm $x = -\frac{3}{2}$ là nghiệm kép nên qua nghiệm không đổi dấu.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới. Hàm số $g(x) = f(2 + e^x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây ?



- A. $(-\infty; 0)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-1; 3)$. D. $(-2; 1)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.

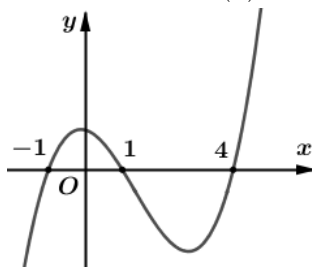
Xét $g'(x) = e^x \cdot f'(2 + e^x)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2 + e^x) = 0 \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} 2 + e^x = 0 \\ 2 + e^x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$
g	↘ ↗		

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$. **Chọn A.**

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = 2^{f(3-2x)}$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$. C. $(1; 2)$. D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{cases}$.

Ta có $g'(x) = -2f'(3-2x) \cdot 2^{f(3-2x)} \cdot \ln 2$.

Xét $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x < -1 \\ 1 < 3-2x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -\frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$.

Vậy $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, $(2; +\infty)$. **Chọn B.**

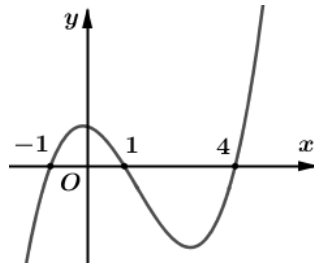
Cách 2. Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) = 0 \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} 3-2x = -1 \\ 3-2x = 4 \\ 3-2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-0,5$		1		2	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g							

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn B.**

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 2)$. C. $(2; 3)$. D. $(4; 7)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > 4 \end{cases}$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{cases}$.

• Với $x > 3$ khi đó $g(x) = f(x-3) \longrightarrow g'(x) = f'(x-3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x-3 < 1 \\ x-3 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x > 7 \end{cases}$

$\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(3; 4)$, $(7; +\infty)$.

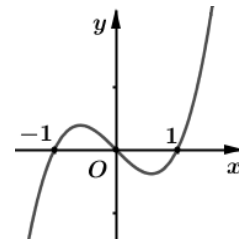
• Với $x < 3$ khi đó $g(x) = f(3-x) \longrightarrow g'(x) = -f'(3-x) > 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x < -1 \\ 1 < 3-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \text{ (loại)} \\ -1 < x < 2 \end{cases}$

$\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$. **Chọn B.**

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; +\infty)$.
C. $(-1; 0)$. D. $(0; 1)$.



Lời giải. Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$.

$$\text{Hàm số } g(x) \text{ đồng biến} \Leftrightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2) > 0 \\ x < 0 \\ f'(x^2) < 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \begin{cases} x > 0 \\ -1 < x^2 < 0 \vee x^2 > 1 \\ x < 0 \\ x^2 < -1 \vee 0 < x^2 < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -1 < x < 0 \end{cases}. \text{ Chọn C.}$$

Cách 2. Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -1 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$
g					

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn C.

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(1; +\infty)$

• $x \in (1; +\infty) \rightarrow x > 0.$ (1)

• $x \in (1; +\infty) \rightarrow x^2 > 1.$ Với $x^2 > 1 \xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(x^2) > 0.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x) = 2xf'(x^2) > 0$ trên khoảng $(1; +\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu $+$.

Nhận thấy các nghiệm của $g'(x)$ là nghiệm bội lẻ nên qua nghiệm đổi dấu.

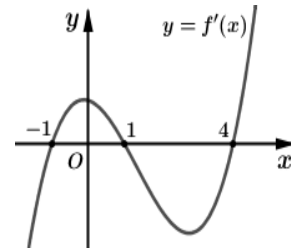
Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-\infty; -2).$

B. $(-2; -1).$

C. $(-1; 0).$

D. $(1; 2).$



Lời giải. Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2).$

$$\text{Hàm số } g(x) \text{ đồng biến} \Leftrightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(x^2) > 0 \\ x < 0 \\ f'(x^2) < 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \begin{cases} x > 0 \\ -1 < x^2 < 1 \vee x^2 > 4 \\ x < 0 \\ x^2 < -1 \vee 1 < x^2 < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \vee x > 2 \\ -2 < x < -1 \end{cases}. \text{ Chọn B.}$$

Cách 2. Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -1 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1. \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g							

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta chọn B.

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2; +\infty)$

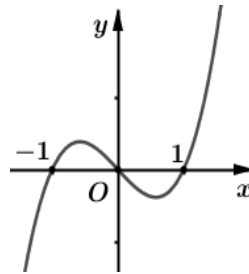
● $x \in (2; +\infty) \rightarrow x > 0$. (1)

● $x \in (2; +\infty) \rightarrow x^2 > 4$. Với $x^2 > 4 \xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(x^2) > 0$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x) = 2xf'(x^2) > 0$ trên khoảng $(2; +\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu $+$.

Nhận thấy các nghiệm của $g'(x)$ là nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(x^3)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 1)$.

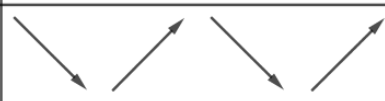
C. $(1; +\infty)$.

D. $(0; 1)$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 3x^2 f'(x^3)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ f'(x^3) = 0 \end{cases} \xleftarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^3 = 0 \\ x^3 = -1 \\ x^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
g						

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn C**.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$

nư hình bên. Đặt $g(x) = f(x^2 - 2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

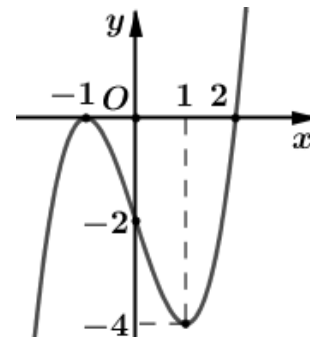
A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

B. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 0)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 - 2)$;



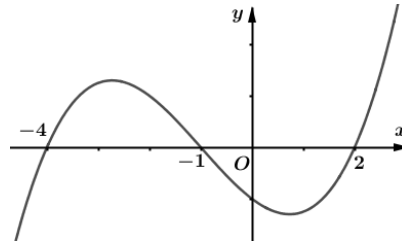
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 2) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = -1 \text{ (nghiệm kép)} \\ x^2 - 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2		-1		0		1		2		$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
g												

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn C**.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 5)$ có bao nhiêu khoảng nghịch biến ?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 - 5)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 5) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 5 = -4 \\ x^2 - 5 = -1 \\ x^2 - 5 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{7}$	-2	-1	0	1	2	$\sqrt{7}$	$+\infty$		
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g											

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn C**.

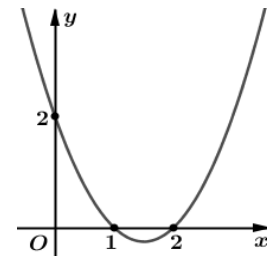
Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(1 - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(1; 2)$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(-1; 1)$.



Lời giải. Ta có $g'(x) = -2xf'(1 - x^2)$. Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x > 0 \\ f'(1 - x^2) < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} -2x < 0 \\ f'(1 - x^2) > 0 \end{cases}$.

- Trường hợp 1: $\begin{cases} -2x > 0 \\ f'(1-x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 1 < 1-x^2 < 2 : \text{vô nghiệm} \end{cases}$
- Trường hợp 2: $\begin{cases} -2x < 0 \\ f'(1-x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1-x^2 < 1 \vee 1-x^2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$. **Chọn B.**

Cách 2. Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(1-x^2) = 0 \end{cases} \xleftarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \begin{cases} x = 0 \\ 1-x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0. \\ 1-x^2 = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g			

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn B.**

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x = 1 \in (0; +\infty)$.

- $x = 1 \longrightarrow -2x < 0$. (1)
- $x = 1 \rightarrow 1-x^2 = 0 \longrightarrow f'(1-x^2) = f'(0) \xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(0) = 2 > 0$. (2)

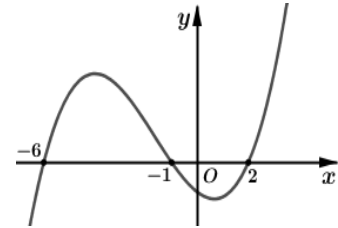
Từ (1) và (2), suy ra $g'(1) < 0$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Nhận thấy nghiệm của $g'(x) = 0$ là nghiệm đơn nên qua nghiệm đổi dấu.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(3-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(2;3)$.
- C. $(0;1)$.

- B. $(-2;-1)$.
- D. $(-1;0)$.



Lời giải. Ta có $g'(x) = -2xf'(3-x^2)$. Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f'(3-x^2) < 0 \end{cases}$

$$\xleftarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \begin{cases} 3-x^2 < -6 \\ -1 < 3-x^2 < 2 \end{cases} \\ x < 0 \\ \begin{cases} -6 < 3-x^2 < -1 \\ 3-x^2 > 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \begin{cases} x^2 > 9 \\ 4 > x^2 > 1 \end{cases} \\ x < 0 \\ \begin{cases} 4 < x^2 < 9 \\ x^2 < 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 2 > x > 1 \\ -3 < x < -2 \\ -1 < x < 0 \end{cases} \cdot \text{Chọn D.}$$

Cách 2. Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(3-x^2) = 0 \end{cases} \xleftarrow{\text{theo do thi } f'(x)} \begin{cases} x = 0 \\ 3-x^2 = -6 \\ 3-x^2 = -1 \\ 3-x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

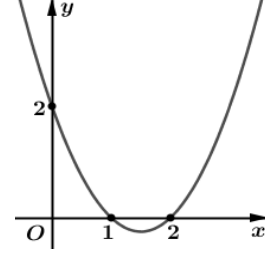
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
g									

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn D**.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = f(x - x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(1; 2)$. B. $(-\infty; 0)$.
C. $(-\infty; 2)$. D. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.



Lời giải. Ta có $g'(x) = (1 - 2x)f'(x - x^2)$.

$$\text{Hàm số } g(x) \text{ nghịch biến} \Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x < 0 \\ f'(x - x^2) > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1 - 2x > 0 \\ f'(x - x^2) < 0 \end{cases}$$

- Trường hợp 1: $\begin{cases} 1 - 2x < 0 \\ f'(x - x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x - x^2 < 1 \vee x - x^2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.
- Trường hợp 2: $\begin{cases} 1 - 2x > 0 \\ f'(x - x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 1 < x - x^2 < 2 \end{cases}$: vô nghiệm

Kết hợp hai trường hợp ta được $x > \frac{1}{2}$. **Chọn D**.

Cách 2. Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 0 \\ f'(x - x^2) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x - x^2 = 1 : \text{vô nghiệm} \\ x - x^2 = 2 : \text{vô nghiệm} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

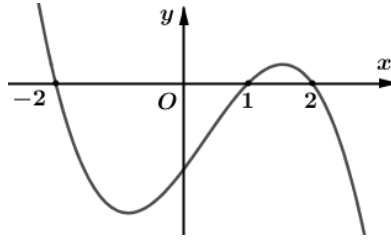
x	$-\infty$	$0,5$	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g			

Cách 3. Vì $x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} f'(x - x^2) > 0$.

Suy ra dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của $1 - 2x$.

Yêu cầu bài toán cần $g'(x) < 0 \longrightarrow 1 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f(-2) = f(2) = 0$



Hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. B. $(-2; -1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+	0	-
y	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$\searrow$ $y(1)$	$\nearrow$ 0	$\searrow$ $-\infty$		

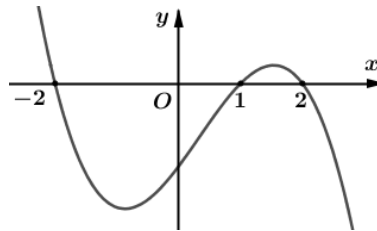
Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = 2f'(x) \cdot f(x)$.

$$\text{Xét } g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ 1 < x < 2 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(1; 2)$. **Chọn D.**

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-2) = f(2) = 0$.



Hàm số $g(x) = [f(3-x)]^2$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-2; -1)$. B. $(1; 2)$. C. $(2; 5)$. D. $(5; +\infty)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$y(1)$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$

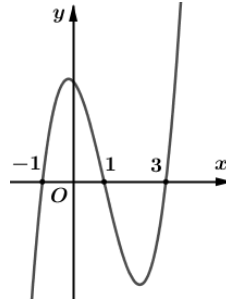
Từ bảng biến thiên suy ra $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = -2f'(3-x) \cdot f(3-x)$.

$$\text{Xét } g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-x) \cdot f(3-x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(3-x) < 0 \\ f(3-x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < 3-x < 1 \\ 3-x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 5 \\ x < 1 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(2; 5)$. **Chọn C.**

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A.** $(-\infty; -1 - 2\sqrt{2})$. **B.** $(-\infty; 1)$. **C.** $(1; 2\sqrt{2} - 1)$. **D.** $(2\sqrt{2} - 1; +\infty)$.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2});$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2}) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (nghiệm loại ba)} \\ x = -1 - 2\sqrt{2} \\ x = -1 + 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

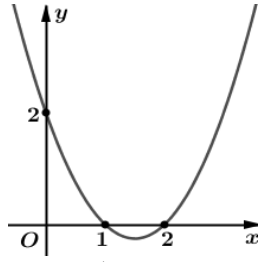
Lập bảng biến thiên và ta **chọn A.**

Chú ý: Cách xét dấu $g'(x)$ như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(-1; -1 + 2\sqrt{2})$ ta chọn $x = 0$. Khi

$$\text{đó } g'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} f'(\sqrt{2}) < 0 \text{ vì dựa vào đồ thị } f'(x) \text{ ta thấy tại } x = \sqrt{2} \in (1; 3) \text{ thì } f'(\sqrt{2}) < 0.$$

Các nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là nghiệm bội lẻ nên qua nghiệm đổi dấu.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2})$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-\infty; \frac{1}{2})$. C. $(\frac{1}{2}; +\infty)$. D. $(-1; +\infty)$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = (x+1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \right) f'(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2})$.

• $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. (1)

• $0 < u = \sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + 2} + \sqrt{(x+1)^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2} + 1} < 1$

$\xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} f'(u) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra dấu của $g'(x)$ phụ thuộc vào dấu của nhị thức $x+1$ (ngược dấu)

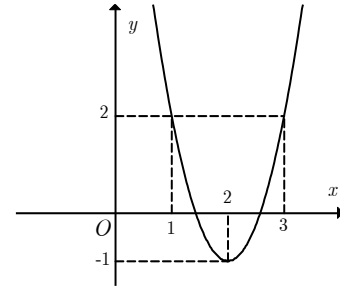
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g'	$+$	0	$-$
g			

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn A**.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $g(x) = f'(x-2) + 2$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

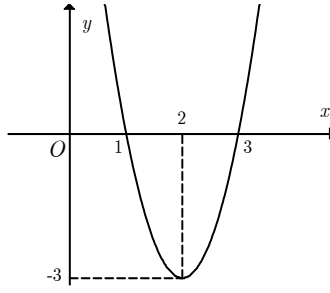
- A. $(-1; 1)$. B. $(\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$.
C. $(-\infty; 2)$. D. $(2; +\infty)$.



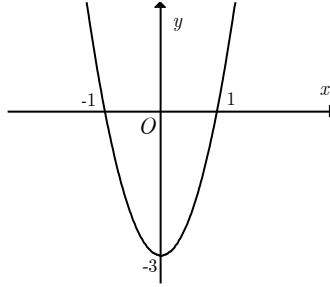
Lời giải. Dựa vào đồ thị ta có $f'(x-2) + 2 < 2 \iff 1 < x < 3$.

Đặt $t = x - 2$, ta được $f'(t) + 2 < 2 \iff 1 < t + 2 < 3$ hay $f'(t) < 0 \iff -1 < t < 1$. **Chọn A.**

Cách khác. Từ đồ thị hàm số $f'(x-2) + 2$ tịnh tiến xuống dưới 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $f'(x-2)$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).



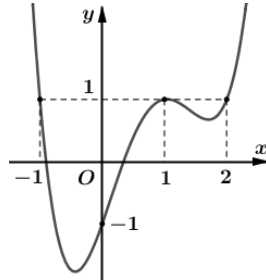
Tiếp tục tịnh tiến đồ thị hàm số $f'(x-2)$ sang trái 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $f'(x)$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Từ đồ thị hàm số $f'(x)$, ta thấy $f'(x) < 0$ khi $x \in (-1; 1)$.

Vấn đề 2. Cho đồ thị $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)] + g(x)$.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới

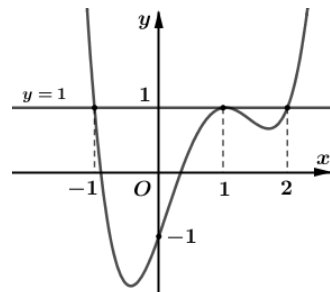


Đặt $g(x) = f(x) - x$, khẳng định nào sau đây là đúng ?

- A. $g(2) < g(-1) < g(1)$. B. $g(-1) < g(1) < g(2)$.
C. $g(-1) > g(1) > g(2)$. D. $g(1) < g(-1) < g(2)$.

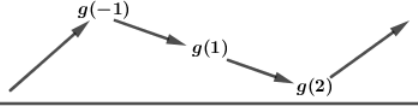
Lời giải. Ta có $g'(x) = f'(x) - 1 \longrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$.

Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $d: y = 1$ (như hình vẽ bên dưới).



Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

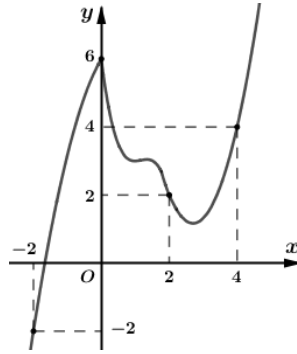
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
g'	+	0	-	0	-	0	+
g							

Dựa vào bảng biến thiên $\longrightarrow g(2) < g(-1) < g(1)$. **Chọn C.**

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2; +\infty)$, ta thấy đồ thị hàm số nằm phía trên đường thẳng $y = 1$ nên $g'(x) = f'(x) - 1$ mang dấu +.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây ?

A. $(-\infty; -2)$.

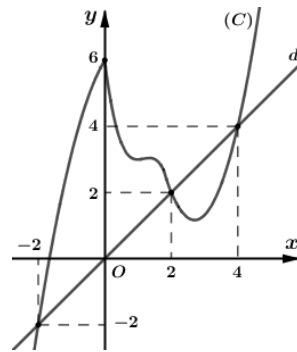
B. $(-2; 2)$.

C. $(2; 4)$.

D. $(2; +\infty)$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2x \longrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x$.

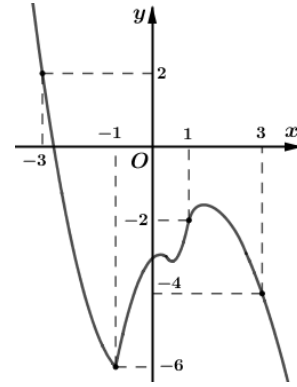
Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $d: y = x$ (như hình vẽ bên dưới).



Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$.

Lập bảng biến thiên (hoặc ta thấy với $x \in (-2; 2)$ thì đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y = x$ nên $g'(x) > 0$) $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(-2; 2)$. **Chọn B.**

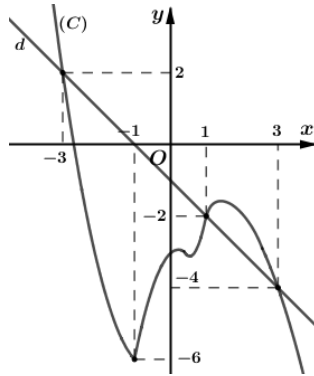
Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hỏi hàm số $g(x) = 2f(x) + (x+1)^2$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?



- A. $(-3;1)$.
- B. $(1;3)$.
- C. $(-\infty;3)$.
- D. $(3;+\infty)$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2f'(x) + 2(x+1) \longrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x-1$.

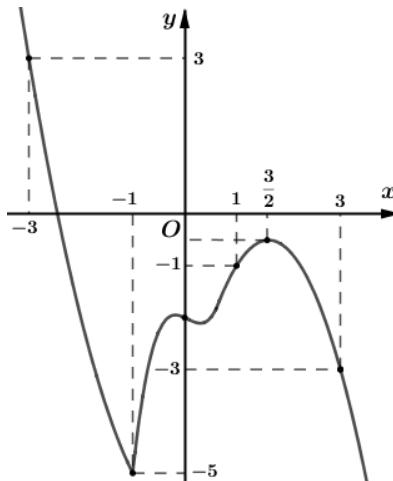
Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $d: y = -x-1$ (như hình vẽ bên dưới).



Dựa vào đồ thị, suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ 1 < x < 3 \end{cases}$ (vì phần đồ thị của $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y = -x-1$). Đối chiếu các đáp án ta thấy đáp án B thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hỏi hàm số $g(x) = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-3;1)$.

B. $(-2;0)$.

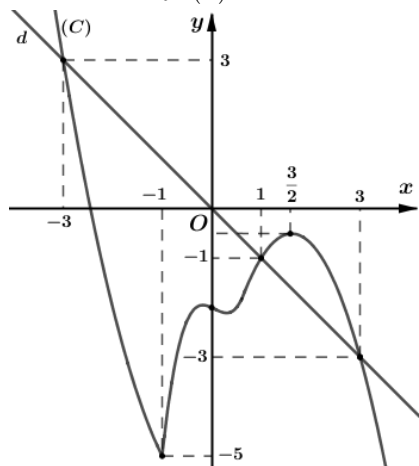
C. $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$.

D. $(1;3)$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = -f'(1-x) + x - 1$.

Để $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(1-x) > x - 1$. Đặt $t = 1 - x$, bất phương trình trở thành $f'(t) > -t$.

Kẻ đường thẳng $y = -x$ cắt đồ thị hàm số $f'(x)$ lần lượt tại ba điểm $x = -3$; $x = -1$; $x = 3$.



Quan sát đồ thị ta thấy bất phương trình $f'(t) > -t \Leftrightarrow \begin{cases} t < -3 \\ 1 < t < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x < -3 \\ 1 < 1 - x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ -2 < x < 0 \end{cases}$.

Đối chiếu đáp án ta **chọn B**.

Vấn đề 3. Cho bảng biến thiên $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Hàm số $g(x) = f\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $\left(-1;\frac{1}{4}\right)$.

B. $\left(\frac{1}{4};1\right)$.

C. $\left(1;\frac{5}{4}\right)$.

D. $\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$.

Lời giải. Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 3 \end{cases}$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3$.

Ta có $g'(x) = \left(4x - \frac{5}{2}\right)f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right)$. Xét $g'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{5}{2} > 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) < 0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} 4x - \frac{5}{2} < 0 \\ f'\left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \begin{cases} 4x - \frac{5}{2} > 0 \\ f' \left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{8} \\ -2 < 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{9}{4}. \\
& \bullet \begin{cases} 4x - \frac{5}{2} < 0 \\ f' \left(2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} \right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5}{8} \\ 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} > 3 \\ x < \frac{5}{8} \\ 2x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ \frac{1}{4} < x < \frac{5}{8} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Đối chiếu các đáp án, ta **chọn C**.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ

x	-1	0	1	2	3
$f'(x)$	3	1	-1	2	4

Hàm số $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-4; -2)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(2; 4)$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = -\frac{1}{2}f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 1$. Xét $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 2$

• TH1: $f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 2 \Leftrightarrow 2 < 1 - \frac{x}{2} < 3 \Leftrightarrow -4 < x < -2$. Do đó hàm số nghịch biến trên $(-4; -2)$.

• TH2: $f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) > 2 \Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{x}{2} < a < 0 \Leftrightarrow 2 < 2 - 2a < x < 4$ nên hàm số chỉ nghịch biến trên khoảng $(2 - 2a; 4)$ chứ không nghịch biến trên toàn khoảng $(2; 4)$.

Vậy hàm số $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + x$ nghịch biến trên $(-4; -2)$. **Chọn A.**

Chú ý: Từ trường hợp 1 ta có thể chọn đáp án A nhưng cứ xét tiếp trường hợp 2 xem thử.

Vấn đề 4. Cho biểu thức $f'(x)$. Hỏi khoảng đơn điệu của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 4x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

A. $(-\infty; -6)$.

B. $(-6; 6)$.

C. $(-6\sqrt{2}; 6\sqrt{2})$.

D. $(-6\sqrt{2}; +\infty)$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = -\frac{1}{2}f'\left(1 - \frac{x}{2}\right) + 4 = -\frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{x}{2}\right)\right] + 4 = \frac{9}{2} - \frac{x^2}{8}$.

Xét $\frac{9}{2} - \frac{x^2}{8} > 0 \Leftrightarrow x^2 < 36 \longrightarrow -6 < x < 6$. **Chọn B.**

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-2; 2)$. B. $(-\infty; -3)$. C. $(-\infty; -3) \cup (0; 3)$. D. $(3; +\infty)$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2) = 2x^5(x^2-9)(x^2-4)^2$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^5(x^2-9)(x^2-4)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3. \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3		-2		0		2		3		$+\infty$
g'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
g												

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn D.**

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hỏi số thực nào dưới đây thuộc khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = f(x^2-2x+2)$?

- A. -2 . B. -1 . C. $\frac{3}{2}$. D. 3 .

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2(x-1)f'(x^2-2x+2)$

$$\begin{aligned} &= 2(x-1) \left[(x^2-2x+2-1)^2 \left((x^2-2x+2)^2 - 2(x^2-2x+2) \right) \right] \\ &= 2(x-1)^5 \left[(x-1)^4 - 1 \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Xét } 2(x-1)^5 \left[(x-1)^4 - 1 \right] > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x > 2 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $(0; 1)$, $(2; +\infty)$.

Vậy số 3 thuộc khoảng đồng biến của hàm số $g(x)$. **Chọn B.**

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; 1)$. C. $(0; 2)$. D. $(2; 4)$.

$$\text{Lời giải. Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Xét } g'(x) = \frac{20-5x^2}{(x^2+4)^2} f'\left(\frac{5x}{x^2+4}\right); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 20-5x^2 = 0 \\ \frac{5x}{x^2+4} = 0 \\ \frac{5x}{x^2+4} = 1 \\ \frac{5x}{x^2+4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 0 \\ x = 1 \text{ (ngheem boi chan)} \\ x = 4 \text{ (ngheem boi chan)} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2		0		1		2		4		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
g												

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn D**.

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(4; +\infty)$ ta chọn $x = 5$

$$\bullet \quad x = 5 \rightarrow \frac{20-5x^2}{(x^2+4)^2} < 0. \quad (1)$$

$$\bullet \quad x = 5 \rightarrow \frac{5x}{x^2+4} = \frac{25}{29} \rightarrow f'\left(\frac{25}{29}\right) = \frac{25}{29} \left(\frac{25}{29} - 1\right) \left(\frac{25}{29} - 2\right) < 0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x) > 0$ trên khoảng $(4; +\infty)$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-4).t(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $t(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; -1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(1; 2)$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$.

Theo giả thiết $f'(x) = x^2(x-1)(x-4).t(x) \rightarrow f'(x^2) = x^4(x^2-1)(x^2-4).t(x^2)$.

Từ đó suy ra $g'(x) = 2x^5(x^2-1)(x^2-4).t(x^2)$.

Mà $t(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow t(x^2) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của $g'(x)$ cùng dấu $2x^5(x^2-1)(x^2-4)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2		-1		0		1		2		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g												

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn B**.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (1-x)(x+2).t(x) + 2018$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $t(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(1-x) + 2018x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau ?

- A. $(-\infty; 3)$. B. $(0; 3)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(3; +\infty)$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = -f'(1-x) + 2018$.

Theo giả thiết $f'(x) = (1-x)(x+2).t(x) + 2018 \longrightarrow f'(1-x) = x(3-x).t(1-x) + 2018$.

Từ đó suy ra $g'(x) = -x(3-x).t(1-x)$.

Mà $t(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow -t(1-x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của $g'(x)$ cùng dấu với $x(3-x)$.

Lập bảng xét dấu cho biểu thức $x(3-x)$, ta kết luận được hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0), (3; +\infty)$. **Chọn D.**

Vấn đề 5. Cho biểu thức $f'(x, m)$. Tìm m để hàm số $f[u(x)]$ đồng biến, nghịch biến.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m < 100$ để hàm số $g(x) = f(x^2-8x+m)$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$?

A. 18.

B. 82.

C. 83.

D. 84.

Lời giải. Ta có $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 2 \end{cases}$.

Xét $g'(x) = (2x-8).f'(x^2-8x+m)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x > 4$

$$\Leftrightarrow (2x-8).f'(x^2-8x+m) \geq 0, \forall x > 4$$

$$\Leftrightarrow f'(x^2-8x+m) \geq 0, \forall x > 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8x+m \leq 0, \forall x \in (4; +\infty) \\ x^2-8x+m \geq 2, \forall x \in (4; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 18.$$

Vậy $18 \leq m < 100$. **Chọn B.**

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x^2+mx+9)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x) = f(3-x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$?

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 8.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $f'(3-x) = (3-x)(2-x)^2[(3-x)^2+m(3-x)+9]$.

Ta có $g'(x) = -f'(3-x)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (3; +\infty)$

$$\Leftrightarrow f'(3-x) \leq 0, \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow (3-x)(2-x)^2[(3-x)^2+m(3-x)+9] \leq 0, \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{(x-3)^2+9}{x-3}, \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{(3; +\infty)} h(x) \text{ với } h(x) = \frac{(x-3)^2+9}{x-3}.$$

$$\text{Ta có } h(x) = \frac{(x-3)^2+9}{x-3} = (x-3) + \frac{9}{x-3} \geq 2\sqrt{(x-3) \cdot \frac{9}{x-3}} = 6.$$

Vậy suy ra $m \leq 6 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+} m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. **Chọn B.**

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x^2+mx+5)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 7.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $f'(x^2) = x^4(x^2 - 1)(x^4 + mx^2 + 5)$.

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$.

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 2xf'(x^2) \geq 0, \forall x > 1$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot x^4(x^2 - 1)(x^4 + mx^2 + 5) \geq 0, \forall x > 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 + mx^2 + 5 \geq 0, \forall x > 1$$

$$\Leftrightarrow m \geq -\frac{x^4 + 5}{x^2}, \forall x > 1$$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{(1; +\infty)} h(x) \text{ với } h(x) = -\frac{x^4 + 5}{x^2}.$$

Khảo sát hàm $h(x) = -\frac{x^4 + 5}{x^2}$ trên $(1; +\infty)$ ta được $\max_{(1; +\infty)} h(x) = -2\sqrt{5}$.

Suy ra $m \geq -2\sqrt{5} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^-} m \in \{-4; -3; -2; -1\}$. **Chọn B.**

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(3x^4 + mx^3 + 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $f'(x^2) = x^2(x^2 - 1)^2(3x^8 + mx^6 + 1)$.

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2)$. Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$g'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 2xf'(x^2) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot x^2(x^2 - 1)^2(3x^8 + mx^6 + 1) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 3x^8 + mx^6 + 1 \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \geq -\frac{3x^8 + 1}{x^6}, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{(0; +\infty)} h(x) \text{ với } h(x) = -\frac{3x^8 + 1}{x^6}.$$

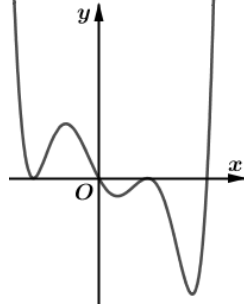
Khảo sát hàm $h(x) = -\frac{3x^8 + 1}{x^6}$ trên $(0; +\infty)$ ta được $\max_{(0; +\infty)} h(x) = -4$.

Suy ra $m \geq -4 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^-} m \in \{-4; -3; -2; -1\}$. **Chọn B.**

Phần 2. Cực trị của hàm số

Vấn đề 1. Cho đồ thị $f'(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 1. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị hàm số $y = f'(x)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là



A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải. Ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ có 4 điểm chung với trục hoành $x_1; 0; x_2; x_3$ nhưng chỉ cắt thực sự tại hai điểm là 0 và x_3 .

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	x_3	$+\infty$	
f'	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f							

Vậy hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị. **Chọn A.**

Cách trắc nghiệm. Ta thấy đồ thị của $f'(x)$ có 4 điểm chung với trục hoành nhưng cắt và băng qua luôn trục hoành chỉ có 2 điểm nên có hai cực trị.

- Cắt và băng qua trục hoành từ trên xuống thì đó là điểm cực đại.
- Cắt và băng qua trục hoành từ dưới lên thì đó là điểm cực tiểu.

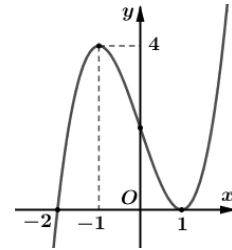
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$.

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



Lời giải. Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 - 3)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \text{ (nhị nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \text{ (nhị nghiệm)} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
g'	-	0	-	0	+	0	+
g	$\searrow \nearrow \searrow \nearrow$						

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn B.**

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(2; +\infty)$

• $x \in (2; +\infty) \rightarrow x > 0.$ (1)

• $x \in (2; +\infty) \rightarrow x^2 > 4 \rightarrow x^2 - 3 > 1 \xrightarrow{\text{theo do thi } f'(x)} f'(x^2 - 3) > 0.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x) = 2xf'(x^2 - 3) > 0$ trên khoảng $(2; +\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu +.

Nhận thấy các nghiệm $x = \pm 1$ và $x = 0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu; các nghiệm $x = \pm 2$ là nghiệm bội chẵn (lí do dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1) nên qua nghiệm không đổi dấu.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $y = f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2		1		3		$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Ta có $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x);$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{theo BBT } f'(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = 1 \text{ (ngiem kép)} \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \text{ (ngiem kép)} \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		$1 - \sqrt{2}$		1		$1 + \sqrt{2}$		3		$+\infty$
g'	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
g												

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn A.**

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(3; +\infty)$

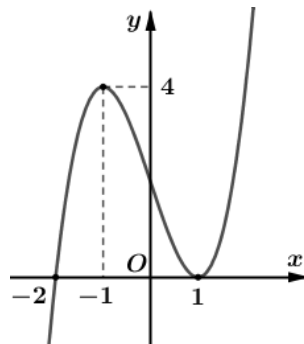
• $x \in (3; +\infty) \rightarrow 2x - 2 > 0.$ (1)

• $x \in (3; +\infty) \rightarrow x^2 - 2x > 3 \xrightarrow{\text{theo BBT } f'(x)} f'(x^2 - 2x) < 0.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x) < 0$ trên khoảng $(3; +\infty)$ nên $g'(x)$ mang dấu -.

Nhận thấy các nghiệm $x = \pm 1$ và $x = 3$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) < 0$, đồng thời đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f^2(x)$ là

A. 1.

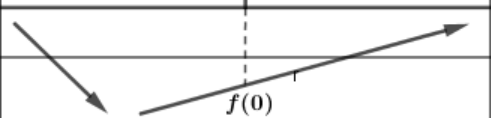
B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$ (nghiem kép).

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-2		0		1		$+\infty$	
f'		$-$	0	$+$		$+$	0	$+$	
f									$y = 0$

Xét $g'(x) = 2f'(x)f(x)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{theo BBT } f(x)} \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \text{ (nghiem kép)} \\ x = a (a < -2) \\ x = b (b > 0) \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	a	-2	b	$+\infty$		
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g							

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị. **Chọn C.**

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x = 0 \in (-1; b)$

• $x = 0 \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} f'(0) > 0.$ (1)

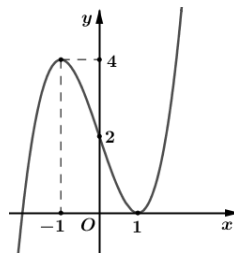
• Theo giả thiết $f(0) < 0.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(0) < 0$ trên khoảng $(-1; b)$.

Nhận thấy $x = -2$; $x = a$; $x = b$ là các nghiệm đơn nên $g'(x)$ đổi dấu khi qua các nghiệm này.

Nghiệm $x = 1$ là nghiệm kép nên $g'(x)$ không đổi dấu khi qua nghiệm này, trong bảng biến thiên ta bỏ qua nghiệm $x = 1$ vẫn không ảnh hưởng đến quá trình xét dấu của $g'(x)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x - 2017) - 2018x + 2019$ là

A. 1.

B. 2.

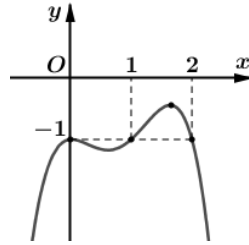
C. 3.

D. 4.

Lời giải. Ta có $g'(x) = f'(x - 2017) - 2018$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x - 2017) = 2018.$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra phương trình $f'(x - 2017) = 2018$ có 1 nghiệm đơn duy nhất. Suy ra hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + x$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây ?



A. $x = 0$.

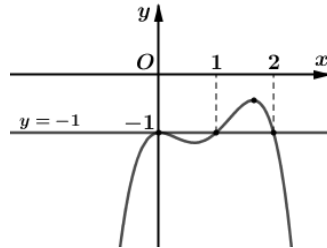
B. $x = 1$.

C. $x = 2$.

D. Không có điểm cực tiểu.

Lời giải. Ta có $g'(x) = f'(x) + 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = -1$.

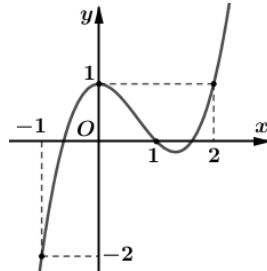


Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Lập bảng biến thiên cho hàm $g(x)$ ta thấy $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$. **Chọn B.**

Chú ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty; 0)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía dưới đường $y = -1$ nên $g'(x)$ mang dấu $-$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$ đạt cực đại tại

A. $x = -1$.

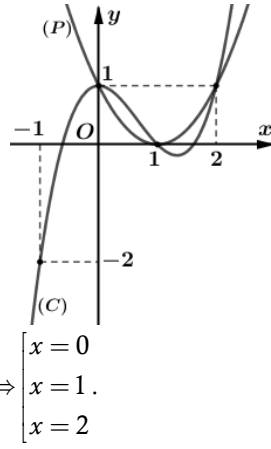
B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = f'(x) - x^2 + 2x - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = (x - 1)^2$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và parabol $(P): y = (x - 1)^2$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

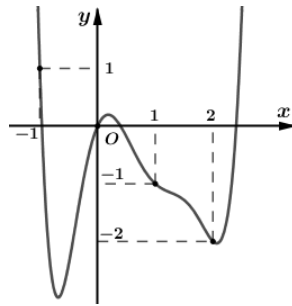
x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$			
g'	-	0	+	0	-	0	+	
g								

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$. **Chọn C.**

Chú ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty; 0)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y = (x-1)^2$ nên $g'(x)$ mang dấu $-$.

Nhận thấy các nghiệm $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$ là các nghiệm đơn nên qua nghiệm $g'(x)$ đổi dấu.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2$ đạt cực tiểu tại điểm



A. $x = -1$.

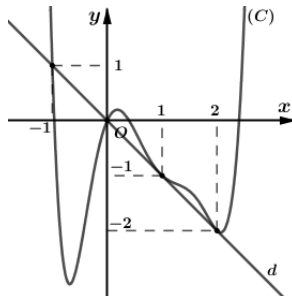
B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2f'(x) + 2x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = -x$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

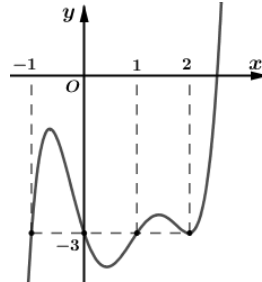
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		0		1		2		$+\infty$
g'	+	0	-	0	+	0	+	0	+	
g										

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$. **Chọn B.**

Chú ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty; -1)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y = -x$ nên $g'(x)$ mang dấu $+$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = f(x) + 3x$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 2.

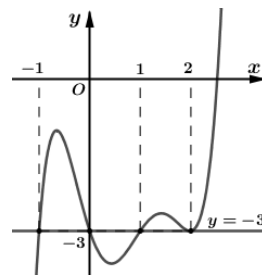
B. 3.

C. 4.

D. 7.

Lời giải. Ta có $g'(x) = f'(x) + 3$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3$.

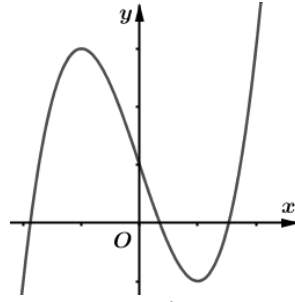
Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = -3$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$. Ta thấy $x = -1, x = 0, x = 1$ là các nghiệm đơn

và $x = 2$ là nghiệm kép nên đồ thị hàm số $g(x) = f(x) + 3x$ có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Hỏi hàm số $g(x) = f(|x|) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải. Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm)

→ $f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

→ $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

→ $f(|x|) + 2018$ có 5 điểm cực trị với mọi m (vì tịnh tiến lên trên hay xuống dưới không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số). **Chọn C.**

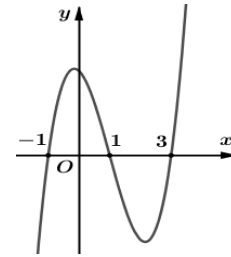
Câu 11. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



Lời giải. Ta có $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$.

$$\text{Suy ra } g'(x) = 0 \begin{cases} x+1=0 \\ f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2}) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f'(x)} \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = -1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 + \sqrt{2} \\ x = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu

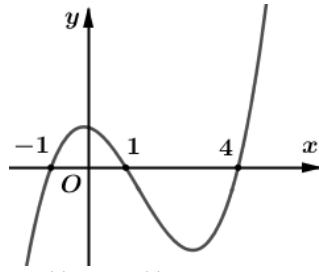
x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	-1	$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$			
g'		-	0	+	0	-	0	+

Từ đó suy ra hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ có 1 điểm cực đại. **Chọn A.**

Chú ý: Cách xét dấu $-$ hay $+$ của $g'(x)$ để cho nhanh nhất ta lấy một giá trị x_0 thuộc khoảng đang xét rồi thay vào $g'(x)$. Chẳng hạn với khoảng $(-1; -1 + \sqrt{2})$ ta chọn

$$x_0 = 0 \rightarrow g'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} f'(\sqrt{2}) < 0 \text{ vì dựa vào đồ thị ta thấy } f'(\sqrt{2}) < 0.$$

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

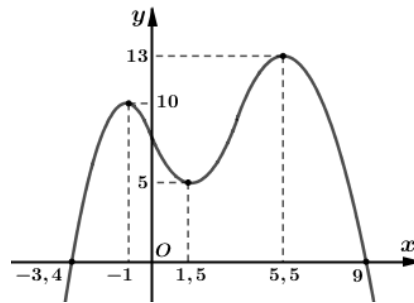
Lời giải. Ta thấy đồ thị của hàm số $f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt, suy ra hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

$$\text{Ta có } g'(x) = 2f'(x) \cdot e^{2f(x)+1} + f'(x) \cdot 5^{f(x)} \cdot \ln 5 = f'(x) \cdot (2e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)} \cdot \ln 5).$$

Vì $2e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)} \cdot \ln 5 > 0$ với mọi x nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$.

Suy ra số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $f(x)$. **Chọn C.**

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$. Đặt $g(x) = f(x) - mx + 5$. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để hàm số $g(x)$ có đúng hai điểm cực trị ?



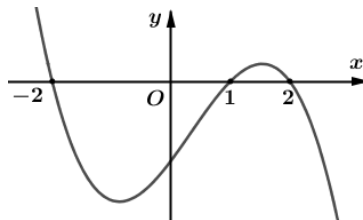
- A. 4. B. 7. C. 8. D. 9.

Lời giải. Ta có $g'(x) = f'(x) - m$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) - m = 0 \Leftrightarrow f'(x) = m$.

Để hàm số $g(x)$ có đúng hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $g'(x) = 0$ có hai nghiệm

$$\text{bội lẻ phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ 10 \leq m < 13 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+} m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 10; 11; 12\}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị ?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.

Lời giải. Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta thấy $f'(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ dương (và 1 điểm có hoành độ âm)

$\longrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

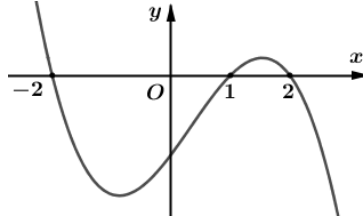
—→ $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

—→ $f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị với mọi m (vì tịnh tiến sang trái hay sang phải không ảnh hưởng đến số điểm cực trị của hàm số). **Chọn D.**

Chú ý: Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ có được bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến.

Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ có được bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có 5 điểm cực trị ?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. Vô số.

Lời giải. Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$. Suy ra bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+	0	-
f							

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x+m)$ có 2 điểm cực trị dương (vì khi đó lấy đối xứng qua Oy ta được đồ thị hàm số $f(|x|+m)$ có đúng 5 điểm cực trị).

Từ bảng biến thiên của $f(x)$, suy ra $f(x+m)$ luôn có 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow$ tịnh tiến $f(x)$ (sang trái hoặc sang phải) phải thỏa mãn

- Tịnh tiến sang trái nhỏ hơn 1 đơn vị $\rightarrow m < 1$.
- Tịnh tiến sang phải không vượt quá 2 đơn vị $\rightarrow m \geq -2$.

Suy ra $-2 \leq m < 1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2; -1; 0\}$. **Chọn B.**

Vấn đề 2. Cho biểu thức $f'(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(3-x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại

A. $x = 0$.

B. $x = 1$.

C. $x = 2$.

D. $x = 3$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
f'	-	0	+	0	-
f					

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 3$. **Chọn D.**

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)^2(x-2) + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x) - x$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Ta có $g'(x) = f'(x) - 1 = (x+1)(x-1)^2(x-2)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Ta thấy } x = -1 \text{ và } x = 2 \text{ là các nghiệm đơn}$$

còn $x = 1$ là nghiệm kép $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có bao nhiêu điểm cực đại ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. Ta có $g'(x) = -f'(3 - x) = -[(3 - x)^2 - 1][4 - (3 - x)] = (2 - x)(4 - x)(x + 1)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (2 - x)(4 - x)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$. **Chọn B.**

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x - 1)(x - 4)^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2) = 2x^5(x^2 - 1)(x^2 - 4)^2$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^5(x^2 - 1)(x^2 - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ (x - 2)^2(x + 2)^2 = 0 \end{cases}.$$

Ta thấy $x = \pm 1$ và $x = 0$ là các nghiệm bội lẻ $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2(x - 4)f'(x^2 - 8x) = 2(x - 4)[(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x)]$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x - 4)[(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \\ x^2 - 2x = 0 \\ x^2 - 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta thấy $x = 1 \pm \sqrt{3}$, $x = 0$, $x = 2$ và $x = 4$ đều là các nghiệm đơn $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 3 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x).f'''(x) = x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = [f'(x)]^2 - 2f(x).f''(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 6.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2f''(x)f'(x) - 2f'(x).f''(x) - 2f(x).f'''(x) = -2f(x).f'''(x)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x).f'''(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2(x+4)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \\ x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -4 \end{cases}.$$

Ta thấy $x = 0$ và $x = -4$ là các nghiệm đơn $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(x).f'(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Ta có $g'(x) = [f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 15x^4 + 12x$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^4 + 12x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{-\frac{4}{5}} \end{cases}.$$

Nhận thấy $x = 0$ và $x = \sqrt[3]{-\frac{4}{5}}$ là các nghiệm bội lẻ $\longrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Chọn B.

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|)$ là

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

$$\text{Lời giải. Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^4(x-2)^5(x+3)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Do $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x đi qua $x = -3$ và $x = 2$

$\longrightarrow$ hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị $x = -3$ và $x = 2$ trong đó chỉ có 1 điểm cực trị dương

$\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị (cụ thể là $x = -2$; $x = 0$; $x = 2$ do tính đối xứng của hàm số chẵn $f(|x|)$). **Chọn B.**

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)^4(x^2-4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|)$ là

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

$$\text{Lời giải. Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^4(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Do $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua các điểm $x = 1$; $x = \pm 2$

$\longrightarrow$ hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị nhưng chỉ có 2 điểm cực trị dương là $x = 1$ và $x = 2$

—→ hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị (cụ thể là $x = \pm 2; x = \pm 1; x = 0$ do tính đối xứng của hàm số chẵn $f(|x|)$). **Chọn C.**

Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^4(x^2+4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|)$ là

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 5.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+2)^4(x^2+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Do $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x đi qua điểm $x = 0 \in Oy$

—→ hàm số $f(x)$ có 1 điểm cực trị $x = 0 \in Oy$

—→ hàm số $f(|x|)$ có 1 điểm cực trị (cụ thể là $x = 0$ do tính đối xứng của hàm số chẵn $f(|x|)$). **Chọn B.**

Vấn đề 3. Cho biểu thức $f'(x, m)$. Tìm m để hàm số $f[u(x)]$ có n điểm cực trị

Câu 26. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m > -10$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

Lời giải. Do tính chất đối xứng qua trục Oy của đồ thị hàm số $f(|x|)$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương. (*)

$$\text{Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x+1 = 0 \\ x^2+2mx+5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x^2+2mx+5 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow (1) \text{ có hai nghiệm dương phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 5 > 0 \\ S = -2m > 0 \\ P = 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -\sqrt{5}$$

$$\xrightarrow[m \in \mathbb{Z}]{m > -10} m \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3\}. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2+m^2-3m-4)^3(x+3)^5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

$$\text{Lời giải. Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ x^2+m^2-3m-4 = 0 \\ x+3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \\ x^2+m^2-3m-4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow (1) \text{ có hai nghiệm trái dấu } \Leftrightarrow m^2-3m-4 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 4$$

$$\xrightarrow[m \in \mathbb{Z}]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 1; 2; 3\}. \text{ **Chọn B.**}$$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^4(x-m)^5(x+3)^3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải. Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x-m=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \text{ (nhìm boi 4)} \\ x=m \text{ (nhìm boi 5)} \\ x=-3 \text{ (nhìm boi 3)} \end{cases}.$

- Nếu $m = -1$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị âm ($x = -3; x = -1$). Khi đó, hàm số $f(|x|)$ chỉ có 1 cực trị là $x = 0$. Do đó, $m = -1$ không thỏa yêu cầu đề bài.
- Nếu $m = -3$ thì hàm số $f(x)$ không có cực trị. Khi đó, hàm số $f(|x|)$ chỉ có 1 cực trị là $x = 0$. Do đó, $m = -3$ không thỏa yêu cầu đề bài.
- Khi $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -3 \end{cases}$ thì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị là $x = m$ và $x = -3 < 0$.

Để hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $f(x)$ phải có hai điểm cực trị trái dấu
 $\Leftrightarrow m > 0 \xrightarrow[m \in [-5; 5]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. **Chọn C.**

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 1 điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải. Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x+1 = 0 \\ x^2+2mx+5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x^2+2mx+5 = 0 \end{cases} \quad (1)$

Theo yêu cầu bài toán ta suy ra

Trường hợp 1. Phương trình (1) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 5 > 0 \\ S = -2m < 0 \\ P = 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \sqrt{5}.$

Trường hợp này không có giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2. Phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 5 \leq 0$
 $\Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq m \leq \sqrt{5} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^-} m \in \{-2; -1\}$. **Chọn A.**

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 15.

B. 16.

C. 17.

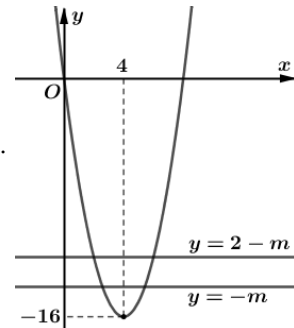
D. 18.

Lời giải. Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nhìm boi 2)} \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$

Ta có $g'(x) = 2(x-4)f'(x^2-8x+m)$;

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-4)f'(x^2-8x+m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2-8x+m = 1 \text{ (nhìm boi 2)} \\ x^2-8x+m = 0 \quad (1) \\ x^2-8x+m = 2 \quad (2) \end{cases}.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow$ mỗi phương trình (1), (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 4. (*)



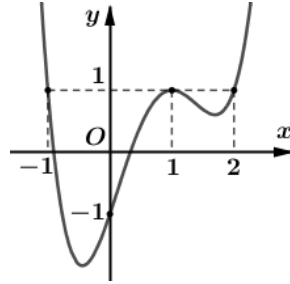
Xét đồ thị (C) của hàm số $y = x^2 - 8x$ và hai đường thẳng $d_1: y = -m$, $d_2: y = -m + 2$ (như hình vẽ).

Khi đó (*) $\Leftrightarrow d_1, d_2$ cắt (C) tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow -m > -16 \Leftrightarrow m < 16$.

Vậy có 15 giá trị m nguyên dương thỏa. **Chọn A.**

Vấn đề 4. Cho đồ thị $f(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x)]$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f(x)$ như hình vẽ bên dưới. Hàm số $g(x) = f(x) - x$ đạt cực đại tại



A. $x = -1$.

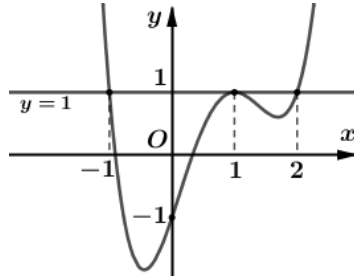
B. $x = 0$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $f'(x)$ và đường thẳng $y = 1$.



Dựa vào đồ thị ta suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1		2	$+\infty$
g'	+	0	-	0	-	0	+
g							

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$. **Chọn A.**

Chú ý. Cách xét dấu bảng biến thiên như sau: Ví dụ trên khoảng $(-\infty; -1)$ ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ nằm phía trên đường $y = 1$ nên $g'(x)$ mang dấu +.

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên.

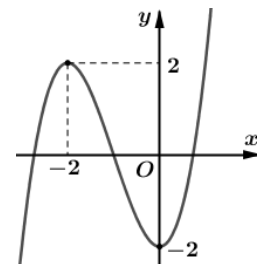
Hàm số $g(x) = f(-x^2 + 3x)$ có bao nhiêu điểm cực đại ?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

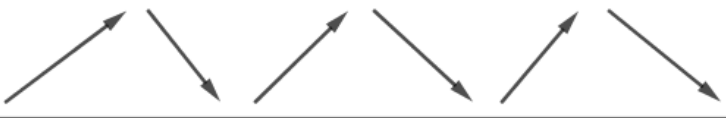
D. 6.



Lời giải. Ta có $g'(x) = (-2x+3).f'(-x^2+3x)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3=0 \\ f'(-x^2+3x)=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ -x^2+3x=-2 \\ -x^2+3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2} \\ x=0 \\ x=3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$	0	1,5	3	$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$	$+\infty$
g'	+	0	-	0	+	0	-
g							

Dựa vào bảng biến thiên và đối chiếu với các đáp án, ta **chọn A**.

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ chọn $x=4 \in \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$

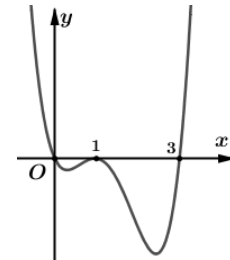
- $-2x+3=-5<0$. (1)
- $-x^2+3x=-4 \xrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} f'(-4)>0$ (vì f đang tăng). (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g'(x) = (-2x+3)f'(-x^2+3x) < 0$ trên khoảng $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$.

Nhận thấy các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ là các nghiệm bội lẻ nên $g'(x)$ qua nghiệm đổi dấu.

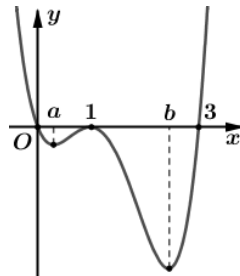
Câu 33. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Đồ thị của hàm số $g(x)=[f(x)]^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
- B. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
- C. 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
- D. 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.



Lời giải. Dựa vào đồ thị, ta có

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1(\text{nghiệm kép}) \\ x=3 \end{cases} \text{ và } f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a(0<a<1) \\ x=1 \\ x=b(1<b<3) \end{cases}.$$



$$\text{Ta có } g'(x) = 2f'(x) \cdot f(x); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \ (0 < a < 1) \\ x = 1 \\ x = b \ (1 < b < 3) \\ x = 0 \\ x = 1 \text{ (nghiệm bội 2)} \\ x = 3 \end{cases}.$$

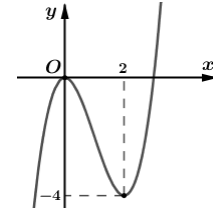
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	a	1	b	3	$+\infty$
f'	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
f	$+$	0	$-$	$-$	0	$-$	$+$
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận $g(x)$ có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu. **Chọn C.**

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $g(x) = f[f(x)]$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 4.
C. 5. D. 6.

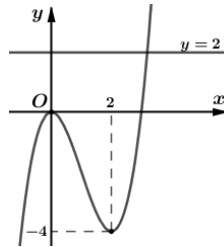


Lời giải. Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)$ đạt cực trị tại $x = 0, x = 2$.

$$\text{Suy ra } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x = 2 \text{ (nghiệm đơn)} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)]; g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases}.$$

$$\bullet f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x = 2 \text{ (nghiệm đơn)} \end{cases} \quad \bullet f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \text{ (1)} \\ f(x) = 2 \text{ (2)} \end{cases}.$$

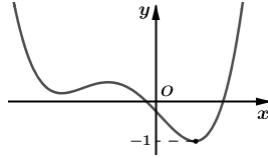


Dựa vào đồ thị suy ra:

- ✓ Phương trình (1) có hai nghiệm $x = 0$ (nghiệm kép) và $x = a$ ($a > 2$).
- ✓ Phương trình (2) có một nghiệm $x = b$ ($b > a$).

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ là $x = 0, x = 2, x = a$ và $x = b$. Suy ra hàm số $g(x) = f[f(x)]$ có 4 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = 2^{f(x)} - 3^{f(x)}$.



A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải. Ta có $g'(x) = f'(x)[2^{f(x)} \cdot \ln 2 - 3^{f(x)} \cdot \ln 3]$;

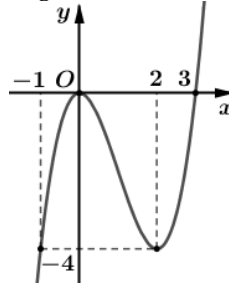
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 2^{f(x)} \cdot \ln 2 - 3^{f(x)} \cdot \ln 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = \log_{\frac{3}{2}} \frac{\ln 2}{\ln 3} < -1 & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy:

- (1) có ba nghiệm bội lẻ phân biệt (vì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị).
- $f(x) \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy hàm số $g(x) = 2^{f(x)} - 3^{f(x)}$ có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$ có tổng tung độ của các điểm cực trị bằng



A. 2.

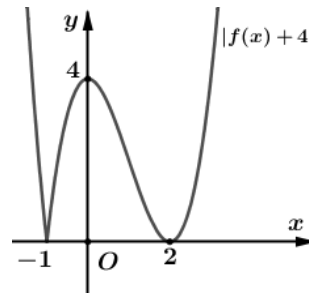
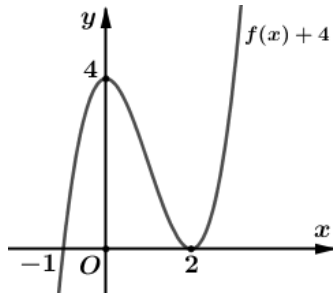
B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải. Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$ có được bằng cách

- Tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ lên trên 4 đơn vị ta được $f(x) + 4$.
- Lấy đối xứng phần phía dưới Ox của đồ thị hàm số $f(x) + 4$ qua Ox , ta được $|f(x) + 4|$.



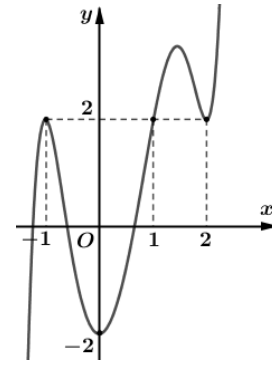
Dựa vào đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) + 4|$, suy ra tọa độ các điểm cực trị là $(-1; 0)$, $(0; 4)$, $(2; 0)$

$\longrightarrow$ tổng tung độ các điểm cực trị bằng $0 + 4 + 0 = 4$. **Chọn C.**

Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình bên.

Đồ thị hàm số $h(x) = |2f(x) - 3|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 4.
- B. 5.
- C. 7.
- D. 9.



Lời giải. Xét $g(x) = 2f(x) - 3 \longrightarrow g'(x) = 2f'(x)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f(x)} \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = a \ (1 < a < 2) \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Ta tính được } \begin{cases} g(-1) = 1 \\ g(0) = -7 \\ g(a) > 1 \\ g(2) = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

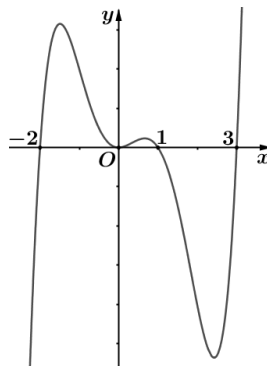
x	$-\infty$	-1		0		a		2		$+\infty$
g'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g										

Dựa vào bảng biến thiên suy ra

- Đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị.
- Đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x) = |2f(x) - 3|$ có 7 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 38. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|) + 2018$ là



- A. 2.
- B. 3.
- C. 5.
- D. 7.

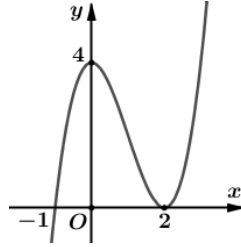
Lời giải. Từ đồ thị ta thấy hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị dương

$\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\longrightarrow$ hàm số $f(|x|) + 2018$ có 5 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm thay đổi cực trị).

Chọn C.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x| - 2)$ là



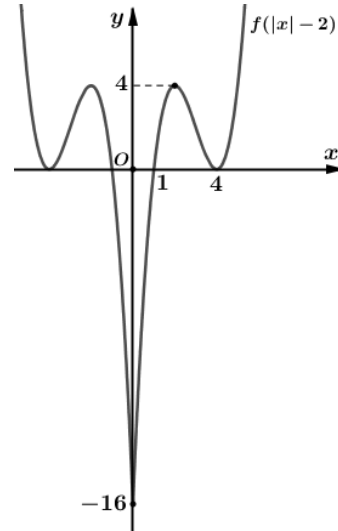
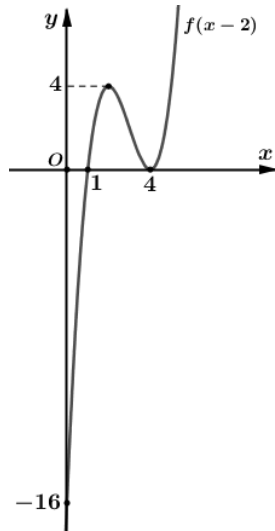
A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải. Trước tiên ta phải biết rằng, đồ thị hàm số $f(|x| - 2)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách tịnh tiến sang phải 2 đơn vị rồi mới lấy đối xứng.



Dựa vào đồ thị hàm số $f(|x| - 2)$, suy ra hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị. **Chọn C.**

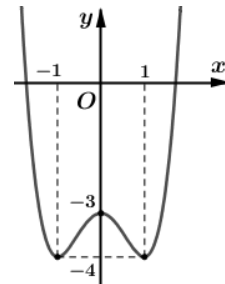
Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đồ thị hàm số $g(x) = f(|x - 2|) + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 7.



Lời giải. Đồ thị hàm số $g(x) = f(|x - 2|) + 1$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ như sau:

Bước 1: Lấy đối xứng qua Oy nhưng vì đồ thị đã đối xứng sẵn nên bước này bỏ qua.

Bước 2: Tịnh tiến đồ thị ở Bước 1 sang phải 2 đơn vị.

Bước 3: Tịnh tiến đồ thị ở Bước 2 lên trên 1 đơn vị.

Vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị nên ta không quan tâm đến Bước 2 và Bước 3. Từ nhận xét Bước 1 ta thấy số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x)$ bằng số điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x)$ là 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

Vấn đề 5. Cho bảng biến thiên của hàm $f(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm $f[u(x)]$.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
f'	$-$	$ $		$+$	0	$-$	0	$+$
f	$+\infty$							$+\infty$

Hàm số $g(x) = 3f(x) + 1$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây ?

- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = \pm 1$. D. $x = 0$.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 3f'(x)$.

Do đó điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ trùng với điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

Vậy điểm cực tiểu của hàm số $g(x)$ là $x = \pm 1$. **Chọn C.**

Câu 42. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$			
f'	$-$	0	$+$	0	$+$		
f	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải. Ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 + 1)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + 1) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo BBT}} \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = -2 \\ x^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x = 0 \text{ (nghiệm kép)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ (nghiệm bội 3)}.$$

Vậy $g'(x) = 0$ có duy nhất nghiệm bội lẻ $x = 0$ nên hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$				
y'	$+$	0	$-$	$ $	$+$	0	$-$		
y		$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	
	$-\infty$								$-\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(3 - x)$.

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 6.

Lời giải. Ta có $g'(x) = -f'(3 - x)$.

$$\bullet \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3 - x) = 0 \xrightarrow{\text{theo BBT}} \begin{cases} 3 - x = 0 \\ 3 - x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}.$$

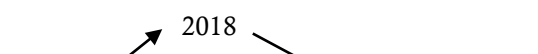
- $g'(x)$ không xác định $\Leftrightarrow 3-x=1 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
g'	+	0	-	+	0	-
g						

Vậy hàm số $g(x) = f(3-x)$ có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 44. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							
	$-\infty$						$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $g(x) = |f(x-2017)+2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2.

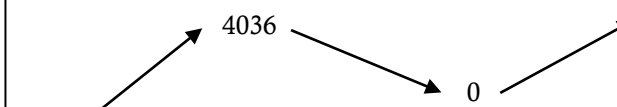
B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải. Đồ thị hàm số $u(x) = f(x-2017)+2018$ có được từ đồ thị $f(x)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang phải 2017 đơn vị và lên trên 2018 đơn vị.

Suy ra bảng biến thiên của $u(x)$

x	$-\infty$	2016		2020		$+\infty$
$u'(x)$		+	0	-	0	+
$u(x)$						
	$-\infty$		4036		0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $g(x) = |u(x)|$ có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 45. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

Hỏi số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(|x|)|$ nhiều nhất là bao nhiêu ?

A. 5.

B. 7.

C. 11.

D. 13.

Lời giải. Ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu nằm bên phải trục tung nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại tối đa 2 điểm có hoành độ dương. Khi đó

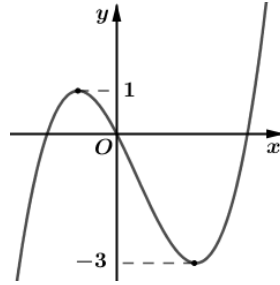
• Đồ thị hàm số $f(|x|)$ cắt trục hoành tối đa 4 điểm.

• Hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra hàm số $g(x) = |f(|x|)|$ sẽ có tối đa 7 điểm cực trị. **Chọn B.**

Vấn đề 6. Cho đồ thị $f(x)$. Hỏi số điểm cực trị của hàm số $f[u(x, m)]$.

Câu 46. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x) + m|$ có 3 điểm cực trị là



A. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$.

B. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 1$.

C. $m = -1$ hoặc $m = 3$.

D. $1 \leq m \leq 3$.

Lời giải. Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng $A + B$ với

• A là số điểm cực trị của hàm $f(x)$

• B là số giao điểm của $f(x)$ với trục hoành (không tính các điểm trùng với A ở trên)

Áp dụng: Vì hàm $f(x)$ đã cho có 2 điểm cực trị nên $f(x) + m$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x) + m$ với trục hoành là 1.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x) + m$ với trục hoành là 1, ta cần

• Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 1 đơn vị $\longrightarrow m \leq -1$.

• Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 3 đơn vị $\longrightarrow m \geq 3$.

Vậy $m \leq -1$ hoặc $m \geq 3$. **Chọn A.**

Câu 47. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	11	4	$+\infty$	

Đồ thị hàm số $g(x) = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi

A. $m \in (4; 11)$.

B. $m \in \left[2; \frac{11}{2}\right]$.

C. $m \in \left(2; \frac{11}{2}\right)$.

D. $m = 3$.

Lời giải. Vì hàm $f(x)$ đã cho có 2 điểm cực trị nên $f(x) - 2m$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x) - 2m$ với trục hoành là 3.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x) - 2m$ với trục hoành là 3, ta cần tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới lớn hơn 4 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 11 đơn vị $\longrightarrow \begin{cases} -2m < -4 \\ -2m > -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < \frac{11}{2} \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 48. Tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 - 9x - 5 + \frac{m}{2} \right|$ có 5 điểm cực trị bằng

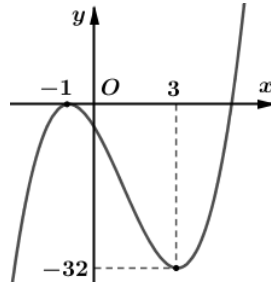
A. -2016.

B. -496.

C. 1952.

D. 2016.

Lời giải. Vẽ đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$ như hình bên dưới

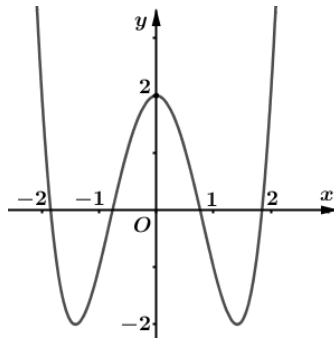


Ta thấy hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị nên $f(x) + \frac{m}{2}$ cũng luôn có 2 điểm cực trị.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x) + \frac{m}{2}$ với trục hoành là 3.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x) + \frac{m}{2}$ với trục hoành là 3, ta cần tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên nhưng phải nhỏ hơn 32 đơn vị $\longrightarrow 0 < \frac{m}{2} < 32 \Leftrightarrow 0 < m < 64 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1; 2; 3; \dots; 63\}$
 $\longrightarrow \sum m = 2016$. **Chọn D.**

Câu 49. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $g(x) = |f(x) - m|$ có 5 điểm cực trị.

A. $-2 < m < 2$.

B. $m > 2$.

C. $m \geq 2$.

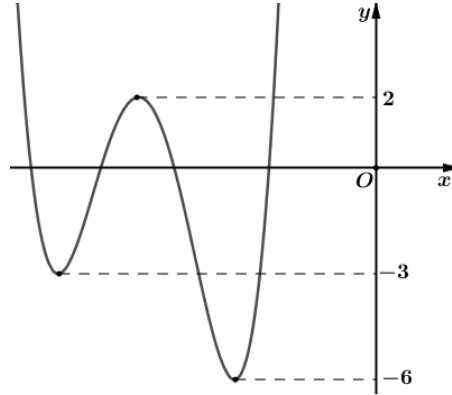
D. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Lời giải. Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x) - m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x) - m$ với trục hoành là 2.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x) - m$ với trục hoành là 2, ta cần tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới ít nhất 2 đơn vị (bằng 2 đơn vị vẫn được vì khi đó điểm cực trị trùng với điểm chung của đồ thị với trục hoành nên ta chỉ tính một lần) $\longrightarrow -m \leq -2 \Leftrightarrow m \geq 2$. **Chọn C.**

Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x+2018) + m|$ có 7 điểm cực trị ?



A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Lời giải. Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2018) + m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2018) + m$ với trục hoành là 4.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2018) + m$ với trục hoành là 4, ta cần đồng thời

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới nhỏ hơn 2 đơn vị $\longrightarrow m > -2$
- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên nhỏ hơn 3 đơn vị $\longrightarrow m < 3$.

Vậy $-2 < m < 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+} m \in \{1; 2\}$. **Chọn A.**

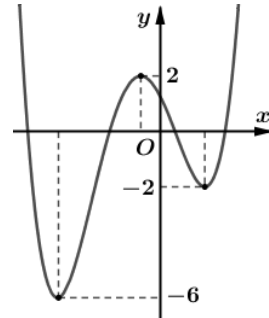
Câu 51. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x+2018) + m^2|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 5.



Lời giải. Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x+2018) + m^2$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

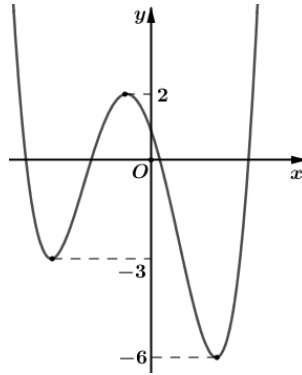
Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x+2018) + m^2$ với trục hoành là 2.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x+2018) + m^2$ với trục hoành là 2, ta cần

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m^2 \leq -2$: vô lý
- Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 2 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị

$\longrightarrow 2 \leq m^2 < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \leq m < \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} < m \leq -\sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2; 2\}$. **Chọn B.**

Câu 52. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-4; 4]$ để hàm số $g(x) = |f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải. Vì hàm $f(x)$ đã cho có 3 điểm cực trị nên $f(x-1) + m$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (do phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị).

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị $f(x-1) + m$ với trục hoành là 2.

Để số giao điểm của đồ thị $f(x-1) + m$ với trục hoành là 2, ta cần

- Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ xuống dưới tối thiểu 2 đơn vị $\longrightarrow m \leq -2$.
- Hoặc tịnh tiến đồ thị $f(x)$ lên trên tối thiểu 3 đơn vị nhưng phải nhỏ hơn 6 đơn vị $\longrightarrow 3 \leq m < 6$.

Vậy $\begin{cases} m \leq -2 \\ 3 \leq m < 6 \end{cases} \xrightarrow[m \in [-4; 4]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-4; -3; -2; 3; 4\}$. **Chọn B.**

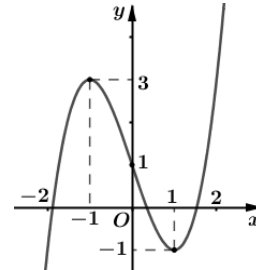
Câu 53. Đường cong ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Với $m < -1$ thì hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1.

B. 2.

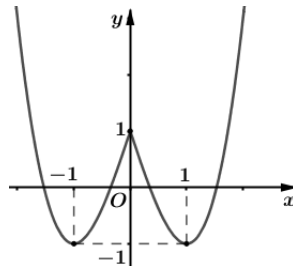
C. 3.

D. 5.



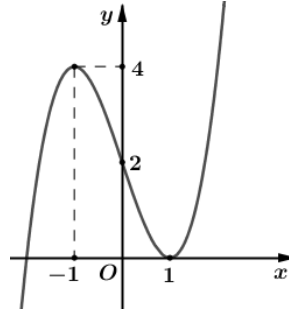
Lời giải. Đồ thị hàm số $f(|x+m|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách lấy đối xứng trước rồi mới tịnh tiến.

Lấy đối xứng trước ta được đồ thị hàm số $f(|x|)$ như hình bên dưới



Dựa vào đồ thị hàm số $f(|x|)$ ta thấy có 3 điểm cực trị $\longrightarrow f(|x+m|)$ cũng luôn có 3 điểm cực trị (vì phép tịnh tiến không làm ảnh hưởng đến số cực trị). **Chọn C.**

Câu 54. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị.



A. $m < -1$.

B. $m > -1$.

C. $m > 1$.

D. $m < 1$.

Lời giải. Nhận xét: Hàm $g(x) = f(|x| + m)$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục $Oy \rightarrow x = 0$ là một điểm cực trị của hàm số.

Ta có $g'(x) = \frac{x}{|x|} \cdot f'(|x| + m)$ với $x \neq 0$.

$$\rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|x| + m) = 0 \xrightarrow{\text{theo đồ thị } f(x)} \begin{cases} |x| + m = 1 \\ |x| + m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 - m \\ |x| = -1 - m \end{cases} \quad (*)$$

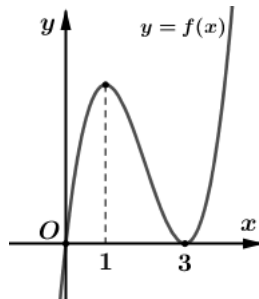
Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow (*)$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ -1 - m > 0 \\ 1 - m \neq -1 - m \end{cases} \Leftrightarrow m < -1. \text{ Chọn A.}$$

Cách 2. Đồ thị hàm số $f(|x| + m)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $f(x)$ bằng cách tịnh tiến trước rồi mới lấy đối xứng.

Để hàm số $f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x + m)$ có 2 điểm cực trị dương. Do đó ta phải tịnh tiến điểm cực đại của đồ thị hàm số $f(x)$ qua phía bên phải trục tung nghĩa là tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ sang phải lớn hơn 1 đơn vị $\rightarrow m < -1$.

Câu 55. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m|$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $m > \frac{1}{4}$.

B. $m \geq \frac{1}{4}$.

C. $m < 1$.

D. $m \leq 1$.

Lời giải. Xét $g(x) = f^2(x) + f(x) + m \rightarrow g'(x) = f'(x)[2f(x) + 1]$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 2f(x) = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{theo do thi } f(x)} \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = a \ (a < 0) \end{cases}. \text{ Ta tính được } \begin{cases} g(1) = f^2(1) + f(1) + m > m \\ g(3) = m \\ g(a) = m - \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	a	1	3	$+\infty$		
g'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
g							

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Suy ra đồ thị hàm số $h(x) = |f^2(x) + f(x) + m| = \left| \left[f(x) + \frac{1}{2} \right]^2 + m - \frac{1}{4} \right|$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $g(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục Ox (kể cả tiếp xúc)

$\longrightarrow m \geq \frac{1}{4}$. **Chọn B.**

Vấn đề 7. Cho biểu thức $f(x, m)$. Tìm m để hàm số $f[u(x)]$ có n điểm cực trị

Câu 56. Hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1$ và 0 . Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$.

Ta có $g'(x) = 2(x-1)f'(x^2 - 2x)$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (nhị phân)} \\ x = 0 \text{ (nhị phân)} \\ x = 2 \text{ (nhị phân)} \end{cases}.$$

Vì $g'(x) = 0$ có hai nghiệm đơn và một nghiệm bội lẻ nên $g(x)$ có 3 điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 57. Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

A. $-2 < m < \frac{5}{4}$.

B. $-\frac{5}{4} < m < 2$.

C. $\frac{5}{4} < m < 2$.

D. $\frac{5}{4} < m \leq 2$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2(2m-1)x + 2 - m$.

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $f(x)$ có hai cực trị dương

$$\Leftrightarrow f'(x)=0 \text{ có hai nghiệm dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ \frac{2(2m-1)}{3} > 0 \\ \frac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2.$$

Chọn C.

Câu 58. Cho hàm số $f(x) = mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2 - m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị ?

A. 7.

B. 9.

C. 10.

D. 11.

Lời giải. Để $g(x) = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt. (*)

$$\text{Xét } f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(mx^2 - 2mx + m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ mx^2 - 2mx + m-2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Do đó (*)} \Leftrightarrow \text{phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - m(m-2) > 0 \\ f(1) = -2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m > 0 \xrightarrow[m \in [-10; 10]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1; 2; 3; \dots; 10\}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 59. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị nhận hai điểm $A(0; 3)$ và $B(2; -1)$ làm hai điểm cực trị. Khi đó số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = |ax^2|x + bx^2 + c|x| + d|$.

A. 5.

B. 7.

C. 9.

D. 11.

Lời giải. Ta có $g(x) = |ax^2|x + bx^2 + c|x| + d| = |f(|x|)|$.

Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị trong đó có một điểm cực trị bằng 0 và một điểm cực trị dương $\longrightarrow$ hàm số $f(|x|)$ có 3 điểm cực trị. (1)

Đồ thị hàm số $f(x)$ có điểm cực trị $A(0; 3) \in Oy$ và điểm cực trị $B(2; -1)$ thuộc góc phần tư thứ IV nên đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm (1 điểm có hoành độ âm, 2 điểm có hoành độ dương) $\longrightarrow$ đồ thị hàm số $f(|x|)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. (2)

Từ (1) và (2) suy ra đồ thị hàm số $g(x) = |f(|x|)|$ có 7 điểm cực trị. **Chọn B.**

Cách 2. Vẽ phát họa đồ thị $f(x)$ rồi suy ra đồ thị $f(|x|)$, tiếp tục suy ra đồ thị $|f(|x|)|$.

$$\text{Câu 60. Cho hàm số } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ với } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ và } \begin{cases} a > 0 \\ d > 2018 \\ a + b + c + d - 2018 < 0 \end{cases}.$$

Hàm số $g(x) = |f(x) - 2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải. Hàm số $g(x) = |f(x) - 2018|$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \\ g(0) = d - 2018 > 0 \\ g(1) = a + b + c + d - 2018 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \longrightarrow g(x) = 0 \text{ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên } \mathbb{R}.$$

Khi đó đồ thị hàm số $f(x) - 2018$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $g(x) = |f(x) - 2018|$ có đúng 5 điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 61. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $\begin{cases} -8 + 4a - 2b + c > 0 \\ 8 + 4a + 2b + c < 0 \end{cases}$. Hàm số $g(x) = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Lời giải. Hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (là hàm số bậc ba) liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ f(-2) = -8 + 4a - 2b + c > 0 \\ f(2) = 8 + 4a + 2b + c < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \longrightarrow f(x) = 0 \text{ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên } \mathbb{R}.$$

Khi đó đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $g(x) = |f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 62. Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 1$ với $m, n \in \mathbb{R}$ và $\begin{cases} m + n > 0 \\ 7 + 2(2m + n) < 0 \end{cases}$. Hàm số $g(x) = |f(|x|)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

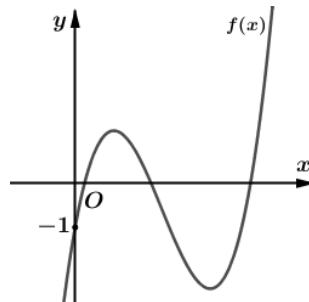
- A. 2. B. 5. C. 9. D. 11.

Lời giải. Ta có
$$\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = m + n > 0 \\ f(2) = 7 + 4m + 2n < 0 \end{cases} \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists p > 2 \text{ sao cho } f(p) > 0.$$

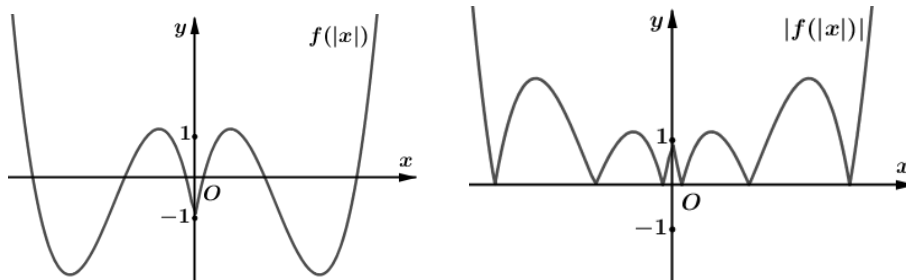
Suy ra $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $c_1 \in (0; 1)$, $c_2 \in (1; 2)$ và $c_3 \in (2; p)$. (1)

Suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $x_1 \in (c_1; c_2)$ và $x_2 \in (c_2; c_3)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra đồ thị hàm số $f(x)$ có dạng như hình bên dưới



Từ đó suy ra hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị $\longrightarrow$ hàm số $|f(|x|)|$ có 11 điểm cực trị.



Chọn D.

Câu 63. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (-1; 0), x_2 \in (1; 2)$. Biết hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$. Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Lời giải. Vì hàm số hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 và hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ nên suy ra $a < 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \in (-1; 0), x_2 \in (1; 2)$ nên suy ra $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\longrightarrow ac < 0 \Rightarrow c > 0$.

Mặt khác $x_1 \in (-1; 0), x_2 \in (1; 2)$ nên $x_1 + x_2 > 0 \longrightarrow -\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$. **Chọn A.**

Câu 64. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ biết $a > 0, c > 2018$ và $a + b + c < 2018$. Số cực trị của hàm số $g(x) = |f(x) - 2018|$ là

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

Lời giải. Đặt $h(x) = f(x) - 2018 = ax^4 + bx^2 + c - 2018$.

Từ giả thiết $\begin{cases} a > 0 \\ c > 2018 \\ a + b + c < 2018 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \longrightarrow$ đồ thị hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị. (1)

Ta có $\begin{cases} h(1) = a + b + c - 2018 < 0 \\ h(0) = c - 2018 > 0 \end{cases} \Rightarrow h(1).h(0) < 0$ có nghiệm thuộc $(0; 1) \Rightarrow h(x) = 0$ có 4

nghiệm phân biệt (đáng hiệu của hàm trùng phương). (2)

Từ (1) và (2), suy ra hàm số $g(x) = |f(x) - 2018|$ có 7 điểm cực trị. **Chọn D.**

Cách 2. Thử nghiệm. Chọn $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 2019 \end{cases} \longrightarrow g(x) = |f(x) - 2018| = |x^4 - 4x^2 + 1|$.

Vẽ phát họa đồ thị ta thấy có 7 điểm cực trị.

Câu 65. Cho hàm số $f(x) = (m^4 + 1)x^4 + (-2^{m+1}.m^2 - 4)x^2 + 4^m + 16$ với m là tham số thực. Hàm số $g(x) = |f(x) - 1|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải. Ta có $g(x) = |f(x) - 1| = \sqrt{(f(x) - 1)^2}$

Suy ra $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot [f(x) - 1]}{\sqrt{(f(x) - 1)^2}}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) - 1 = 0 \end{cases}$.

- $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt vì $-(m^4 + 1)(2^{m+1} \cdot m^2 + 4) < 0$ với mọi m .
- $f(x) - 1 = 0$ vô nghiệm do $\Delta' = (2^m \cdot m^2 + 2)^2 - (m^4 + 1) \cdot (4^m + 15)$
 $= 4 \cdot 2^m \cdot m^2 + 4 - 15m^4 - 4^m - 15 = -(2^m - m^2)^2 - 11m^4 - 11 < 0$.

Vậy hàm số đã cho có 3 cực trị. **Chọn A.**

Cách 2. Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị (do hệ số a và b trái dấu) $\longrightarrow f(x) - 1$ cũng có 3 điểm cực trị.

Phương trình $f(x) - 1 = 0$ vô nghiệm (đã giải thích ở trên).

Vậy hàm số $g(x) = |f(x) - 1|$ có 3 cực trị.

HÀM SỐ 2

Phần 3. GTLN – GTNN của hàm số

- 1) Cho đồ thị hàm số $f(x)$. Hỏi GTLN-GTNN của hàm số $f[u(x)] + g(x)$
- 2) Tìm GTLN – GTNN của hàm số $f(x), f(|x|), |f(x)|$
- 3) Cho biết hàm số $f(x)$ đạt GTLN (GTNN) tại $x_0 \in (a; b)$.
Hỏi trên khoảng $(c; d)$ hàm số đạt GTLN (GTNN) tại điểm nào.....
- 4) Bài toán tìm tham số m để GTLN của hàm số đạt GTNN.....
- 5) Cho đồ thị hàm số $f'(x)$. Hỏi GTLN-GTNN của hàm số $f[u(x)] + g(x)$

Phần 4. Tiệm cận của đồ thị hàm số

- 1) Tìm số đường tiệm cận thông qua đồ thị cho trước.....
- 2) Tìm số đường tiệm cận thông qua bảng biến thiên.....
- 3) Tìm số đường tiệm cận thông qua biểu thức của hàm số.....

Phần 5. Tương giao giữa hai đồ thị

- 1) Tìm nghiệm của phương trình thông qua biểu thức.....
- 2) Tìm nghiệm của phương trình thông qua bảng biến thiên.....
- 3) Tìm nghiệm của phương trình thông qua đồ thị.....

Phần 3. GTLN – GTNN CỦA HÀM SỐ

Vấn đề 1) Cho đồ thị hàm số $f(x)$. Hỏi GTLN-GTNN của hàm số $f[u(x)] + g(x)$

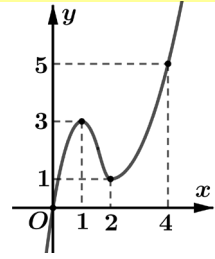
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là GTLN – GTNN của hàm số $g(x) = f[2(\sin^4 x + \cos^4 x)]$. Tổng $M + m$ bằng

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.



Lời giải. Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \xrightarrow{\forall x \in \mathbb{R}} 1 \leq 2(\sin^4 x + \cos^4 x) \leq 2$.

Dựa vào đồ thị suy ra $\begin{cases} M = \max g(x) = f(1) = 3 \\ m = \min g(x) = f(2) = 1 \end{cases} \longrightarrow M + m = 4. \text{ Chọn B.}$

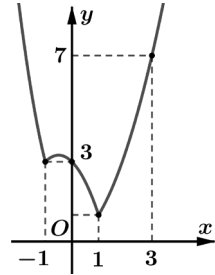
Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là hình bên. Gọi M, m theo thứ tự là GTLN – GTNN của hàm số $y = |f(x) - 2|^3 - 3(f(x) - 2)^2 + 5$ trên đoạn $[-1; 3]$. Tích $M.m$ bằng

A. 2.

B. 3.

C. 54.

D. 55.



Lời giải. Trên $[-1; 3]$, ta có $1 \leq f(x) \leq 7 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) - 2 \leq 5 \longrightarrow 0 \leq |f(x) - 2| \leq 5$.

Đặt $t = |f(x) - 2|$ với $t \in [0; 5]$. Khi đó $y = t^3 - 3t^2 + 5 \rightarrow y' = 3t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$.

Ta có $y(0) = 5; y(2) = 1; y(5) = 55$. Suy ra $\begin{cases} M = 55 \\ m = 1 \end{cases} \longrightarrow M.m = 55. \text{ Chọn D.}$

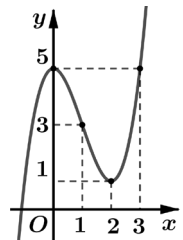
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Ký hiệu $g(x) = f(2\sqrt{2x} + \sqrt{1-x}) + m$. Tìm điều kiện của tham số m sao cho $\max_{[0;1]} g(x) > 2 \min_{[0;1]} g(x)$.

A. $m > 4$.

B. $m < 3$.

C. $0 < m < 5$.

D. $m < 2$.



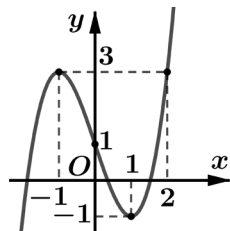
Lời giải. Đặt $t = 2\sqrt{2x} + \sqrt{1-x} \xrightarrow{0 \leq x \leq 1} t^2 = 7x + 1 + 4\sqrt{2x(1-x)} \geq 1 \longrightarrow t \geq 1$.

Lại có $t = 2\sqrt{2x} + \sqrt{1-x} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \leq \sqrt{[(2\sqrt{2})^2 + 1][(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{1-x})^2]} = 3$.

Khi đó $g(x) = f(t) + m$ với $t \in [1; 3]$. Dựa vào đồ thị ta có $\begin{cases} \max_{[1;3]} f(t) = f(3) = 5 \\ \min_{[1;3]} f(t) = f(2) = 1 \end{cases}$.

Ycbt $\Leftrightarrow \max_{[1;3]} [f(x) + m] > 2 \min_{[1;3]} [f(x) + m] \Leftrightarrow 5 + m > 2(1 + m) \Leftrightarrow m < 3$. **Chọn B.**

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Xét hàm số $g(x) = f(2x^3 + x - 1) + m$. Tìm m để $\max_{[0;1]} g(x) = -10$.



A. $m = -13$.

B. $m = -12$.

C. $m = -1$.

D. $m = 3$.

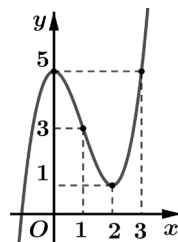
Lời giải. Đặt $t(x) = 2x^3 + x - 1$ với $x \in [0;1]$. Ta có $t'(x) = 6x^2 + 1 > 0, \forall x \in [0;1]$.

Suy ra hàm số $t(x)$ đồng biến nên $x \in [0;1] \longrightarrow t \in [-1;2]$.

Từ đồ thị hàm số ta có $\max_{[-1;2]} f(t) = 3 \longrightarrow \max_{[-1;2]} [f(t) + m] = 3 + m$.

Theo yêu cầu bài toán ta cần có: $3 + m = -10 \Leftrightarrow m = -13$. **Chọn A.**

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Ký hiệu $g(x) = f(x^3 - x^2 + x + 2) + 3m$, với m là tham số thực. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = m^2 + 3 \max_{[0;1]} g(x) + 4 \min_{[0;1]} g(x) + m$



A. -150 .

B. -102 .

C. -50 .

D. 4 .

Lời giải. Đặt $t = x^3 - x^2 + x + 2$ có $t' = 3x^2 - 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên t đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó với $x \in [0;1]$ thì $t \in [1;3] \xrightarrow{\text{do thị}} \begin{cases} \max_{[0;1]} f(x^3 - x^2 + x + 2) = \max_{[1;3]} f(t) = f(3) = 5 \\ \min_{[0;1]} f(x^3 - x^2 + x + 2) = \min_{[1;3]} f(t) = f(2) = 1 \end{cases}$.

Khi đó $P = m^2 + 3 \max_{[0;1]} g(x) + 4 \min_{[0;1]} g(x) + m = m^2 + 3 \cdot [5 + 3m] + 4[1 + 3m] + m$
 $= m^2 + 22m + 19 = (m + 11)^2 - 102 \geq -102$. **Chọn B.**

Vấn đề 2) Tìm GTLN – GTNN của hàm số $f(x), f(|x|), |f(x)|$

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \frac{2\sqrt{x} + m}{\sqrt{x} + 1}$ với m là tham số thực và $m > 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;4]$ nhỏ hơn 3.

A. $m \in (1;3)$.

B. $m \in (1; 3\sqrt{5} - 4)$.

C. $m \in (1; \sqrt{5})$.

D. $m \in (1; 3)$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = \frac{2 - m\sqrt{x}}{2(x+1)\sqrt{x}(x+1)}$, $f'(x) = 0 \xrightarrow{m>1} \sqrt{x} = \frac{2}{m} \Leftrightarrow x = \frac{4}{m^2} \in (0;4)$.

Tính được $f(0) = m$, $f\left(\frac{4}{m^2}\right) = \sqrt{m^2 + 4}$, $f(4) = \frac{m+4}{\sqrt{5}}$.

$$\text{Vì } \begin{cases} \sqrt{m^2+4} \geq m \\ \sqrt{m^2+4} \stackrel{m>1}{\geq} \sqrt{\frac{1}{2}(m+2)^2} = \frac{m+2}{\sqrt{2}} > \frac{m+4}{\sqrt{5}} \end{cases} \longrightarrow \max_{x \in [0;4]} f(x) = \sqrt{m^2+4}.$$

Do đó ycbt $\Leftrightarrow \sqrt{m^2+4} < 3 \Leftrightarrow m < \sqrt{5} \xrightarrow{m>1} m \in (1; \sqrt{5})$. **Chọn C.**

Câu 7. Gọi M, m lần lượt là GTLT-GTNN của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + (a+2)x + a + 3$

(với a là tham số thực) trên đoạn $[1-2a; 2a-3]$. Tính $P = \frac{m+M}{2}$.

- A. $P = 1$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = 3$. D. $P = 6$.

Lời giải. Điều kiện: $1-2a < 2a-3 \Leftrightarrow a > 1$.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x + a + 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (do $a > 1$).

Suy ra hàm số y tăng trên $[1-2a; 2a-3]$ nên

$$\begin{cases} M = y(2a-3) = 8a^3 - 22a^2 + 20a - 3 \\ m = y(1-2a) = -8a^3 + 22a^2 - 20a + 9 \end{cases} \longrightarrow P = \frac{m+M}{2} = 3. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 8. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x^2+2}$ với $a \neq 0$ và a, b là các tham số thực. Biết $\max y = 6$,

$\min y = -2$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ bằng

- A. -3 . B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. 3 .

Lời giải. Vì $\max y = 6, \min y = -2$ nên suy ra tập giá trị của y là $[-2; 6]$. (1)

Ta có $y = \frac{ax+b}{x^2+2} \Leftrightarrow yx^2 - ax + 2y - b = 0$. (*)

Với $y \neq 0$, để (*) có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 - 4y(2y-b) \geq 0 \Leftrightarrow 8y^2 - 4by - a^2 \leq 0$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra M, m là nghiệm của phương trình $8y^2 - 4by - a^2 = 0$ nên theo

$$\text{Viết ta có } \begin{cases} M+m = \frac{4b}{8} \\ Mm = -\frac{a^2}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = \frac{4b}{8} \\ -12 = -\frac{a^2}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8 \\ a^2 = 96 \end{cases} \rightarrow P = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{64}{96} = \frac{1}{3}. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 9. Biết hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có M, m lần lượt là GTLN-GTNN của hàm số trên đoạn $[0; 2]$. Trong các hàm số sau, hàm số nào cũng có GTLN và GTNN trên đoạn $[0; 2]$ tương ứng là M và m ?

- A. $y = f\left(\frac{4x}{x^2+1}\right)$. B. $y = f\left(\sqrt{2(\sin x + \cos x)}\right)$.
C. $y = f\left(2\sqrt{(\sin^3 x + \cos^3 x)}\right)$. D. $y = f\left(x + \sqrt{2-x^2}\right)$.

Lời giải. Bằng cách đặt ẩn phụ t , sau đó tìm được tập giá trị của t cũng thuộc đoạn $[0;2]$ thì kết luận đáp án đó thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{Với } t = \frac{4x}{x^2+1} \text{ có } t' = \frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}; t' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [0;2].$$

Lập bảng biến thiên ta tìm được $0 \leq t \leq 2$. **Chọn A.**

$$\text{Với } t = \sqrt{2(\sin x + \cos x)} = \sqrt{2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \in [0; \sqrt{2\sqrt{2}}] \text{ khi } x \in [0;2].$$

$$\text{Với } t = 2\sqrt{(\sin^3 x + \cos^3 x)} \in [\sqrt[4]{2}; 2] \text{ khi } x \in [0;2].$$

$$\text{Với } t = x + \sqrt{2-x^2} \in [\sqrt{2}; 2] \text{ khi } x \in [0;2].$$

Câu 10. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[-1;1]$ thỏa mãn $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ với mọi $x \in [-1;1]$ và $f'(x) \geq g'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [-1;1]$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = 2f(x)g(x) - g^2(x)$ trên đoạn $[-1;1]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

$$\text{A. } m = h(-1). \quad \text{B. } m = h(0). \quad \text{C. } m = h(1). \quad \text{D. } m = \frac{h(-1) + h(1)}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Lời giải. Ta có } h'(x) &= 2f'(x)g(x) + 2f(x)g'(x) - 2g'(x)g(x) \\ &= 2g(x)[f'(x) - g'(x)] + 2g'(x)f(x) > 0 \text{ (do giả thiết).} \end{aligned}$$

Suy ra hàm số $h(x)$ đồng biến trên $[-1;1] \longrightarrow m = \min_{[-1;1]} h(x) = h(-1)$. **Chọn A.**

Câu 11. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90| + m$ trên đoạn $[-5;5]$ bằng 2018. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng ?

$$\text{A. } m < 1618. \quad \text{B. } 1600 < m < 1700. \quad \text{C. } m = 400. \quad \text{D. } 1500 < m < 1600.$$

Lời giải. Xét hàm số $g(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ có $g'(x) = 3x^2 + 6x - 72$;

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \notin [-5;5] \\ x = 4 \in [-5;5] \end{cases}. \text{ Ta tính được } g(-5) = 400; g(4) = -86; g(5) = -70.$$

Do đó với $x \in [-5;5]$ thì $g(x) \in [-86;400] \longrightarrow |g(x)| \in [0;400]$. Từ đó ta suy ra $\max_{[-5;5]} f(x) = 400 + m$. Do đó ycbt $\Leftrightarrow 400 + m = 2018 \Leftrightarrow m = 1618 \in (1600;1700)$. **Chọn B.**

Câu 12. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$ trên đoạn $[0;2]$ không vượt quá 20.

Tổng các phần tử của S bằng

$$\text{A. } -195. \quad \text{B. } 105. \quad \text{C. } 210. \quad \text{D. } 300.$$

Lời giải. Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20$ trên đoạn $[0;2]$.

Ta có $g'(x) = x^3 - 19x + 30$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \notin [0; 2] \\ x = 2 \\ x = 3 \notin [0; 2] \end{cases}$.

x	0	2
g'		+
g	$g(0)$	$g(2)$

Bảng biến thiên như hình bên

Dựa vào BBT, để $\max_{[0; 2]} |g(x)| \leq 20$ thì $\begin{cases} g(0) \geq -20 \\ g(2) \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 20 \geq -20 \\ m + 6 \leq 20 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 14$

$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 1; 2; \dots; 14\} \longrightarrow$ tổng các phần tử của S là 105. **Chọn B.**

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm

số $f(x) = \left| \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}(m^2 - 2)x^3 - m^2x^2 + m \right|$ trên đoạn $[0; 2]$ luôn bé hơn hoặc bằng 5 ?

A. 0.

B. 4.

C. 7.

D. 8.

Lời giải. Xét hàm số $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}(m^2 - 2)x^3 - m^2x^2 + m$ trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $g'(x) = x^3 + (m^2 - 2)x^2 - 2m^2x = x(x - 2)(x + m^2) \leq 0, \forall x \in [0; 2]$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $[0; 2] \longrightarrow$ yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} g(0) \leq 5 \\ g(2) \geq -5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ 4 + \frac{8}{3}(m^2 - 2) - 4m^2 + m \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{53}}{4} \leq m \leq \frac{3 + \sqrt{53}}{4} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0; 1; 2\}$. **Chọn B.**

Câu 14. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = \left| x^4 - 4x^3 + 4x^2 + \frac{a}{3} \right|$ trên đoạn $[0; 2]$. Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-7; 4]$ sao cho $M \leq 2m$?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 10.

Lời giải. Xét hàm số $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + \frac{a}{3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

Lập bảng biến thiên ta được $\frac{a}{3} \leq g(x) \leq \frac{a}{3} + 1$ trên đoạn $[0; 2]$.

+ **TH1)** Nếu $\frac{a}{3} > 0 \rightarrow \begin{cases} M = \frac{a}{3} + 1 \\ m = \frac{a}{3} \end{cases} \rightarrow M \leq 2m \Leftrightarrow \frac{a}{3} + 1 \leq 2 \cdot \frac{a}{3} \Leftrightarrow a \geq 3 \longrightarrow a \in \{3; 4\}$.

+ **TH2)** Nếu $\frac{a}{3} + 1 < 0 \rightarrow \begin{cases} M = -\frac{a}{3} \\ m = -\frac{a}{3} - 1 \end{cases} \rightarrow M \leq 2m \Leftrightarrow -\frac{a}{3} \leq 2 \cdot \left(-\frac{a}{3} - 1\right) \Leftrightarrow a \leq -6 \rightarrow a \in \{-7; -6\}$.

+ **TH3)** Nếu $\frac{a}{3} < 0 < \frac{a}{3} + 1$ thì khi đó $\begin{cases} M > 0 \\ m = 0 \end{cases}$ nên $M \leq 2m$ không thể xảy ra.

Vậy có 4 giá trị của a thỏa mãn bài toán là $\{-7; -6; 3; 4\}$. **Chọn A.**

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 4 ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Xét $g(x) = x^2 + 2x + m - 4$ trên $[-2; 1]$, có $g'(x) = 2x + 2$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} g(-2) = m - 4 \\ g(-1) = m - 5 \\ g(1) = m - 1 \end{cases} \longrightarrow \max_{[-2; 1]} f(x) = \max\{|m - 1|, |m - 5|\}.$$

$$+ \text{ Trường hợp 1. } |m - 1| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -3 \end{cases}.$$

$$\text{Thử lại } \begin{cases} m = 5 \longrightarrow \max\{|m - 1|, |m - 5|\} = \max\{4; 0\} = 4 : (\text{thỏa mãn}) \\ m = -3 \longrightarrow \max\{|m - 1|, |m - 5|\} = \max\{4; 8\} = 8 : (\text{loại}) \end{cases}.$$

$$+ \text{ Trường hợp 2. } |m - 5| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \\ m = 1 \end{cases}. \text{ Thử lại như trên ta được } m = 1 \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy có 2 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn B.**

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |e^{2x} - 4e^x + m|$ trên $[0; \ln 4]$ bằng 6 ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Đặt $t = e^x$, với $x \in [0; \ln 4] \longrightarrow t \in [1; 4]$. Khi đó $f(t) = |t^2 - 4t + m|$.

Đặt $g(t) = t^2 - 4t + m$ có $g'(t) = 2t - 4$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \in [1; 4]$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} g(1) = m - 3 \\ g(2) = m - 4 \\ g(4) = m \end{cases} \longrightarrow \min_{[0; \ln 4]} f(x) = \min_{[1; 4]} f(t) = \min\{|m|, |m - 4|\}.$$

Làm tương tự như bài trên ta được $m \in \{-6; 10\}$ thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 17. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x + 1} \right|$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng 2 ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Xét hàm số $g(x) = \frac{x^2 + mx + m}{x + 1}$ liên tục trên $[1; 2]$. Ta có

$$g'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2] \text{ nên } \max_{[1; 2]} f(x) = \max\{|g(1)|; |g(2)|\} = \max\left\{\left|m + \frac{1}{2}\right|; \left|m + \frac{4}{3}\right|\right\}.$$

Làm như các bài trên ta được $m = -\frac{5}{2}$ và $m = \frac{2}{3}$ là các giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Câu 18. Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$ trên đoạn $[-2; 3]$ bằng 2. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. 0.

B. 20.

C. 24.

D. 40.

Lời giải. Xét $g(x) = x^3 - 3x^2 + m$, có $g'(x) = 3x^2 - 6x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên như hình bên

Nhận xét: Vì $\min_{x \in [-2; 3]} |g(x)| = 2$ nên trên đoạn $[-2; 3]$

đồ thị của hàm số $g(x)$ nằm hoàn toàn phía trên trục hoành hoặc hoàn toàn phía dưới trục hoành

x	-2	0	2	3
g'	+	0	-	0
g	$m-20$	m	$m-4$	m

(hay nói cách khác là $g(x) = 0$ vô nghiệm trên đoạn $[-2; 3]$) $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m-20 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 20 \end{cases}$.

• Nếu $m < 0 \longrightarrow \min_{x \in [-2; 3]} f(x) = \min_{x \in [-2; 3]} |g(x)| = |m| = 2 \longrightarrow m = -2$.

• Nếu $m > 20 \longrightarrow \min_{x \in [-2; 3]} f(x) = \min_{x \in [-2; 3]} |g(x)| = |m-20| = 2 \longrightarrow m = 22$.

Vậy tổng các giá trị của m là $22 + (-2) = 20$. **Chọn B.**

Nhận xét: Bài toán này khác với các bài toán trên là đề bài hỏi min nên nhận xét trong bài giải rất quan trọng.

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x + 3| + 4mx$ lớn hơn 2 ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải. • Với $x \geq 3$, ta được $y = x^2 - 4x + 3 + 4mx$.

Có $y' = 2x - 4 + 4m = 2x + 4(m-1) > 0$ (do $x \geq 3$ và m nguyên dương).

Suy ra hàm số đồng biến trên $[3; +\infty)$ nên $\min_{[3; +\infty)} y = y(3) = 12m$. (1)

• Với $1 \leq x < 3$, ta được $y = -x^2 + 4x - 3 + 4mx$.

Có $y' = -2x + 4 + 4m = 2(2 + 2m - x) > 0$ (do $1 \leq x < 3$, và m nguyên dương).

Suy ra hàm số đồng biến trên $[1; 3]$ nên $\min_{[1; 3]} y = y(1) = 4m$. (2)

• Với $x < 1$, ta được $y = x^2 - 4x + 3 + 4mx$.

Có $y' = 2x - 4 + 4m$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 2 - 2m$.

Bảng biến thiên như hình bên

x	$-\infty$	$2 - 2m$	1
y'	-	0	+
y	$+\infty$	$y(2 - 2m)$	$4m$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{(-\infty; 1]} y = y(2 - 2m) = 8m - 4m^2 - 1$. (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra $\min_{\mathbb{R}} y = 8m - 4m^2 - 1$.

Theo ycbt $8m - 4m^2 - 1 > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < \frac{3}{2} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}^+} m = 1$. **Chọn A.**

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$. Có bao nhiêu số nguyên $m < 10$ để với mọi bộ ba số thực $a, b, c \in [1; 3]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh một tam giác ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Khi đó $\begin{cases} \min_{[1;3]} f(x) = \min \{f(1); f(2); f(3)\} = f(2) = m - 4 \\ \max_{[1;3]} f(x) = \max \{f(1); f(2); f(3)\} = f(3) = m \end{cases}$.

Ycbt $\Leftrightarrow f(a) + f(b) > f(c) \longrightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} f(x) > 0 \\ 2 \min_{[1;3]} f(x) > \max_{[1;3]} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 4 > 0 \\ 2m - 8 > m \end{cases} \Leftrightarrow m > 8$

$\xrightarrow[m < 10]{m \in \mathbb{Z}} m = \{9\}$. **Chọn A.**

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m + 2$. Có bao nhiêu số nguyên dương $m < 2018$ sao cho với mọi bộ ba số thực phân biệt $a, b, c \in [-1; 3]$ thì $f(a), f(b), f(c)$ là độ dài ba cạnh một tam giác nhọn ?

A. 1968.

B. 1969.

C. 1970.

D. 2008.

Lời giải. Ta tìm được $\begin{cases} \min_{[-1;3]} f(x) = m \\ \max_{[-1;3]} f(x) = m + 20 \end{cases}$. Khi đó ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} f(a) + f(b) > f(c) \\ f^2(a) + f^2(b) - f^2(c) > 0 \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} \min_{[-1;3]} f(x) > 0 \\ 2 \min_{[-1;3]} f(x) \geq \max_{[-1;3]} f(x) \\ 2 \left[\min_{[-1;3]} f(x) \right]^2 - \left[\max_{[-1;3]} f(x) \right]^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 20(1 + \sqrt{2}) \xrightarrow[m < 2018]{m \in \mathbb{Z}^+} m \in \{49; \dots; 2017\}$. **Chọn B.**

Chú ý: • Nếu a, b, c tùy ý thì min có thể đồng thời xảy ra, tức là $f(a) + f(b) \geq 2 \min_{[1;3]} f(x)$. Ta luôn có $\max_{[1;3]} f(x) \geq f(c)$.

Vậy ta cần $2 \min_{[1;3]} f(x) > \max_{[1;3]} f(x)$ thì sẽ suy ra được $f(a) + f(b) > f(c)$.

• Nếu a, b, c phân biệt thì min không đồng thời xảy ra, tức là $f(a) + f(b) > 2 \min_{[1;3]} f(x)$. Ta luôn có $\max_{[1;3]} f(x) \geq f(c)$.

Vậy ta cần $2 \min_{[1;3]} f(x) \geq \max_{[1;3]} f(x)$ thì sẽ suy ra được $f(a) + f(b) > f(c)$.

Vấn đề 3 Cho biết hàm số $f(x)$ đạt GTLN (GTNN) tại $x_0 \in (a;b)$. Hỏi trên khoảng $(c;d)$ hàm số đạt GTLN (GTNN) tại điểm nào

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có $\min_{(-\infty;0)} f(x) = f(-1)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ bằng

- A. $c + 8a$. B. $c - \frac{7a}{16}$. C. $c + \frac{9a}{16}$. D. $c - a$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$.

Nhận xét: Hàm số đã cho là hàm chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục tung.

Do đó từ giả thiết $\min_{(-\infty;0)} f(x) = f(-1) \longrightarrow \begin{cases} \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = f(1) \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = f(1) \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = f(1) = a + b + c \\ b = -2a \end{cases} \longrightarrow \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = c - a$. **Chọn D.**

Câu 23. Biết hàm số $f(x) = (m+1)(x+1)^4 - (2m-n+1)(x+1)^2 - 8m-4n$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(-\infty;0)$ tại $x = -3$. Hỏi trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ hàm số đã cho có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. 10. B. 11. C. 12. D. 13.

Lời giải. Đặt $t = x+1$, khi đó $f(t) = (a+1)t^4 + (-2a+b-1)t^2 + 8a-4b$ là hàm chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục tung.

Do đó từ giả thiết $\max_{(-\infty;0)} f(x) = f(-3) \xrightarrow{t=x+1} \max_{(-\infty;1)} f(t) = f(-2) \longrightarrow \max_{(1;+\infty)} f(t) = f(2)$
 $\xrightarrow{t=x+1} \max_{\left[\frac{1}{2}; 3\right]} f(x) = f(1) = 16(a+1) + 4(-2a+b-1) - 8a - 4b = 12$. **Chọn C.**

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = (x+2)^2(ax^2 + 2ax - a - b - 1) - 8a - 4b$. Biết rằng trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = -3$. Hỏi trên đoạn $[-1; 3]$ hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm nào?

- A. $x = -1$. B. $x = \frac{1}{2}$. C. $x = 2$. D. $x = 3$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 2(x+2)(2ax^2 + 5ax + a - b - 1)$.

Để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = -3$ trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$ thì $f'(x)$

phải đổi dấu qua $x = -3 \Leftrightarrow$ phương trình $2ax^2 + 5ax + a - b - 1 = 0$ có nghiệm $x = -3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17a^2 + 8ab + 8a > 0 \\ 4a - b - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 49a^2 > 0 \\ b = 4a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b = 4a - 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{b=4a-1} f'(x) = 2a(x+2)(x+3)(2x-1).$$

• **TH1:** $a < 0$ ta có bảng biến thiên như hình bên. Ta thấy hàm số không đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = -3$ trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$

x	$-\infty$	-3	-2	$0,5$	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f					

• **TH2:** $a > 0$ ta có bảng biến thiên như hình bên dưới. Ta thấy hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = -3$ trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$

(thỏa mãn giả thiết). Suy ra trên đoạn $[-1; 3]$

hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm $x = \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	-3	-2	$0,5$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$+$
f					

Chọn B.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + cx + d$ ($a \neq 0$) có $\min_{(-\infty; 0)} f(x) = f(-2)$. Giá trị lớn nhất của hàm $f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

A. $d - 16a$.

B. $d - 11a$.

C. $2a + d$.

D. $8a + d$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = 3ax^2 + c$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{3a}$.

Nếu $a > 0$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \longrightarrow$ không tồn tại GTNN trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Do đó $a < 0$. Vì $\min_{(-\infty; 0)} f(x) = f(-2) \longrightarrow f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 12a + c = 0$.

Khi đó $f(x) = ax^3 - 12ax + d$. Xét $f(x) = ax^3 - 12ax + d$ trên đoạn $[1; 3]$.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 - 12a = 3a(x^2 - 4)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [1; 3] \\ x = -2 \notin [1; 3] \end{cases}$.

Suy ra $\max_{[1; 3]} f(x) = \max \{f(1); f(2); f(3)\} = \max \{d - 11a; d - 16a; d - 19a\} \stackrel{a < 0}{=} d - 16a$.

Chọn A.

Vấn đề 4) Bài toán tìm tham số m để GTLN của hàm số đạt GTNN

Câu 26. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^2 + 2x + m - 4|$ trên đoạn $[-2; 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = 3$.

D. $m = 4$.

Lời giải. Xét $g(x) = x^2 + 2x + m - 4$ trên đoạn $[-2; 1]$.

Đạo hàm $g'(x) = 2x + 2$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in [-2; 1]$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} g(-2) = m - 4 \\ g(-1) = m - 5 \\ g(1) = m - 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \max_{[-2; 1]} g(x) = m - 1 \\ \min_{[-2; 1]} g(x) = m - 5 \end{cases}.$$

Cách 1. Suy ra $\max_{[-2; 1]} f(x) = \max\{|m-1|, |m-5|\} \geq \frac{(m-1) + (5-m)}{2} = 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m-1 = 5-m \Leftrightarrow m = 3$. **Chọn C.**

Cách 2. • Nếu $(m-1) + (m-5) \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$ thì $\max_{[-2; 1]} f(x) = m-1 \geq 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = 3$.

• Nếu $(m-1) + (m-5) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 3$ thì $\max_{[-2; 1]} f(x) = -(m-5) \geq 2$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m = 3$.

Câu 27. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 - x^2 + (m^2 + 1)x - 4m - 7|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = m_0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m_0 \in [-3; -2]$. B. $m_0 \in (-2; -1)$. C. $m_0 \in [-1; 0]$. D. $m_0 \in (0; 3)$.

Lời giải. Xét $g(x) = x^3 - x^2 + (m^2 + 1)x - 4m - 7$ trên đoạn $[0; 2]$.

Đạo hàm $g'(x) = 3x^2 - 2x + (m^2 + 1) > 0, \forall m \longrightarrow g(x)$ đồng biến trên $[0; 2]$

$$\longrightarrow \begin{cases} \max_{[0; 2]} g(x) = g(2) = 2m^2 - 4m - 1 \\ \min_{[0; 2]} g(x) = g(0) = -4m - 7 \end{cases}.$$

• Nếu $g(2) + g(0) \geq 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 8m - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 + \sqrt{8} \\ m \leq 2 - \sqrt{8} \end{cases}$ thì $\max_{[0; 2]} f(x) = g(2)$

$= 2m^2 - 4m - 1$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = 2 - \sqrt{8}$.

• Nếu $g(2) + g(0) \leq 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 8m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{8} \leq m \leq 2 + \sqrt{8}$ thì $\min_{[0; 2]} f(x) = -g(0)$

$= 4m + 7$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = 2 - \sqrt{8}$.

Vậy tóm lại GTLN của $f(x)$ đạt GTNN khi $m = 2 - \sqrt{8}$. **Chọn C.**

Câu 28. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = \left| \frac{x - m^2 + m}{x + 1} \right|$ trên đoạn $[1; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$. C. $m = \frac{5 \pm \sqrt{165}}{10}$. D. $m = 2$.

Lời giải. Xét $g(x) = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$ trên $[1; 2]$, có $g'(x) = \frac{m^2 - m + 1}{(x + 1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$.

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $[1;2]$ nên $\begin{cases} \max_{[1;2]} g(x) = g(2) = \frac{-m^2 + m + 2}{3} \\ \min_{[1;2]} g(x) = g(1) = \frac{-m^2 + m + 1}{2} \end{cases}$.

• Nếu $g(1) + g(2) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-5m^2 + 5m + 7}{6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5 - \sqrt{165}}{10} \leq m \leq \frac{5 + \sqrt{165}}{10}$

thì $\max_{[1;2]} f(x) = \frac{-m^2 + m + 2}{3} \geq \frac{-\frac{7}{5} + 2}{3} = \frac{1}{5}$ đạt tại $m = \frac{5 \pm \sqrt{165}}{10}$.

• Nếu $g(1) + g(2) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-5m^2 + 5m + 7}{6} \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{5 - \sqrt{165}}{10}$ hoặc $m \geq \frac{5 + \sqrt{165}}{10}$

thì $\max_{[1;2]} f(x) = \frac{m^2 - m - 1}{2} \geq \frac{\frac{7}{5} - 1}{2} = \frac{1}{5}$ đạt tại $m = \frac{5 \pm \sqrt{165}}{10}$.

Vậy $m = \frac{5 \pm \sqrt{165}}{10}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Câu 29. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \left| \frac{\ln x + 1}{\sqrt{\ln^2 x + 1}} + m \right|$ trên đoạn $[1; e^2]$ có giá trị

nhỏ nhất là

A. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2} - 1}{4}$.

C. $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{1 + \sqrt{2}}{4}$.

Lời giải. Ta có $\max_{[1; e^2]} f(x) \stackrel{t = \ln x}{=} \max_{[0; 2]} \left| \frac{t + 1}{\sqrt{t^2 + 1}} + m \right|$.

Xét $g(t) = \frac{t + 1}{\sqrt{t^2 + 1}} + m$; $g'(t) = \frac{1 - t}{(\sqrt{t^2 + 1})^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Ta có $\begin{cases} g(0) = 1 + m \\ g(1) = \sqrt{2} + m \\ g(2) = \frac{3\sqrt{5}}{5} + m \end{cases} \longrightarrow \max_{[0; 2]} g(x) = \max \{ |m + 1|; |m + \sqrt{2}| \} \geq \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $m + 1 = -\sqrt{2} - m \Leftrightarrow m = -\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$. **Chọn A.**

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \left| 2x - x^2 - \sqrt{(x + 1)(3 - x)} + m \right|$ với m là tham số thực. Khi giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất thì khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $m \in (0; 1)$.

B. $m \in (1; 2)$.

C. $m \in (2; 3)$.

D. $m \in (3; 4)$.

Lời giải. Đặt $t = \sqrt{(x + 1)(3 - x)}$. Hàm số trở thành $f(t) = |t^2 - t + m - 3|$ với $0 \leq t \leq 2$.

Xét $g(t) = t^2 - t + m - 3$, có $g'(t) = 2t - 1$; $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

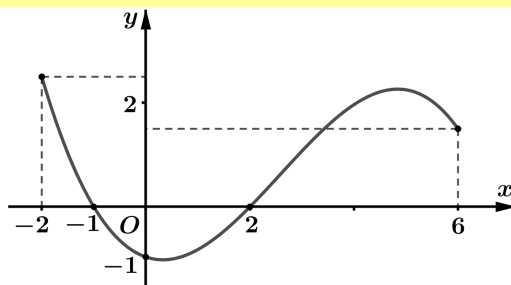
Ta có $g(0) = m - 3$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = m - \frac{13}{4}$, $g(2) = m - 1$.

Suy ra $\max_{[0;2]} f(t) = \max \left\{ \left| m - \frac{13}{4} \right|, |m - 1| \right\} \geq \frac{\frac{13}{4} - m + m - 1}{2} = \frac{9}{8}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{13}{4} - m = m - 1 \Leftrightarrow m = \frac{17}{8}$. **Chọn C.**

Vấn đề 5) Cho đồ thị hàm số $f'(x)$. Hỏi GTLN-GTNN của hàm số $f[u(x)] + g(x)$

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $\max_{[-2;6]} f(x) = f(-1)$.

B. $\max_{[-2;6]} f(x) = f(-2)$.

C. $\max_{[-2;6]} f(x) = f(6)$.

D. $\max_{[-2;6]} f(x) = \max \{f(-1), f(6)\}$.

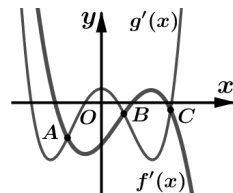
Lời giải. Đồ thị $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình bên

Từ bảng biến thiên suy ra

$\max_{[-2;6]} f(x) = \max \{f(-1); f(6)\}$. **Chọn D.**

x	-2	-1	2	6	
f'	+	0	-	0	+
f	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(2)$	$f(6)$	

Câu 32. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đường cong nét đậm và $y = g'(x)$ là đường cong nét mảnh như hình vẽ. Gọi ba giao điểm A, B, C của đồ thị $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ trên hình vẽ



lần lượt có hoành độ là a, b, c . Giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a; c]$ bằng

A. $h(0)$.

B. $h(a)$.

C. $h(b)$.

D. $h(c)$.

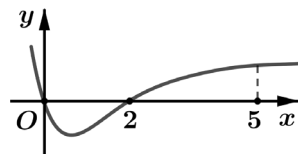
Lời giải. Ta có $h'(x) = f'(x) - g'(x) \xrightarrow{\text{do thi}} h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \\ x = c \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	a		b		c	$+\infty$
h'	+	0	-	0	+	0	-
h		$h(a)$		$h(b)$		$h(c)$	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $\min_{[a;c]} h(x) = h(b)$. **Chọn C.**

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $[0;5]$ lần lượt là



- A. $f(0); f(5)$. B. $f(2); f(0)$. C. $f(1); f(5)$. D. $f(2); f(5)$.

Lời giải. Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0;5]$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như hình bên.

Suy ra $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = \max\{f(0); f(5)\}$.

Từ giả thiết, ta có $f(5) - f(3) = f(0) - f(2)$. (1)

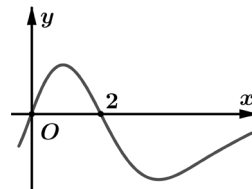
Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[2;5] \rightarrow f(3) > f(2)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $f(5) > f(0) \rightarrow \max_{[0;5]} f(x) = \{f(0), f(5)\} = f(5)$. **Chọn D.**

x	0	2	5
f'	—	0	+
f	$f(0)$	$f(2)$	$f(5)$

Câu 34. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Biết rằng $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$.

Hỏi trong các giá trị $f(0), f(1), f(3), f(4)$ giá trị nào là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;4]$?



- A. $f(0)$. B. $f(1)$. C. $f(3)$. D. $f(4)$.

Lời giải. Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

Từ BBT suy ra $\min_{[0;4]} f(x) = \min\{f(0), f(4)\}$.

Ta tiếp tục đi so sánh $f(0)$ và $f(4)$.

Từ giả thiết ta có

$$f(4) - f(0) = f(1) + f(3) - 2f(2) < 0$$

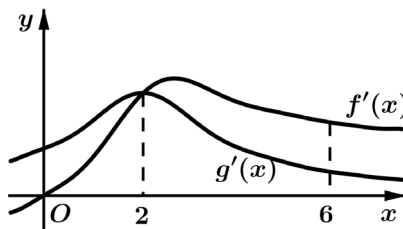
(vì $f(1) < f(2), f(3) < f(2)$).

x	0	1	2	3	4
f'		+	0	—	
f	$f(0)$	$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$

Suy ra $f(4) - f(0) < 0$ hay $f(4) < f(0)$. Vậy $\min_{[0;4]} f(x) = f(4)$. **Chọn D.**

Câu 35. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$

và $y = g'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0;6]$ lần lượt là



- A. $h(6), h(2)$. B. $h(2), h(6)$. C. $h(0), h(2)$. D. $h(2), h(0)$.

Lời giải. Xét trên đoạn $[0;6]$, ta có $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên

Từ bảng biến thiên, ta có $\min_{[0;6]} h(x) = h(2)$.

Từ giả thiết suy ra $f(0) - g(0) < f(6) - g(6)$

$\longrightarrow h(0) < h(6) \longrightarrow \max_{[0;6]} h(x) = h(6)$. **Chọn A.**

x	0	2	6
h'	-	0	+
h			

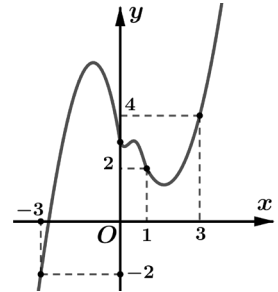
Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Xét hàm số $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$, mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

B. $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.

C. $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

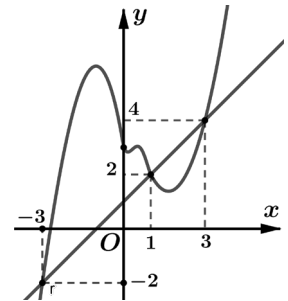
D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên $[3;3]$.



Lời giải. Ta có $g'(x) = 2f'(x) - 2(x+1)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+1$.

Suy ra số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm giữa đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng

$$y = x+1. \text{ Dựa vào đồ thị ta suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$



Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3		1		3	$+\infty$
g'	-	0	+	0	-	0	+
g							

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$. **Chọn A.**

Chú ý: Dấu của $g'(x)$ được xác định như sau: Ví dụ xét trên khoảng $(3; +\infty)$ ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y = x+1$ nên suy ra $g'(x) > 0$.

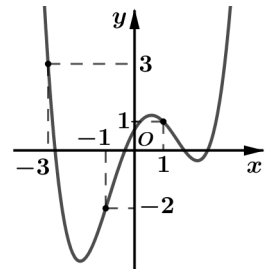
Câu 37. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như

hình vẽ bên. Xét hàm $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$,

mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$. B. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$.

C. $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$. D. $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$.



Lời giải. Ta có $g'(x) = f'(x) - \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính là số giao điểm của đồ thị (C) của hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị (H) của hàm số $h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.

Ta thấy (H) cắt (C) tại ba điểm $(-3; 3)$, $(-1; -2)$ và $(1; 1)$.

Do đó ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

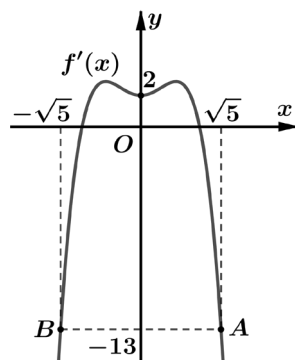
x	-3	-1	1
g'	-	0	+
g	$g(-3)$	$g(-1)$	$g(1)$

Bảng biến thiên như hình bên

Từ bảng biến thiên ta suy ra $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$. **Chọn B.**

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Xét hàm số $g(x) = 2f(x) + 2x^3 - 4x - 3m - 6\sqrt{5}$ với m là tham số thực. Để $g(x) \leq 0$ với mọi $x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$. B. $m \leq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$.
C. $m \leq \frac{2}{3}f(0) - 2\sqrt{5}$. D. $m \geq \frac{2}{3}f(-\sqrt{5}) - 4\sqrt{5}$.



Lời giải. Ta có $g'(x) = 2f'(x) + 6x^2 - 4$; $g'(x) = 0 \iff f'(x) = 2 - 3x^2$.

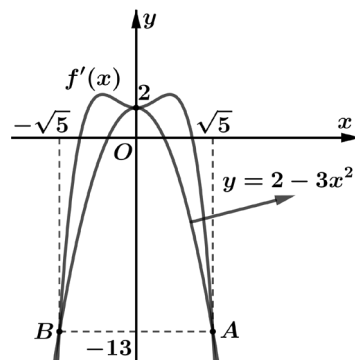
Để $g(x) \leq 0$ với $\forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ thì $\max_{[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} g(x) \leq 0$. (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = 3x^2 - 2$ ta thấy $f'(x) + 3x^2 - 2 \geq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$

$\implies g'(x) \geq 0, \forall x \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ nên hàm số $g(x)$ luôn đồng biến trên $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$.

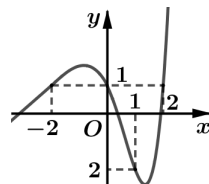
Suy ra $\max_{[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]} g(x) = g(\sqrt{5}) = 2f(\sqrt{5}) - 3m$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $m \geq \frac{2}{3}f(\sqrt{5})$. **Chọn A.**



Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[-2; 2]$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x) - x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $g(0) > g(-2) > g(2)$. B. $g(2) > g(0) > g(-2)$.
C. $g(2) > g(-2) > g(0)$. D. $g(0) > g(2) > g(-2)$.



Lời giải. Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường $y = 1$ cắt đồ thị hàm số

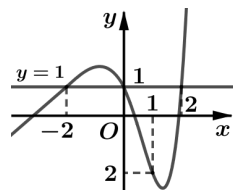
$y = f'(x)$ tại các điểm

$x = -2$

$x = 0$

$x = 2$

x	-2	0	2
g'	+	0	-
g	$g(-2)$ $g(0)$ $g(2)$		



Bảng biến thiên như hình bên

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $g(0)$ lớn nhất trong các giá trị $g(-2)$; $g(0)$; $g(2)$.

Dựa vào đồ thị, ta có $\int_{-2}^0 [f'(x) - 1] dx < \int_0^2 [1 - f'(x)] dx$

$$\Leftrightarrow \int_{-2}^0 g'(x) dx < -\int_0^2 g'(x) dx \Leftrightarrow g(0) - g(-2) < g(0) - g(2) \Leftrightarrow g(-2) > g(2).$$

Vậy $g(0) > g(-2) > g(2)$. **Chọn A.**

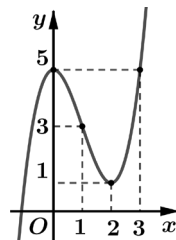
Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = 3f(x) + x^3 - 15x + 1$ trên đoạn $[0; 3]$ là

A. $g(0)$.

B. $g(1)$.

C. $g(2)$.

D. $g(3)$.



Lời giải. Ta có $g'(x) = 3f'(x) + 3x^2 - 15$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 5 - x^2$.

Đồ thị hàm số $f'(x)$ cắt đồ thị hàm số $y = 5 - x^2$ tại hai điểm $A(0; 5)$, $B(2; 1)$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy $\begin{cases} f'(x) > 5 - x^2 & \text{khi } x > 2 \\ f'(x) \leq 5 - x^2 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \longrightarrow \text{Hàm số } g(x)$

đồng biến trên $(2; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 2)$. Do đó

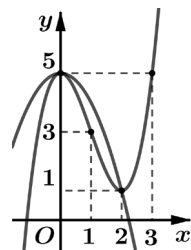
$$\max_{[0; 3]} g(x) = \max \{g(0), g(3)\}.$$

(1)

Dựa vào đồ thị, ta có $\int_2^3 [f'(x) - (x^2 - 5)] dx > -\int_0^2 [f'(x) - (x^2 - 5)] dx$

$$\text{hay } \int_2^3 g'(x) dx > -\int_0^2 g'(x) dx \Leftrightarrow \int_0^3 g'(x) dx > 0 \longrightarrow g(3) > g(0). \quad (2)$$

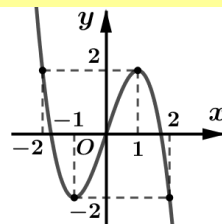
Từ (1) và (2), suy ra $\max_{[0; 3]} g(x) = g(3)$. **Chọn D.**



Phần 4. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Vấn đề 1) Tìm số đường tiệm cận thông qua đồ thị cho trước

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x+2}{f(x)+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?



A. 0.

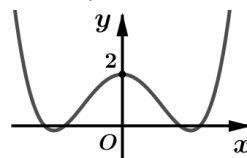
B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số ta suy ra phương trình $f(x) = -1$ có 3 nghiệm phân biệt là $x = a$ ($-2 < a < -1$), $x = b$ ($-1 < b < 0$) và $x = c$ ($1 < c < 2$). Nhận thấy các nghiệm này đều khác -2 . Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường TCD. **Chọn D.**

Câu 2. Cho hàm trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2018x}{f(x)[f(x)-1]}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ?



A. 2.

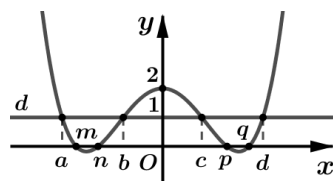
B. 3.

C. 4.

D. 9.

Lời giải. Ta có $f(x)[f(x)-1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}$. Dựa vào đồ

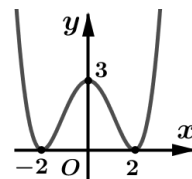
thị ta thấy phương trình $f(x)[f(x)-1] = 0$ có 8 nghiệm phân biệt trong đó không có nghiệm nào bằng 0 $\rightarrow$ đồ thị hàm số có 8 đường tiệm cận đứng.



Lại có $g(x)$ là hàm phân thức hữu tỷ với bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu $\rightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng một tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2018x}{f(x)(f(x)-1)}$ có 9 đường tiệm cận. **Chọn D.**

Câu 3. Cho hàm trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2018}{f(x)} + 2019$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận ?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Ta có $g(x) = \frac{2018}{f(x)} + 2019 = \frac{2018 + 2019f(x)}{f(x)}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow 2018 + 2019f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \longrightarrow$ ĐTHS có 2 TCD: $x = -2$ và $x = 2$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2019$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2019 \longrightarrow$ ĐTHS có TCN $y = 2019$. **Chọn C.**

Câu 4. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong

hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 1}{f^2(x) - 4f(x)}$ có tất cả bao

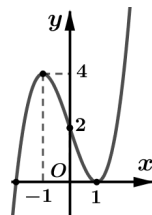
hiệu đường tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



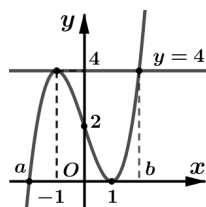
Lời giải. Ta có $f^2(x) - 4f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 4 & (2) \end{cases}$. Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy

• (1) có nghiệm $x_1 = a < -1$ (nghiệm đơn) và $x_2 = 1$ (nghiệm kép)

$$\longrightarrow f(x) = (x - a)(x - 1)^2.$$

• (2) có nghiệm $x_3 = -1$ (nghiệm kép) và $x_4 = b > 1$ (nghiệm đơn)

$$\longrightarrow f(x) - 4 = (x + 1)^2(x - b).$$



Do đó

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{f(x)[f(x) - 4]} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - a)(x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2(x - b)} = \frac{1}{(x - a)(x - 1) \cdot (x + 1)(x - b)}$$

$\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường TCD. **Chọn D.**

Câu 5. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong

hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x - 1)(x^2 - 1)}{f^2(x) - 2f(x)}$ có tất cả bao

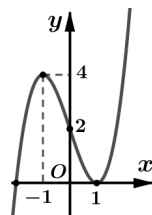
hiệu đường tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



Lời giải. Ta có $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}$. Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy

• (1) có nghiệm $x_1 = a < -1$ (nghiệm đơn) và $x_2 = 1$ (nghiệm kép)

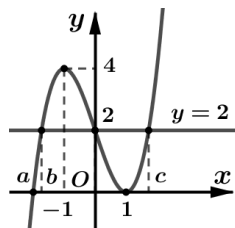
$$\longrightarrow f(x) = (x - a)(x - 1)^2.$$

• (2) có nghiệm $x_3 = b \in (a; -1)$, $x_4 = 0$ và $x_5 = c > 1$

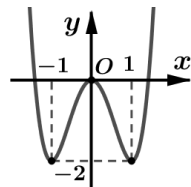
$$\longrightarrow f(x) - 2 = (x - b)x(x - c).$$

$$\text{Do đó } g(x) = \frac{(x - 1)^2(x + 1)}{(x - a)(x - 1)^2 \cdot (x - b)x(x - c)} = \frac{x + 1}{(x - a)(x - b)x(x - c)}$$

$\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường TCD. **Chọn D.**



Câu 6. Cho hàm trùng phương $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x(x-1)(x+1)^2}{f^2(x) + 2f(x)}$ có tất cả



bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Ta có $f^2(x) + 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = -2 & (2) \end{cases}$. Dựa vào đồ thị hàm số, ta có

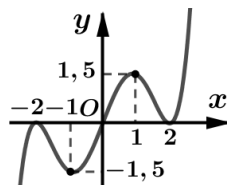
• (1) $\longrightarrow f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$.

• (2) $\longrightarrow f(x) = (x-a)x^2(x-b)$.

Do đó $g(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-a)(x-b)} \longrightarrow$ ĐTHS $g(x)$ có 4 đường TCD. **Chọn D.**

Câu 7. Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ

thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^3 - x}{4f^3(x) - 9f(x)}$ có bao



nhieu đường tiệm cận đứng?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải. Ta có $4f^3(x) - 9f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = -1,5 & (2) \\ f(x) = 1,5 & (3) \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị, ta có

• (1) $\longrightarrow f(x) = (x+2)^2 x (x-2)^2$.

• (2) có nghiệm $x = a < -2$ (nghiệm bội lẻ) và $x = -1$ (nghiệm bội chẵn). (4)

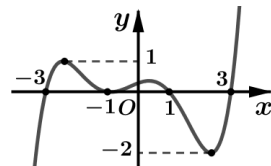
• (3) có nghiệm $x = b > 2$ (nghiệm bội lẻ) và $x = 1$ (nghiệm bội chẵn). (5)

Do đó $g(x) = \frac{x(x-1)(x+1)}{4f^3(x) - 9f(x)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)^2(x-2)^2[4f^2(x) - 9]}$. (6)

Từ (4), (5) và (6) $\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 6 đường TCD. **Chọn C.**

Câu 8. Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có

đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{f^2(x) + f(x) - 2}$ có



bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1.

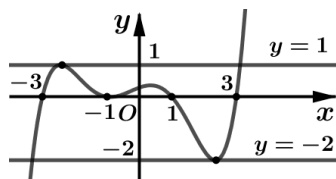
B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Điều kiện để $\sqrt{x}$ có nghĩa là $x \geq 0$.

Xét $f^2(x) + f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 & (1) \\ f(x) = -2 & (2) \end{cases}$.



- (1) có nghiệm $\begin{cases} x = a \in (-3; -1) \text{ (loại)} \\ x = b > 3 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$ • (2) có nghiệm $\begin{cases} x = c < -3 \text{ (loại)} \\ x = d \in (1; 3) \text{ (thỏa)} \end{cases}$

→ đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường TCD. **Chọn B.**

Câu 9. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường

cong hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-1}}{x[f^2(x) - f(x)]}$

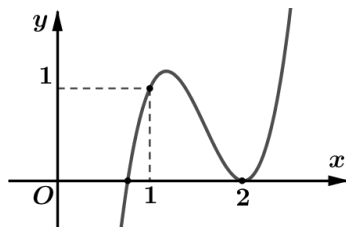
có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



Lời giải. Điều kiện để $\sqrt{x-1}$ có nghĩa là $x \geq 1$. Xét $f^2(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 1 & (2) \end{cases}$

- (1) có nghiệm $\begin{cases} x_1 = a < 1 \text{ (loại)} \\ x_2 = 2 \text{ (ngheem kep)} \end{cases}$ • (2) có nghiệm $\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = c \in (1; 2) \\ x_5 = d > 2 \end{cases}$

Do đó $g(x) = \frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x-1}}{x \cdot (x-a)(x-2)^2 \cdot (x-1)(x-c)(x-d)} = \frac{\sqrt{x-1}}{x(x-a)(x-2)(x-c)(x-d)}$

$\xrightarrow{x \geq 1}$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường TCD. **Chọn B.**

Câu 10. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong

hình bên. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ có tất cả

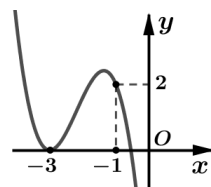
bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



Lời giải. Điều kiện để $\sqrt{x^2 + x}$ có nghĩa là $x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$.

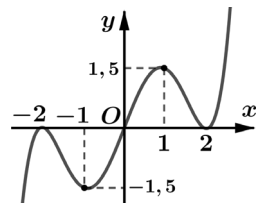
Xét $f^2(x) - 2f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}$. Dựa vào đồ thị, ta có

- (1) có nghiệm $\begin{cases} x_1 = -3 \text{ (ngheem kep)} \\ x_2 = a \in (-1; 0) \text{ (loại)} \end{cases}$ • (2) có nghiệm $\begin{cases} x_3 = -1 \\ x_4 = b \in (-3; -1) \\ x_5 = c < -3 \end{cases}$

Do đó $g(x) = \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x^2 + x}}{x \cdot (x+3)^2 \cdot (x-a) \cdot (x+1)(x-b)(x-c)} = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x \cdot (x+3)(x-a) \cdot (x-b)(x-c)}$

→ đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường TCD là $x = 0, x = b, x = -3, x = c$. **Chọn C.**

Câu 11. Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x - 2\sqrt{x-1}}{4f^3(x) - 9f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 7.

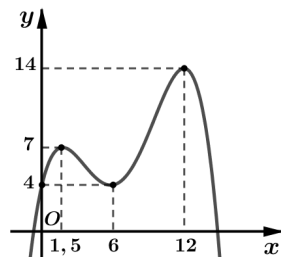
Lời giải. Điều kiện để $\sqrt{x-1}$ có nghĩa là $x \geq 1$.

$$\text{Ta có } g(x) = \frac{x - 2\sqrt{x-1}}{4f^3(x) - 9f(x)} = \frac{(x-2)^2}{f(x)[4f^2(x) - 9](x + 2\sqrt{x-1})}.$$

- $x + 2\sqrt{x-1} > 0, \forall x \geq 1$.
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 (\text{loại}) \\ x = 0 (\text{loại}) \\ x = 2 (\text{nghiệm kép}) \rightarrow \text{triet tieu} \end{cases}$.
- $f(x) = -1,5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a < -2 (\text{loại}) \\ x = -1 (\text{loại}) \end{cases}$.
- $f(x) = 1,5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 (\text{thỏa mãn}) \\ x = b > 2 (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường TCD. **Chọn A.**

Câu 12. Cho hàm bậc bốn $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2x^2 + 5x - 4x\sqrt{2x+1}}{f^2(x) - 11f(x) + 28}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải. Điều kiện để $\sqrt{2x+1}$ có nghĩa là $x \geq -\frac{1}{2}$.

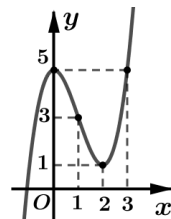
$$\text{Ta có } g(x) = \frac{x(\sqrt{2x+1} - 2)^2}{f^2(x) - 11f(x) + 28} = \frac{x(2x-3)^2}{[f(x)-7][f(x)-4](\sqrt{2x+1}+2)^2}.$$

- $f(x) = 4$ có nghiệm $x = 0$, $x = 6$ (nghiệm kép) và $x = a > 12$
 $\longrightarrow f(x) - 4 = x(x-6)^2(x-a).$
- $f(x) = 7$ có nghiệm $x = 1,5$ (nghiệm kép), $x = b \in (6; 12)$ và $x = c \in (12; a)$
 $\longrightarrow f(x) - 7 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2(x-b)(x-c).$

$$\text{Suy ra } g(x) = \frac{4}{(x-6)^2(x-a) \cdot (x-b)(x-c) \cdot (\sqrt{2x+1}+2)^2}$$

$\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng. **Chọn B.**

Câu 13. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{(x-1)(x-2)-2\sqrt{x^2-3x+1}}{f^2(x)-6f(x)+5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Điều kiện để $\sqrt{x^2-3x+1}$ có nghĩa là $x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ hoặc $x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$$\text{Khi đó } g(x) = \frac{(\sqrt{x^2-3x+1}-1)^2}{[f(x)-1][f(x)-5]} = \frac{x^2(x-3)^2}{[f(x)-1][f(x)-5](\sqrt{x^2-3x+1}+1)^2}.$$

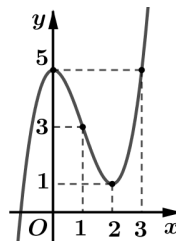
- $f(x) = 1$ có nghiệm $x = a < 0$ (nghiệm đơn) và $x = 2$ (nghiệm kép).
- $f(x) = 5$ có nghiệm $x = 0$ (nghiệm kép) và $x = 3$ (nghiệm đơn).

$$\text{Suy ra } g(x) = \frac{x^2(x-3)^2}{(x-a)(x-2)^2 x^2 (x-3)(\sqrt{x^2-3x+1}+1)^2} = \frac{x-3}{(x-2)^2 (x-a)(\sqrt{x^2-3x+1}+1)^2}$$

→ đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 đường tiệm cận đứng là $x = a$. **Chọn A.**

Câu 14. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình

vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{\sqrt{10x+9} + \sqrt{5-2x}}{8f^2(x) - 13f(x)}$ có bao nhiêu



đường tiệm cận đứng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

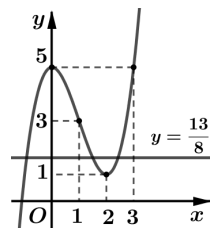
D. 4.

Lời giải. Điều kiện để căn thức có nghĩa là $\begin{cases} 10x+9 \geq 0 \\ 5-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{10} \leq x \leq \frac{5}{2}$.

Từ đồ thị của hàm số $f(x)$, ta tìm được $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.

$$\bullet f(x) \neq 0, \forall x \in \left[-\frac{9}{10}; \frac{5}{2}\right].$$

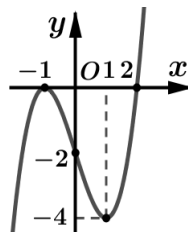
$$\bullet f(x) = \frac{13}{8} \xrightarrow{-\frac{9}{10} \leq x \leq \frac{5}{2}} \begin{cases} x = a \in \left(2; \frac{5}{2}\right) \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}.$$



Vậy hàm số đã cho có 2 tiệm cận đứng. **Chọn B.**

Câu 15. Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Đồ thị hàm

số $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy rằng $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & (\text{nghiệm kép}) \\ x = 2 & (\text{nghiệm đơn}) \end{cases}$

$$\longrightarrow f(x) = (x+1)^2(x-2). \text{ Khi đó } g(x) = \frac{\sqrt{(x+1)^2(x-2)}}{(x+1)^2(x-1)(x-3)}.$$

Vì hàm số $\sqrt{f(x)}$ xác định trên $\{-1\} \cup [2; +\infty)$ nên $x = -1, x = 1$ không là các đường TCD. Vậy ĐTHS $g(x)$ có 1 đường TCD là $x = 3$. **Chọn A.**

Vấn đề 2) Tìm số đường tiệm cận thông qua bảng biến thiên

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x)-m}$ có ba đường tiệm cận đứng ?

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$-$
f	$-\infty$	$\nearrow 4$	$\searrow -5$	$\nearrow 4$	$\searrow -\infty$

- A. $m < -5$. B. $m = -5$. C. $-5 < m < 4$. D. $-5 \leq m < 4$.

Lời giải. Để đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x)-m}$ có ba tiệm cận đứng thì phương trình

$f(x) - m = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Dựa vào BBT $\longrightarrow m = -5$. **Chọn B.**

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận (chỉ tính đường tiệm đứng và đường tiệm cận ngang) ?

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
f'	$+$	$+$	$-$	$-$
f	$-\infty$	$\nearrow +\infty$	$\searrow -\infty$	$\nearrow 1$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \longrightarrow \text{TCD: } x = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \longrightarrow \text{TCD: } x = 3 \end{cases}$

Lại có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \longrightarrow \text{TCN: } y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận. **Chọn C.**

Câu 18. Hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, có bảng biến thiên như hình bên. Gọi k, l lần lượt là số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(x)-1}$. Tính $k+l$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
y	$-\infty$	$\nearrow +\infty$	$\searrow +\infty$	$\nearrow +\infty$	$\searrow -\infty$

- A. $k+l = 2$. B. $k+l = 3$. C. $k+l = 4$. D. $k+l = 5$.

Lời giải. Dựa vào BBT, ta thấy $f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a < -1 \end{cases} \longrightarrow \text{ĐTHS } g(x) \text{ có hai TCD.}$

Lại có
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \longrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)-1} = 0 \longrightarrow y = 0 \text{ TCN} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)-1} = -1 \longrightarrow y = -1 \text{ TCN} \end{cases}$$

Vậy $k = 2, l = 2 \longrightarrow k + l = 4$. **Chọn C.**

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng

biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f^2(x)-1}$ có

bao nhiêu đường tiệm cận đứng ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

x	$-\infty$	$-0,5$	$+\infty$
f'		+	+
f	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	$\frac{3}{2}$

Lời giải. Ta có $f^2(x)-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=-1 & (1) \\ f(x)=1 & (2) \end{cases}$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy mỗi phương trình (1) và (2) đều có một nghiệm (hai nghiệm này khác nhau) $\longrightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x)$ có 2 đường TCD. **Chọn C.**

Câu 20. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên

như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{x^2-2x}{f^2(x)-4}$ có bao

nhiều đường tiệm cận đứng ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
f'	+	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	2	4	1	$+\infty$	

Lời giải. Ta có $f^2(x)-4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=-2 & (1) \\ f(x)=2 & (2) \end{cases}$. Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy

• (1) có nghiệm duy nhất $x = a < 0$

$\longrightarrow f(x)+2 = h(x).(x-a)$ với $h(x)$ là hàm bậc hai và $h(x) = 0$ vô nghiệm.

• (2) có nghiệm $x = 0, x = b \in (1; 2)$ và $x = c \in (2; +\infty)$

$\longrightarrow f(x)-2 = x(x-b)(x-c).$

$$\text{Do đó } g(x) = \frac{x(x-2)}{h(x)(x-a).x(x-b)(x-c)} = \frac{(x-2)}{h(x)(x-a).(x-b)(x-c)}$$

$\longrightarrow$ đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng. **Chọn C.**

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có

bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số

$g(x) = \frac{1}{f(3-x)-2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	3	0	$+\infty$	

Lời giải. Dựa vào BTT, ta thấy phương trình $f(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a < -2, \\ x = b \in (-2; 2), \\ x = c > 2 \end{cases}$.

$$\text{Suy ra } f(3-x) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = a \\ 3-x = b \\ 3-x = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-a \\ x = 3-b \\ x = 3-c \end{cases}$$

—→ đồ thị hàm số $g(x)$ có 3 đường TCD. **Chọn D.**

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{f(3-x) - 4}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	3	0	$+\infty$	

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải. Dựa vào BTT, ta thấy phương trình $f(x) = 4$ có duy nhất nghiệm $x = a > 2$.

$$\text{Suy ra } f(3-x) - 4 = 0 \Leftrightarrow 3-x = a \Leftrightarrow x = 3-a$$

—→ đồ thị hàm số $g(x)$ có 1 đường TCD. **Chọn B.**

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{1}{\log_2 f^2(x) - 4}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	5	2	$+\infty$	

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Ta có $\log_2 f^2(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -4 & (1) \\ f(x) = 4 & (2) \end{cases}$.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra

- (1) có 1 nghiệm $x = a < 0$.
- (2) có 3 nghiệm $x = b \in (a; 0)$, $x = c \in (0; 1)$ và $x = d > 1$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 4 đường tiệm cận đứng. **Chọn D.**

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2018}{e^{f^2(x)} - e}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng ?

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$-$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	3	1	$-\infty$	

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải. Ta có $e^{f^2(x)} - e = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -1 & (1) \\ f(x) = 1 & (2) \end{cases}$.

Câu 27. Có bao nhiêu số nguyên của tham số thực $m \in [-3; 6]$ để đồ thị hàm số

$$y = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-2x-m+2}-x-1} \text{ có đúng 4 đường tiệm cận ?}$$

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

Lời giải. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{1}{-\sqrt{2}-1}$ nên ĐTHS có 2 đường TCN.

Do đó để yêu cầu bài toán thỏa mãn khi ĐTHS có đúng 2 TCĐ

$\Leftrightarrow$ phương trình $\sqrt{2x^2-2x-m+2}-x-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\text{Ta có } \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x-m+2}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2-4x-m+1=0 \end{cases} \quad (*)$$

Để (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1^2-4 \cdot 1 \cdot (-m+1) \neq 0 \\ x_1 \geq -1 \\ x_2 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 > 0 \\ m \neq -2 \\ (x_1+1)(x_2+1) \geq 0 \\ (x_1+1)+(x_2+1) \geq 0 \end{cases} \xleftarrow[x_1x_2=-m+1]{x_1+x_2=4} (**) \begin{cases} -3 < m \leq 6 \\ m \neq 2 \end{cases}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 28. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-mx-3m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $m \in (-\infty; -12) \cup (0; +\infty)$.

B. $m \in (0; +\infty)$.

C. $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

D. $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -1 \\ x^2-mx-3m > 0 \end{cases}$. Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi phương trình

$x^2-mx-3m=0$ có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \geq -1 \\ x_2 \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+12m > 0 \\ (x_1+1)(x_2+1) \geq 0 \\ (x_1+1)+(x_2+1) \geq 0 \end{cases} \xleftarrow[x_1x_2=-3m]{x_1+x_2=m} \begin{cases} m^2+12m > 0 \\ -3m+m+1 \geq 0 \\ m+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{2}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 29. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{12+\sqrt{4x-x^2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $m \in \left[4; \frac{9}{2}\right)$.

B. $m \in \left(4; \frac{9}{2}\right]$.

C. $m \in [8; 9)$.

D. $m \in (0; 9]$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 6x + 2m > 0 \end{cases}$. Tương tự như bài trên, yêu cầu phương trình

$x^2 - 6x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 4] \longrightarrow 4 \leq m < \frac{9}{2}$. **Chọn A.**

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{1}{[x^2 - (2m+1)x + 2m]\sqrt{x-m}}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận.

- A. $m \in (0; 1)$. B. $m \in [0; 1]$. C. $m \in (0; 1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. D. $m \in (-\infty; 1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Lời giải. Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0 \longrightarrow$ đồ thị hàm số có TCN: $y = 0$.

Do đó để đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận $\longrightarrow$ đồ thị hàm số phải có 3 TCD $\longrightarrow$ phương trình $x^2 - (2m+1)x + 2m = 0$ (*) có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 - m > 0 \\ x_2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 8m > 0 \\ (x_1 - m)(x_2 - m) > 0 \\ (x_1 - m) + (x_2 - m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ 0 < m < 1 \end{cases}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 31. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-1; 3]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{2x - \sqrt{mx^2 + 1}}{(x-1)^2}$ có

đường tiệm cận đứng ?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải. Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} (2x - \sqrt{mx^2 + 1}) = 2 - \sqrt{m+1}$ với $m \geq -1$. Do đó với $m < -1$ thì hàm số không có giới hạn khi $x \rightarrow 1$ nên ĐTHS không có TCD.

• Với $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \neq 3 \end{cases}$ thì $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} (2x - \sqrt{mx^2 + 1}) = 2 - \sqrt{m+1} \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} y = \pm \infty$ nên ĐTHS có

TCD là $x = 1$.

• Với $m = 3$ ta có $\lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{3x^2 + 1}}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2 (2x + \sqrt{3x^2 + 1})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(2x + \sqrt{3x^2 + 1})(x-1)} = \infty$ nên ĐTHS có TCD là $x = 1$.

Vậy để ĐTHS có TCD thì $m \geq -1 \xrightarrow[m \in [-1; 3]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0; 1; 2; 3\}$. **Chọn D.**

Câu 32. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số a để đồ thị hàm số $y = ax + \sqrt{4x^2 + 1}$ có tiệm cận ngang ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải. Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} (ax + \sqrt{4x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a^2 - 4)x^2 - 1}{ax - \sqrt{4x^2 + 1}}$.

Với $a^2 - 4 \neq 0$ ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a^2 - 4)x^2 - 1}{ax - \sqrt{4x^2 + 1}} = \infty \longrightarrow$ ĐTHS không có TCN.

Với $a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$ ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a^2 - 4)x^2 - 1}{ax - \sqrt{4x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{ax - \sqrt{4x^2 + 1}} = 0 \longrightarrow$ ĐTHS có

TCN là $y = 0$. Vậy $a = \pm 2$ thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$$
 có hai tiệm cận ngang.

A. $m < 0$.

B. $m = 0$.

C. $m > 0$.

D. $m \in \emptyset$.

Lời giải. Khi $m > 0$, ta có

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \longrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{m}} \text{ là TCN ;}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{m}} \longrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{m}} \text{ là TCN.}$$

Với $m = 0$ suy $y = \frac{x+1}{1} \longrightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Với $m < 0$ thì hàm số có TXĐ là một đoạn nên đồ thị hàm số không có TCN.

Vậy với $m > 0$ thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang. **Chọn D.**

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để đồ thị hàm số

$$y = \frac{x-3}{x+\sqrt{mx^2+4}}$$
 có đúng một tiệm cận ngang ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải. Ta có

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x+\sqrt{mx^2+4}} = \frac{1}{1+\sqrt{m}} \text{ với } m \geq 0;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{x+\sqrt{mx^2+4}} = \frac{1}{1-\sqrt{m}} \text{ với } m \geq 0, m \neq 1.$$

$$\text{Nếu } m = 1 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-3)(\sqrt{x^2+4}-x)}{4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot \frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(-\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}-1\right)}{4} = -\infty,$$

suy ra hàm số chỉ có đúng một TCN là $y = \frac{1}{2}$ (do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{1}{2}$ khi $m = 1$). Do đó giá trị

$m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Nếu $\begin{cases} m \geq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$, để đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{m}} = \frac{1}{1-\sqrt{m}} \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy $m = 0$, $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn C.**

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để đồ thị hàm số

$$y = e^{\frac{3x - \sqrt{mx^2 + 1}}{x - \sqrt{(2018-m)x^2 + 1}}}$$
 có hai tiệm cận ngang ?

A. 2016.

B. 2017.

C. 2018.

D. 2019.

Lời giải. Nếu $m < 0$ hoặc $m > 2018$ thì TXĐ không chứa $\pm\infty$ nên không có TCN.

Xét $0 \leq m \leq 2018$, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = e^{\frac{3 - \sqrt{m}}{1 - \sqrt{2018-m}}}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = e^{\frac{3 + \sqrt{m}}{1 + \sqrt{2018-m}}}$.

$$\text{Để đồ thị hàm số có hai TCN ta cần } \begin{cases} 0 \leq m \leq 2018 \\ 1 - \sqrt{2018-m} \neq 0 \\ \frac{3 - \sqrt{m}}{1 - \sqrt{2018-m}} \neq \frac{3 + \sqrt{m}}{1 + \sqrt{2018-m}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq 2018 \\ m \neq 2017 \\ m \neq \frac{9081}{5} \end{cases}$$

$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 1; \dots; 2018\} \setminus \{2017\}$. **Chọn C.**

Phần 5. TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ

Vấn đề 1) Tìm nghiệm của phương trình thông qua biểu thức

Câu 1. Cho hàm số $g(x) = x^2 + 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Tìm m để phương trình $f[g(x)] - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-3 < m < -1$. B. $-3 < m \leq -1$. C. $-3 \leq m \leq -1$. D. $m > -1$.

Lời giải. Ta có $m = f[g(x)] = (x^2 + 1)^3 - 3(x^2 + 1)^2 + 1 = x^6 - 3x^2 - 1 = h(x)$.

Đạo hàm $h'(x) = 6x^5 - 6x = 0$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên như hình bên

Yêu cầu bài toán $\longrightarrow -3 < m < -1$. **Chọn A.**

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
h'	$-$	0	$+$	0	$+$
h	$+\infty$	-3	-1	-3	$+\infty$

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x)+m}) = x^3 - m$ có nghiệm $\forall x \in [1; 2]$ biết $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$.

A. 15. B. 16. C. 17. D. 18.

Lời giải. Đặt $y = \sqrt[3]{f(x)+m} \longrightarrow y^3 = f(x) + m$. (1)

Từ đề bài suy ra $f(y) = x^3 - m$. (2)

Lấy (1)+(2) ta được: $y^3 + f(y) = x^3 + f(x) \Leftrightarrow y^5 + y^3 = x^5 + 4x^3$

$\xrightarrow{\text{xét hàm}} y = x \xrightarrow{(1)} 3m = x^5 + 2x^3 = g(x)$.

Ta có $g'(x) = 5x^4 + 6x^2 \geq 0$ nên $g(x)$ đồng biến trên $[1; 2]$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g(1) \leq 3m \leq g(2) \longrightarrow 1 \leq m \leq 16$. **Chọn B.**

Câu 3. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình bậc ba $x^3 - 3x^2 + 2(1-m)x + 16 + 2m = 0$ có nghiệm nằm trong đoạn $[2; 4]$.

A. $m \geq \frac{11}{2}$. B. $\frac{20}{3} \leq m \leq 8$. C. $m \leq 8$. D. $\frac{11}{2} \leq m \leq 8$.

Lời giải. Phương trình $m = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + 16}{2x - 2} = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{8}{x-1} = f(x)$, $\forall x \in [2; 4]$.

Ta có $f'(x) = x - 1 - \frac{8}{(x-1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Bảng biến thiên như hình bên

Vậy để phương trình đã cho có nghiệm trong đoạn $[2; 4]$

thì $\frac{11}{2} \leq m \leq 8$. **Chọn D.**

x	2	3	4
f'	$-$	0	$+$
f	8	$\frac{11}{2}$	$\frac{20}{3}$

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt thì phương trình $2f(x)f''(x) = [f'(x)]^2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải. Gọi x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Đặt $g(x) = 2f(x).f''(x) - [f'(x)]^2$, có $g'(x) = 2f(x).f'''(x) = 12f(x)$;

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ hoặc $x = x_2$ hoặc $x = x_3$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	$+\infty$
g'		- 0 +	0 -	0 +	
g	$+\infty$	$-(f'(x_1))^2$	$-(f'(x_2))^2$	$-(f'(x_3))^2$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\longrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay phương trình $2f(x).f''(x) - (f'(x))^2 = 0$

có 2 nghiệm phân biệt. **Chọn B.**

Câu 5. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ (với $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0; b \neq 0$) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. Khi đó đồ thị hàm số $g(x) = [f'(x)]^2 - f''(x).f(x) = 0$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm?

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Lời giải. Gọi các hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành là x_1, x_2, x_3, x_4 . Suy ra $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$.

Đạo hàm $f'(x) = a(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + a(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) + a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) + a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

• Ta có $g(x_i) = [f'(x_i)]^2 - f''(x_i).f(x_i) = [f'(x_i)]^2 > 0, \forall x_i$

$\longrightarrow g(x) = 0$ không có nghiệm x_i .

• Xét $x \neq x_i$, ta có $f'(x) = f(x) \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} + \frac{1}{x - x_4} \right) = f(x) \cdot \sum_{i=1}^4 \frac{1}{x - x_i}$

$\longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{x - x_i} \longrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{x - x_i} \right)'$

$\longrightarrow \frac{f''(x).f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = -\sum_{i=1}^4 \frac{1}{(x - x_i)^2} < 0, \forall x$ hay $[f'(x)]^2 - f''(x).f(x) > 0, \forall x \neq x_i$

Vậy trong mọi trường hợp phương trình $g(x) = 0$ đều vô nghiệm. **Chọn A.**

Vấn đề 2) Tìm nghiệm của phương trình thông qua bảng biến thiên

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	$-$		$-$ 0 $+$	
f	2	$+\infty$	2	$+\infty$

Gọi h là số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 3$ và k là số nghiệm của phương trình $f(|x|) = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $h + k = 4$. B. $h + k = 6$. C. $h + k = 7$. D. $h + k = 8$.

Lời giải. Từ bảng biến thiên của hàm số $f(x)$, suy ra

† Bảng biến thiên của hàm số $|f(x)|$. Trong đó a là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành.

Dựa vào BBT $\longrightarrow |f(x)| = 3$ có đúng 3 nghiệm.

† Bảng biến thiên của hàm số $f(|x|)$. Dựa vào BBT $\longrightarrow f(|x|) = 3$ có đúng 4 nghiệm.

Vậy $h + k = 3 + 4 = 7$. **Chọn C.**

x	$-\infty$	a	0	2	$+\infty$
g'	$-$	$+$		$-$ 0 $+$	
g	2	0	$+\infty$	2	$+\infty$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
g'	$-$	0 $+$		$-$ 0 $+$	
g	$+\infty$	2	$+\infty$	2	$+\infty$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'	$+$		$+$ 0 $-$	
f	$-\infty$	$+\infty$	3	$-\infty$

Với m là tham số thực bất kỳ, phương trình $f(|x| + m) = 0$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?

- A. 3. B. 5 C. 6. D. 7.

Lời giải. Từ BBT của hàm số $y = f(x) \longrightarrow f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\longrightarrow f(x + m) = 0$ có tối đa ba nghiệm $\longrightarrow f(|x| + m) = 0$ có tối đa 6 nghiệm phân biệt (khi ĐTHS $y = f(x + m)$ cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ dương). **Chọn C.**

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 8]$, biết $f(1) = f(3) = f(8) = 2$ và có bảng biến thiên như sau

x	-1	2	5	8
f'	$-$	0	$+$	0 $-$
f	4	-3	4	2

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x) = f(m)$ có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 8]$?

A. 1.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải. Phương trình $f(x) = f(m)$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ và đường $d: y = f(m)$.

Để phương trình có ba nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 8] \xrightarrow{\text{BBT}} f(m) \in [2; 4)$

$\xrightarrow{\text{BBT}} m \in (-1; 1] \cup [3; 5) \cup (5; 8]$. **Chọn B.**

x	-1	1	2	3	5	8	
f'	-	-	0	+	+	0	-
f	4	2	-3	2	4	2	

Câu 9. Cho hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	0	1	2	3	5
u	4	1	3	1	3

Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} = m.u(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0; 5]$?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải. Từ BBT ta có $1 \leq u(x) \leq 4$ với mọi $x \in [0; 5]$.

Xét hàm $f(x) = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}$ trên $[0; 5]$, ta được $\begin{cases} \min_{x \in [0; 5]} f(x) = f(0) = \sqrt{10} \\ \max_{x \in [0; 5]} f(x) = f(3) = 5 \end{cases}$.

Từ đó suy ra $\frac{\sqrt{10}}{4} \stackrel{\text{khi } x=0}{\leq} \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{u(x)} \stackrel{\text{khi } x=3}{\leq} 5 \longrightarrow$ để phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{4} \leq m \leq 5$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$. **Chọn C.**

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau

x	1	2	3
y'	+	0	-
y	-6	-1	-3

Tổng các giá trị $m \in \mathbb{Z}$ sao cho phương trình $f(x-1) = \frac{m}{x^2 - 6x + 12}$ có hai nghiệm phân biệt trên đoạn $[2; 4]$ bằng

A. -297.

B. -294.

C. -72.

D. 131.

Lời giải. Từ đề, suy ra $m = (x^2 - 6x + 12) \cdot f(x-1), \forall x \in [2; 4]$.

Xét hàm số $g(x) = (x^2 - 6x + 12) \cdot f(x-1), \forall x \in [2; 4]$.

Ta có $g'(x) = (2x-6) \cdot f(x-1) + (x^2 - 6x + 12) \cdot f'(x-1) = 0 \xleftarrow{x \in [2; 4]} x = 3$. Thật vậy

$$\bullet 2 \leq x < 3 \rightarrow \begin{cases} 2x-6 < 0 \\ f(x-1) < 0 \\ x^2-6x+12 > 0 \\ f'(x-1) > 0 \end{cases} \rightarrow g'(x) > 0. \bullet 3 < x \leq 4 \rightarrow \begin{cases} 2x-6 > 0 \\ f(x-1) < 0 \\ x^2-6x+12 > 0 \\ f'(x-1) < 0 \end{cases} \rightarrow g'(x) < 0.$$

Bảng biến thiên như hình bên

Dựa vào BBT, suy ra $-12 \leq m < -3$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-12; -11; \dots; -4\} \rightarrow S = -72.$$

Chọn C.

x	2	3	4
g'	+	0	-
g	-24	-3	-12

Vấn đề 3) Tìm nghiệm của phương trình thông qua đồ thị

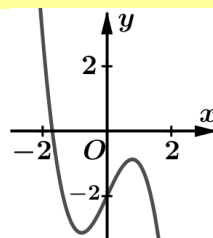
Câu 11. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $[f(x)]^2 = 4$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 6.



Lời giải. Ta có $[f(x)]^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 & (1) \\ f(x) = -2 & (2) \end{cases}$ Phương trình (1) có đúng 1 nghiệm.

Phương trình (2) có 3 nghiệm. Vậy phương trình $[f(x)]^2 = 4$ có 4 nghiệm. **Chọn C.**

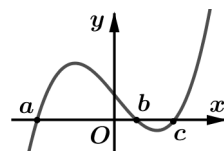
Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm a, b, c ($a < b < c$) như hình vẽ. Biết $f(b) < 0$, hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu điểm phân biệt?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



Lời giải. Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta có BBT của hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Do $f(a), f(b), f(c)$ đều âm nên đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm. **Chọn B.**

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
f'	-	0	+	0	-
f		$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	

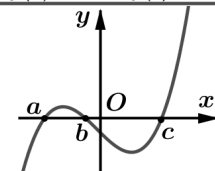
Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm a, b, c ($a < b < c$) như hình vẽ. Biết $f(a) > 0$, hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành nhiều nhất bao nhiêu điểm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



Lời giải. Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta có BBT của hàm số $y = f(x)$ như hình bên. Do $f(b) > f(a) > 0$ nên đồ thị hàm

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
f'	-	0	+	0	-
f		$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	

số $f(x)$ cắt trục hoành tại nhiều điểm nhất khi $f(c) < 0$. Khi đó đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm. **Chọn B.**

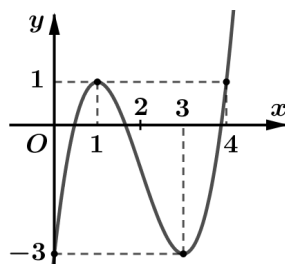
Câu 14. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $[f(x)]^3 - 6[f(x)]^2 + 9f(x) - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm ?

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 9.



Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra phương trình

$$[f(x)]^3 - 6[f(x)]^2 + 9f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \quad (0 < a < 1) & (1) \\ f(x) = b \quad (1 < b < 2) & (2). \\ f(x) = c \quad (3 < c < 4) & (3) \end{cases}$$

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (C): $y = f(x)$ với đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 1$). Dựa vào đồ thị ta thấy d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt. Do đó (1) có ba nghiệm. Tương tự (2) có một nghiệm, (3) có một nghiệm.

Do đó phương trình đã cho có tất cả 5 nghiệm. **Chọn B.**

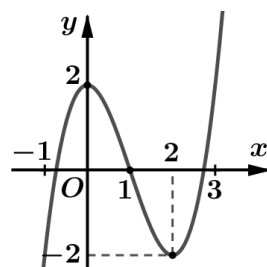
Câu 15. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $(x^3 - 3x^2 + 2)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 2)^2 + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực dương phân biệt ?

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 9.



Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra phương trình

$$(x^3 - 3x^2 + 2)^3 - 3(x^3 - 3x^2 + 2)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = a \quad (-1 < a < 0) & (1) \\ x^3 - 3x^2 + 2 = 1 & (2). \\ x^3 - 3x^2 + 2 = b \quad (2 < b < 3) & (3) \end{cases}$$

Như bài trước, dễ dàng nhận thấy (1) có 3 nghiệm nhưng có 2 nghiệm thực dương; (2) có 3 nghiệm nhưng có 2 nghiệm thực dương, (3) có duy nhất 1 nghiệm dương.

Do đó phương trình đã cho có tất cả 5 nghiệm thực dương. **Chọn B.**

Câu 16. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

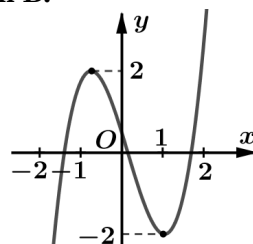
Phương trình $f[f(x)] = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt ?

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 9.



Lời giải. Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra phương trình

$$f[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \quad (-2 < a < -1) & (1) \\ f(x) = b \quad (0 < b < 1) & (2). \\ f(x) = c \quad (1 < c < 2) & (3) \end{cases}$$

Mỗi phương trình đều có 3 nghiệm. **Chọn D.**

Câu 17. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi m là số nghiệm thực của phương trình $f[f(x)] = 1$.

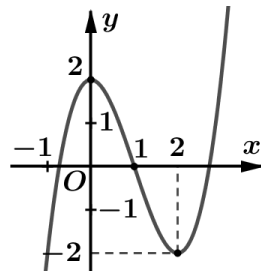
Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $m = 3$.

B. $m = 4$.

C. $m = 7$.

D. $m = 9$.



Lời giải. Đặt $t = f(x)$. Dựa vào đồ thị, ta có $f(t) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a \quad (-1 < a < 0) \\ t = b \quad (0 < b < 1) \\ t = c \quad (c > 2) \end{cases}$.

- Phương trình $t = a$, suy ra $f(x) = a \quad (-1 < a < 0)$ có 3 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $t = b$, suy ra $f(x) = b \quad (0 < b < 1)$ có 3 nghiệm phân biệt.
- Phương trình $t = c$, suy ra $f(x) = c \quad (c > 2)$ có 1 nghiệm. Vậy $m = 7$. **Chọn C.**

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $\frac{f[f(x)]}{3f^2(x) - 5f(x) + 4} = 1$ có bao nhiêu

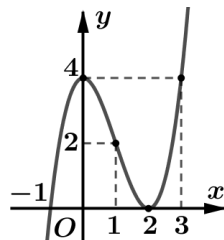
nghiệm thực ?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 8.



Lời giải. Ta có $\frac{f[f(x)]}{3f^2(x) - 5f(x) + 4} = 1 \Leftrightarrow f^3(x) - 3f^2(x) + 4 = 3f^2(x) - 5f(x) + 4$

$$\Leftrightarrow f^3(x) - 6f^2(x) + 5f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 1 & (2). \\ f(x) = 5 & (3) \end{cases}$$

nghiệm; (2) có 3 nghiệm; (3) có 1 nghiệm. **Chọn C.**

Câu 19. Cho hàm bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.

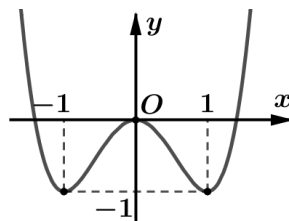
Phương trình $\sqrt{f[\sqrt{f(x)}]} + 2 = f(x) + 1$ có bao nhiêu nghiệm

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



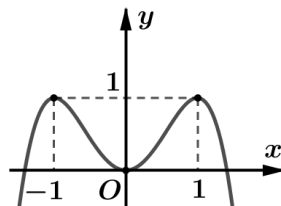
Lời giải. Dựa vào đồ thị $\longrightarrow f(x) = x^4 - 2x^2$.

Đặt $t = \sqrt{f(x)}$, $t \geq 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{f(t)+2} = t^2 + 1 \Leftrightarrow f(t)+2 = t^4 + 2t^2 + 1 \xrightarrow{t \geq 0} t = \frac{1}{2}.$$

Do đó $f(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2}}$. Vậy phương có 2 nghiệm. **Chọn A.**

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn nghiệm của phương trình $f[f(\cos 2x)] = 0$?



A. 1 điểm.

B. 3 điểm.

C. 4 điểm.

D. Vô số.

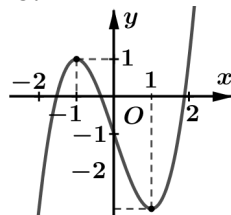
Lời giải. Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x \in [-1; 1]$ thì $y \in [0; 1]$.

Do đó nếu đặt $t = \cos 2x$ thì $t \in [-1; 1]$, khi đó $f(\cos 2x) \in [0; 1]$.

$$\text{Dựa vào đồ thị, ta có } f[f(\cos 2x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos 2x) = 0 \\ f(\cos 2x) = a \ (a < -1) \text{ (loại)} \\ f(\cos 2x) = b \ (b > 1) \text{ (loại)} \end{cases}$$

Phương trình $f(\cos 2x) = 0 \longrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$. Vậy phương trình đã cho có 4 điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác. **Chọn C.**

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f[f(\cos x) - 1] = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?



A. 2.

B. 4.

C. 5.

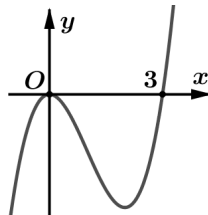
D. 6.

Lời giải. Dựa vào đồ thị ta có $f[f(\cos x) - 1] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) - 1 = x_1; x_1 \in (-2; -1) \\ f(\cos x) - 1 = x_2; x_2 \in (-1; 0) \\ f(\cos x) - 1 = x_3; x_3 \in (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) = x_1 + 1 = m_1 \in (-1; 0) \\ f(\cos x) = x_2 + 1 = m_2 \in (0; 1) \\ f(\cos x) = x_3 + 1 = m_3 \in (2; 3) \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Xét (1) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f(t)$ trên đoạn $[-1; 1]$ với đường thẳng $y = m_1$ ($-1 < m_1 < 0$). Dựa vào đồ thị ta thấy (1) có 1 nghiệm, tức là có 1 giá trị của $\cos x \xrightarrow{x \in [0; 2\pi]} \longrightarrow$ cho ra 2 nghiệm x . Tương tự (2) có 2 nghiệm x ; (3) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm. **Chọn B.**

Câu 22. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thực của phương trình $f\left(\sqrt{-x^2 + 4x - 3}\right) = -2$.



- A. 1.** **B. 2.**
C. 3. **D. 4.**

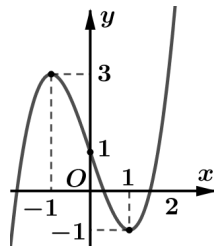
Lời giải. $\sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ xác định khi $1 \leq x \leq 3$.

Từ đồ thị của hàm số, ta có $f(\sqrt{-x^2+4x-3}) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-x^2+4x-3} = a < 0 \text{ (loại)} \\ \sqrt{-x^2+4x-3} = 1 \\ \sqrt{-x^2+4x-3} = b \in (2;3) \end{cases}.$

- $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = 1 \Leftrightarrow x = 2$.
- $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} = b \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 + b^2 = 0$ có $\Delta' = 4 - (3 + b^2) = 1 - b^2 < 0, \forall b \in (2; 3)$.

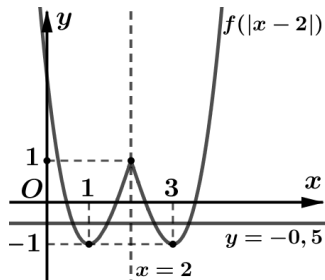
Vậy phương trình $f(\sqrt{-x^2 + 4x - 3}) = -2$ có đúng 1 nghiệm. **Chọn A.**

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi phương trình $f(|x-2|) = -\frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?

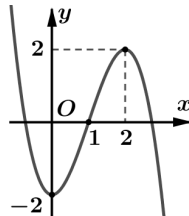


- A. 0.** **B. 2.**
C. 4. **D. 6.**

Lời giải. Hàm $f(|x+m|)$ được thực hiện bằng cách lấy đối xứng qua trục Oy trước, sau đó mới tịnh tiến. Do đó lấy đối xứng phần đồ thị của $f(x)$ bên phải trục tung qua Oy , sau đó tịnh tiến sang phải 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $f(|x-2|)$ (tham khảo hình vẽ). Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ cắt đồ thị tại 4 điểm phân biệt $\rightarrow$ phương trình $f(|x-2|) = -\frac{1}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt. **Chọn C.**



Câu 24. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó phương trình $2\left|f\left(x^3 - 1\right)\right| - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm lớn hơn 1 ?



- A. 2.** **B. 4.**
C. 6. **D. 8.**

Lời giải. Đặt $t(x) = x^3 - 1$ (vì $t(x)$ đồng biến nên mỗi x có một t). Với $x > 1 \rightarrow t > 0$.

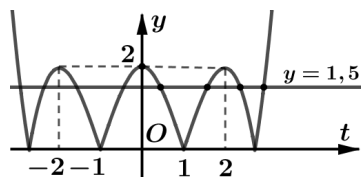
Phương trình trở thành $|f(|t|)| = \frac{3}{2}$ với $t > 0$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm

của đồ thị $y = |f(|t|)|$ với $t > 0$ và đường thẳng $y = \frac{3}{2}$

(tham khảo hình vẽ). Dựa vào đồ thị ta thấy phương

trình $|f(|t|)| = \frac{3}{2}$ có 4 nghiệm dương nên suy ra

phương trình đã cho có 4 nghiệm lớn hơn 1. **Chọn B.**

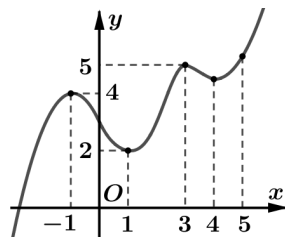


Câu 25. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị

như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số

m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực

phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Đặt $t = x^2 - 2x$, với $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ thì $t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$.

Nhận xét: Cứ một nghiệm $t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$ sẽ cho hai nghiệm x và $t = -1$ sẽ cho một

nghiệm x . Do đó để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm $\Leftrightarrow f(t) = m$ có đúng 2 nghiệm.

Dựa vào đồ thị, ta có $f(t) = m$ với $t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$ có đúng 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 4 \\ m = 5 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 26. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Với

m là tham số thực bất kì thuộc đoạn $[0; 5]$, hỏi phương trình

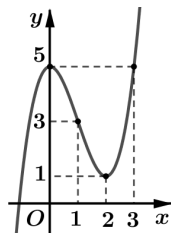
$f(x^3 - x^2 + 6x) = \sqrt{2m} + \sqrt{5-m}$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.



Lời giải. Đặt $k = \sqrt{2m} + \sqrt{5-m}$. Ta có $\begin{cases} k \geq \sqrt{m+5} \geq \sqrt{5} \\ k \leq \sqrt{2+1} \cdot \sqrt{m+5-m} = \sqrt{15} \end{cases} \longrightarrow \sqrt{5} \leq k \leq \sqrt{15}$.

Đặt $t = x^3 - x^2 + 6x$ (vì là hàm đồng biến nên mỗi t có một x).

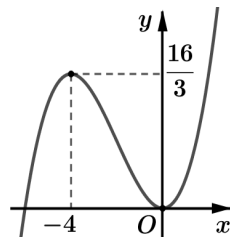
Phương trình trở thành $f(t) = k$ với $k \in [\sqrt{5}; \sqrt{15}]$. Dựa vào đồ thị ta thấy đường

thẳng $y = k$ với $k \in [\sqrt{5}; \sqrt{15}]$ cắt đồ thị $f(t)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình

$f(t) = k$ luôn có 3 nghiệm $t \longrightarrow$ phương trình $f(x^3 - x^2 + 6x) = \sqrt{2m} + \sqrt{5-m}$ với

$m \in [0; 5]$ có 3 nghiệm x . **Chọn C.**

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ. Với m là tham số bất kì thuộc $[0;1]$. Phương trình $f(x^3 - 3x^2) = 3\sqrt{m} + 4\sqrt{1-m}$ có bao nhiêu nghiệm thực?



A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 9.

Lời giải. Đặt $k = 3\sqrt{m} + 4\sqrt{1-m} \rightarrow 3 \leq k \leq 5$.

Đặt $t(x) = x^3 - 3x^2$, có $t'(x) = 3x^2 - 6x$; $t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên như hình bên.

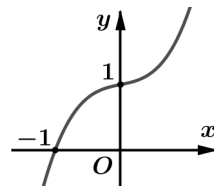
Phương trình trở thành $f(t) = k$ với $k \in [3;5]$

do thi $\begin{cases} t = a > 0 \xrightarrow{\text{BBT}} 1 \text{ nghiệm } x \\ t = b (-4 < b < 0) \xrightarrow{\text{BBT}} 3 \text{ nghiệm } x. \\ t = c < -4 \xrightarrow{\text{BBT}} 1 \text{ nghiệm } x \end{cases}$

x	0	2
t'	-	+
t	0	-4

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm x . **Chọn C.**

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(6\sin x + 8\cos x) = f(m(m+1))$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$?



A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

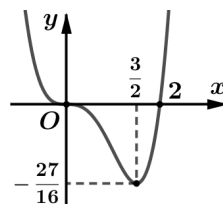
Lời giải. Dựa vào đồ thị ta có $y = f(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $f(6\sin x + 8\cos x) = f(m(m+1)) \Leftrightarrow 6\sin x + 8\cos x = m(m+1)$.

Mà $-10 \leq 6\sin x + 8\cos x \leq 10$ nên $-10 \leq m(m+1) \leq 10 \rightarrow \frac{-1-\sqrt{41}}{2} \leq m \leq \frac{-1+\sqrt{41}}{2}$.

Vậy có 6 số nguyên m thỏa yêu cầu bài toán. **Chọn D.**

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|2\sin x|) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$?



A. 2.

B. 3.

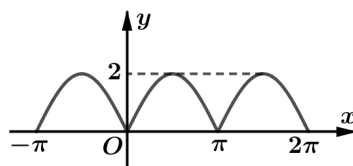
C. 4.

D. 5.

Lời giải. Đặt $t = 2|\sin x|$ ($0 \leq t \leq 2$). Ta thấy $t = 0$ cho ta 4 nghiệm $x \in [-\pi; 2\pi]$, mỗi $t \in (0; 2)$ cho ta 6 nghiệm $x \in [-\pi; 2\pi]$, $t = 2$ cho ta 3 nghiệm $x \in [-\pi; 2\pi]$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(t) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có

tối đa 2 nghiệm t (đường thẳng $y = f\left(\frac{m}{2}\right)$ cắt đồ thị tối đa hai điểm). Do đó để phương trình đã cho có

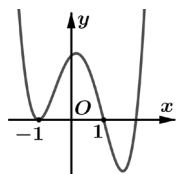


đúng 12 nghiệm x phân biệt thuộc $[-\pi; 2\pi]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 2 nghiệm t phân biệt thuộc $(0; 2)$

$$\longrightarrow -\frac{27}{16} < f\left(\frac{m}{2}\right) < 0, \text{ suy ra } \begin{cases} 0 < \frac{m}{2} < 2 \\ \frac{m}{2} \neq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{1; 2\}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 30. Cho hàm số $y = (x^2 - 1) \cdot f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$$f(x) = \frac{x}{|x^2 - 1|} \text{ thuộc khoảng nào sau đây ?}$$

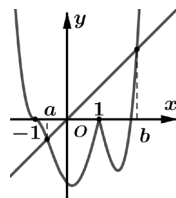


- A. $(0; 2)$. B. $(1; 3)$. C. $(2; 4)$. D. $(3; 5)$.

Lời giải. Ta có $f(x) = \frac{x}{|x^2 - 1|} \longrightarrow x = |x^2 - 1| f(x)$.

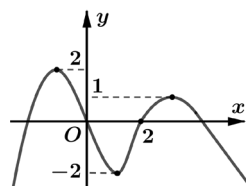
Đồ thị hàm số $|x^2 - 1| f(x)$ xác định bằng cách giữ phần $x \geq 1$ và $x \leq -1$ của đồ thị hàm số $(x^2 - 1) f(x)$ và lấy đối xứng phần $-1 < x < 1$ của đồ thị hàm số $(x^2 - 1) f(x)$ qua trục Ox .

Vẽ đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị hàm số $|x^2 - 1| f(x)$ tại hai điểm $x = a$ ($-1 < a < 0$) và $x = b$ ($2 < b < 3$). Do đó tổng các nghiệm của phương trình $f(x) = \frac{x}{|x^2 - 1|}$ nằm trong khoảng $(1; 3)$. **Chọn B.**



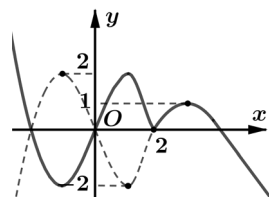
Câu 31. Cho hàm số $g(x) = (x - 2) \cdot f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi với m thuộc khoảng nào dưới đây thì phương trình $f(x)|x - 2| = m$ có nhiều nghiệm nhất ?

- A. $(-2; 0)$. B. $(0; 1)$.
C. $(1; 2)$. D. $(0; 2)$.

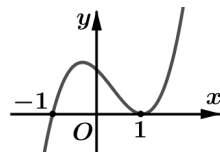


Lời giải. Đồ thị hàm số $f(x)|x - 2|$ được xác định bằng cách giữ phần $x \geq 2$ của đồ thị hàm số $f(x)(x - 2)$ và lấy đối xứng qua Ox phần $x < 2$ của đồ thị hàm số $f(x)(x - 2)$.

Dựa vào đồ thị suy ra, để số nghiệm của phương trình $f(x)|x - 2| = m$ là lớn nhất thì $m \in (0; 1)$. **Chọn B.**

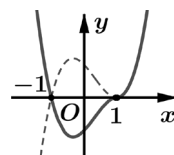


Câu 32. Cho hàm số $y = (x-1).f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y = m^2 - m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)|x-1|$ tại hai điểm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-1;1]$.

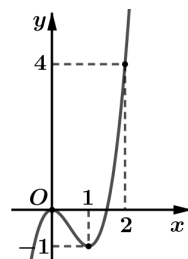


- A. $m > 0$. B. $m > 1$ hoặc $m < 0$. C. $m < 1$. D. $0 < m < 1$.

Lời giải. Đồ thị hàm số $f(x)|x-1|$ như hình bên. Dựa vào đồ thị suy ra, để phương trình $f(x)|x-1| = m^2 - m$ có hai nghiệm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-1;1]$ thì $m^2 - m > 0 \rightarrow m > 1$ hoặc $m < 0$. **Chọn B.**



Câu 33. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - 3x^2$. Sử dụng đồ thị đã cho tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $16|x|^3 - 12x^2(x^2 + 1) = m(x^2 + 1)^3$ có nghiệm.



- A. $-1 \leq m \leq 0$. B. $-1 \leq m \leq 4$.
C. $1 \leq m \leq 4$. D. Với mọi m .

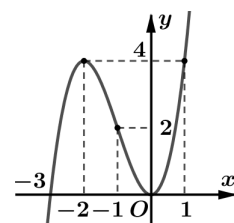
Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow 16\left|\frac{x}{x^2+1}\right|^3 - 12\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 = m \Leftrightarrow 2\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|^3 - 3\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^2 = m$.

Đặt $t = \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \geq 0$. Ta có $x^2 + 1 \geq 2x$ suy ra $t = \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1$. Do đó $0 \leq t \leq 1$.

Phương trình trở thành $2t^3 - 3t^2 = m$ (*). Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2t^3 - 3t^2$ (chỉ xét trong phần $t \in [0;1]$) và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm thuộc đoạn $[0;1] \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$. **Chọn A.**

Câu 34. Hình bên là đồ thị của hàm số $y = x^3 + 3x^2$. Sử dụng đồ thị đã cho tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{-x^3 + m}$ có hai nghiệm thực âm phân biệt.



- A. $-1 \leq m \leq 1$. B. $-1 \leq m < 1$.
C. $-1 < m < 1$. D. $m = -4$.

Lời giải. Điều kiện: $|x| \geq 1$ (1) và $x \leq \sqrt[3]{m}$ (2).

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow 3x^2 - 3 = -x^3 + m \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 = m + 3$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (C): $y = x^3 + 3x^2$ (chỉ xét trong phần x thỏa điều kiện (1) & (2)) và đường thẳng $d: y = m + 3$ (cùng phương với trục hoành).

Để phương trình $\sqrt{3x^2 - 3} = \sqrt{-x^3 + m}$ có hai nghiệm thực âm phân biệt khi d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn hoặc bằng -1 .

Dựa vào đồ thị ta suy ra $2 \leq m + 3 < 4 \Leftrightarrow -1 \leq m < 1$. **Chọn B.**

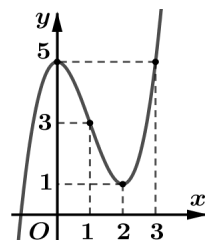
Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tồn tại bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{2x} + \sqrt{3-x} = m \cdot f(x)$ có nghiệm trên đoạn $[0; 3]$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.



Lời giải. $\sqrt{2x} + \sqrt{3-x}$ có nghĩa khi và chỉ khi $x \in [0; 3]$. Khi đó $m = \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{3-x}}{f(x)}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sqrt{2x} + \sqrt{3-x} \leq \sqrt{x+3-x} \cdot \sqrt{2+1} = 3 \\ f(x) \geq f(2) = 1 \end{cases} \longrightarrow \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{3-x}}{f(x)} \leq 3, \forall x \in [0; 3].$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} \sqrt{2x} + \sqrt{3-x} \geq \sqrt{2x+3-x} = \sqrt{3+x} \geq \sqrt{3} \\ f(x) \leq f(0) = 5 \end{cases} \longrightarrow \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{3-x}}{f(x)} \geq \frac{\sqrt{3}}{5}, \forall x \in [0; 3].$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

$$\text{Vậy } \frac{\sqrt{3}}{5} \leq m \leq 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1; 2; 3\}. \text{ Chọn B.}$$