

CHUYÊN ĐỀ 1_GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Góc lượng giác và số đo của góc lượng giác

Trong mặt phẳng, cho hai tia Ou, Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia Om quay quanh điểm O , theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov , thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu Ou , tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov) . Quy ước chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương, chiều quay cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm.

Số đo của góc lượng giác có tia đầu Ou , tia cuối Ov được kí hiệu là $sđ(Ou, Ov)$.

2. Đơn vị đo góc và độ dài cung tròn

Để đo góc, ta dùng đơn vị độ và radian.

Quan hệ giữa độ và radian: $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ và $1\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Một cung của đường tròn bán kính R và có số đo α rad thì độ dài $l = R\alpha$. Trên đường tròn lượng giác, ta biểu diễn một góc lượng giác có số đo bằng α (độ hoặc radian) bằng cách chọn tia đầu là tia OA và tia cuối là tia OM , với điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $sđ(OA, OM) = \alpha$. Điểm M được gọi là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α .

Các giá trị $\cos\alpha, \sin\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của $\alpha, \sin\alpha, \cos\alpha$ xác định với mọi giá trị của α ; $\tan\alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$; $\cot\alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

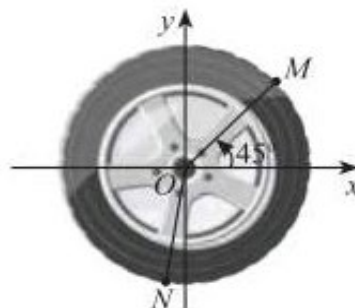
B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2h.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: 1h; 3h; 5h.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

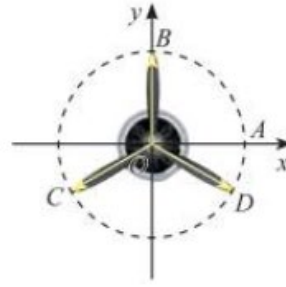
Câu 2: Trong Hình 15, mâm bánh xe ô tô được chia thành 5 phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON) .



Hình 15

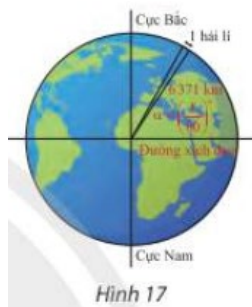
Câu 3: Vị trí các điểm B, C, D trên cánh quạt động cơ máy bay trong Hình 16 có thể được biểu diễn cho các góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$



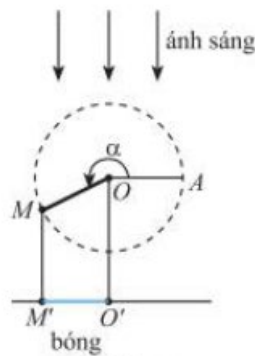
Hình 16

Câu 4: Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371 km. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 17

Câu 5: Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như Hình 12. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M$ của OM khi thanh quay được $3\frac{1}{10}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 15 cm? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 12

Câu 6: Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là 11 rad/s (Hình 13). Ban đầu van nằm ở vị trí A . Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA = 58$ cm? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



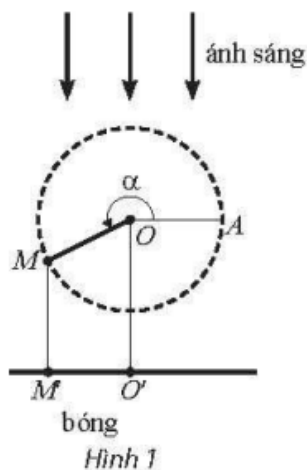
Hình 13

- Câu 7:** Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.
- Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.
 - Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 680 mm.
- Câu 8:** Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương.
- Sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?
 - Sau thời gian bao lâu cánh quạt quay được một góc có số đo 42π ?
- Câu 9:** Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe.
- Sau 1 phút, van V đó quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?
 - Biết rằng bán kính của bánh xe là 35 cm. Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là bao nhiêu mét?



Hình 6

- Câu 10:** Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M$ của OM khi thanh quay được $\frac{60}{13}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 10 cm? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Câu 11: Độ dài của ngày từ lúc Mặt Trời mọc đến lúc Mặt Trời lặn ở một thành phố X trong ngày thứ t của năm được tính xấp xỉ bởi công thức $d(t) = 4\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right] + 12$ ($t \in \mathbb{Z}$ và $1 \leq t \leq 365$).

Thành phố X vào ngày 31 tháng 1 có bao nhiêu giờ có Mặt Trời chiếu sáng? Làm tròn kết quả đến hàng

phần mười.

Câu 12: Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất. Giả sử vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h theo chiều kim đồng hồ. Khi vệ tinh chuyển động được 3 h, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Câu 13: Một vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút. Tại vị trí quan sát, bạn Linh thấy vòng quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ. Khi vòng quay chuyển động được 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Câu 14: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 12 vòng trong 6 giây.

a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 860 mm.

Câu 15: Kim giờ dài 6 cm và kim phút dài 11 cm của đồng hồ chỉ 4 giờ. Hỏi thời gian ít nhất để 2 kim vuông góc với nhau là bao nhiêu? Lúc đó tổng quãng đường hai đầu mút kim giờ và kim phút đi được là bao nhiêu?

Câu 16: Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 45 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều thuận. Sau 3 giây, quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

Câu 17: Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn nhà Bưu điện Thành phố Hà Nội theo thứ tự dài 1,75m và 1,26m. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu? Cũng câu hỏi đó cho kim giờ.

Câu 18: Huyện lỵ Quán Bạ tỉnh Hà Giang và huyện lỵ Cái Nước tỉnh Cà Mau cùng nằm ở 105° kinh đông, nhưng Quán Bạ ở 23° vĩ bắc, Cái Nước ở vĩ độ 9° bắc. Hãy tính độ dài của cung kinh tuyến nối hai huyện lỵ đó (khoảng cách theo đường chim bay), coi Trái Đất có bán kính 6278km.

CHUYÊN ĐỀ 1_GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Góc lượng giác và số đo của góc lượng giác

Trong mặt phẳng, cho hai tia Ou, Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia Om quay quanh điểm O , theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov , thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu Ou , tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov) . Quy ước chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương, chiều quay cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm.

Số đo của góc lượng giác có tia đầu Ou , tia cuối Ov được kí hiệu là $sd(Ou, Ov)$.

2. Đơn vị đo góc và độ dài cung tròn

Để đo góc, ta dùng đơn vị độ và radian.

Quan hệ giữa độ và radian: $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Một cung của đường tròn bán kính R và có số đo α rad thì độ dài $l = R\alpha$. Trên đường tròn lượng giác, ta biểu diễn một góc lượng giác có số đo bằng α (độ hoặc radian) bằng cách chọn tia đầu là tia OA và tia cuối là tia OM , với điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $sd(OA, OM) = \alpha$. Điểm M được gọi là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α .

Các giá trị $\cos\alpha, \sin\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của $\alpha, \sin\alpha, \cos\alpha$ xác định với mọi giá trị của α ; $\tan\alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$; $\cot\alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2h.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: 1h; 3h; 5h.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

a) Chiều dài một vòng của quỹ đạo là: $9000 \cdot 2 \cdot \pi$ (km)

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 1 giờ là

$$\frac{9000 \cdot 2 \cdot \pi}{2} = 9000\pi \text{ (km)}$$

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 3 giờ là 18000π (km)

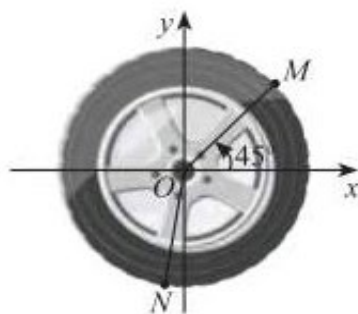
Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 5 giờ là

$$\frac{9000 \cdot 2 \cdot \pi}{2} \cdot 5 = 90000\pi \text{ (km)}$$

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km sau bao nhiêu giờ là:

$$\frac{200000}{9000\pi} \approx 7 \text{ (giờ)}$$

Câu 2: Trong Hình 15, mâm bánh xe ô tô được chia thành 5 phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON) .



Hình 15

Lời giải

Do mâm bánh xe ô tô được chia thành 5 phần bằng nhau nên số đo góc của mỗi phần sẽ là:
 $360^\circ : 5 = 72^\circ$

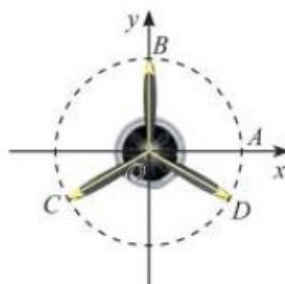
Theo Hình 15, $\widehat{MON}$ tương ứng với 2 trong 5 phần đã chia hay $\widehat{MON} = 2 \cdot 72^\circ = 144^\circ$

Mà $\widehat{xOM} = 45^\circ$

Suy ra $\widehat{xON} = 144 - 45 = 99^\circ$

Câu 3: Vị trí các điểm B, C, D trên cánh quạt động cơ máy bay trong Hình 16 có thể được biểu diễn cho các góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$



Hình 16

Lời giải

+) Xét các góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Với k chẵn ta có các góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn bởi điểm B ;

Với k lẻ ta có các góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn bởi điểm $B'(0; -1)$.

Vì vậy các điểm B, C, D không thể biểu diễn cho các góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

+) Xét các góc lượng giác có số đo $\frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

Với $k = 0$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{-\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm D .

Với $k = 1$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{-\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ được biểu diễn bởi điểm B .

Với $k = 2$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{-\pi}{6} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm C

Với $k = 3$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{-\pi}{6} + 3 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{-\pi}{6} + 2\pi$ được biểu diễn bởi điểm D.

Vì vậy các góc lượng giác có số đo $\frac{-\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn bởi các điểm B, C, D

+) Xét các góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

Với $k = 0$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2}$ được biểu diễn bởi điểm B.

Với $k = 1$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm M.

Với $k = 2$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + 2 \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm C.

Với $k = 3$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + 3 \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$ được biểu diễn bởi điểm B'.

Với $k = 4$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + 4 \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$ được biểu diễn bởi điểm D

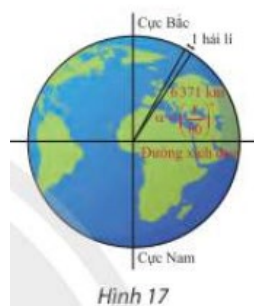
Với $k = 5$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + 5 \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$ được biểu diễn bởi điểm N.

Với $k = 6$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + 6 \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ được biểu diễn bởi điểm B.

Ví vậy các điểm B, C, D không thể biểu diễn cho các góc lượng giác có số đo là

$$\frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 4: Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371 km. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 17

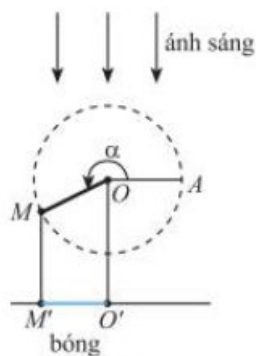
Lời giải

$$\text{Ta có: } \alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ = \frac{\pi \cdot \frac{1}{60}}{180} = \frac{\pi}{10800} \text{ rad.}$$

Độ dài cung chắn góc a là: $a \cdot R = \frac{\pi}{10800} \cdot 6371 \approx 1,85 \text{ km}$.

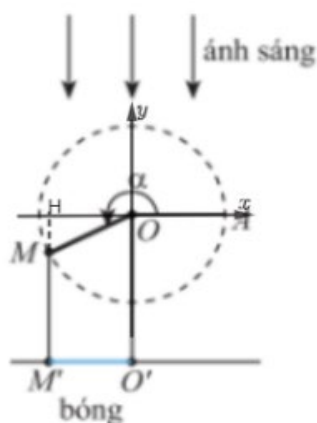
Vậy 1 hải lí bằng 1,85km.

Câu 5: Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như Hình 12. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M$ của OM khi thanh quay được $3\frac{1}{10}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 15 cm? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 12

Lời giải



Hình 12

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ:

Kẻ MH vuông góc với Ox .

Điểm M là điểm biểu diễn góc lượng giác α .

Ta có: $\alpha = 3\frac{1}{10} \cdot 360^\circ = 1116^\circ$.

Khi đó $M(\cos 1116^\circ \cdot 15; \sin 1116^\circ \cdot 15)$

Suy ra $OH = |\cos 1116^\circ| \cdot 15 \approx 12,1$.

Vậy độ dài bóng $O'M$ của OM khi thanh quay được $3\frac{1}{10}$ vòng là 12,1 cm.

Câu 6: Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là 11 rad/s (Hình 13). Ban đầu van nằm ở vị trí A . Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA = 58 \text{ cm}$? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Lời giải

Sau một phút di chuyển, van V đã quay được một góc lượng giác có số đo góc là:

$\alpha = 11 \cdot 60 = 660 \text{ (rad)}$. Khi đó tọa độ điểm V biểu diễn cho góc lượng giác trên có tọa độ là:

$$V(58 \cdot \cos \alpha; 58 \cdot \sin \alpha) \approx (56; 15,2)$$

Khi đó khoảng cách từ van đến mặt đất khoảng $58 - 15,2 = 42,8 \text{ cm}$.

Câu 7: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 680 mm .

Lời giải

a) Trong 1 giây, bánh xe đạp quay được $\frac{11}{5}$ vòng.

Vì một vòng ứng với góc bằng 360° nên góc mà bánh quay xe quay được trong 1 giây là

$$\frac{11}{5} \cdot 360 = 792^\circ.$$

Vì một vòng ứng với góc bằng 2π nên góc mà bánh quay xe quay được trong 1 giây là

$$\frac{11}{5} \cdot 2\pi = \frac{22\pi}{5} \text{ (rad)}.$$

b) Ta có: 1 phút = 60 giây.

Trong 1 phút bánh xe quay được $60 \cdot \frac{11}{5} = 132$ vòng.

Chu vi của bánh xe đạp là: $C = 680\pi \text{ (mm)}$.

Quãng đường mà người đi xe đạp đã đi được trong một phút là $132 \cdot 680\pi$

Câu 8: Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương.

a) Sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Sau thời gian bao lâu cánh quạt quay được một góc có số đo 42π ?

Lời giải

a) Sau 1 giây, cánh quạt quay được $\frac{175}{60} = \frac{35}{12}$ (vòng) theo chiều dương.

Suy ra sau 1 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35}{12} \cdot 2\pi = \frac{35\pi}{6}$.

Vậy sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35\pi}{6} \cdot 5 = \frac{175\pi}{6}$.

b) Thời gian để cánh quạt quay được một góc có số đo 42π là

$$42\pi : \frac{35\pi}{6} = 7,2 \text{ giây.}$$

Câu 9: Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe.

a) Sau 1 phút, van V đó quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Biết rằng bán kính của bánh xe là 35 cm. Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là bao nhiêu mét?



Hình 6

Lời giải

a) Sau 1 giây, van V của bánh xe quay được $\frac{30}{8} = 3,75$ (vòng).

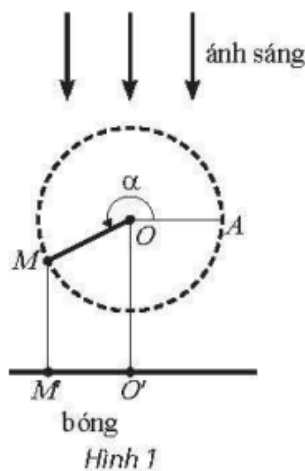
Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được $3,75 \cdot 60 = 225$ (vòng).

Suy ra sau 1 phút, van V của bánh xe quay được một góc có số đo là $225 \cdot 2\pi = 450\pi$.

b) Mỗi góc ở tâm với số đo 1 rad chắn một cung có độ dài bằng bán kính bánh xe $r = 0,35$ m.

Do đó độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là $450\pi \cdot 0,35 \approx 494,8$ (m).

Câu 10: Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M$ của OM khi thanh quay được $\frac{60}{13}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 10 cm? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Lời giải

Ta có $\alpha = \frac{60}{13} \cdot 2\pi = \frac{120\pi}{13}$. Suy ra $O'M' = |OM \cos \alpha| = \left| 10 \cos \frac{120\pi}{13} \right| \approx 7,5 \text{ cm}$.

- Câu 11:** Độ dài của ngày từ lúc Mặt Trời mọc đến lúc Mặt Trời lặn ở một thành phố X trong ngày thứ t của năm được tính xấp xỉ bởi công thức $d(t) = 4 \sin \left[\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right] + 12$ ($t \in \mathbb{Z}$ và $1 \leq t \leq 365$). Thành phố X vào ngày 31 tháng 1 có bao nhiêu giờ có Mặt Trời chiếu sáng? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

$d(31) = 9,01$ giờ.

- Câu 12:** Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất. Giả sử vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h theo chiều kim đồng hồ. Khi vệ tinh chuyển động được 3 h, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Lời giải

Theo giả thiết, vệ tinh chuyển động theo chiều kim đồng hồ nên sau 2 h, bán kính của vòng quay khi vệ tinh chuyển động quét được một góc lượng giác bằng -2π (rad).

Vậy khi vệ tinh chuyển động được 3 h thì bán kính của vòng quay quét được một góc lượng giác bằng -3π (rad)

- Câu 13:** Một vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút. Tại vị trí quan sát, bạn Linh thấy vòng quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ. Khi vòng quay chuyển động được 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Lời giải

Do vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút và chuyển động theo chiều kim đồng hồ nên sau 15 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng -2π (rad)

.

Do đó, sau 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng

$$\frac{-2\pi}{15} \cdot 10 = \frac{-4\pi}{3} (\text{rad}).$$

Câu 14: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 12 vòng trong 6 giây.

a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 860 mm.

Lời giải

a) Trong 1 giây, bánh xe quay được $\frac{12}{6} = 2$ vòng, tức là quay được một góc $4\pi(\text{rad})$ hay 720° .

b) Trong 1 phút, quãng đường mà người đi xe đã đi được là: $l = 430.4\pi.60 = 103200\pi(\text{mm})$.

Câu 15: Kim giờ dài 6 cm và kim phút dài 11 cm của đồng hồ chỉ 4 giờ. Hỏi thời gian ít nhất để 2 kim vuông góc với nhau là bao nhiêu? Lúc đó tổng quãng đường hai đầu mút kim giờ và kim phút đi được là bao nhiêu?

Lời giải

Một giờ, kim phút quét được một góc lượng giác 2π ; kim giờ quét được một góc $\frac{\pi}{6}$.

Hiệu vận tốc giữa kim phút và kim giờ là $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Vào lúc 4 giờ hai kim tạo với nhau một góc là $\frac{2\pi}{3}$.

Khoảng thời gian ít nhất để hai kim vuông góc với nhau là: $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) : \frac{11\pi}{6} = \frac{1}{11}$ (giờ)

Vậy sau $\frac{1}{11}$ (giờ) hai kim sẽ vuông góc với nhau.

Tổng quãng đường hai đầu mút kim đi được là: $l = R \cdot \alpha = 6 \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{\pi}{6} + 11 \cdot \frac{1}{11} \cdot 2\pi = \frac{23\pi}{11}$ (cm)

Câu 16: Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 45 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều thuận. Sau 3 giây, quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

Lời giải

Tốc độ góc của quạt trần là: $\frac{45 \cdot 2\pi}{60} = \frac{3\pi}{2} (\text{rad/s})$.

Sau 3 giây, quạt quay được một góc có số đo là: $\frac{3\pi}{2} \cdot 3 = \frac{9\pi}{2} \text{ rad}$.

Câu 17: Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn nhà Bưu điện Thành phố Hà Nội theo thứ tự dài 1,75m và 1,26m. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu? Cũng câu hỏi đó cho kim giờ.

Lời giải

a) Trong 15 phút thì mũi kim phút vạch nên một cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{4}$ độ dài đường tròn, do đó độ dài của cung này bằng: $\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot R = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1,75 = \frac{7}{8}\pi \approx 2,75(m)$.

b) Trong 15 phút thì mũi kim giờ vạch nên một cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12}$ độ dài đường tròn, do đó độ dài của cung này bằng: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot R = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot 1,26 = \frac{21}{400}\pi \approx 0,16(m)$.

Câu 18: Huyện lỵ Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện lỵ Cái Nước tỉnh Cà Mau cùng nằm ở 105° kinh đông, nhưng Quản Bạ ở 23° vĩ bắc, Cái Nước ở vĩ độ 9° bắc. Hãy tính độ dài của cung kinh tuyến nối hai huyện lỵ đó (khoảng cách theo đường chim bay), coi Trái Đất có bán kính $6278km$.

Lời giải

Góc ở tâm chắn cung kinh tuyến nối huyện Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện Cái Nước tỉnh Cà Mau có số đo bằng $23^\circ - 9^\circ = 14^\circ$. Vậy độ dài cung kinh tuyến đó bằng

$$\frac{6378 \cdot 14 \cdot \pi}{180} \approx 1558(km).$$

CHUYÊN ĐỀ 2: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. CÔNG THỨC CỘNG

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

2. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

3. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

4. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

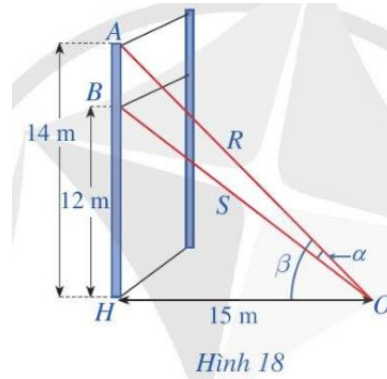
$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

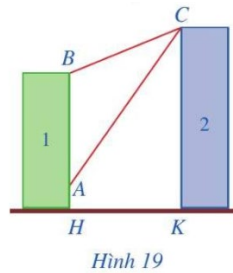
Câu 1: Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình 18).



Hình 18

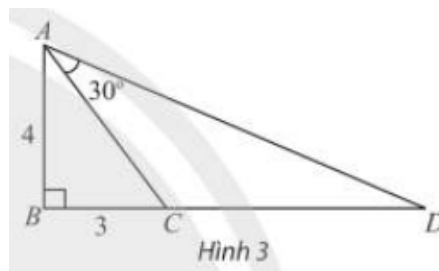
- a) Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
b) Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Câu 2: Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 20$ m. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C. Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (Hình 18). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 32$ m, $AH = 6$ m, $BH = 24$ m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).



Hình 19

Câu 3: Trong Hình 3, tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB = 4$, $BC = 3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thỏa mãn $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Tính $\tan \widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD .

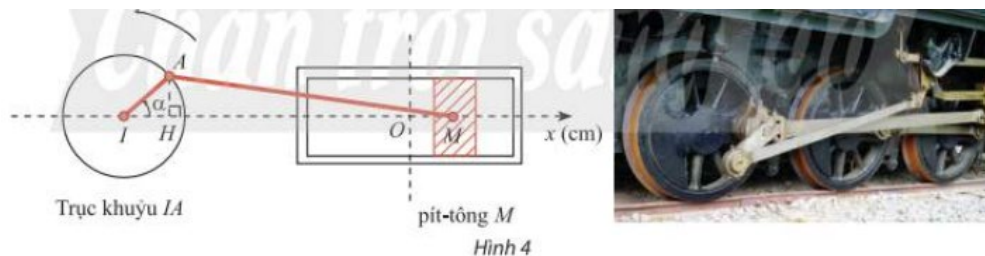


Hình 3

Câu 4: Trong Hình 4, pit-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA . Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pit-tông khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và là hình chiếu của A lên Ix . Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA .

a) Biết $LA = 8$ cm, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α .

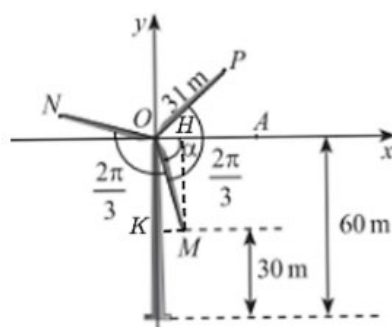
b) Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3$ cm. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Câu 5: Trong Hình 5, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m, độ cao của điểm M so với mặt đất là 30 m, góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số góc (OA, OM) là α .

a) Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.

b) Tính sin của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP) , từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Câu 6: Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) (\text{cm}),$$

$$x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) (\text{cm}).$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Câu 7: Phương trình dao động điều hoà của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó $x(t)$ (cm) là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình lần lượt là:

$$x_1(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) (\text{cm}) \text{ và } x_2(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right) (\text{cm}).$$

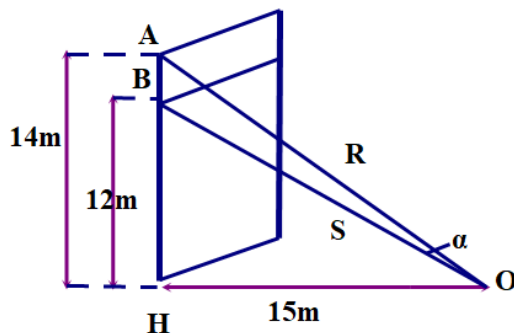
a) Xác định phương trình của dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

b) Tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp trên.

Câu 8: Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình 3).

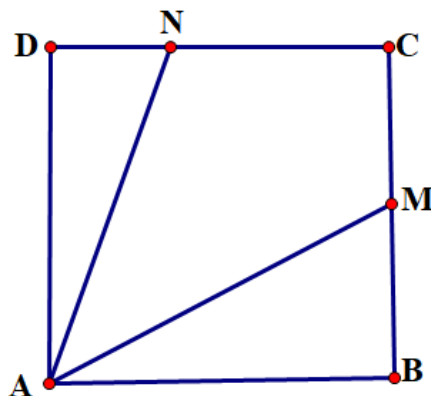
a) Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tính số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Hình 3

Câu 9: Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$, bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C . Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN , ở đó các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh sao cho $BM = \frac{1}{2}BC, DN = \frac{1}{3}DC$ (Hình 4).



a) Tính $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN})$.

b) Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?

Câu 10: Hai sóng âm có phương trình lần lượt là $f_1(t) = C \sin \omega t$ và $f_2(t) = C \sin(\omega t + \alpha)$.

Hai sóng này giao thoa với nhau tạo nên một âm kết hợp có phương trình $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C \sin \omega t + C \sin(\omega t + \alpha)$.

a) Sử dụng công thức cộng chỉ ra rằng hàm $f(t)$ có thể viết được dưới dạng

$f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$, trong đó A, B là hai hằng số phụ thuộc vào α .

b) Khi $C = 10, \alpha = \frac{\pi}{3}$, hãy tìm biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp, tức là tìm hai hằng số k và φ sao cho $f(t) = k \sin(\omega t + \varphi)$.

CHUYÊN ĐỀ 2: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. CÔNG THỨC CỘNG

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

2. CÔNG THỨC NHÂN ĐÔI

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}.$$

3. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

4. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

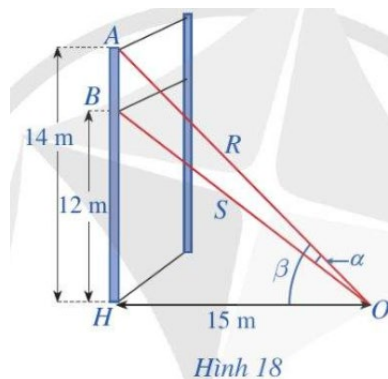
$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình 18).



Hình 18

- a) Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
b) Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Lời giải

a) Xét $\triangle AOH$ vuông tại H , ta có: $\tan \beta = \frac{AH}{HO} = \frac{14}{15}$.

Đặt $\widehat{BOH} = \gamma$

Xét $\triangle BOH$ vuông tại H , ta có: $\tan \gamma = \frac{BH}{HO} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

$$\tan \alpha = \tan(\beta - \widehat{BOH}) = \tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan \beta - \tan \gamma}{1 + \tan \beta \tan \gamma}$$

$$= \frac{\frac{14}{15} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{14}{15} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{131}{75}} = \frac{10}{131}$$

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \frac{10}{131}.$$

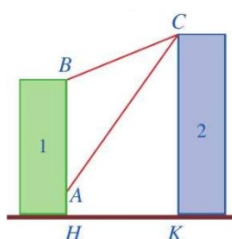
b) Từ $\tan \alpha = \frac{10}{131}$, để tìm số đo góc α , ta sử dụng máy tính cầm tay ấn lần lượt các nút:

SHIFT tan 1 0 ÷ 1 3 1 =

Ta được kết quả làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ là 4° .

Vậy $\alpha \approx 4^\circ$.

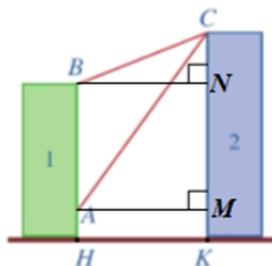
Câu 2: Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 20$ m. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí **C**. Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (Hình 18). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 32$ m, $AH = 6$ m, $BH = 24$ m (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).



Hình 19

Lời giải

Kẻ $AM \perp CK$, $BN \perp CK$ (hình vẽ) ta có:



$$BN = AM = HK = 20 \text{ (m)};$$

$$CN = CK - NK = CK - BH = 32 - 24 = 8 \text{ (m)};$$

$$MN = AB = BH - AH = 24 - 6 = 18 \text{ (m)};$$

$$CM = CN + MN = 8 + 18 = 26 \text{ (m)}.$$

Đặt $\widehat{BCN} = \alpha$, $\widehat{ACM} = \beta$.

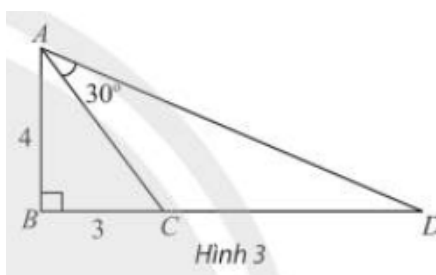
Xét $\triangle BCN$ vuông tại N có: $\tan \alpha = \frac{BN}{CN} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$;

Xét $\triangle ACM$ vuông tại M có: $\tan \beta = \frac{AM}{CM} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13}$;

Ta có: $\tan \widehat{ACB} = \tan (\widehat{BCN} - \widehat{ACM}) = \tan (\alpha - \beta)$

$$\Rightarrow \tan \widehat{ACB} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{10}{13}}{1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{10}{13}} = \frac{45}{76}.$$

Câu 3: Trong Hình 3, tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB = 4$, $BC = 3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thỏa mãn $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Tính $\tan \widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD .



Lời giải

Xét tam giác ABC vuông tại B có: $\tan \widehat{BAC} = \frac{3}{4}$

Ta lại có: $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \tan \widehat{BAD} &= \tan(\widehat{BAC} + \widehat{CAD}) = \tan(\widehat{BAC} + 30^\circ) = \frac{\tan \widehat{BAC} + \tan 30^\circ}{1 - \tan \widehat{BAC} \cdot \tan 30^\circ} \\ &= \frac{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{39} \approx 2,34.\end{aligned}$$

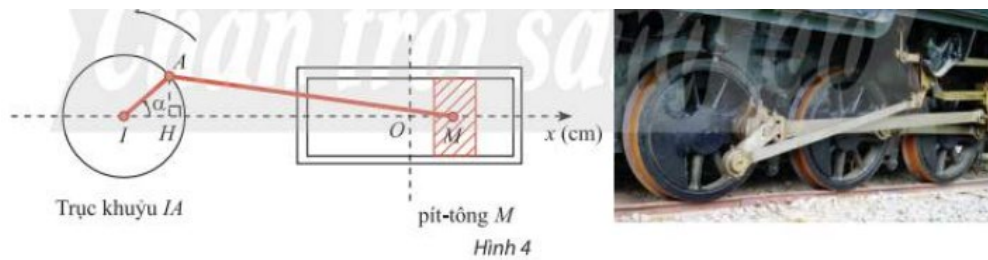
Xét tam giác ABD vuông tại B có:

$$\begin{aligned}\tan \widehat{BAD} &= \frac{BD}{AB} \Rightarrow BD = \tan \widehat{BAD} \cdot AB = 2,34 \cdot 4 \approx 9,36. \\ \Rightarrow CD &= BD - BC \approx 9,36 - 3 = 6,36.\end{aligned}$$

Câu 4: Trong Hình 4, pit-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA . Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pit-tông khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và là hình chiếu của A lên Ix . Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA .

a) Biết $LA = 8$ cm, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α .

b) Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3$ cm. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Lời giải

Tại $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thì H trùng I, M trùng O nên $MH = OI$ do đó $OM = IH$.

Xét tam giác AHI vuông tại H có: $IH = \cos \alpha \cdot IA = 8 \cos \alpha$.

Câu 5: Trong Hình 5, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m, độ cao của điểm M so với mặt đất là 30 m, góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số góc (OA, OM) là α .

a) Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.

b) Tính sin của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP) , từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

$$x_1(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) (\text{cm}),$$

$$x_2(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) (\text{cm}).$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải

Dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$\text{Suy ra } x(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) (\text{cm}).$$

$$\text{Ta có: } 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2.2\cos\frac{\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)}{2} \cos\frac{\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)}{2}$$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{12}\right) \cos\frac{\pi}{4} = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{12}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{12}\right).$$

Vậy dao động tổng hợp có phương trình là $x(t) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{12}\right)$ với biên độ $A = 2\sqrt{2}$ và

pha ban đầu là $\varphi = -\frac{\pi}{12}$.

Câu 7: Phương trình dao động điều hoà của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó $x(t)$ (cm) là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình lần lượt là:

$$x_1(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) (\text{cm}) \text{ và } x_2(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right) (\text{cm}).$$

a) Xác định phương trình của dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

b) Tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp trên.

Lời giải

$$\text{a) Ta có } x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= 3.2 \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)}{2} \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)}{2} \\
 &= 6 \cos \frac{\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 3\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right)
 \end{aligned}$$

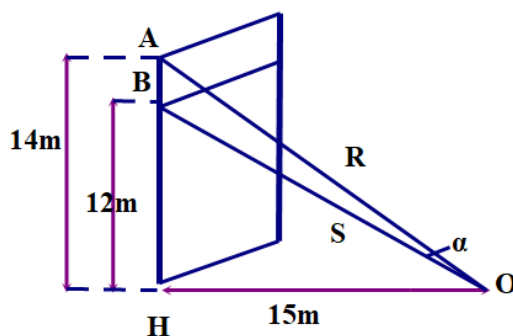
Vậy phương trình của dao động tổng hợp là $x(t) = 3\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right)$.

b) Dao động tổng hợp trên có biên độ là $A = 3\sqrt{2}$ cm và pha ban đầu là $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

Câu 8: Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình 3).

a) Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tính số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Hình 3

Lời giải

a) Ta có: $\alpha = \widehat{AOH} - \widehat{BOH}$.

Trong tam giác vuông AOH , $\tan \widehat{AOH} = \frac{AH}{OH} = \frac{14}{15}$.

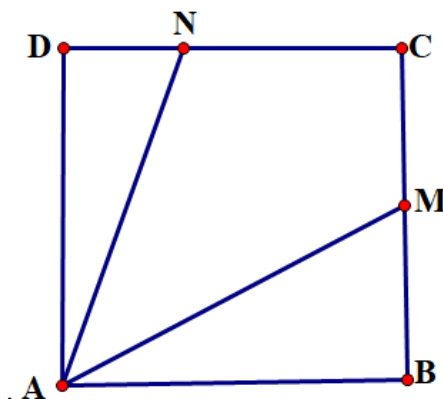
Trong tam giác vuông BOH , $\tan \widehat{BOH} = \frac{BH}{OH} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Vậy $\tan \alpha = \tan(\widehat{AOH} - \widehat{BOH}) = \frac{\tan \widehat{AOH} - \tan \widehat{BOH}}{1 + \tan \widehat{AOH} \cdot \tan \widehat{BOH}} = \frac{\frac{14}{15} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{14}{15} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{10}{131}$.

b) Từ kết quả câu a ta có: $\alpha \approx 4^\circ$.

Câu 9: Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$, bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C . Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN , ở đó các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh sao cho

$$BM = \frac{1}{2}BC, DN = \frac{1}{3}DC \text{ (Hình 4)}$$



- a) Tính $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN})$.
- b) Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

a) Trong tam giác vuông ABM , $\tan \widehat{BAM} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}$.

Trong tam giác vuông ADN , $\tan \widehat{DAN} = \frac{DN}{DA} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Do đó, } \tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = \frac{\tan \widehat{BAM} + \tan \widehat{DAN}}{1 - \tan \widehat{BAM} \tan \widehat{DAN}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1.$$

b) Do $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = 1$ nên $\widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 45^\circ$.

Suy ra $\widehat{MAN} = 90^\circ - (\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = 45^\circ$.

Vậy góc chiếu sáng của đèn pin bằng 45° .

Câu 10: Hai sóng âm có phương trình lần lượt là $f_1(t) = C \sin \omega t$ và $f_2(t) = C \sin(\omega t + \alpha)$.

Hai sóng này giao thoa với nhau tạo nên một âm kết hợp có phương trình

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C \sin \omega t + C \sin(\omega t + \alpha).$$

a) Sử dụng công thức cộng chỉ ra rằng hàm $f(t)$ có thể viết được dưới dạng

$$f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \text{ trong đó } A, B \text{ là hai hằng số phụ thuộc vào } \alpha.$$

b) Khi $C = 10, \alpha = \frac{\pi}{3}$, hãy tìm biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp, tức là tìm hai hằng số k và φ sao cho $f(t) = k \sin(\omega t + \varphi)$.

Lời giải

a) Ta có:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C \sin \omega t + C \sin(\omega t + \alpha) = C \sin \omega t + C(\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha)$$

Vậy $f(t) = C(1 + \cos \alpha) \sin \omega t + C \sin \alpha \cos \omega t = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ với

$$A = C(1 + \cos \alpha), B = C \sin \alpha.$$

b) Khi $C = 10, \alpha = \frac{\pi}{3}$, ta có:

$$f(t) = 10 \sin \omega t + 10 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) = 10.2 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) \cos \frac{\pi}{6} = 10\sqrt{3} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right).$$

Vậy biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp lần lượt là $k = 10\sqrt{3}, \varphi = \frac{\pi}{6}$.

CHUYÊN ĐỀ 3: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D .

- Hàm số $y = f(x)$ là **hàm số chẵn** nếu với mọi $x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số $y = f(x)$ là **hàm số lẻ** nếu với mọi $x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.
- Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng, còn đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ Ox làm tâm đối xứng.
- Để vẽ đồ thị của hàm số chẵn (tương ứng, hàm số lẻ), ta cần vẽ phần đồ thị của nó ở bên phải trục Oy sau đó lấy đối xứng phần đồ thị này qua trục Oy (tương ứng, qua gốc tọa độ O) là được đồ thị trên toàn tập xác định.

2. Hàm số tuần hoàn

- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x \in D$ ta có

$$\square x + T \in D \text{ và } x - T \in D$$

$$\square f(x + T) = f(x)$$

Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu tồn tại) được gọi là **chu kỳ** của hàm số tuần hoàn đó.

- Để vẽ đồ thị của một hàm số tuần hoàn với chu kỳ T , ta chỉ cần vẽ đồ thị của hàm số này trên đoạn $[a; a + T]$, sau đó dịch chuyển dọc theo trục hoành phần đồ thị đã vẽ sang phải và sang trái các đoạn có độ dài lần lượt là $T, 2T, 3T, \dots$ ta được toàn bộ đồ thị của hàm số.

- Với $a > 0$, các hàm số $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ và $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\omega}$, các hàm

số $y = A \tan(\omega x + \varphi)$ và $y = A \cot(\omega x + \varphi)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{\pi}{\omega}$.

3. Hàm số $y = \sin x$

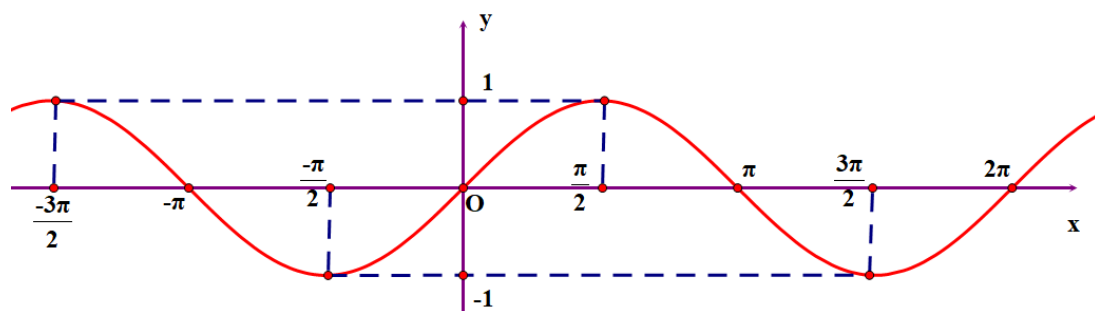
- Hàm số $\sin$ là hàm số cho bởi công thức $y = \sin x$.
- Tập xác định của hàm $\sin$ là $\mathbb{R}$. Tập giá trị của hàm $\sin$ là $[-1, 1]$.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- Hàm số $y = \sin x$ nhận các giá trị đặc biệt:

$$\square \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\square \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\square \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Đồ thị hàm $y = \sin x$



4. Hàm số $y = \cos x$

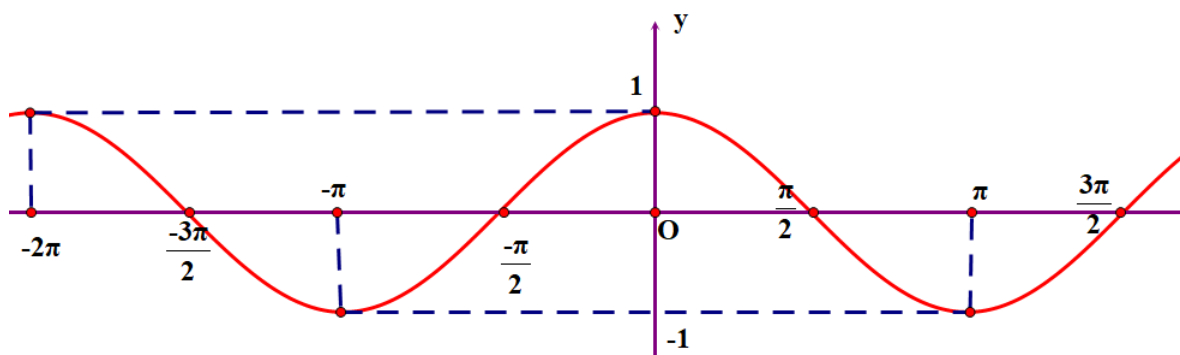
- Hàm số cosin là hàm số cho bởi công thức $y = \cos x$.
- Tập xác định của hàm số cosin là $\mathbb{R}$. Tập giá trị của hàm cosin là $[-1; 1]$.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- Hàm số $y = \cos x$ nhận các giá trị đặc biệt:

☐ $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

☐ $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

☐ $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Đồ thị hàm $y = \cos x$



5. Hàm số $y = \tan x$

- Hàm số tang là hàm số cho bởi công thức $y = \tan x$.
- Tập xác định của hàm tang là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Tập giá trị của hàm tang là $\mathbb{R}$.

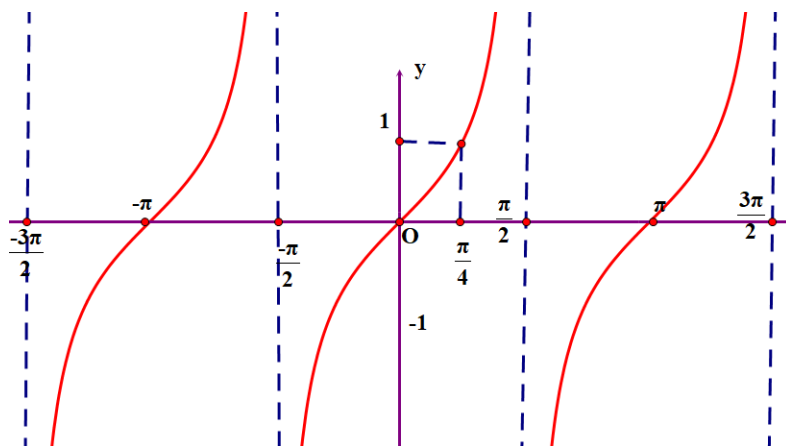
- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ π .
- Hàm số $y = \tan x$ nhận các giá trị đặc biệt:

☐ $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

☐ $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

☐ $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Đồ thị hàm số $y = \tan x$



6. Hàm số $y = \cot x$

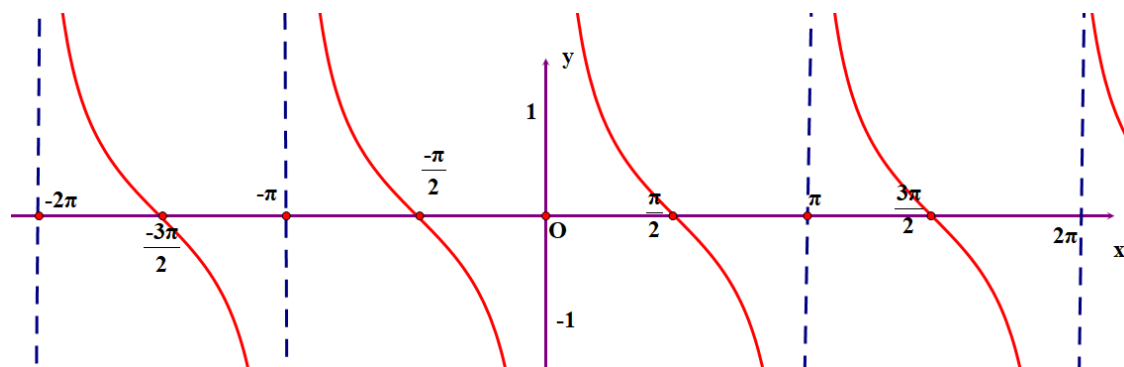
- Hàm số cotang là hàm số cho bởi công thức $y = \cot x$.
- Tập xác định của hàm cotang là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Tập giá trị của hàm cotang là $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ π .
- Hàm số $y = \cot x$ nhận các giá trị đặc biệt:

☐ $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

☐ $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

☐ $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Đồ thị hàm số $y = \cot x$



B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

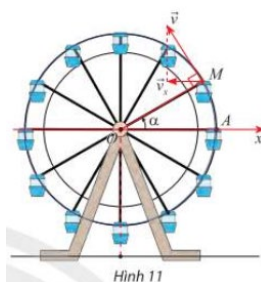
Câu 1: Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét.

Khi đó, chu kỳ T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi

$t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp:

- a) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = 0$;
- b) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$;
- c) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = \frac{\pi}{2}$

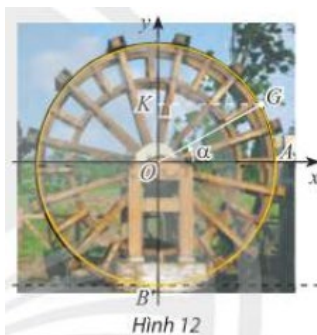
Câu 2: Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3\sin\alpha \text{ (m/s)}$ (Hình 11) .



Hình 11

- a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x .
- b) Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

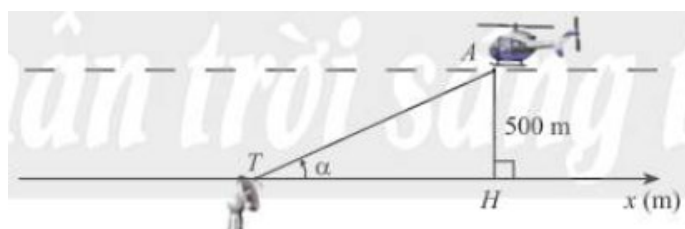
Câu 3: Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng 3 m. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình 12) .



Hình 12

- a) Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (OA, OG)$.
- b) Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng 1,5 m.

Câu 4: Trong Hình 13, một chiếc máy bay A bay ở độ cao 500 m theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H , α là góc lượng giác (Tx, TA) ($0 < \alpha < \pi$) .



Hình 13

- a) Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α .

b) Dựa vào đồ thị hàm số cotang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào.

Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Câu 5: Giả sử khi một con sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

a) Tìm chu kì của sóng.

b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Câu 6: Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức:

$$p(t) = 120 + 15\cos 150\pi t$$

trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút.

a) Chứng minh $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Huyết áp cao nhất và huyết áp thấp nhất lần lượt được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Tìm chỉ số huyết áp của người đó, biết rằng chỉ số huyết áp được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương.

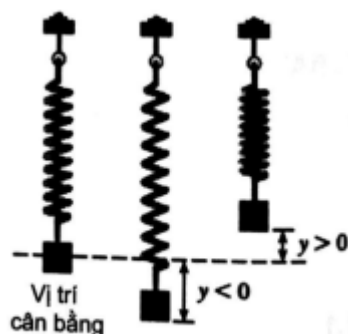
Câu 7: Một chất điểm dao động điều hoà theo phương trình $s = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ với s tính bằng cm và t tính bằng giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 4 giây đầu thì $s \leq -\frac{3}{2}$.

Câu 8: Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y = 25\sin 4\pi t$ ở đó y được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây.

a) Tìm chu kì dao động của con lắc lò xo.

b) Tìm tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây.

c) Tìm khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc.



Câu 9: Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao 40 m in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right|$, ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.

a) Tìm độ dài bóng của toà nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng, 12 giờ trưa, 2 giờ chiều và 5 giờ 45 phút chiều.

b) Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

c) Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?

Câu 10: Một dao động điều hòa có phương trình li độ dao động là: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét, $\omega > 0$. Khi đó, chu kì T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hòa trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp:

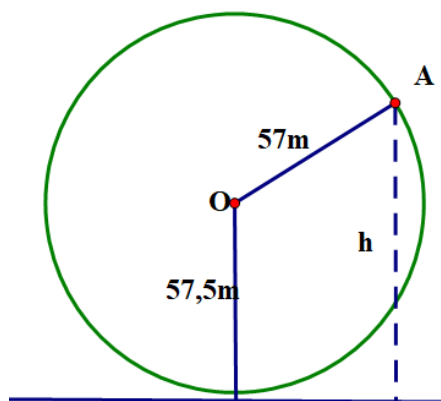
a) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = 0$; b) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$; c) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Câu 11: Một vòng quay trò chơi có bán kính 57 m, trục quay cách mặt đất 57,5 m, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách h (m) từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức: $h(t) = 57 \sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 57,5$ với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ($t \geq 0$) Hình 12.

a) Tính chu kì của hàm số $h(t)$?

b) Khi $t = 0$ (phút) thì khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng bao nhiêu?

c) Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất? Ở vị trí đạt được chiều cao là 86 m?



Hình 12

Câu 12: Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8\cos 0,5t + 4$.

(Theo <https://noc.ac.uk/files/documents/business/an-introduction-to-tidalmodelling.pdf>)

a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?

b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6 m để có thể đi chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số cosin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thủy. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 13: Cho vận tốc v (cm / s) của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức

$$v = -3\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right)$$

(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

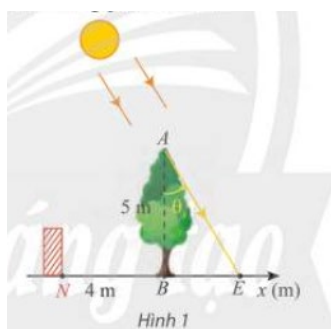
Xác định các thời điểm t mà tại đó:

a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất; b) Vận tốc con lắc bằng 1,5 cm / s .

Câu 14: Trong Hình 1, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao 5 m . Bóng của cây là BE . Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx . Góc thiên đỉnh $\theta_x = (AB, AE)$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt Trời và thay đổi theo thời gian trong ngày theo công thức

$$\theta_s(t) = \frac{\pi}{12}(t - 12)\text{rad}$$

với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$) .



Hình 1

(Theo <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/solar-hour-angle>)

a) Viết hàm số biểu diễn toạ độ của điểm E trên trục Bx theo t .

b) Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với toạ độ là $x_N = -4$ (m). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Câu 15: Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu được gọi tương ứng là huyết áp tâm thu và tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hoá bởi hàm số

$$p(t) = 115 + 25 \sin(160\pi t)$$

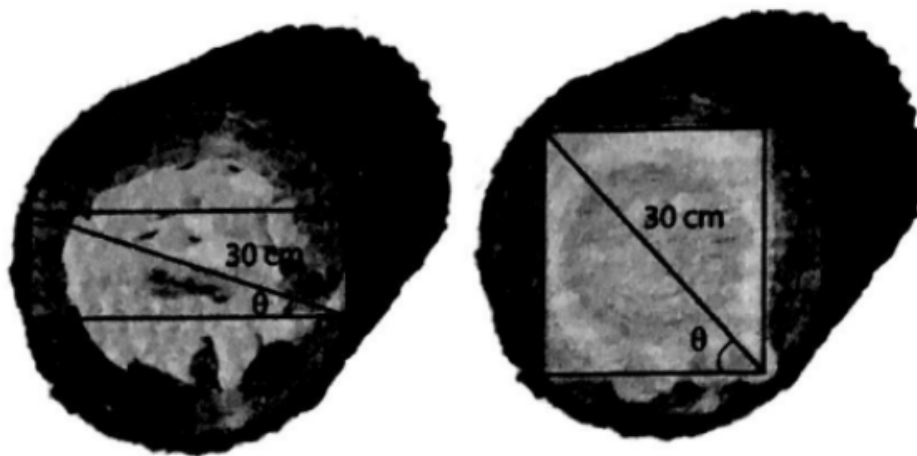
trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo phút.

- Tìm chu kì của hàm số $p(t)$.
- Tìm số nhịp tim mỗi phút.
- Tìm chỉ số huyết áp. So sánh huyết áp của người này với huyết áp bình thường.

Câu 16: Một thanh xà gỗ hình chữ nhật được cắt ra từ một khối gỗ hình trụ có đường kính 30cm.

a) Chứng minh rằng diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ được tính bởi công thức

$$S(\theta) = 450 \sin 2\theta \text{ (cm}^2\text{)} \text{ ở đó góc } \theta \text{ được chỉ ra trong hình vẽ dưới đây.}$$



b) Tìm góc để diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ là lớn nhất.

CHUYÊN ĐỀ 3: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D .

- Hàm số $y = f(x)$ là **hàm số chẵn** nếu với mọi $x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số $y = f(x)$ là **hàm số lẻ** nếu với mọi $x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.
- Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng, còn đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ Ox làm tâm đối xứng.
- Để vẽ đồ thị của hàm số chẵn (tương ứng, hàm số lẻ), ta cần vẽ phần đồ thị của nó ở bên phải trục Oy sau đó lấy đối xứng phần đồ thị này qua trục Oy (tương ứng, qua gốc toạ độ O) là được đồ thị trên toàn tập xác định.

2. Hàm số tuần hoàn

- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x \in D$ ta có

$$\square x + T \in D \text{ và } x - T \in D$$

$$\square f(x + T) = f(x).$$

Số T dương nhỏ nhất thoả mãn các điều kiện trên (nếu tồn tại) được gọi là **chu kì** của hàm số tuần hoàn đó.

- Để vẽ đồ thị của một hàm số tuần hoàn với chu kì T , ta chỉ cần vẽ đồ thị của hàm số này trên đoạn $[a; a + T]$, sau đó dịch chuyển dọc theo trục hoành phần đồ thị đã vẽ sang phải và sang trái các đoạn có độ dài lần lượt là $T, 2T, 3T, \dots$ ta được toàn bộ đồ thị của hàm số.

- Với $a > 0$, các hàm số $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ và $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega}$, các hàm số $y = A \tan(\omega x + \varphi)$ và $y = A \cot(\omega x + \varphi)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{\pi}{\omega}$.

3. Hàm số $y = \sin x$

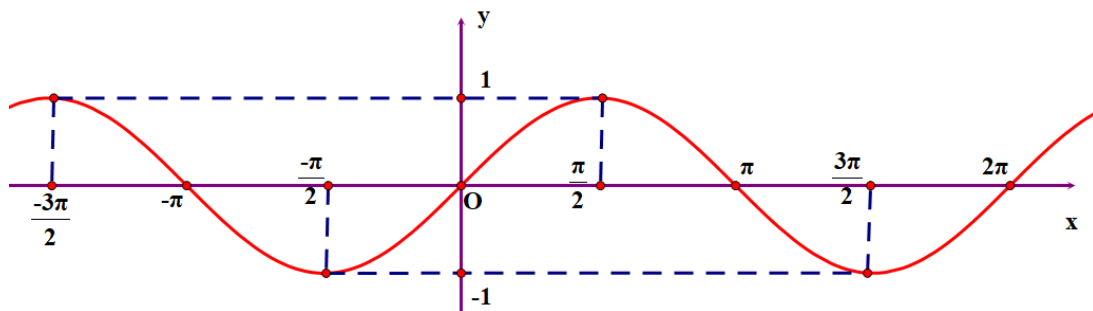
- Hàm số $\sin$ là hàm số cho bởi công thức $y = \sin x$.
- Tập xác định của hàm $\sin$ là $\mathbb{R}$. Tập giá trị của hàm $\sin$ là $[-1, 1]$.
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì 2π .
- Hàm số $y = \sin x$ nhận các giá trị đặc biệt:

$$\square \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\square \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\square \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Đồ thị hàm $y = \sin x$



4. Hàm số $y = \cos x$

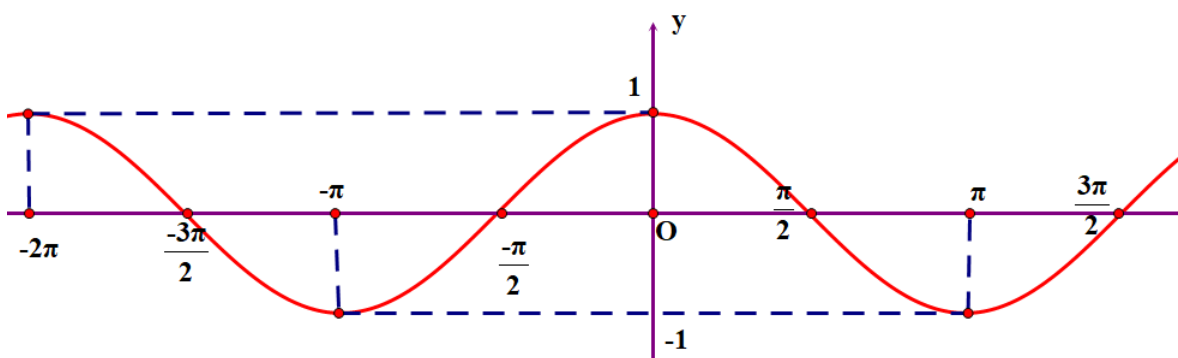
- Hàm số cosin là hàm số cho bởi công thức $y = \cos x$.
- Tập xác định của hàm số cosin là $\mathbb{R}$. Tập giá trị của hàm cosin là $[-1; 1]$.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kì 2π .
- Hàm số $y = \cos x$ nhận các giá trị đặc biệt:

$$\square \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\square \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\square \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Đồ thị hàm $y = \cos x$



5. Hàm số $y = \tan x$

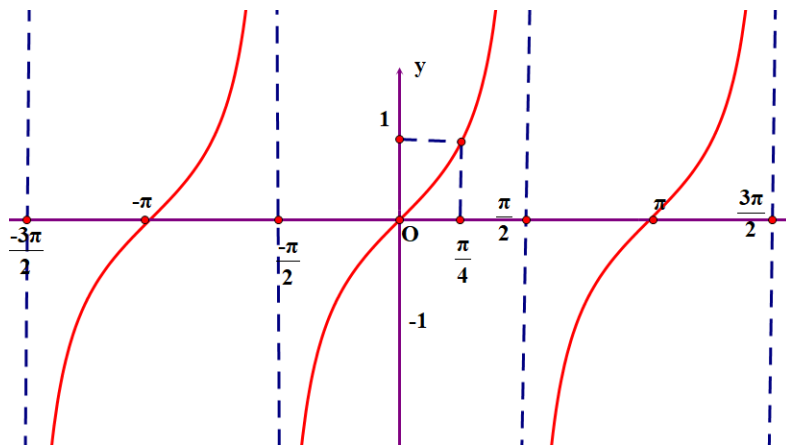
- Hàm số tang là hàm số cho bởi công thức $y = \tan x$.
 - Tập xác định của hàm tang là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Tập giá trị của hàm tang là $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì π .
 - Hàm số $y = \tan x$ nhận các giá trị đặc biệt:

$$\square \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\square \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\square \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Đồ thị hàm số $y = \tan x$



6. Hàm số $y = \cot x$

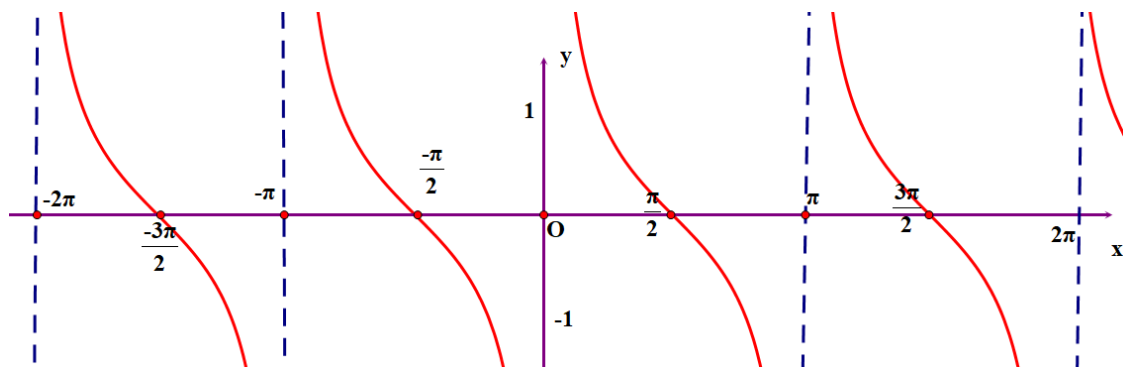
- Hàm số cotang là hàm số cho bởi công thức $y = \cot x$.
- Tập xác định của hàm cotang là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Tập giá trị của hàm cotang là $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ π .
- Hàm số $y = \cot x$ nhận các giá trị đặc biệt:

☐ $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

☐ $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

☐ $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Đồ thị hàm số $y = \cot x$



B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimet. Khi đó, chu kỳ T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi

$t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp:

a) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = 0$;

b) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$;

c) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = \frac{\pi}{2}$

Lời giải

Từ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ta có $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Khi đó ta có phương trình li độ là $x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$.

a)

Với $A = 3 \text{ cm}$ và $\varphi = 0$ thay vào phương trình li độ $x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$ ta có:

$$x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$t = 0$ thì $x = 3 \cos 0 = 3$;

$t = \frac{T}{4}$ thì $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = 3 \cos \frac{\pi}{2} = 0$;

$t = \frac{T}{2}$ thì $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) = 3 \cos \pi = -3$

$t = \frac{3T}{4}$ thì $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4}\right) = 3 \cos \frac{3\pi}{2} = 0$;

$t = T$ thì $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) = 3 \cos 2\pi = 3$

Vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; 2T]$:

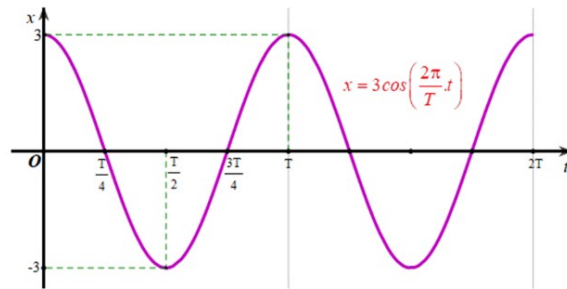
Xét hàm số $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ có chu kì là T .

Ta vẽ đồ thị hàm số $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; T]$ theo bảng sau:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$	3	0	-3	0	3

Bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; T]$ song song với trục hoành sang phải theo đoạn có độ dài T , ta sẽ nhận được đồ thị hàm số $x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[T; 2T]$.

Từ đó ta vẽ được đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; 2T]$ như sau:



b) Với $A = 3 \text{ cm}$ và $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ thay vào phương trình li độ $x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$ ta có:

$$x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$$t = 0 \text{ thì } x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) = 3\sin 0 = 0$$

$$t = \frac{T}{4} \text{ thì } x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = 3\sin \frac{\pi}{2} = 3;$$

$$t = \frac{T}{2} \text{ thì } x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) = 3\sin \pi = 0;$$

$$t = \frac{3T}{4} \text{ thì } x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4}\right) = 3\sin \frac{3\pi}{2} = -3;$$

$$t = T \text{ thì } x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) = 3\sin 2\pi = 0.$$

Vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; 2T]$:

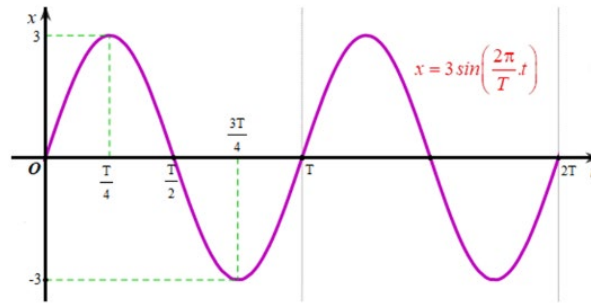
Xét hàm số $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ có chu kỳ là T .

Ta vẽ đồ thị hàm số $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; T]$ theo bảng sau:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$	0	3	0	-3	0

Bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; T]$ song song với trục hoành sang phải theo đoạn có độ dài T , ta sẽ nhận được đồ thị hàm số $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[T; 2T]$.

Từ đó ta vẽ được đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; 2T]$ như sau:



c) Với $A = 3 \text{ cm}$ và $\varphi = \frac{\pi}{2}$ thay vào phương trình li độ $x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$ ta có:

$$\begin{aligned} x &= 3\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = -3\cos\left(\pi - \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= -3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = -3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \end{aligned}$$

$$t = 0 \text{ thì } x = -3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) = -3\sin 0 = 0$$

$$t = \frac{T}{4} \text{ thì } x = -3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = -3\sin \frac{\pi}{2} = -3;$$

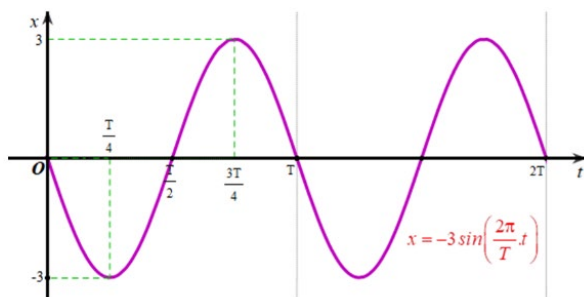
$$t = \frac{T}{2} \text{ thì } x = -3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) = -3\sin \pi = 0;$$

$$t = \frac{3T}{4} \text{ thì } x = -3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4}\right) = -3\sin \frac{3\pi}{2} = 3;$$

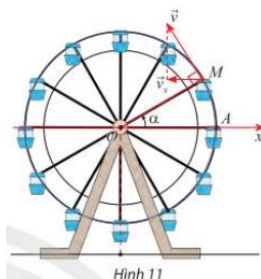
$$t = T \text{ thì } x = -3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) = -3\sin 2\pi = 0.$$

Vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = -3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; 2T]$:

Đồ thị hàm số $x = -3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ là hình đối xứng với đồ thị hàm số $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ qua trục hoành:



Câu 2: Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3 \sin \alpha$ (m/s) (Hình 11).



- Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x .
- Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

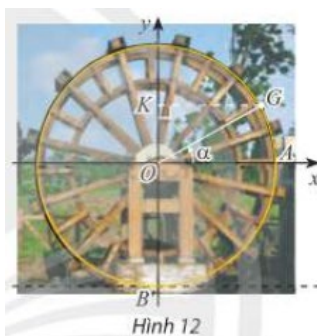
Lời giải

- Do $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ nên $-0,3 \leq \sin \alpha \leq 0,3$

Vậy giá trị lớn nhất của v_x là $0,3$ (m) và giá trị nhỏ nhất của v_x là $-0,3$ (m).

- Dựa vào đồ thị hàm số $\sin$, ta thấy vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), v_x tăng khi $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$

Câu 3: Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng 3 m. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình 12).



- Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (OA, OG)$.
- Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng 1,5 m.

Lời giải

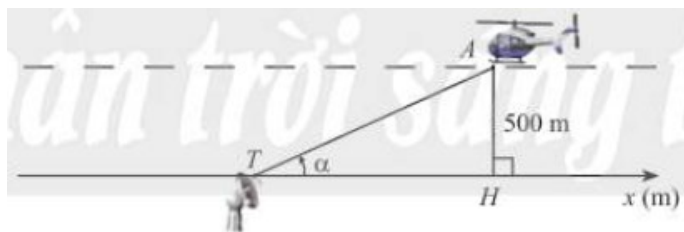
- $h = 3 + 3 \sin \alpha$

- Trong 1 phút đầu, guồng nước quay được 2 vòng. Ta có $0 \leq \alpha \leq 4\pi$

Khi $h = 1,5$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{-1}{2}$.

Khi đó, $\alpha = \frac{7\pi}{6}; \alpha = \frac{11\pi}{6}; \alpha = \frac{19\pi}{6}$ hoặc $\alpha = \frac{23\pi}{6}$.

Câu 4: Trong Hình 13, một chiếc máy bay A bay ở độ cao 500 m theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H , α là góc lượng giác (Tx, TA) ($0 < \alpha < \pi$).



Hình 13

a) Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α .

b) Dựa vào đồ thị hàm số cotang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào.

Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) $x_H = 500 \cdot \cot \alpha$

b) Với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \cot \alpha < \sqrt{3}$

Vậy $x_H \in \{-288,7; 866\}$.

Câu 5: Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimet trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

a) Tìm chu kì của sóng.

b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Lời giải

a) Chu kì của sóng là $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20$ (giây).

b) Chiều cao của sóng tức là chiều cao của nước đạt được trong một chu kì dao động.

Ta có: $h(20) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot 20\right) = 90$ (cm).

Vậy chiều cao của sóng là 90 cm.

Câu 6: Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức:
 $p(t) = 120 + 15\cos 150\pi t$
 trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút.

a) Chứng minh $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Huyết áp cao nhất và huyết áp thấp nhất lần lượt được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Tìm chỉ số huyết áp của người đó, biết rằng chỉ số huyết áp được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương.

Lời giải

a) Hàm số $p(t)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Với mọi $t \in \mathbb{R}$, ta có $t \pm \frac{1}{75} \in \mathbb{R}$ và

$$p\left(t + \frac{1}{75}\right) = 120 + 15\cos(150\pi t + 2\pi) = 120 + 15\cos 150\pi t = p(t).$$

Do đó $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Vì $-1 \leq \cos 150\pi t \leq 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên $105 \leq p(t) \leq 135$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

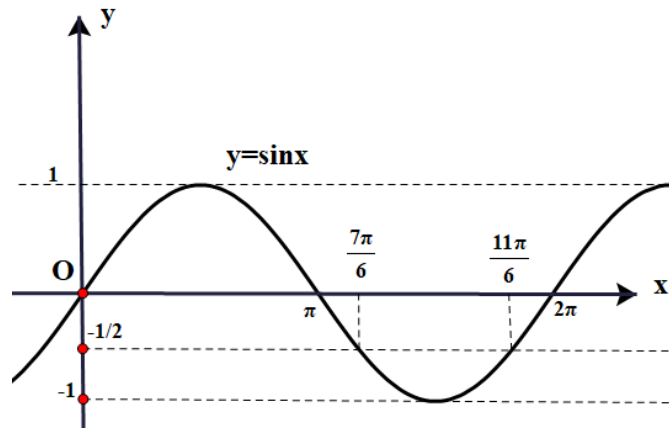
Vậy chỉ số huyết áp của người đó là 135/105.

Câu 7: Một chất điểm dao động điều hoà theo phương trình $s = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ với s tính bằng cm và t tính bằng giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 4 giây đầu thì $s \leq -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Trong 4 giây đầu, ta có $0 \leq t \leq 4$, suy ra $0 \leq \frac{\pi}{2}t \leq 2\pi$.

Đặt $x = \frac{\pi}{2}t$, khi đó $x \in [0; 2\pi]$. Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ như sau:



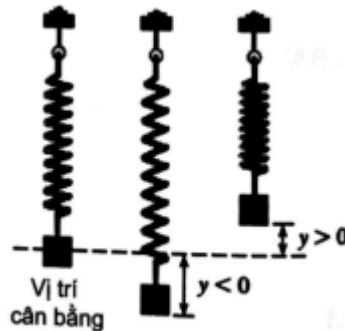
Dựa vào đồ thị trên đoạn $[0; 2\pi]$, ta có:

$$s \leq -\frac{3}{2} \text{ khi } 3\sin x \leq -\frac{3}{2} \text{ hay } \sin x \leq -\frac{1}{2}, \text{ suy ra } \frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}.$$

$$\text{Do đó } \frac{7}{3} \leq t \leq \frac{11}{3}.$$

Câu 8: Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y = 25\sin 4\pi t$ ở đó y được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây.

- Tìm chu kì dao động của con lắc lò xo.
- Tìm tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây.
- Tìm khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc.



Lời giải

a) Hàm số $y = 25\sin 4\pi t$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$. Suy ra chu kì dao động của con lắc lò xo (tức là khoảng thời gian để con lắc thực hiện được một dao động toàn phần) là $T = \frac{1}{2}$ giây.

b) Vì chu kì dao động của con lắc là $T = \frac{1}{2}$ giây nên trong 1 giây con lắc thực hiện được 2 dao động, tức là tần số dao động của con lắc là $f = \frac{1}{T} = 2 \text{ Hz}$.

c) Vì phương trình dao động của con lắc là $y = 25\sin 4\pi t$, nên biên độ dao động của nó là $A = 25 \text{ cm}$.

Từ đó, khoảng cách giữa điểm cao nhất và điểm thấp nhất của con lắc là $2A = 50 \text{ cm}$.

Câu 9: Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao 40 m in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right|$, ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.

a) Tìm độ dài bóng của toà nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng, 12 giờ trưa, 2 giờ chiều và 5 giờ 45 phút chiều.

b) Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

c) Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?

Lời giải

a) Tại thời điểm 8 giờ sáng ta có $t = 8 - 6 = 2$.

Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 8 giờ sáng là: $S(2) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 2 \right) \right| = 40\sqrt{3} \text{ (m)}$.

Tại thời điểm 12 giờ trưa ta có $t = 12 - 6 = 6$.

Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 12 giờ trưa là: $S(6) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 6 \right) \right| = 0 \text{ (m)}$.

Tại thời điểm 12 giờ trưa, Mặt Trời chiếu thẳng đứng từ trên đầu xuống nên toàn bộ toà nhà được chiếu xuống móng của toà nhà.

Tại thời điểm 2 giờ chiều ta có $t = 14 - 6 = 8$.

Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 2 giờ chiều là $S(8) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 8 \right) \right| = \frac{40\sqrt{3}}{3} \text{ (m)}$.

Tại thời điểm 5 giờ 45 chiều tối, ta có $t = \left(17 + \frac{3}{4} \right) - 6 = \frac{39}{4}$.

Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 5 giờ 45 chiều tối là:

$$S\left(\frac{39}{4}\right) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot \frac{39}{4} \right) \right| \approx 59,86 \text{ (m)}$$

b) Độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà khi

$$S(t) = 40 \Leftrightarrow 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right| = 40 \Leftrightarrow \cot \frac{\pi}{12} t = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} t = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow t = \pm 3 + 12k \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Vì $0 \leq t \leq 12$ nên $t = 3$ hoặc $t = 9$, tức là tại thời điểm 9 giờ sáng hoặc 3 giờ chiều thì bóng của toà nhà dài bằng chiều cao của toà nhà.

c) Khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối thì $t \rightarrow 12$, vì vậy $\frac{\pi}{12}t \rightarrow \pi$, do đó $\cot \frac{\pi}{12}t \rightarrow -\infty$. Như vậy, bóng của toà nhà sẽ tiến ra vô cùng.

Câu 10: Một dao động điều hòa có phương trình li độ dao động là: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét, $\omega > 0$. Khi đó, chu kì T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hòa trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp:

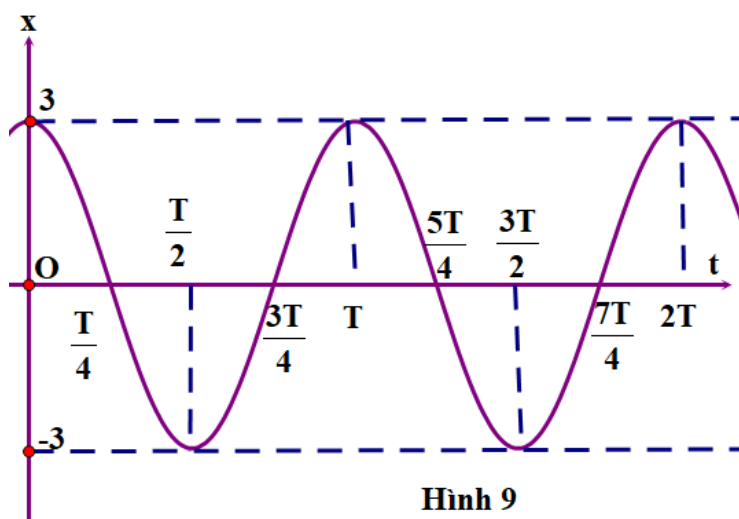
a) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = 0$; b) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$; c) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

a) Khi $A = 3 \text{ cm}, \varphi = 0$, ta có: $x = 3\cos(\omega t) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 9:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	3	0	-3	0	3

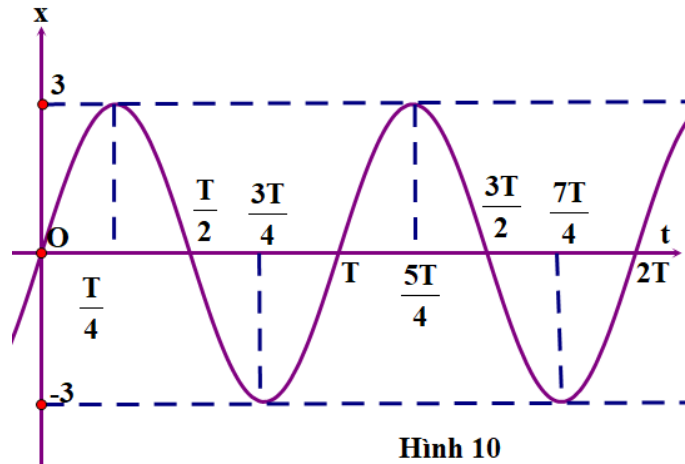


Hình 9

b) Khi $A = 3 \text{ cm}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$, ta có: $x = 3\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 10:

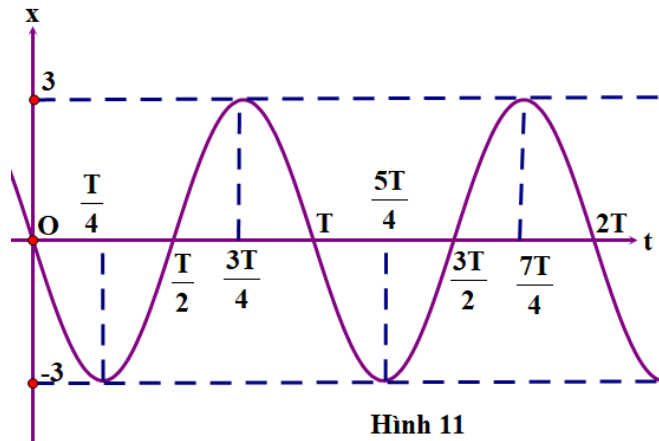
t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	3	0	-3	0



Hình 10

c) Khi $A = 3 \text{ cm}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ta có: $x = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$. Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 11:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	-3	0	3	0



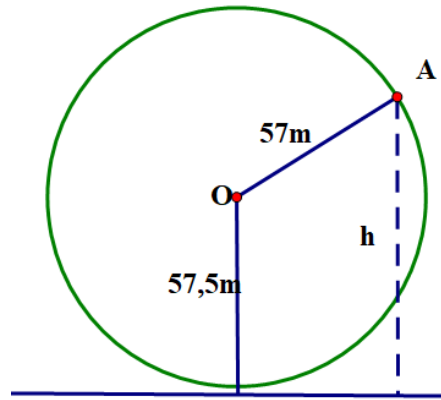
Hình 11

Câu 11: Một vòng quay trò chơi có bán kính 57 m, trục quay cách mặt đất 57,5 m, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách h (m) từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức: $h(t) = 57\sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 57,5$ với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ($t \geq 0$) Hình 12.

a) Tính chu kì của hàm số $h(t)$?

b) Khi $t = 0$ (phút) thì khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng bao nhiêu?

c) Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất? Ở vị trí đạt được chiều cao là 86 m ?



Hình 12

Lời giải

- a) Vì vòng quay trò chơi quay mỗi vòng hết 15 phút nên chu kì của hàm số $h(t)$ bằng 15 phút.
- b) Khi $t = 0$ thì $h = 57\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 57,5 = 0,5$ (m). Vậy khi đó khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng 0,5 m.
- c) Khi quay một vòng, cabin ở vị trí cao nhất khi $\sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ hay $t = 7,5$ (phút); cabin đạt được chiều cao là 86 m lần đầu tiên khi $t = 5$ (phút).

Câu 12: Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8\cos 0,5t + 4$.

(Theo <https://noc.ac.uk/files/documents/business/an-introduction-to-tidalmodelling.pdf>)

- a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?
- b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6 m để có thể đi chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số cosin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thủy. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

- a) Tại thời điểm $t = 2$ độ sâu của nước là: $h(2) = 0,8\cos 0,5 \cdot 2 + 4 \approx 4,43$ m .

Vậy độ sâu của nước ở thời điểm $t = 2$ là khoảng 4,43 m .

- b) Các thời điểm để mực nước sâu là 3,6 m tương ứng với phương trình $0,8\cos 0,5t + 4 = 3,6$

+) Với $t = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, trong 12 tiếng ta có các thời điểm

$$0 \leq \frac{4\pi}{3} + k2\pi \leq 12 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq 1,24$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0;1\}$.

+) Với $t = -\frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, trong 12 tiếng ta có các thời điểm

$$0 \leq -\frac{4\pi}{3} + k2\pi \leq 12 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq k \leq 1,24.$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 1$.

Vậy tại các thời điểm $t = \frac{4\pi}{3}, t = \frac{10\pi}{3}, t = \frac{2\pi}{3}$ giờ thì tàu có thể hạ thủy.

Câu 13: Cho vận tốc v (cm/s) của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức

$$v = -3\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right)$$

(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất; b) Vận tốc con lắc bằng 1,5 cm/s.

Lời giải

$$\text{a) } -1 \leq \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \text{ nên } -3 \leq -3\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) \leq 3$$

$$\text{Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất khi } \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 1,5t + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = -\frac{5\pi}{9} + k\frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Vi vậy vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất tại các thời điểm $t_1 = \frac{7\pi}{9}; t_2 = \frac{19\pi}{9}; t_3 = \frac{31\pi}{9}; \dots$

$$\text{b) Để vận tốc con lắc bằng } 1,5 \text{ cm/s thì } v = -3\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = 1,5$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Dựa vào đồ thị hàm số sin ta có:

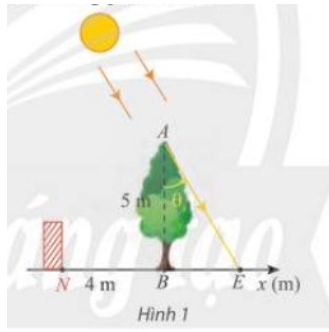
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1,5t + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1,5t + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{3} + k\frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ t = -\frac{7\pi}{9} + k\frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \left\{\pi; \frac{7\pi}{3}; \dots\right\} \\ t \in \left\{\frac{5\pi}{9}; \frac{17\pi}{9}; \dots\right\} \end{cases}$$

Vậy sau các thời điểm $t_1 = \frac{5\pi}{9}, t_2 = \pi, t_3 = \frac{17\pi}{9}, t_4 = \frac{7\pi}{3}, \dots$ thì vận tốc của con lắc đạt 1,5 cm/s.

Câu 14: Trong Hình 1, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao 5 m. Bóng của cây là BE . Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx . Góc thiên đỉnh $\theta_x = (AB, AE)$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt Trời và thay đổi theo thời gian trong ngày theo công thức

$$\theta_s(t) = \frac{\pi}{12}(t - 12) \text{ rad}$$

với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$).



(Theo <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/solar-hour-angle>)

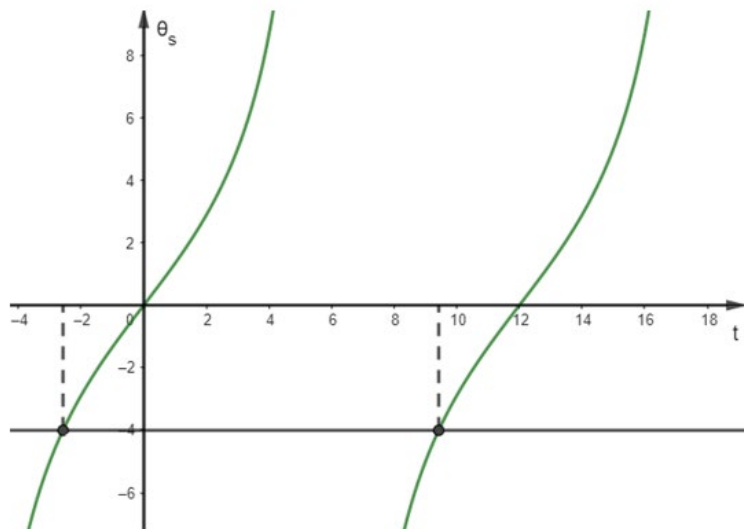
- a) Viết hàm số biểu diễn toạ độ của điểm E trên trục Bx theo t .
- b) Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với toạ độ là $x_N = -4$ (m). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

- a) Xét tam giác ABE vuông tại B , có:

$$\tan \theta_s(t) = \frac{BE}{AB} \Leftrightarrow BE = 5 \tan \left(\frac{\pi}{12}(t-12) \right).$$

- b) Đồ thị của hàm số $\theta_s = 5 \tan \left(\frac{\pi}{12}(t-12) \right)$



Dựa vào đồ thị hàm số để $\theta_s = 5 \tan \left(\frac{\pi}{12}(t-12) \right) < -4$ và $6 < t < 18$ suy ra các thời điểm để bóng cây phủ qua hàng rào N là $6 < t < 9,4$.

Câu 15: Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu được gọi tương ứng là huyết áp tâm thu và tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hoá bởi hàm số

$$p(t) = 115 + 25 \sin(160\pi t)$$

trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo phút.

- Tìm chu kì của hàm số $p(t)$.
- Tìm số nhịp tim mỗi phút.
- Tìm chỉ số huyết áp. So sánh huyết áp của người này với huyết áp bình thường.

Lời giải

a) Chu kì của hàm số $p(t)$ là $T = \frac{2\pi}{160\pi} = \frac{1}{80}$.

b) Thời gian giữa hai lần tim đập là $T = \frac{1}{80}$ (phút)

Số nhịp tim mỗi phút là $1 : \frac{1}{80} = 80$ nhịp.

c) Ta có: $-1 \leq \sin(160\pi t) \leq 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -25 \leq 25\sin(160\pi t) \leq 25 \text{ với mọi } t \in \mathbb{R}$$

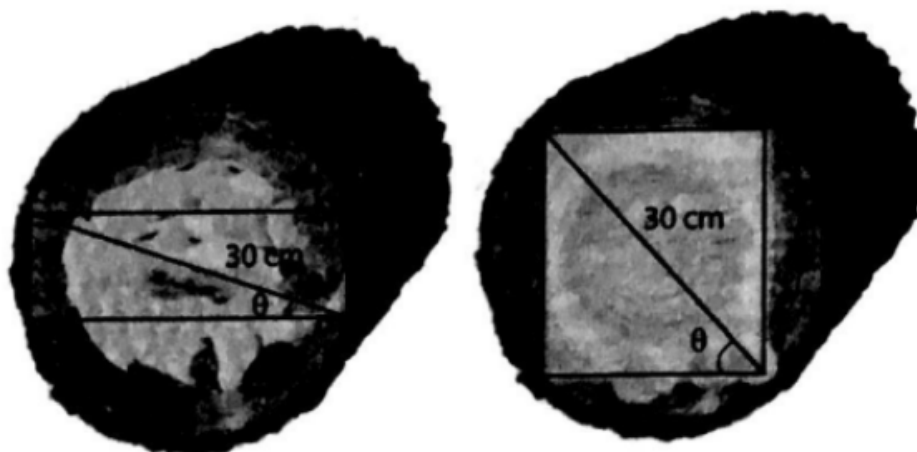
$$\Leftrightarrow 115 + (-25) \leq 115 + 25\sin(160\pi t) \leq 115 + 25 \text{ với mọi } t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 90 \leq p(t) \leq 140 \text{ với mọi } t \in \mathbb{R}$$

Do đó, chỉ số huyết áp của người này là 140/90 và chỉ số huyết áp của người này cao hơn mức bình thường.

Câu 16: Một thanh xà gỗ hình chữ nhật được cắt ra từ một khối gỗ hình trụ có đường kính 30cm.

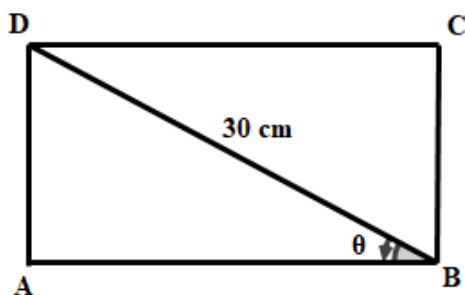
- Chứng minh rằng diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ được tính bởi công thức $S(\theta) = 450 \sin 2\theta (cm^2)$ ở đó góc θ được chỉ ra trong hình vẽ dưới đây.



- Tìm góc để diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ là lớn nhất.

Lời giải

a) Mặt cắt của thanh xà gồ (hình dưới) là hình chữ nhật có hai kích thước là $AB = 30\cos\theta$ và $BC = 30\sin\theta$.



Vậy diện tích mặt cắt là $S = AB.BC = 30.30\sin\theta\cos\theta = 450\sin 2\theta$.

b) Ta có: $S = 450\sin 2\theta \leq 450$. Vậy diện tích mặt cắt của thanh xà gồ lớn nhất khi $\sin 2\theta = 1 \Leftrightarrow \hat{\theta} = 45^\circ$.

CHUYÊN ĐỀ 4_PƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Phương trình tương đương

- Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.
- Để chỉ sự tương đương của các phương trình, người ta dùng kí hiệu " $\Leftrightarrow$ ".

2. Phương trình $\sin x = m$

a) Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm: $x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$,

với α là góc thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$.

Chú ý:

a) Một số trường hợp đặc biệt:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\sin u = \sin v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $u = \pi - v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

3. Phương trình $\cos x = m$

a) Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm: $x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$,

với α là góc thuộc $[0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$.

Chú ý:

Một số trường hợp đặc biệt:

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $u = -v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = -a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

4. Phương trình $\tan x = m$

Với mọi số thực m , phương trình $\tan x = m$ có nghiệm $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ với α là góc thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

sao cho $\tan \alpha = m$.

Chú ý: $\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

5. Phương trình $\cot x = m$

Với mọi số thực m , phương trình $\cot x = m$ có nghiệm $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ với α là góc thuộc $(0; \pi)$ sao

cho $\cot \alpha = m$.

Chú ý: $\cot x = \cot a^0 \Leftrightarrow x = a^0 + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365$$

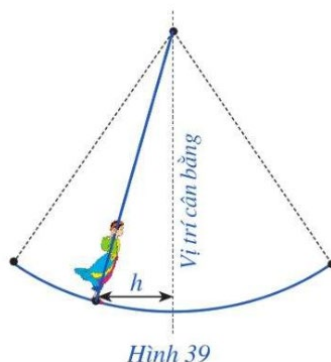
(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)

- Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời?

Câu 2: Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 39). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng

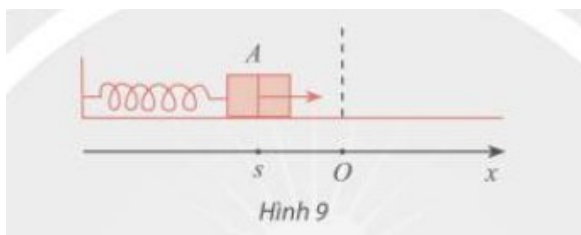
được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$,

trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là 3 m; 0 m?



Hình 39

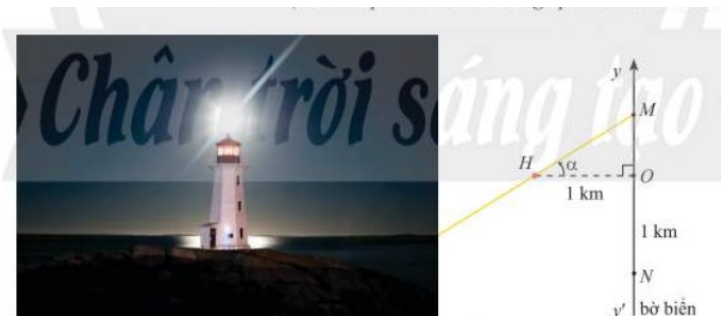
Câu 3: Trong Hình 9, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm?



Hình 9

(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Câu 4: Trong Hình 10, ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO = 1$ km. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10}$ rad/s và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rơi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.



Hình 10

(Theo <https://www.mnhs.org/splitrock/learn/technology>)

- Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO . Viết hàm số biểu thị tọa độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t .
- Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với tọa độ $y_N = -1$ (km). Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

Câu 5: Một quả đạn pháo được bắn khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500$ m/s hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$, ở đó $g = 9,8$ m/s² là gia tốc trọng trường.

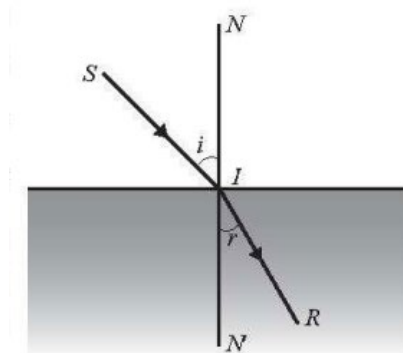
- Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).
- Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m.
- Tìm góc bắn α để quả đạn đạt độ cao lớn nhất.

Câu 6: Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2 \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right)$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimet. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Câu 7: Theo Định luật khúc xạ ánh sáng, khi một tia sáng được chiếu tới mặt phân cách giữa hai môi trường trong suốt không đồng chất thì tỉ số $\frac{\sin i}{\sin r}$, với i là góc tới và r là góc khúc xạ, là một hằng số phụ thuộc vào chiết suất của hai môi trường. Biết rằng khi góc tới là 45° thì góc khúc xạ bằng 30° . Khi góc tới là 60° thì góc khúc xạ là bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Câu 8: Một quả bóng được ném xiên một góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) từ mặt đất với tốc độ v_0 (m/s). Khoảng cách theo phương ngang từ vị trí ban đầu của quả bóng đến vị trí bóng chạm đất được tính bởi công thức $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{10}$.

a) Tính khoảng cách d khi bóng được ném đi với tốc độ ban đầu 10 m/s và góc ném là 30° so với phương ngang.

b) Nếu tốc độ ban đầu của bóng là 10 m/s thì cần ném bóng với góc bao nhiêu độ để khoảng cách d là 5 m?

Câu 9: Chiều cao h (m) của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

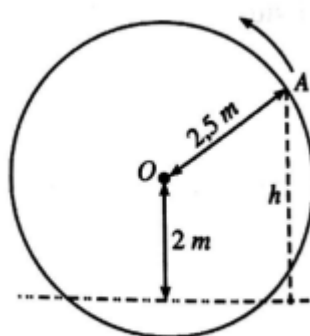
a) Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?

b) Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao 40 m lần đầu tiên?

Câu 10: Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) tính từ một chiếc gầu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt nước là $h = |y|$ trong đó $y = 2 + 2,5 \sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)$ với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới mặt nước.

a) Khi nào chiếc gầu ở vị trí cao nhất? Thấp nhất?

b) Chiếc gầu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên khi nào?



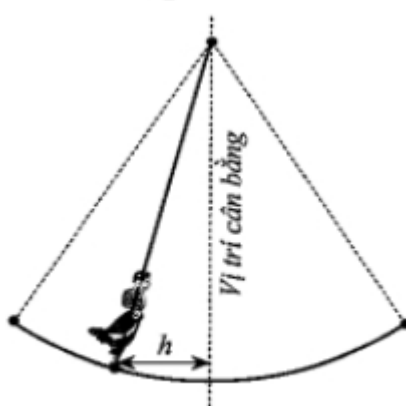
Mô phỏng guồng nước

Câu 11: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hoá bởi hàm số

$$L(t) = 12 + 2,83 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right), (t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365).$$

- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

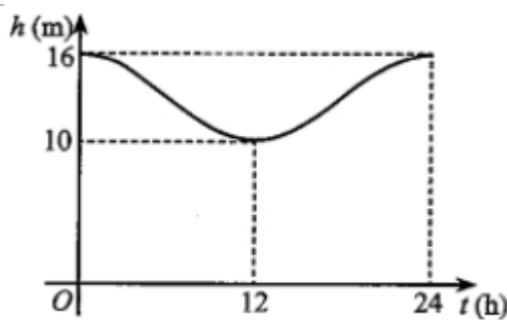
Câu 12: Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng Hình 14. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t - 1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại. Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là 3 m; 0 m ?



Hình 14

Câu 13: Mức nước cao nhất tại một cảng biển là 16 m khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mức nước thấp nhất là 10 m. Đồ thị ở Hình 15 mô tả sự thay đổi chiều cao của mức nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm. Biết chiều cao của mức nước h (m) theo thời gian t (h) ($0 \leq t \leq 24$) được cho bởi công thức $h = m + a\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ với m, a là các số thực dương cho trước.

- Tìm m, a .
- Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mức nước là 11,5 m.

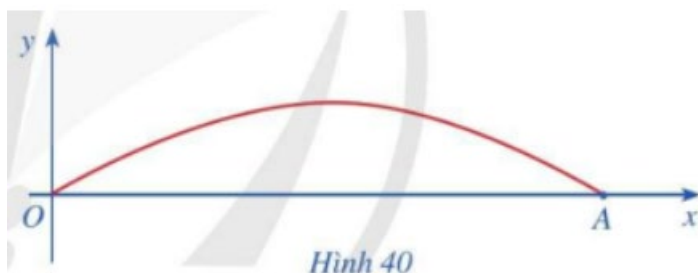


Hình 15

Câu 14: Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t < 24$) cho bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12$. Tìm t để độ sâu của mực nước là

- a) 15m
- b) 9m
- c) 10,5 m

Câu 15: Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y = 4,8 \sin \frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 40.

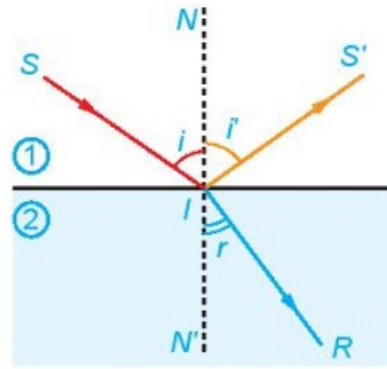


- a) Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA. Tìm chiều rộng đó (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)
- b) Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3,6m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn 13,1m.



- c) Một sà lan khác cũng chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hóa đó là 9m sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn 4,3m

Câu 16: Khi một tia sáng truyền từ ông khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như trong Hình 1.26. Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật khúc xạ ánh sáng $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$.



Hình 1.26

Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng là chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước). Cho biết góc tới $i = 50^\circ$, hãy tính góc khúc xạ, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là 1,33.

Câu 17: Vận tốc v_1 (cm/s) của con lắc đơn thứ nhất và vận tốc v_2 (cm/s) của con lắc đơn thứ hai theo thời gian t (giây) được cho bởi các công thức:

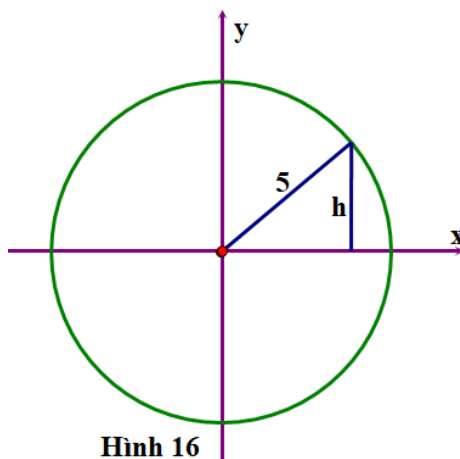
$$v_1(t) = -4\cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ và } v_2(t) = 2\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

- a) Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất bằng 2 cm/s;
- b) Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất gấp hai lần vận tốc của con lắc đơn thứ hai.

Câu 18: Một chất điểm chuyển động đều theo chiều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn bán kính 5 cm. Khoảng cách h (cm) từ chất điểm đến trục hoành được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = a\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ với t là thời gian chuyển động của chất điểm tính bằng giây ($t \geq 0$) và chất điểm bắt đầu chuyển động từ vị trí A (Hình 16).

- a) Chất điểm chuyển động một vòng hết bao nhiêu giây?
- b) Tìm giá trị của a .
- c) Tìm thời điểm sao cho chất điểm ở vị trí có $h = 2,5$ cm và nằm phía dưới trục hoành trong một vòng quay đầu tiên.



Hình 16

Câu 19: Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành

động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120 / 80 là bình thường. Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số $P(t) = 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$ ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo giây.

- a) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 100 $mmHg$.
- b) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 120 $mmHg$.

CHUYÊN ĐỀ 4_PƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Phương trình tương đương

- Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.
- Để chỉ sự tương đương của các phương trình, người ta dùng kí hiệu “ $\Leftrightarrow$ ”.

2. Phương trình $\sin x = m$

a) Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm: $x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$,

với α là góc thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$.

Chú ý:

a) Một số trường hợp đặc biệt:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\sin u = \sin v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $u = \pi - v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

3. Phương trình $\cos x = m$

a) Nếu $|m| > 1$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Nếu $|m| \leq 1$ thì phương trình có nghiệm: $x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$,

với α là góc thuộc $[0; \pi]$ sao cho $\cos \alpha = m$.

Chú ý :

Một số trường hợp đặc biệt:

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $u = -v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ hoặc $x = -a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

4. Phương trình $\tan x = m$

Với mọi số thực m , phương trình $\tan x = m$ có nghiệm $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ với α là góc thuộc $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

sao cho $\tan \alpha = m$.

Chú ý : $\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

5. Phương trình $\cot x = m$

Với mọi số thực m , phương trình $\cot x = m$ có nghiệm $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ với α là góc thuộc $(0; \pi)$ sao cho $\cot \alpha = m$.

Chú ý: $\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365$$

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)

- Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời?

Lời giải

a) Để thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời thì:

$$3\sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) + 12 = 12$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t - 80 = 182k (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = 80 + 182k (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$ nên ta có:

$$\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 0 < 80 + 182k \leq 365 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -80 < 182k \leq 285 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{40}{91} < k \leq \frac{285}{182} \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{0; 1\}$$

Với $k = 0$ thì $t = 80 + 182 \cdot 0 = 80$;

Với $k = 1$ thì $t = 80 + 182 \cdot 1 = 262$.

Vậy thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 80 và ngày thứ 262 trong năm.

b) Để thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời thì:

$$3\sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right)+12=9 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right)=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80)=-\frac{\pi}{2}+k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t-80=-91+364k (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t=-11+364k (k \in \mathbb{Z})$$

Do $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$ nên ta có

$$\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 0 < -11+364k \leq 365 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 11 < 364k \leq 376 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ \frac{11}{364} < k \leq \frac{94}{364} \end{cases} \Leftrightarrow k=1$$

Với $k=1$ thì $t=-11+364 \cdot 1=353$.

Vậy thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 353 trong năm.

c) Để thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời thì:

$$3\sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right)+12=15$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80)=\frac{\pi}{2}+k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t-80=91+364k (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t=171+364k (k \in \mathbb{Z})$$

Do $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$ nên ta có:

$$\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 0 < 171+364k \leq 365 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -171 < 364k \leq 194 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{171}{364} < k \leq \frac{97}{364} \end{cases} \Leftrightarrow k=0$$

Với $k=0$ thì $t=171+364 \cdot 0=171$.

Vậy thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 171 trong năm.

Câu 2: Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 39). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là 3 m; 0 m ?



Hình 39

Lời giải

Để khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng là 3 m thì:

$$\begin{aligned}
 & \left| 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] \right| = 3 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = 3 \\ 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = 1 \\ \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} (2t-1) = k2\pi \\ \frac{\pi}{3} (2t-1) = \pi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-1 = 6k \\ 2t-1 = 3 + 6k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 6k + 1 \\ 2t = 6k + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3k + \frac{1}{2} \\ t = 3k + 2 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Do $t \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1; 2; \dots\}$

Khi đó $\left[\begin{matrix} t \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{7}{2}; \frac{13}{2}; \dots \right\} \\ t \in \{2; 5; 8; \dots\} \end{matrix} \right] \Rightarrow t \in \left\{ \frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}; 5; \frac{13}{2}; 8; \dots \right\}.$

Vậy $t \in \left(\frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}; 5; \frac{13}{2}; 8; \dots \right)$ (giây) thì khoảng cách h là 3 m.

Để khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng là 0 m thì:

$$\left| 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] \right| = 0 \Leftrightarrow 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

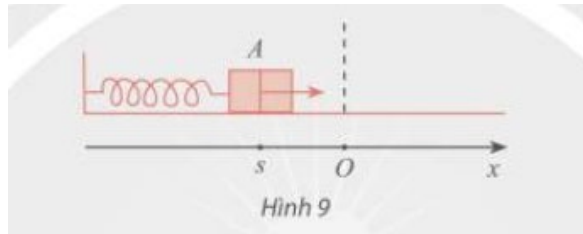
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 2t-1 = \frac{3}{2} + 3k$$

$$\Leftrightarrow 2t = \frac{5}{2} + 3k \Leftrightarrow t = \frac{5}{4} + \frac{3}{2}k$$

$$\text{Do } t \geq 0, k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k \in \{0; 1; 2; \dots\}, \text{ khi đó } t \in \left\{\frac{5}{4}; \frac{11}{4}; \frac{17}{4}; \dots\right\}$$

Vậy $t \in \left\{\frac{5}{4}; \frac{11}{4}; \frac{17}{4}; \dots\right\}$ (giây) thì khoảng cách h là 0m

Câu 3: Trong Hình 9, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm?



(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Lời giải

Xét phương trình:

$$10\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -5\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10t + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 10t + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{5} \\ t = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy vào các thời điểm $t = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{5}$ ($k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$) và $t = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{5}$ ($k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$) thì $s = -5\sqrt{3}$ cm.

Câu 4: Trong Hình 10, ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO = 1$ km. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10}$ rad/s và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện

nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rơi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.



Hình 10

(Theo <https://www.mnhhs.org/splitrock/learn/technology>)

- Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO . Viết hàm số biểu thị tọa độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t .
- Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với tọa độ $y_N = -1$ (km). Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

Lời giải

- Sau t giây điểm M quét được một góc lượng giác có số đo là: $\alpha = \frac{\pi}{10}t$ rad.

Xét tam giác HOM vuông tại O có:

$$MO = \tan \alpha \cdot 1 = \tan \left(\frac{\pi}{10}t \right)$$

$$\text{Vậy tọa độ } y_M = \tan \left(\frac{\pi}{10}t \right).$$

- Xét $\tan \left(\frac{\pi}{10}t \right) = -1$

$$\Leftrightarrow \tan \left(\frac{\pi}{10}t \right) = \tan \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{10}t = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = -2,5 + 10k, k \in \mathbb{Z}$$

Vì $t \geq 0$ nên tại các thời điểm $t = -2,5 + 10k, k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$ thì đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

Câu 5: Một quả đạn pháo được bắn khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500$ m/s hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha, \text{ ở đó } g = 9,8 \text{ m/s}^2 \text{ là gia tốc trọng trường.}$$

- Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).

b) Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m .

c) Tìm góc bắn α để quả đạn đạt độ cao lớn nhất.

Lời giải

Vì $v_0 = 500 \text{ m/s}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ nên ta có phương trình quỹ đạo của quả đạn là

$$y = \frac{-9,8}{2 \cdot 500^2 \cdot \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \quad \text{hay} \quad y = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha .$$

a) Quả đạn chạm đất khi $y = 0$, khi đó $\frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = 0$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2500000 \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{49} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2500000 \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{49} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1250000 \sin 2\alpha}{49} \end{cases}$$

Loại $x = 0$ (đạn pháo chưa được bắn).

Vậy tầm xa mà quả đạn đạt tới là $x = \frac{1250000 \sin 2\alpha}{49} (\text{ m})$.

b) Để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m thì $x = 22000 \text{ m}$.

$$\text{Khi đó } \frac{1250000 \sin 2\alpha}{49} = 22000 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{539}{625}$$

Gọi $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ là góc thỏa mãn $\sin \beta = \frac{539}{625}$. Khi đó ta có: $\sin 2\alpha = \sin \beta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = \beta + k2\pi \\ 2\alpha = \pi - \beta + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\beta}{2} + k\pi \\ \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Hàm số $y = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$ là một hàm số bậc hai có đồ thị là một parabol có tọa độ đỉnh $l(x_1; y_1)$ là

$$\left\{ \begin{array}{l} x_I = -\frac{b}{2a} = -\frac{\tan \alpha}{2 \cdot \frac{-99}{2500000 \cos^2 \alpha}} = \frac{1250000 \cos \alpha \sin \alpha}{49} \\ y_I = f(x_I) = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1250000 \cos \alpha \sin \alpha}{49} \right)^2 + \frac{1250000 \cos \alpha \sin \alpha}{49} \tan \alpha \end{array} \right.$$

Hay $\left\{ \begin{array}{l} x_I = \frac{1250000 \cos \alpha \sin \alpha}{49} \\ y_I = \frac{625000 \sin^2 \alpha}{49} \end{array} \right.$

Do đó, độ cao lớn nhất của quả đạn là $y_{\max} = \frac{625000 \sin^2 \alpha}{49}$.

Câu 6: Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2 \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right)$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Lời giải

Vị trí cân bằng của vật dao động điều hoà là vị trí vật đứng yên, khi đó $x = 0$, ta có

$$\begin{aligned} 2 \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5t - \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{2\pi}{15} + k \frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, tức là $0 \leq t \leq 6$ hay $0 \leq \frac{2\pi}{15} + k \frac{\pi}{5} \leq 6$

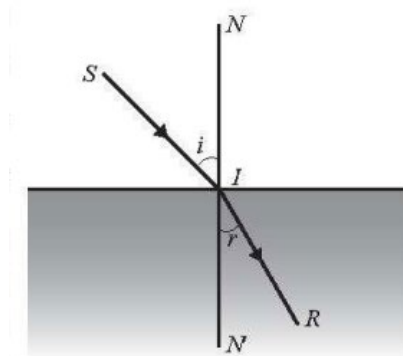
$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{90 - 2\pi}{3\pi}$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 9 lần.

Câu 7: Theo Định luật khúc xạ ánh sáng, khi một tia sáng được chiếu tới mặt phân cách giữa hai môi trường trong suốt không đồng chất thì tỉ số $\frac{\sin i}{\sin r}$, với i là góc tới và r là góc khúc xạ, là một hằng số phụ thuộc vào chiết suất của hai môi trường. Biết rằng khi góc tới là 45° thì góc khúc

xạ bằng 30° . Khi góc tới là 60° thì góc khúc xạ là bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Lời giải

Vì $\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin r}$ nên $\sin r = \frac{\sin 60^\circ \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Suy ra $r = 37,76^\circ$.

Câu 8: Một quả bóng được ném xiên một góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) từ mặt đất với tốc độ v_0 (m/s). Khoảng cách theo phương ngang từ vị trí ban đầu của quả bóng đến vị trí bóng chạm đất được tính bởi công thức $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{10}$.

a) Tính khoảng cách d khi bóng được ném đi với tốc độ ban đầu 10 m/s và góc ném là 30° so với phương ngang.

b) Nếu tốc độ ban đầu của bóng là 10 m/s thì cần ném bóng với góc bao nhiêu độ để khoảng cách d là 5 m?

Lời giải

a) $d = 5\sqrt{3} \approx 8,66$ (m);

b) $d = 5 \Leftrightarrow \frac{10^2 \cdot \sin 2\alpha}{10} = 5 \Leftrightarrow 10 \sin 2\alpha = 5 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = 30^\circ$ hoặc $2\alpha = 150^\circ \Leftrightarrow \alpha = 15^\circ$ hoặc $\alpha = 75^\circ$.

Câu 9: Chiều cao h (m) của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

a) Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?

b) Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao 40 m lần đầu tiên?

Lời giải

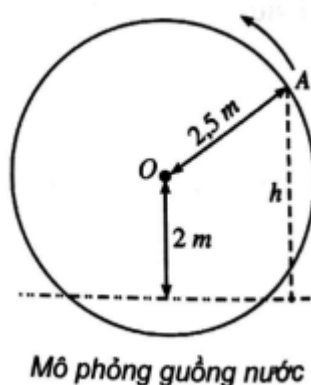
a) 50 m; b) 12,5 giây.

Câu 10: Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) tính từ một chiếc gàu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt nước là $h = |y|$ trong đó $y = 2 + 2,5 \sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)$ với x là thời gian quay của

guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới mặt nước.

a) Khi nào chiếc gầu ở vị trí cao nhất? Thấp nhất?

b) Chiếc gầu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên khi nào?



Lời giải

a) Vì $-1 \leq \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) \leq 1$ nên $-2,5 \leq 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) \leq 2,5$ và do đó ta có

$$-0,5 = 2 - 2,5 \leq 2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) \leq 2 + 2,5 = 4,5 \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra, gầu ở vị trí cao nhất khi

$$\sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + k \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Vậy gầu ở vị trí cao nhất tại các thời điểm $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ phút.

Tương tự, gầu ở vị trí thấp nhất khi

$$\sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = k \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Vậy gầu ở vị trí thấp nhất tại các thời điểm $0, 1, 2, 3, \dots$ phút.

b) Gầu cách mặt nước 2 m khi

$$2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2} \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Vậy chiếc gầu cách mặt nước 2 m lần đầu tiên tại thời điểm $x = \frac{1}{4}$ phút.

Câu 11: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hoá bởi hàm số

$$L(t) = 12 + 2,83 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right), (t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365).$$

- a) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

Lời giải

$$\text{Vì } -1 \leq \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) \leq 1 \text{ nên } -2,83 \leq 2,83 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) \leq 2,83.$$

$$\text{Do đó } 9,17 = 12 - 2,83 \leq 12 + 2,83 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) \leq 12 + 2,83 = 14,83 \forall t \in \mathbb{R}.$$

- a) Ngày thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right] = -1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{45}{4} + 365k (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vì } 0 < t \leq 365 \text{ nên } k = 1, \text{ suy ra } t = -\frac{45}{4} + 365 = 353,75.$$

Như vậy, vào ngày thứ 353 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 12 thì thành phố A sẽ có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất.

- b) Ngày thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 171,25 + 365k (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vì } 0 < t \leq 365 \text{ nên } k = 0, \text{ suy ra } t = 171,25.$$

Như vậy, vào ngày thứ 171 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 6 thì thành phố A sẽ có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất.

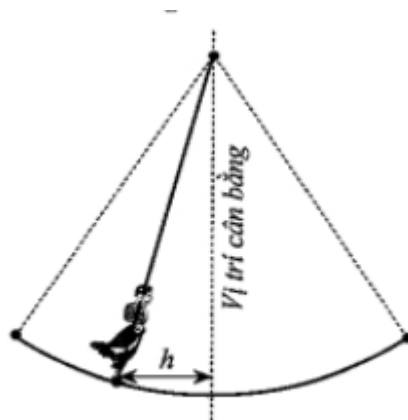
- c) Thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời trong ngày nếu

$$12 + 2,83 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right] = 10 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right] = -\frac{200}{283} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{365}(t-80) \approx -0,78 + k2\pi \\ \frac{2\pi}{365}(t-80) \approx 3,93 + k2\pi \end{cases}$$

Từ đó ta được $\begin{cases} t \approx 34,69 + 365k, \\ t \approx 308,30 + 365k \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 0$ suy ra $t \approx 34,69$ hoặc $t \approx 308,30$.

Như vậy, vào khoảng ngày thứ 34 của năm, tức là ngày 3 tháng 2 và ngày thứ 308 của năm, tức là ngày 4 tháng 11 thành phố A sẽ có 10 giờ ánh sáng mặt trời.

Câu 12: Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng Hình 14. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại. Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là 3 m; 0 m ?



Hình 14

Lời giải

Do $-1 \leq \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \leq 1$ nên $-3 \leq 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \leq 3$ hay $-3 \leq d \leq 3$. Do đó, $0 \leq |d| \leq 3$.

Vậy $h = 3$ khi $|d| = 3$ hay $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{1+3k}{2} \text{ với } k \in \mathbb{Z}, k \geq 0;$$

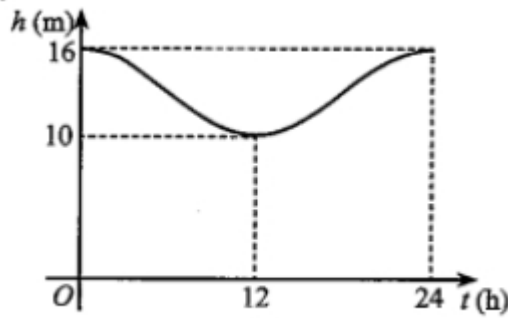
$$h = 0 \text{ khi } |d| = 0 \text{ hay } \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{5+6k}{4} \text{ với } k \in \mathbb{Z}, k \geq 0.$$

Câu 13: Mức nước cao nhất tại một cảng biển là 16 m khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mức nước thấp nhất là 10 m. Đồ thị ở Hình 15 mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm. Biết chiều cao của mực nước h (m)

theo thời gian t (h) ($0 \leq t \leq 24$) được cho bởi công thức $h = m + a\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ với m, a là các số thực dương cho trước.

a) Tìm m, a .

b) Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước là 11,5 m.



Hình 15

Lời giải

a) Chiều cao của mực nước cao nhất là $m + a$ khi $\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 1$ và thấp nhất bằng $m - a$ khi

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -1. \text{ Theo giả thiết, ta có: } \begin{cases} m + a = 16 \\ m - a = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 13 \\ a = 3. \end{cases}$$

b) Từ câu a ta có công thức: $h = 13 + 3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$. Do chiều cao của mực nước là 11,5 m nên

$$13 + 3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 11,5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12}t = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{\pi}{12}t = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 + 24k \\ t = -8 + 24k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Ứng với hai thời điểm trong ngày ta có $t = 8$ (h) và $t = 16$ (h).

Câu 14: Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t < 24$) cho bởi công thức

$$h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12. \text{ Tìm } t \text{ để độ sâu của mực nước là}$$

- a) 15m
- b) 9m
- c) 10,5 m

Lời giải

+) Độ sâu của mực nước là 15m thì $h = 15$.

Khi đó

$$15 = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = \cos 0 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + 1 = k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{6(k2\pi - 1)}{\pi}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vì } 0 \leq t < 24 \text{ nên } 0 \leq \frac{6(k2\pi - 1)}{\pi} \leq 24 \Leftrightarrow 0 < k \leq 2$$

$$\text{Lại do } k \in Z \Rightarrow k \in \{1; 2\} \Rightarrow t \in \left\{ \frac{6(2\pi-1)}{\pi}; \frac{6(4\pi-1)}{\pi} \right\}$$

+) Độ sâu của mực nước là 9m thì $h = 9$.

Khi đó

$$9 = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = \cos \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + 1 = \pi + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{6(k2\pi + \pi - 1)}{\pi}; k \in Z$$

$$\text{Vì } 0 \leq t < 24 \text{ nên } \leq \frac{6(k2\pi + \pi - 1)}{\pi} \leq 24 \Leftrightarrow 0 < k \leq 1$$

$$\text{Lại do } k \in Z \Rightarrow k = 1 \Rightarrow t = \frac{6(3\pi - 1)}{\pi}$$

+) Độ sâu của mực nước là 10,5m thì $h = 10,5$.

Khi đó

$$10,5 = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi t}{6} + 1 = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{\pi t}{6} + 1 = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{6\left(\frac{2\pi}{3} + k2\pi - 1\right)}{\pi}; k \in Z \\ t = \frac{6\left(-\frac{2\pi}{3} + k2\pi - 1\right)}{\pi}; k \in Z \end{cases}$$

$$\text{Vì } t = \frac{6\left(\frac{2\pi}{3} + k2\pi - 1\right)}{\pi}; k \in Z \text{ Vì } 0 \leq t < 24 \text{ nên } 0 \leq \frac{6\left(\frac{2\pi}{3} + k2\pi - 1\right)}{\pi} \leq 24 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 2$$

$$\text{Lại do } k \in Z \Rightarrow k \in \{0; 1; 2\} \Rightarrow t \in \left\{ \frac{6\left(\frac{2\pi}{3} - 1\right)}{\pi}; \frac{6\left(\frac{8\pi}{3} - 1\right)}{\pi}; \frac{6\left(\frac{14\pi}{3} - 1\right)}{\pi} \right\}$$

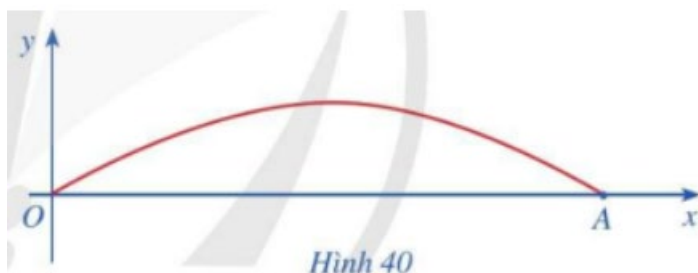
$$\text{Với } t = \frac{6\left(-\frac{2\pi}{3} + k2\pi - 1\right)}{\pi}; k \in Z$$

Vì $0 \leq t < 24$ nên

$$0 \leq \frac{6\left(-\frac{2\pi}{3} + k2\pi - 1\right)}{\pi} \leq 24 \Leftrightarrow 0 < k \leq 2$$

$$\text{Lại do } k \in Z \Rightarrow k \in \{1; 2\} \Rightarrow t \in \left\{ \frac{6\left(-\frac{2\pi}{3} - 1\right)}{\pi}; \frac{6\left(\frac{4\pi}{3} - 1\right)}{\pi}; \frac{6\left(\frac{10\pi}{3} - 1\right)}{\pi} \right\}$$

Câu 15: Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y = 4,8 \sin \frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 40.



- a) Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA. Tìm chiều rộng đó (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)
- b) Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3,6m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn 13,1m.



- c) Một sà lan khác cũng chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hóa đó là 9m sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn 4,3m

Lời giải

- a) Giải phương trình $y = 0 \Leftrightarrow 4,8 \sin \frac{x}{9} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{9} = k\pi \Leftrightarrow x = k9\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Do đó đồ thị cắt trục Ox tại các điểm có hoành độ $0; 9\pi; 18\pi; \dots$

Vì thế $A(9\pi; 0)$

Chiều rộng của con sông là $OA = 9\pi \approx 28,3m$

- b) Xét đường thẳng $y = 3,6$

Ta có $y = 4,8 \sin \frac{x}{9} \leq 4,8$, nên đường thẳng $y = 3,6$ cắt một phần đồ thị của hàm số

$y = 4,8 \sin \frac{x}{9}$ tại hai điểm $M(x_1; 3,6), N(x_2; 3,6)$.

Giải phương trình $4,8 \sin \frac{x}{9} = 3,6 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = \frac{3}{4}$ (1), x_1, x_2 là hai nghiệm dương nhỏ nhất của (1)

$-1 \leq \frac{3}{4} \leq 1$ nên tồn tại một số $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = \frac{3}{4}$.

$$\text{Ta có } \sin \frac{x}{9} = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{9} = \alpha + k2\pi \\ \frac{x}{9} = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9\alpha + k18\pi \\ x = 9\pi - 9\alpha + k18\pi \end{cases}$$

Do $x_1; x_2 \in (0; 9\pi)$ nên $x_1 \approx 9\alpha \approx 7,6325$; $x_2 \approx 9\pi - 9\alpha \approx 20,6418$

Nên $x_2 - x_1 < 13,1$.

Vậy chiều rộng của khối hàng hoá bé hơn 13,1m

c) Cho $0 < m < 4,8$ đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại hai điểm $P(x_3; m), Q(x_4; m)$, x_3, x_4 là hai nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $4,8 \sin \frac{x}{9} = m$ (2); $x_4 - x_3 = 9$.

$$\Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = \frac{m}{4,8}, \text{ vì } 0 < \frac{m}{4,8} < 1 \text{ nên } \exists \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ sao cho } \sin \beta = \frac{m}{4,8} (*)$$

$$\text{Khi đó (2) trở thành } \Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9\beta + k18\pi \\ x = 9(\pi - \beta) + k18\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

Hai nghiệm dương nhỏ nhất của (2) là $x_3 = 9\beta, x_4 = 9(\pi - \beta)$

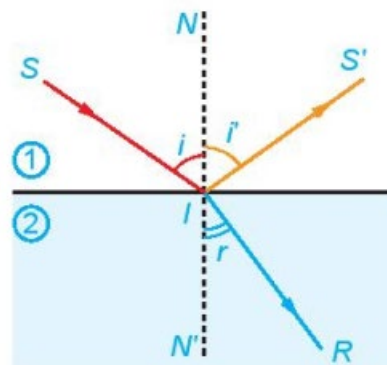
$$\text{Ta có } x_4 - x_3 = 9(\pi - \beta) - 9\beta = 0.$$

$$\text{Do vậy } m = 4,8 \sin \beta \text{ hay } m = 4,8 \sin \frac{\pi - 1}{2} \approx 4,2124 < 4,3.$$

Vậy chiều cao của mỗi khối hàng hoá bé hơn 4,3m.

Câu 16: Khi một tia sáng truyền từ ông khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như trong Hình 1.26. Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật

$$\text{khúc xạ ánh sáng } \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$



Hình 1.26

Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng là chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước). Cho biết góc tới $i = 50^\circ$, hãy tính góc khúc xạ, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là 1,33.

Lời giải

Theo bài ra ta có: $i = 50^\circ, n_1 = 1, n_2 = 1,33$, thay vào $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$ ta được:

$$\begin{aligned}\frac{\sin 50^\circ}{\sin r} &= \frac{1,33}{1} \quad (\text{đk } \sin r \neq 0) \\ \Rightarrow \sin r &= \frac{\sin 50^\circ}{1,33} \\ \Leftrightarrow \sin r &\approx 0,57597 \quad (\text{thỏa mãn đk}) \\ \Leftrightarrow \sin r &\approx \sin(35^\circ 10') \\ \Leftrightarrow \begin{cases} r \approx 35^\circ 10' + k360^\circ \\ r \approx 180^\circ - 35^\circ 10' + k360^\circ \end{cases} & (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{Mà } 0^\circ < r < 90^\circ \text{ nên } r \approx 35^\circ 10'. \\ \Leftrightarrow \begin{cases} r \approx 35^\circ 10' + k360^\circ \\ r \approx 144^\circ 50' + k360^\circ \end{cases} & (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Vậy góc khúc xạ $r \approx 35^\circ 10'$.

Câu 17: Vận tốc v_1 (cm/s) của con lắc đơn thứ nhất và vận tốc v_2 (cm/s) của con lắc đơn thứ hai theo thời gian t (giây) được cho bởi các công thức:

$$v_1(t) = -4\cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ và } v_2(t) = 2\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

- Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất bằng 2 cm/s;
- Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất gấp hai lần vận tốc của con lắc đơn thứ hai.

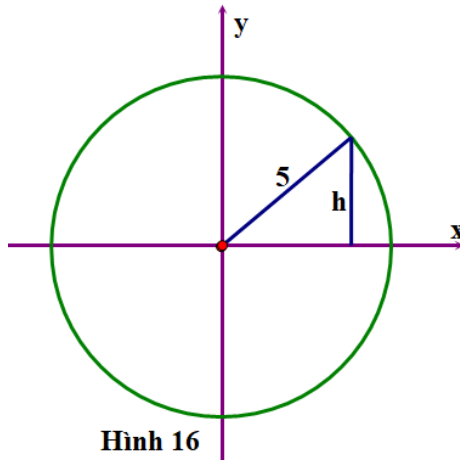
Lời giải

$$\text{a) } t = \frac{5\pi}{8} + k3\pi, k \in \mathbb{N} \text{ và } t = \frac{13\pi}{8} + k3\pi, k \in \mathbb{N};$$

$$\text{b) } t = \frac{19\pi}{16} + k\frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{N} \text{ và } t = \frac{13\pi}{32} + k\frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{N}.$$

Câu 18: Một chất điểm chuyển động đều theo chiều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn bán kính 5 cm. Khoảng cách h (cm) từ chất điểm đến trục hoành được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = a\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ với t là thời gian chuyển động của chất điểm tính bằng giây ($t \geq 0$) và chất điểm bắt đầu chuyển động từ vị trí A (Hình 16).

- a) Chất điểm chuyển động một vòng hết bao nhiêu giây?
b) Tìm giá trị của a .
c) Tìm thời điểm sao cho chất điểm ở vị trí có $h = 2,5$ cm và nằm phía dưới trục hoành trong một vòng quay đầu tiên.



Hình 16

Lời giải

a) Xét $h = 0$ hay $a \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 5k$ với $k \in \mathbb{Z}$ và $k \geq 0$.

Ta nhận thấy, từ thời điểm ban đầu, cứ sau 5 giây, khoảng cách từ chất điểm đến trục hoành lại bằng 0. Suy ra sau mỗi 5 giây, chất điểm chuyển động được nửa vòng. Vậy chất điểm chuyển động một vòng hết 10 giây.

b) Do chất điểm chuyển động một vòng hết 10 giây nên khi $t = 2,5$ giây thì chất điểm chuyển động được một phần tư vòng theo chiều dương, suy ra tại $t = 2,5$ ta có

$$y = |y| = h = 5 \Leftrightarrow a \sin\left(\frac{\pi}{5}, \frac{5}{2}\right) = 5 \Leftrightarrow a = 5.$$

Câu 19: Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số $P(t) = 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$ ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo giây.

a) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 100 mmHg.

b) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 120 mmHg.

Lời giải

a) Huyết áp là 100 mmHg khi

$$P(t) = 100 \Leftrightarrow 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 100 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{3k}{7} (k \in \mathbb{Z})$$

Xét $0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3k}{7} < 1 \Leftrightarrow 0 < k < \frac{7}{3} \Leftrightarrow k \in \{1; 2\}$ vì $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 2 lần huyết áp là 100 *mmHg*.

b) Huyết áp là 120 *mmHg* khi

$$P(t) = 120 \Leftrightarrow 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 120 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{3}{14} + \frac{6k}{7} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Xét $0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{14} + \frac{6k}{7} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{11}{12} \Leftrightarrow k = 0$ vì $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 1 lần huyết áp là 120 *mmHg*.