

Gv. ThS NGUYỄN VŨ MINH

ĐT : 0914449230 (zalo – facebook)

Phân dạng và phương pháp giải trắc nghiệm Toán 12

HÀM SỐ

Tập 1

- ☐ *Tính đơn điệu*
- ☐ *Cực trị*
- ☐ *GTLN-GTNN*

BIÊN HÒA – Ngày 07 tháng 06 năm 2017

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

PHẦN 1 : TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

► Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** trên khoảng $(a;b)$ $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (a;b)$.

► Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** trên khoảng $(a;b)$ $\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (a;b)$.

☺ **Chú ý :**

♣ Điều kiện để tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ **không đổi dấu** trên $\mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

Nếu hệ số a và b có chứa tham số m thì phải xét trường hợp $a = 0$

♣ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng (a,b) thì với $a \leq x_1 \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(x_1) \leq f(b)$.

♣ **Các bước xét tính đơn điệu của hàm số :**

♥ B1 : Tìm TXĐ , tính đạo hàm cấp 1 (y')

♥ B2 : Cho $y' = 0$ tìm x

♥ B3 : Lập bảng biến thiên và kết luận

♣ **Với dạng toán tìm tham số m để hàm số bậc ba đơn điệu một chiều trên khoảng có độ dài bằng l ta giải như sau:**

Bước 1: Tính $y' = f'(x; m) = ax^2 + bx + c$.

Bước 2: Hàm số đơn điệu trên $(x_1; x_2) \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \quad (*)$

Bước 3: Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng $l \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = l \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = l^2$
 $\Leftrightarrow S^2 - 4P = l^2 \quad (**)$

Bước 4: Giải $(*)$ và giao với $(**)$ để suy ra giá trị m cần tìm.

BÀI TẬP TỰ LUẬN PHẦN TÍNH ĐƠN ĐIỆU

Bài 1 : Xét tính đơn điệu của các hàm số sau đây :

a/ $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 13$

b/ $y = 3x^4 - 6x^2 + 2$

c/ $y = x^4 - 5x^2 + 1$

d/ $y = -x^4 - 6x^2 + 8$

e/ $y = x^3 - 3x + 1$

f/ $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$

g/ $y = -x^3 - 3x^2 + 24x + 25$

h/ $y = -x^3 + x^2 - 3x + \frac{1}{3}$

k/ $y = \frac{2x-2}{x+1}$

$$l/ y = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 4x + 1$$

$$m/ y = \frac{x+1}{3-x}$$

$$n/ y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2 (soạn) : Xét tính đơn điệu của các hàm số sau đây :

$$1/ y = x^4 - 2x^2 + \frac{3}{2}$$

$$2/ y = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x + 1$$

$$3/ y = 2x^3 + 3x + 1$$

$$4/ y = \frac{3x+1}{x+2}$$

$$5/ y = (x-2)^3 - 3x + 4$$

$$6/ y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2$$

$$7/ y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x + 1$$

$$8/ y = -\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x - 2$$

$$9/ y = x^3 - 3x^2 + 4$$

$$10/ y = x^3 - 3x^2 + 9x + \frac{2}{3}$$

$$11/ y = x^3 - 8x^2 + 16x + \frac{2}{5}$$

$$12/ y = 2x^3 - 3x^2 + \frac{1}{4}$$

$$13/ y = x^3 - 9x^2 + 9x - \frac{7}{4}$$

$$14/ y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{2}$$

$$15/ y = \frac{x-3}{2-x}$$

Bài 3 : Xét tính đơn điệu của các hàm số sau đây :

$$a/ y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 3$$

$$b/ y = -5x^3 + 3x^2 - 4x + 5$$

$$c/ y = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x - 3$$

$$d/ y = x^3(1-x^2)^2$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4 : Tìm m để các hàm số sau luôn giảm trên từng khoảng xác định :

$$a/ y = \frac{mx-1}{x+2}$$

$$b/ y = \frac{m^2x-1}{-4x+1}$$

$$c/ y = -\frac{x^3}{3} + x^2 - (m-3)x + \frac{11}{5}$$

Bài 5 : Tìm m để các hàm số sau luôn tăng trên từng khoảng xác định :

$$a/ y = \frac{mx+4}{x-4}$$

$$b/ y = \frac{x^3}{3} - (m-1)x^2 + 2(m^2+2)x - 4$$

$$c/ y = (m+2)\frac{x^3}{3} - (m+2)x^2 - (3m-1)x + m^2$$

$$d/ y = (m-2)\frac{x^3}{3} - (2m-3)x^2 + (5m-6)x + 2$$

Bài 6 (soạn): Tìm m để các hàm số sau :

a/ $y = \frac{mx+1}{x+m}$ luôn giảm trên từng khoảng xác định

b/ $y = \frac{x-m}{x+3}$ luôn tăng trên từng khoảng xác định

c/ $y = x^3 + 3mx^2 + 3x - 1$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$ (Đs : $-1 \leq m \leq 1$)

d/ $y = x^3 + (m-1)x^2 + (m^2-4)x + 9$ luôn tăng (Đs : $m \leq \frac{-1-3\sqrt{3}}{2}$ hoặc $m \geq \frac{-1+3\sqrt{3}}{2}$)

e/ $y = x^3 - 3x^2 + (2m+1)x - 4$ Đồng biến trên $\mathbb{R}$ (Đs : $m \geq 1$)

f/ $y = \frac{2x-1}{x-m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định (Đs : $m > \frac{1}{2}$)

g/ $y = -x^3 + (m+2)x^2 + (m-1)x - 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (Đs: $\frac{-7-3\sqrt{5}}{2} \leq m \leq \frac{-7+3\sqrt{5}}{2}$)

h/ $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + (m+1)x + 9$ đồng biến với mọi x (Đs : $m \geq 3$)

k/ $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x - 1$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$ (Đs : $-2 \leq m \leq 2$)

l/ $y = x^3 + mx^2 + 4x + 3$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$ (Đs : $-2\sqrt{3} \leq m \leq 2\sqrt{3}$)

Bài 7 : Tìm m để :

a/ (ĐHQG Tp.HCM – 2000) Hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 1

b/ Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m-1)x^2 - (m+1)x - 3$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 5

c/ Hàm số $y = -x^3 + m^2x^2 + mx + 3m + 5$ đồng biến trên đoạn có độ dài bằng 3

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 8 : Tìm a để hàm số $y = \frac{1}{3}(a^2 - 1)x^3 + (a+1)x^2 + 3x + 5$ luôn đồng biến trên từng khoảng xác định ?
(Đs: $a \leq -1 \vee a \geq 2$)

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 9 : Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m-1)x^3 + mx^2 + (3m-2)x$ luôn đồng biến với mọi x (Đs: $m \geq 2$)

Bài 10 : CMR hàm số $y = -x^3 + (m+1)x^2 - (m^2 + 2)x + m$ luôn nghịch biến

Bài 11 : Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2(m-1)x^2 + (2m^2 - m + 2)x + m - 3$ luôn đồng biến

Bài 12 : Tìm a để hàm số sau đây luôn giảm

a/ $y = -x^3 + (a+1)x^2 - (2a+1)x - 3$

b/ $y = \frac{ax + a - 7}{5x - a + 3}$

Bài 13 (ĐH Thủy lợi – 1997) : tìm m để hàm số sau đồng biến trên R

$y = \frac{m-1}{3}.x^3 + m.x^2 + (3m-2).x$

Bài 14) : Cho hàm số $y = -2x^3 + 3mx^2 - 1$. Tìm các giá trị m để hàm số đồng biến trên khoảng (x_1, x_2) với $x_2 - x_1 = 1$.

BÀI TẬP MINH HỌA PHẦN TÍNH ĐƠN ĐIỆU

Ví dụ 1 : Xác định m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$

luôn luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $m \geq 3$

B. $m < 3$

C. $m \in \mathbb{R}$

D. $m \in \emptyset$

♠ **Giải :** Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

Làm tự luận ! Đạo hàm : $y' = 3x^2 + 6x + m$

Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a = 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$

Vậy: với $m \geq 3$ thì hàm số luôn đồng biến trên D hay $\mathbb{R}$ (**chọn A**)

Làm trắc nghiệm !

Khi làm bài trắc nghiệm chúng ta không thể giải như vậy vì sẽ có nhiều bài phức tạp “số xấu”

● **Phương pháp “BỐC ĐẠI”**

► “Bốc đại” $m = 2$ ở câu B thì ta thấy $y' = 3x^2 + 6x + 2 = 0$, phương trình này có 2 nghiệm (bấm máy là thấy nha)

Mà hàm số luôn đồng biến thì $\Delta < 0$, $a > 0$ mà !! (**Loại B**)

► “Bốc đại” $m = 4$ ở câu A thì ta thấy $y' = 3x^2 + 6x + 4 = 0$, phương trình này vô nghiệm (bấm máy là thấy nha) thì $\Delta < 0$ và $a > 0$

(thỏa mãn để hs đồng biến) Nên chọn A

Ví dụ 2 : Cho hàm số $y = (m^2 - 1)\frac{x^3}{3} + (m + 1)x^2 + 3x - 1$ (C_m). Tìm m để hàm số (C_m) luôn đồng biến.

♠ **Giải :** Đạo hàm $y' = (m^2 - 1)x^2 + 2(m + 1)x + 3$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Với $m = 1$ thì $y' = 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{4}$: không thỏa mãn.

Với $m = -1$ thì $y' = 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$: thỏa mãn.

Với $m \neq \pm 1$, ta có $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 > 0 \\ (m+1)^2 - 3(m^2 - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m < -1 \end{cases}$.

Vậy $m \leq -1$ hoặc $m \geq 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3 : Cho hàm số $y = \frac{mx+4-3m}{x+m}$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số giảm trên từng khoảng xác định.

♠ **Giải :** MXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$. Đạo hàm: $y' = \frac{m^2 + 3m - 4}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho giảm trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow$ hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \neq -m \Leftrightarrow m^2 + 3m - 4 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 1$.

Vậy với $-4 < m < 1$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 4 : Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (m+2)x^2 + mx - 7$ (m là tham số).

Xác định m để hàm số **ngịch biến** trên tập xác định.

♠ **Giải :** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = -x^2 + 2(m+2)x + m$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2(m+2)x + m \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 5m + 4 \leq 0 \\ -1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq -1.$$

Vậy $-4 \leq m \leq -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 5 : Cho hàm số $y = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 + x + m$. Tìm m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $m \geq 4, m < 1$ B. $1 < m \leq 4$ C. $1 < m < 4$ D. $1 \leq m \leq 4$

♠ **Giải :** Đáp án D

+ TH 1: Khi $m = 1$ thì $y = x + 1$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ TH 2: Khi $m \neq 1$. Ta có

$$y' = 3(m-1)x^2 + 2(m-1)x + 1$$

$$y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m-1)^2 - 3(m-1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \in [1; 4] \end{cases} \Rightarrow m \in (1; 4]$$

Vậy $m \in [1; 4]$

Ví dụ 6 : Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(1; 2)$ B. $(0; 2)$ C. $(0; 1)$ D. $(1; +\infty)$

♠ **Giải :** Đáp án A. Ta có $y = \sqrt{2x - x^2}$, TXĐ: $0 \leq x \leq 2$

$$f'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Lập bảng biến thiên ta nhận thấy Đạo hàm $f'(x)$ khi đi qua điểm có $x = 1$ thì đổi dấu từ dương sang âm. Nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$

Ví dụ 7 : Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $y = \frac{x-1}{x-2}$ B. $y = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 2$ C. $y = x^3 - x^2 + 2x + 3$ D. $y = x^3 - x^2 - 3x + 1$

♠ **Giải :** Đáp án C

Các hàm số đa thức bậc chẵn không đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì có đạo hàm $f'(x)$ là đa thức bậc lẻ nên điều kiện $f'(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ không xảy ra $\Rightarrow$ Loại B.

Hàm số bậc 1 trên bậc 1 không liên tục trên $\mathbb{R}$ (bị gián đoạn tại $x = 2$) nên loại A.

$y = x^3 - x^2 - 3x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2x - 3$ nhận thấy $y' = 0$ có nghiệm thực nên điều kiện $f'(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ không xảy ra $\Rightarrow$ Loại D

$y = x^3 - x^2 + 2x + 3 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2x + 2 = 2x^2 + (x-1)^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Nên đồ thị hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 8 : Cho hàm số $y = 2x^4 + 4x^2 - 2$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(1; +\infty)$ B. $(-\infty; 1)$ C. $(0; +\infty)$ D. $(-\infty; 0)$

♠ **Giải :** Đáp án C. $f'(x) = 8x^3 + 8x, \forall x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Mặt khác trên bảng biến thiên đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Ví dụ 9 : Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + (m+1)x - 3m$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ với giá trị m là

- A. $m \geq 3$ B. $m < 3$ C. $m \leq 3$ D. $m > 3$

♠ **Giải :** Đáp án C; $y' = x^2 + 4x + m + 1$; $f'(x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + 4x + m + 1 \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow m + 1 \geq -(x+2)^2 + 4; -(x+2)^2 + 4 \leq 4 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow m + 1 \geq 4 \Rightarrow m \geq 3$$

Ví dụ 10 : Hàm số $y = \frac{2x+5}{x+3}$ đồng biến trên khoảng:

- A. $(-\infty; -3); (3; +\infty)$ B. $\emptyset$ C. $(-\infty; 4); (4; +\infty)$ D. $(-\infty; -3); (-3; +\infty)$

♠ **Giải :** Đáp án D; Ta có: $y' = \frac{1}{(x+3)^2} > 0 \forall x \in (-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$

Suy ra hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty; -3), (-3; +\infty)$

Ví dụ 11 : Hàm số $y = 3x^4 - 6x^2 + 15$ đồng biến trên khoảng:

- A. $(-1; 0); (1; +\infty)$ B. $(-1; 0); (0; 1)$ C. $(-\infty; 1); (0; 1)$ D. $(-1; +\infty)$

♠ **Giải :** Đáp án A; $y' = 12x^3 - 12x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 0; 1\}$

Vẽ bảng biến thiên hoặc xét dấu y' suy ra đáp án

Ví dụ 12 : $y = (m+2)x^3 + 3(m+2)x^2 + 3(m+3)x - 9$. Hàm số sau đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi m bằng

- A. $m \leq -2$ B. $m \geq -2$ C. $m < -2$ D. $m > -2$

♠ **Giải :** Đáp án B; $y' = 3(m+2)x^2 + 6(m+1)x + 3(m+3)$

+) TH1: $m = -2$

Khi đó: $y' = 3 > 0 \forall x$ suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ (thỏa mãn)

+) TH2: $m \neq -2$

Xét phương trình $y' = 0$. Ta có: $\Delta' = -9(m+2)$

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' > 0 \forall x \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow m > -2$

Kết hợp 2 TH suy ra $m \geq -2$

Ví dụ 13 : Cho hàm số $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$. Xét các mệnh đề sau:

(i) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$

(ii) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$

(iii) Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$

Trong các mệnh đề trên, có bao nhiêu mệnh đề đúng ?

A. 3

B. 1

C. 2

D. 0

♠ **Giải :** Đáp án C

Ta có: $y' = 3x^2 - 8x + 5$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$. Do đó hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$, hàm số

nghịch biến trên $\left(1; \frac{5}{3}\right)$. Do đó mệnh đề (i) và (iii) đúng

Ví dụ 14 : Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(0; 2)$

B. $(1; 2)$

C. $(0; 1)$

D. $(-\infty; 1)$

♠ **Giải :** Đáp án C; TXĐ: $D = [0; 2]$; Có $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $y' > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Hàm số đồng biến trên $(0; 1)$

Ví dụ 15 : Hàm số $y = x^3 + 2x^2 + x + 1$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$

B. $(-\infty; -1)$

C. $(-\infty; +\infty)$

D. $\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$

♠ **Giải :** Đáp án D; Có $y' = 3x^2 + 6x + 1$. Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng giữa hai nghiệm của phương trình $y' = 0$ nên khoảng đó không thể chứa $-\infty$ hoặc $+\infty \Rightarrow$ Loại A, B, C

Ví dụ 16 : Hàm số $y = 3x^4 + 2$ đồng biến trên khoảng nào sau đây ?

A. $(0; +\infty)$

B. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$

C. $\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$

D. $(-\infty; 0)$

♠ **Giải :** Đáp án A; Ta có: $y' = 12x^3 \rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $y' > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Ví dụ 17 : Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + 3x + 4$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. $-2 \leq m \leq 2$

B. $-3 \leq m \leq 3$

C. $m \geq 3$

D. $m \leq -3$

♠ **Giải :** Đáp án B; Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx + 3$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - 9 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \in [-3; 3]$

Ví dụ 18 : Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = 2(x+2)^4 + 3$

A. $(-\infty; 0)$ B. $(0; +\infty)$ C. $(-\infty; -2)$ D. $(-2; +\infty)$

♠ **Giải :** Đáp án D; Có $y'(x) = 8(x+2)^3$; $y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Xét dấu của y' : $y' > 0$ khi $x > -2$; vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$

Ví dụ 19 : Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 - 4$. Các khoảng đồng biến của hàm số là:

A. $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$ B. $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$
C. $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$ D. $(-2; 0)$ và $(0; 2)$

♠ **Giải :** Đáp án A; Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; Sự biến thiên: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$

$$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

BBT:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
y'		-	0	+	-	0	+
y	$+\infty$			4			$+\infty$
		$\swarrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		
		-12		-12			

Vậy hàm số đồng biến trên $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$

Ví dụ 20 : Bảng biến thiên sau là của hàm số nào:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	0	-
y			2		2			
	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$	

A. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$

C. $y = x^4 - 2x^2 + 3$

D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$

♠ **Giải :** Đáp án B. Ta có y' có dạng: $a(x^2 - 1)x = 0$ thì cả 4 đáp án đều thỏa mãn.

Tại $x = -1$ ta loại đáp án A và C do không thỏa mãn $f(x) = 2$

Tại $x = 0, 5 \in [0; 1]$ ta có: $y = -x^4 + 2x^2 + 1 = \frac{23}{16} > 0 \in [1; 2], (tm)$; $y = x^4 - 2x^2 + 1 = \frac{9}{16} > 0 \notin [1; 2] (ktm)$

Ví dụ 21 : Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

- A. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -1 \end{cases}$ B. $m \leq 2$ C. $-2 \leq m \leq -1$ D. $-1 \leq m \leq 0$

♠ **Giải :** Đáp án C . Ta có: $y' = -x^2 + 2mx + 3m + 2$

Có $\Delta' = m^2 + 3m + 2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \in [-2; -1]$ (điều kiện để hàm số nghịch biến)

Ví dụ 22 : Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x - 2}{x - m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

- A. $-2 < m < 1$ B. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$ C. $-2 \leq m \leq 1$ D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases}$

♠ **Giải :** Đáp án C. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

$y' = \frac{(m+1)(x-m) - (m+1)x + 2}{(x-m)^2} = \frac{-m^2 - m + 2}{(x-m)^2}$. Để hàm số đồng biến trên $(-\infty; m) \cup (m; +\infty)$ thì:

$y' \geq 0; \forall x \in D \Leftrightarrow -m^2 - m + 2 \geq 0 \forall x \in D \Leftrightarrow m \in [-2; 1]$

Ví dụ 23 : Hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 - x + 1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

- A. $m \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$ B. $m \in \mathbb{R} \setminus (-1; 1)$ C. $m \in [-1; 1]$ D. $m \in (-1; 1)$

♠ **Giải :** Đáp án C

Ta có: $y' = -x^2 + 2mx - 1$

Nhận thấy hàm số đã cho là hàm số bậc ba có hệ số $a = -\frac{1}{3} < 0$ nên để hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, hay

$\Delta' = m^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$

Ví dụ 24 : Điều kiện cần và đủ của m để hàm số $y = \frac{mx+5}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định là

- A. $m > -5$ B. $m \geq -5$ C. $m \geq 5$ D. $m > 5$

♠ **Giải :** Đáp án D

Ta có: $y' = \frac{m-5}{(x+1)^2}$ để hàm số đã cho luôn đồng biến trên từng khoảng xác định thì

$m-5 > 0 \Leftrightarrow m > 5$

Ví dụ 26 : Hàm số nào trong các hàm số sau có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y			3			$+\infty$
	$-\infty$			-1		

- A. $y = x^3 + 3x^2 + 1$ B. $y = 2x^3 + 6x^2 - 1$ C. $y = x^3 + 3x^2 - 1$ D. $y = 2x^3 + 9x^2 - 1$

♠ **Giải :** Đáp án C

Nhận xét nhìn vào BBT ta thấy đây là bảng biến thiên của hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$
Hàm số có hai điểm cực trị là $x = -2; x = 0$. Do đó $x = -2; x = 0$ là nghiệm của phương trình $y' = 0$. Tức là $y' = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0$. Đến đây ta loại được B và D.
Với $x = 0$ thì $y = -1$ do đó chọn C

Ví dụ 27 : Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -2 \end{cases}$ B. $-2 \leq m \leq -1$ C. $\begin{cases} m > -1 \\ m < -2 \end{cases}$ D. $-2 < m < -1$

♠ **Giải :** Đáp án B; $y' = -x^2 + 2mx + 3m + 2$

+ **Xét TH** $m = 0$ ta có: $y' = -x^2 + 2 < 0, \forall x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$

Suy ra tại $m = 0$ hàm số ko nghịch biến trên $\mathbb{R}$

+ **Xét TH** $m \neq 0$

Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\mathbb{R}$ thì $y' < 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2mx + 3m + 2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ m^2 + 3m + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-2; -1]$$

Ví dụ 28 : Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số: $y = \frac{(m+1)x-2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

- A. $-2 \leq m \leq 1$ B. $-2 < m < 1$ C. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -2 \end{cases}$

♠ **Giải :** Đáp án B; $y = \frac{(m+1)x-2}{x-m}, y' = \frac{-m(m+1)+2}{(x-m)^2} = \frac{-m^2-m+2}{(x-m)^2}$

Yêu cầu $\Leftrightarrow y' > 0 \Leftrightarrow -m^2-m+2 > 0 \Leftrightarrow m^2+m-2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$

Ví dụ 29: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x$. Phát biểu nào sau đây đúng ?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\mathbb{R}$
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$ D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

♠ **Giải :** Đáp án D. Có $y' = x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -1$

$y' > 0 \Leftrightarrow x > 2$ hoặc $x < -1; y' < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(-1; 2)$

Ví dụ 30 : Với giá trị nào của m thì hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định?

- A. $m > -1$ B. $m < -1$ C. $m \geq -1$ D. $m \leq -1$

♠ **Giải :** Đáp án B. Điều kiện cần tìm là $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow -1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$

Ví dụ 31 : Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(1;3)$ B. $(-\infty;1)$ C. $(3;+\infty)$ D. $(1;+\infty)$

♠ **Giải :** Đáp án A. Có $y' = x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$; $y' < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$

Hàm số nghịch biến trên $(1;3)$

Ví dụ 32 : Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - mx + 3$. Tìm m để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $m < -1$ B. $m \geq -1$ C. $m > 1$ D. $m \leq -1$

♠ **Giải :** Đáp án A

$$y' = x^2 - 2x - m$$

Hàm số đã cho luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2x - m \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = 1 + m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$

Ví dụ 33 : Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$

- A. $y = \frac{x-1}{x+2}$ B. $y = x^3 + 4x - 1$ C. $y = -x^3 - 4x + 1$ D. $y = x^4$

♠ **Giải :** Đáp án B

Các kết quả cần nhớ

Hàm số phân thức bậc nhất trên bậc nhất không đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$ (chỉ trên từng khoảng xác định)

Hàm số đa thức bậc chẵn không đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì đạo hàm của chúng là đa thức bậc lẻ, không thể luôn dương hoặc luôn âm

Điều kiện cần để hàm số bậc lẻ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là có hệ số cao nhất dương

– Cách giải

Dựa vào các kết quả trên, loại A, D

Vì hàm số $y = -x^3 - 4x + 1$ có hệ số của x^3 là âm nên không thể đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ Loại C

Ví dụ 34 : Hỏi hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ đồng biến trên khoảng nào ?

- A. $(2;+\infty)$ B. $(-\infty;3)$ C. $(-\infty;1)$ D. $(3;+\infty)$

♠ **Giải :** Đáp án D. Tập xác định của hàm số là $(-\infty;1) \cup (3;+\infty)$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 2; y' > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Kết hợp với điều kiện xác định của hàm số, suy ra khoảng đồng biến của hàm số là $(3;+\infty)$

Ví dụ 35 : Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số: $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3

- A. $m < 0$ hoặc $m > 6$ B. $m > 6$ C. $m < 0$ D. $m = 9$

♠ **Giải :** Đáp án A; $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$

$$\Delta' = 9(m-1)^2 - 36(m-2) = 9m^2 - 54m + 81 \geq 0; \text{ Dấu bằng xảy ra khi } m = 3$$

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y' = 0 (x_1 < x_2)$

Ta có BBT

t	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y					

$$D > 3 \Leftrightarrow D^2 > 9 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 > 9 \Leftrightarrow m^2 - 6m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \text{ hoặc } m > 6 \text{ (thỏa mãn)}$$

- A. $(-2; \pi)$ B. $(-2; +\infty)$
C. $(-\infty; 0)$ D. $(0; +\infty)$

Câu 6 : Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ nghịch biến trên khoảng:

- A. $(-2; 0)$ B. $(-\infty; -2)$
C. $(0; +\infty)$ D. $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$

Câu 7 : Hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên :

- A. $\mathbb{R}$ B. $(1; +\infty)$
C. $(-\infty; 1)$ D. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

Câu 8 : Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ nghịch biến trên khoảng:

- A. $\mathbb{R}$ B. $(1; +\infty)$
C. $(-\infty; 1)$ D. $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

Câu 9 : Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$. Phát biểu nào sau đây là đúng

- A. Hàm số có đạo hàm $y' = \frac{x^2 - 6x + 1}{(x - 3)^2}$
B. Hàm số tăng trên $(-\infty; 1)$ và $(5; +\infty)$
C. Hàm số tăng trên $(1; 5)$
D. Cả A, B, C đều đúng.

Câu 10 : Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

- A. 2.
B. 1.
C. 0.
D. 3.

Câu 11 : Hàm số $y = \sqrt{x}(x - 3), (x \geq 0)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng nào sau đây:

- A. $(0; 1)$
B. $(1; +\infty)$
C. $(0; 2)$
D. $(2; +\infty)$

Câu 12 : Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Chọn phương án **đúng nhất**

- A. $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$
B. $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b) \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$

C. $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b) \Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a;b)$

D. Cả A và C.

Câu 13 : Hàm số $y = \sin x - bx + c$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì b thuộc khoảng nào sau đây:

A. $(1; +\infty)$

B. $[1; +\infty)$

C. $(-\infty; 1)$

D. $(-\infty; 1]$

Câu 14 : Trong các hàm số sau, hàm số nào **luôn** nghịch biến trên $\mathbb{R}$:

A. $y = -x^3 + 2x^2 - 10x + 6$

B. $y = x^4 - 8x^3 + 432$

C. $y = x + 1$

D. $y = \frac{x+1}{x-9}$

Câu 15 : Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Kết luận nào sau đây là đúng

A. Hàm số luôn đồng biến với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

B. Hàm số luôn nghịch biến với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

C. $y(2) = 5$

D. Tất cả đáp án đều sai

Câu 16 : Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. Hàm số tăng trên khoảng $(0;1)$

B. Hàm số giảm trên khoảng $(4;5)$

C. Hàm số giảm trên khoảng $(-4;0)$

D. Tất cả đáp án đều đúng

Câu 17 : (THPT Kim Liên lần 1) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng.

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số có duy nhất một cực trị.

Câu 18 : (Chuyên KHTN lần 3) Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$. Mệnh đề nào đúng.

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 19 : (THPT AMSTERDAM HÀ NỘI) Trong tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - mx - m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, giá trị nhỏ nhất của m là:

A. 4.

B. -1.

C. 0.

D. 1.

Câu 20 : (Sở GD và ĐT Vĩnh Phúc lần 2) Hàm số $y = \sqrt{2x-x^2}$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(0; 2)$. B. $(1; 2)$.
C. $(0; 1)$. D. $(-\infty; 1)$.

Câu 21 : Hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(1; 2)$
B. $(-2; +\infty)$
C. $(0; 1)$
D. $(0; 2)$

Câu 22 : Hàm số $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$ (1). Kết luận nào sau đây là sai khi nói về tính đơn điệu của hàm số

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; 3)$
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; 3)$
D. A và B đều đúng

Câu 23 : Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ có đạo hàm là $y' = \frac{-5}{(x-m)^2}$ thì giá trị m là

- A. 4 B. 3
C. 2 D. 1

Câu 24 : Cho hàm số $y = \frac{4x-m}{x+1}$ có đạo hàm là $y' = \frac{6}{(x+1)^2}$ thì giá trị m là

- A. 4 B. 3
C. 2 D. 1

Câu 25 : Cho hàm số $y = \frac{kx+1}{x-2}$ có đạo hàm là $y' = \frac{-3}{(x+1)^2}$ thì giá trị k là

- A. 4 B. 3
C. 2 D. 1

Câu 26 : Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3x - 1$. Giá trị m để hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R}$ là

- A. $m \in (1; 2)$ B. $-3 \leq m \leq 1$
C. $-1 \leq m \leq 1$ D. $-1 \leq m \leq 2$

Câu 27 : Cho hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$. Giá trị m để hàm số luôn giảm trên từng khoảng xác định là

- A. $m \in (1; 2)$ B. $-3 \leq m \leq 1$
C. $-1 < m < 1$ D. $-1 < m < 2$

Câu 28 : Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-m}$. Giá trị m để hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định là

A. $m > \frac{1}{2}$

B. $m > \frac{1}{4}$

C. $m < \frac{1}{2}$

D. $m < \frac{1}{4}$

Câu 29 : Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 + (m+6)x - 2m - 1$. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của tham số m để hàm số sẽ tăng trên $\mathbb{R}$ là

A. $-2, 3$

B. $-2, 4$

C. $6; 9$

D. $-1; 4$

Câu 30 : (KHTN lần 4) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(2; +\infty)$.

D. $(1; 2)$.

Câu 31 : Cho hàm số $y = -3x - \cos x$. Kết luận nào dưới đây là đúng

A. Hàm số luôn nghịch biến với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

B. Hàm số luôn tăng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$

C. Chưa thể xác định tính đơn điệu của hàm số này

D. Cả ba đều sai

Câu 32 : Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$. Giá trị m để hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định là

A. $m > 1$

B. $m < -1$ hoặc $m > 1$

C. $m < -1$

D. $m \in (-1; 1)$

Câu 33 : Cho hàm số $y = \frac{mx-1}{x+2}$. Giá trị m để hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định là

A. $m > 1$

B. $m < -\frac{1}{2}$

C. $m > -\frac{1}{2}$

D. $m \in (-1; +\infty)$

Câu 34 : Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-m}$. Giá trị m để hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định là

A. $m > 0$

B. $m < -\frac{1}{2}$

C. $m \geq -\frac{1}{2}$

D. $m \in (-\infty; 0)$

Câu 35 : Cho hàm số $y = \frac{x}{x^2+1}$. Khoảng đồng biến của hàm số đã cho là

A. $(-\infty; -1)$

B. $(-1; +\infty)$

C. $(-1;1)$ D. $(1;+\infty)$

Câu 36 : Cho hàm số $y = x^3 + x - \cos x - 4$. Phát biểu nào sau đây là đúng

- A. Hàm số luôn nghịch biến với mọi x thuộc $\mathbb{R}$
- B. Hàm số luôn đồng biến với mọi x thuộc $\mathbb{R}$
- C. Chưa thể xác định tính đơn điệu của hàm số này
- D. Cả ba đều sai

Câu 37 : Cho hàm số $y = -\cos x$. Phát biểu nào sau đây là đúng

- A. Hàm số tăng trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$
- B. Hàm số giảm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$
- C. Hàm số tăng trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$
- D. Cả ba đều sai

Câu 38 : Giá trị α để hàm số sau đây luôn tăng $y = \frac{x^3}{3} + x^2 \sin \alpha + (4 \sin^2 \alpha - 3)x$ là

- A. $\alpha = \frac{\pi}{3} + k2\pi$
- B. $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- C. $\alpha = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$
- D. $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Câu 39 : Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng

- A. $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$
- B. $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$
- C. $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$
- D. $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$

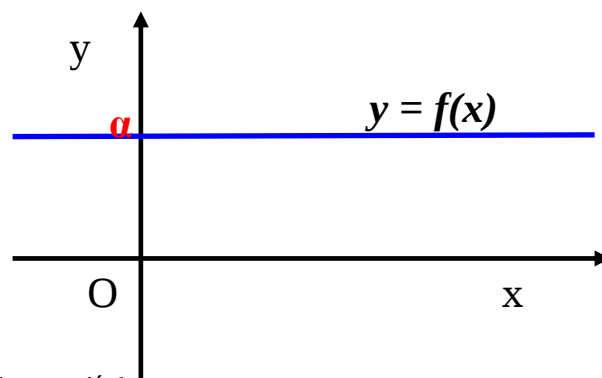
Câu 40 : Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$

và có đồ thị như hình vẽ bên.

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

(ở đây $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$):

- A. Hàm số tăng trên khoảng $(-\infty; +\infty)$
- B. Hàm số giảm trên khoảng $(-\infty; +\infty)$
- C. Cả A và B đều đúng
- D. Cả A và B đều sai



Câu 41 : Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1$ (1), với m là tham số thực.

Giá trị nào của m để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

- A. $m \leq -1$
- B. $m \leq -\frac{1}{2}$

C. $m \geq -\frac{1}{2}$ D. $m \in (-\infty; 1)$

Câu 42 : Cho hàm số $y = 2x^3 - 2x^2 - mx - 1$, với m là tham số thực.

Giá trị nào của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$

- A. $m \leq -2$ B. $m \leq 1$
C. $m \geq -2$ D. $m \leq 2$

Câu 43 : Hàm số $y = \frac{4}{5}x^5 - x^4 + \frac{x^3}{3} - 1$

- A. Nghịch biến trên $\mathbb{R}$
B. Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$
C. Đồng biến trên $\mathbb{R}$
D. Đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$

Câu 44 : Hàm số $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

- A. Đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
B. Nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
C. Đồng biến trên mỗi khoảng xác định
D. Nghịch biến trên mỗi khoảng xác định

Câu 45 : Hàm số $f(x) = \frac{-2x+3}{x+3}$

- A. Đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ B. Nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$
C. Đồng biến trên mỗi khoảng xác định D. Nghịch biến trên mỗi khoảng xác định

Câu 46 : Cho hàm số $f(x) = \frac{-2x+3}{x+3}$ Chọn đáp án sai :

- A. Hàm số không xác định khi $x = -3$
B. Nghịch biến trên $\mathbb{R}$
C. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $M\left(\frac{3}{2}; 0\right)$
D. Đạo hàm cấp 1 trên tập $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ là $f'(x) = \frac{-9}{(x+3)^2}$

Câu 47 : Cho hàm số $f(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} - 6x + 3$

- A. Hàm số luôn giảm trên $\mathbb{R}$ B. Hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R}$
C. Hàm số luôn tăng trên $(2; +\infty)$ D. Hàm số luôn giảm trên $(-2; 2)$

Câu 48 : Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C). Nghiệm của bất phương trình $y' < -4$ là

A. $\begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{5}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} 1 < x < \frac{5}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$

D. $\emptyset$

Câu 49 : Khoảng nghịch hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + \frac{5}{3}$ là

A. $(-\infty; -1)$

B. $(-1; 3)$

C. $(3; +\infty)$

D. $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$

Câu 50 : Khoảng nghịch hàm số $y = \frac{x^4}{2} - 3x^2 - \frac{3}{2}$ là

A. $(-\infty; -\sqrt{3})$ và $(0; \sqrt{3})$

B. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$

C. $(\sqrt{3}; +\infty)$

D. $(-\sqrt{3}; 0)$ và $(\sqrt{3}; +\infty)$

Câu 51 : Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $y = \cot x$

B. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2017$

C. $y = x^4 + x^2 + 2017$

D. $y = \frac{x+1}{x-2}$

Câu 52 : Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $(1; 3)$

A. $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$

B. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{x-2}$

C. $f(x) = 2x^2 - x^4$

D. $f(x) = x^2 - 4x + 5$

Câu 53 : Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + 2$. Tìm mệnh đề sai

A. $f(x)$ giảm trên khoảng $(-1; 1)$

B. $f(x)$ giảm trên khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$

C. $f(x)$ tăng trên khoảng $(1; 3)$

D. $f(x)$ giảm trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$

Câu 54 : Cho hàm số $y = f(x) = 9x^7 - 7x^6 + \frac{7}{5}x^5 + 12$. Khi đó

A. $f(x)$ giảm trên khoảng $(-1; 1)$

B. $f(x)$ giảm trên $\mathbb{R}$

C. $f(x)$ tăng trên $(-1; 1)$

D. $f(x)$ tăng trên $\mathbb{R}$

Câu 55 : Cho các hàm số $y = f(x); y = g(x)$ là các **hàm số dương** trên $(a; b)$ và $f'(x) > 0; g'(x) > 0$ trên $(a; b)$. Khi đó hàm số nào sau đây đồng biến trên $(a; b)$

- A. $f(x)g(x)$ B. $\frac{f(x)}{g(x)}$
 C. $\frac{g(x)}{f(x)}$ D. $f(x)-g(x)$

Câu 56 : Biết rằng hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - mx + 2m$ nghịch biến trên **đoạn dài 1** đơn vị khi $m = m_0$.

Hỏi biểu diễn số nào sau đây và m_0 trên cùng trục số là gần nhau nhất?

- A. -4,57
 B. -3,76
 C. -5,74
 D. -6,5

Câu 57 : Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn điều kiện hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ luôn nghịch biến trên

khoảng $(-\infty; 1)$.

- A. 0
 B. 2
 C. 5
 D. 4

Câu 58 : Tìm m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

- A. $1 < m$
 B. $0 < m < 2$
 C. $m \leq 2$
 D. $1 < m < 2$

Câu 59 : Hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi

- A. $m > 1$ hoặc $m < -1$
 B. $m < -1$
 C. $m > -1$
 D. $m > 1$

Câu 60 : Hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ khi:

- A. $m > 0$
 B. $-1 < m \leq 0$
 C. $m < -1$
 D. $m > 2$

Câu 61 : Hàm số: $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài 2 đơn vị khi:

- A. $m = 2$

- B. $m \geq 2$
- C. $m = 0$
- D. $m \geq 0$

Câu 62 : Hàm số: $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - mx + 2m$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài 1 đơn vị khi:

- A. $m = 1$
- B. $m \leq 1$
- C. $m = -\frac{15}{4}$
- D. $m \leq -\frac{15}{4}$

Câu 63 : Hàm số: $y = -x^3 - 2x^2 + mx + 1$ đồng biến trên một đoạn có độ dài 1 đơn vị khi:

- A. $m > \frac{3}{4}$
- B. $m < -\frac{3}{4}$
- C. $m = -\frac{3}{4}$
- D. $m = -\frac{7}{12}$

Câu 64 : Hàm số: $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 - (m+6)x + 1$ đồng biến trên một đoạn có độ dài $\sqrt{24}$ đơn vị khi:

- A. $m = -3$
- B. $m = 4$
- C. $-3 \leq m \leq 4$
- D. $m = -3, m = 4$

Câu 65 : Biết rằng hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3(m-1)x^2 + 9x + 1$ nghịch biến trên $(x_1; x_2)$ và đồng biến trên các khoảng còn lại của tập xác định. Nếu $|x_1 - x_2| = 6$ thì giá trị m là:

- A. 2
- B. -4
- C. -4 hoặc 2
- D. -2 hoặc 4

Câu 66 : Biết rằng hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3(m-1)x^2 + 9x + 1$ nghịch biến trên khoảng $(x_1; x_2)$ và đồng biến trên các khoảng còn lại của tập xác định. Nếu $|x_1 - x_2| = 6\sqrt{3}$ thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

- A. $m = -1$
- B. $m = 3$
- C. $m = -3; m = 1$
- D. $m = -1; m = 3$

LƯU Ý

☉ **Quy tắc tính đạo hàm:** Cho $u = u(x)$; $v = v(x)$; C : là hằng số.

☉ **Tổng, hiệu:** $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

☉ **Tích:** $(u.v)' = u'.v + v'.u \Rightarrow (C.u)' = C.u'$.

Thương: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$, $(v \neq 0) \Rightarrow \left(\frac{C}{u}\right)' = -\frac{C.u'}{u^2}$

Bảng công thức tính đạo hàm:

Đạo hàm của hàm sơ cấp	Đạo hàm của hàm hợp
$(C)' = 0$ (C là hằng số).	$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$
$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$)	$(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ ($u \neq 0$) $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ($u > 0$)
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

PHẦN 2 : CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

- ▶ Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 nếu $y'(x_0) = 0$.
- ▶ Hàm số $y = f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 nếu đạo hàm y' **đổi dấu từ + sang -** khi đi qua x_0 .
- ▶ Hàm số $y = f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 nếu đạo hàm y' **đổi dấu từ - sang +** khi đi qua x_0 .

Các phương pháp tìm cực trị của hàm số

Phương pháp 1.

- ♥ B1 : MXĐ, Tìm $f'(x)$.
- ♥ B2 : Tìm các điểm $x_i (i = 1, 2, \dots)$ mà tại đó đạo hàm của hàm số bằng 0 hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.
- ♥ B3 : Lập bảng xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua x_i thì hàm số đạt **cực trị** tại x_i .

Phương pháp 2.

- ♥ B1 : Tìm $f'(x)$. giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm $x_i (i = 1, 2, \dots)$.
- ♥ B2 : Tính $f''(x_i)$.
 - ☉ nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i .
 - ☉ nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i .

Cho hàm số $y = f(x)$, đồ thị là (C). Các vấn đề về cực trị cần nhớ:

- Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là hoành độ của điểm cực trị.
- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = x_0$.
- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_0$.

Chú ý:

☉ Quy tắc 2 thường dùng với hàm số lượng giác hoặc việc giải phương trình $f'(x) = 0$ phức tạp.

☉ Hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_y > 0 \end{cases}$

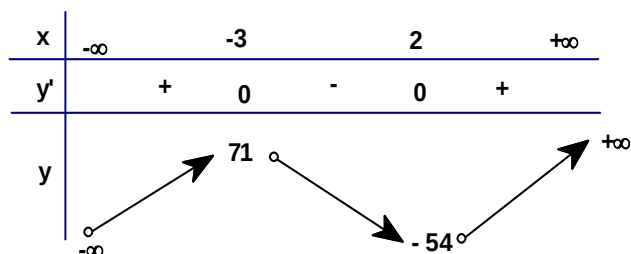
Ví dụ : Tìm cực trị của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$

Phương pháp I.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 6x^2 + 6x - 36$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$



Vậy $x = -3$ là điểm cực đại và $y_{cd} = 71$

$x = 2$ là điểm cực tiểu và $y_{ct} = -54$

Phương pháp II.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 6x^2 + 6x - 36$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & y'' = 12x + 6 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$y''(2) = 30 > 0$$

nên hàm số đạt **cực tiểu** tại $x = 2$ và $y_{ct} = -54$

$$y''(-3) = -30 < 0$$

nên hàm số đạt **cực đại** tại $x = -3$ và $y_{cd} = 71$

BÀI TẬP TỰ LUẬN PHẦN CỰC TRỊ

Bài 1 : Tìm cực trị các hàm số sau (dấu hiệu 1):

a) $y = -x^3 + 6x^2 + 1$

b) $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$

c) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

d) $y = -x^4 - 8x^2 + 5$

e) $y = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$

f) $y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Vận dụng 01 : Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x-2)(3x-1)$. Số điểm cực trị của hàm số là:

- A. 4 B. 3 C. 1 D. 2

Vận dụng 02 : Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-3)^8(x-2)^3(3x-1)(x-6)^2(4-x)^5$. Số điểm cực trị của hàm số là:

- A. 4 B. 3 C. 1 D. 2

Vận dụng 03 : Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2-1)$. Số điểm cực trị của hàm số là:

- A. 4 B. 3 C. 1 D. 2

Bài 2 : Tìm cực trị các hàm số sau (dấu hiệu 2):

a) $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - 1$

b) $y = 2\cos 2x - 5$

Bài 3 : Tìm để hàm số sau có cực đại và cực tiểu

a) $y = (m+2)x^3 + 3x^2 + mx + 2m^2$

b) $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 7m + 2)x + 2m^2$

c) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{m}{2}x^2 + (2m-3)x + 8m^4$

d) $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + (-m^2 + 2m + 3)x + m^4$

e) (soạn) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + m^2x + 5$ (ĐS : $-1 < m < 1$)

f) (soạn) $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + (2m-2)x + \frac{7}{9}$ (ĐS : $m < \frac{2}{3}$)

g) (soạn) $y = \frac{x^3}{3} + (m-2)\frac{x^2}{2} - mx + 8m$ (ĐS : $m > 0$)

h) (soạn) $y = \frac{x^3}{3} - (2m+1)x^2 + (4m+3)x + 8$ (ĐS : $m < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee m > \frac{\sqrt{2}}{2}$)

Bài 4 : Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có hai điểm cực

trị là $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ thỏa mãn $x_A^2 + x_B^2 = 2$

A. $m = \pm 3$

B. $m = 0$

C. $m = 2$

D. $m = \pm 1$

Bài 5 (Khối D – 2012): Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ (1), m là tham số thực. Tìm m để hàm số (1) có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $x_1.x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$

Bài 6 : CMR hàm số

a) $y = \frac{2}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (m-3)x + 2m^2$ luôn luôn có 2 cực trị

b) $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m^2 - 4)x + \frac{5}{4}m^6$ luôn luôn có cực đại và cực tiểu

c) (soạn) $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^{10} - 7m^8$ luôn luôn có cực đại và cực tiểu

b/ (TN-THPT – 2011) $y = x^3 - 2x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

c/ $y = x^3 - mx^2 + (m-1)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

d/ (Soạn) $y = \frac{1}{2}(m^2 - 2)x^3 + (3m + 4)x^2 + mx$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

e/ (Soạn) $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 3m + 4$ đạt cực trị tại $x = 2$? Cực trị đó là cực đại hay cực tiểu ?

f/ (Soạn) $y = x^3 - (m+3)x^2 + mx + m + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ (ĐS : $m = 0$)

g/ (Soạn) $y = -(m^2 + 5m)x^3 + 6mx^2 + 6x - 6$ đạt cực đại tại $x = 1$ (ĐS : $m = 1$)

h/ (Soạn) $y = (2m+1)x^4 - 3mx^2 + 4m + 2$ đạt cực đại tại $x = -1$ (ĐS : $m = -2$)

Bài 9 : Tìm m để hàm số

a/ Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x + 2$ có hai điểm cực trị dương ($\frac{1}{2} < m \neq 1$)

b/ (Cao Đẳng – 2009) $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ có cực đại và cực tiểu có hoành độ dương

c/ $y = \frac{(m-2)}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (2m-6)x + 8$ có cực đại và cực tiểu có hoành độ dương. (ĐS : $3 < m < 11$)

Bài 10 : Tìm m để hàm số

a/ $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{(2m+3)}{2}x^2 + (m^2 + 2m + 2)x + 11$ có cực trị có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = 2x_2$ (ĐS : $m = 0, 6$)

b/ (soạn) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{(3m+2)}{2}x^2 + m^2x + 15$ có cực đại và cực tiểu có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = 9x_2$
(ĐS : $m = 6$)

c/ (soạn) $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (2m+1)x + 1$ có cực đại và cực tiểu có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 = 9x_1$

(ĐS : $m = 4, -\frac{4}{9}$)

d/ $y = \frac{m-1}{3}x^3 - mx^2 + (m+5)x + \frac{11}{7}$ có cực đại và cực tiểu có hoành độ đều lớn hơn 2 (ĐS : $1 < m < \frac{5}{4}$)

e/ $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + (3-4m)x + \frac{11}{1200}$ có cực đại và cực tiểu có hoành độ đều lớn hơn -1 (ĐS : $\frac{1}{4} < m < \frac{9}{4}$)

Bài 11 : a/ (ĐHQG-HN-1997) $y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ có cực đại và cực tiểu trong và các điểm này cách đều trục tung (ĐS : $m = 0$)

b/ (ĐH Đà Nẵng – 2000) $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$ có cực đại và cực tiểu nằm về hai phía trục tung (ĐS : $1 < m < 2$)

Bài 12: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{(2m+1)}{2}x^2 + (m^2 + 2)x + 1$. Xác định tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $3x_1.x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$ (ĐS : $m = 2$)

Bài 13 : Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{(2m-1)}{2}x^2 - mx + m$. Xác định tham số m để hàm số có cực đại, cực tiểu có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 = -8$ (ĐS : $m = \frac{3}{2}$)

(Soạn) Cho hàm số $y = \frac{m-1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x + m$

a/ CMR hàm số luôn có cực trị.

b/ Gọi x_1, x_2 là hoành độ cực trị. Tìm m để $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -\frac{5}{2}$ (ĐS : $m = \pm \frac{1}{3}$)

Bài 14: Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^2 - 5|x| + 6$?

A. $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right); \left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ B. $(0; 6); \left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ C. $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right); (0; 6)$ D. $(0; 6)$

BÀI TẬP MINH HỌA PHẦN CỰC TRỊ

Ví dụ 01 : Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$. Giá trị nào của tham số m thì hàm số có hai điểm cực trị.

A. $m \geq 3$ B. $m < 3$ C. $m \in \mathbb{R}$ D. $m \in \emptyset$

♥ **Giải :** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x + m$,

Làm tự luận !

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + m = 0$$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \neq 0 \\ \Delta' = 3^2 - 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3; \text{ Vậy giá trị } m \text{ cần tìm là } \boxed{m < 3}.$$

Làm trắc nghiệm !

Khi làm bài trắc nghiệm chúng ta không thể giải như vậy vì sẽ có nhiều bài phức tạp “số xấu”

● **Phương pháp “BỐC ĐẠI”**

► **“Bốc đại” $m = 2$ ở câu B** thì ta thấy $y' = 3x^2 + 6x + 2 = 0$, phương trình này có 2 nghiệm (bấm máy là thấy nha) – **Vậy nhận luôn B**

Vì còn đáp án C là m thuộc $\mathbb{R}$ nữa nên ta phải xét thêm đáp án A kiểm tra

► **“Bốc đại” $m = 4$ ở câu A** thì ta thấy $y' = 3x^2 + 6x + 4 = 0$, phương trình này vô nghiệm (bấm máy là thấy nha) thì rõ ràng A không hợp lý

Kết thúc vấn đề - chọn B

Ví dụ 02 : Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x - 1$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số có hoành độ dương.

♥ **Giải :** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; Đạo hàm: $y' = 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3$,

Hàm số có hai điểm cực trị có hoành độ dương $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - 2(m^2 + 4m + 3) > 0 \\ S = -(m+1) > 0 \\ P = \frac{m^2 + 4m + 3}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < m < -3; \text{ Vậy giá trị } m \text{ cần tìm là } -5 < m < -3.$$

Ví dụ 03 : Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$.

♥ **Giải :** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 3 = 0$ (1)

Yêu cầu bài toán tương đương với (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - 3 > 0 \\ |x_1 - x_2| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 2 > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 + \sqrt{3} \vee m < -1 - \sqrt{3} \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 + \sqrt{3} \vee m < -1 - \sqrt{3} \\ 4(m+1)^2 - 4.3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -3$ hoặc $m = 1$

Ví dụ 04 : Cho hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 - 7x + 2$, m là tham số. Chứng minh rằng với mọi giá trị m , hàm số luôn luôn có một giá trị cực đại và một giá trị cực tiểu.

♥ **Giải :** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm $y' = 3x^2 + 2(m-1)x - 7$.

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 + 21 > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$, suy ra phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị m hay với mọi giá trị của m thì hàm số luôn có một giá trị cực đại và một giá trị cực tiểu.

Ví dụ 05 : Cho các hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ (C_m), $y = -x + 2$ (d), với m là tham số thực. Tìm các giá trị của m để (C_m) có hai điểm cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến đường thẳng (d) bằng $\sqrt{2}$.

Làm sao: xác định đâu là hoành độ cực đại, hoành độ cực tiểu ?

Làm vậy nè : “ đưa vào dạng đồ thị hoặc bảng biến thiên.”

♥ **Giải :** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$

Điều kiện để hàm số có hai cực trị là $m \neq 0$

Tọa độ hai điểm cực trị: $\begin{cases} A(0; 2) \\ B(2m; 2 - 4m^3) \end{cases}$.

Đường thẳng (d): $y = -x + 2 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0$

Với : $m < 0$: A là điểm cực tiểu. Khi đó $d(A, d) = \frac{|0 + 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 0 \neq \sqrt{2}$ (loại).

Với : $m > 0$: B là điểm cực tiểu. Khi đó: $d(B, d) = \sqrt{2} \Leftrightarrow |2m^3 - m| = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^3 - m = 1 \\ 2m^3 - m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases} \Rightarrow m = 1 \text{ (} m > 0 \text{)}$

► Khoảng cách cũng là một chủ đề hay xuất hiện trong các đề thi, ta cần nắm vững công thức tính khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M)$ đến đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ là

$$d(M; \Delta) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ví dụ 06 : Cho hàm số $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$, với m là tham số thực. Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số có hoành độ dương.

♥ **Giải :** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(2m-1)x + 2 - m = 0$ (*)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ \frac{2-m}{3} > 0 \\ \frac{2(2m-1)}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \text{ hay } m > \frac{5}{4} \\ m < 2 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2$$

Vậy $\frac{5}{4} < m < 2$ là giá trị cần tìm

Ví dụ 07 : Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$, m là tham số. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O .

♥ **Giải :** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$, $y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1)$

Hàm số (1) có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \text{ Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - m \\ x = 1 + m \end{cases}$$

Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) thì:

$$A(1 - m; -2 - 2m^3), B(1 + m; -2 + 2m^3).$$

$$O \text{ cách đều } A \text{ và } B \Leftrightarrow OA^2 = OB^2 \Leftrightarrow 8m^3 = 2m \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2} \text{ (vì } m \neq 0)$$

Ví dụ 08 : Tìm tất cả các giá trị tham số m để hàm số $y = f(x) = x^3 + (2m - 1)x^2 + (m - 2)x + 1 - m$ đạt cực đại tại $x = -2$.

♥ **Giải :** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 2(2m - 1)x + m - 2$.

(Điều kiện cần) Để hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ thì

$$f'(-2) = 0 \Leftrightarrow 3(-2)^2 + 2(2m - 1)(-2) + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

(Điều kiện đủ) Với $m = 2$, ta được $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$.

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2); \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Lập bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.

(có thể giải bài toán bằng y'' thay vì lập BBT)

Vậy $m = 2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 09 : Cho hàm số $y = x^4 + (m+1)x^2 - 2m - 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

♥ **Giải :** Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; Đạo hàm $y' = 4x^3 + 2(m+1)x = 2x(2x^2 + m+1)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-m-1}{2} \quad (1) \end{cases}$$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y'$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow -m-1 > 0 \Leftrightarrow m < -1$

Vậy với $m < -1$ hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Chú ý, đây là tình huống đặc biệt :

♥ Phương trình $x^2 = \alpha$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \alpha > 0$

Đó chỉ là cách làm tự luận “cho vui”, khi làm trắc nghiệm là “bể tắc”

Vậy làm sao ???

☺ **Cách khác :**

Hàm số trùng phương
 $y = ax^4 + bx^2 + c$

Có 3 cực trị

$a.b < 0$

Có 1 cực trị

$a.b \geq 0$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị tương đương $a.b < 0$

hay $1.(m+1) < 0$, Suy ra $m < -1$???

☺ **Ứng dụng 1 :** Cho hàm số $y = x^4 - ax^2 + 3$. Với giá trị nào của tham số a thì hàm số đã cho có 3 cực trị

- A. $a = 0$ B. $a < 0$
C. $a > 0$ D. Không có

☺ **Ứng dụng 2 :** Cho hàm số $y = x^4 - a^2x^2 + 3$. Với giá trị nào của tham số a thì hàm số đã cho có 3 cực trị

- A. a khác 0 B. $a < 0$
C. $a > 0$ D. Không có



● **Ứng dụng 3 :** Cho hàm số $y = (1-a)x^4 - ax^2 + 2a - 1$. Với giá trị nào của **tham số a** thì hàm số đã cho có **đúng 1 cực trị**

- A. $a \in \emptyset$ B. $a \in \mathbb{R}$
C. $0 < a < 1$ D. $\mathbb{R} \setminus (0;1)$

● **Ứng dụng 4 :** Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - ax^2 + \frac{3}{2}$. Với giá trị nào của **tham số a** thì hàm số đã cho có cực tiểu mà không có cực đại

- A. $a \in \emptyset$ B. $a \leq 0$
C. $0 < a < 1$ D. $\mathbb{R} \setminus (0;1)$

Đáp án : Ứng dụng 1 : C Ứng dụng 2 : A

Ứng dụng 3 : D Ứng dụng 4 : B

Chú ý nhỏ :

$$A^2 > 0 \Leftrightarrow A \neq 0$$

Ví dụ 10 : Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

♥ **Giải :**

● **Cách 1 :** Ta vẽ bảng biến thiên rồi suy ra hai điểm cực trị là $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ rồi

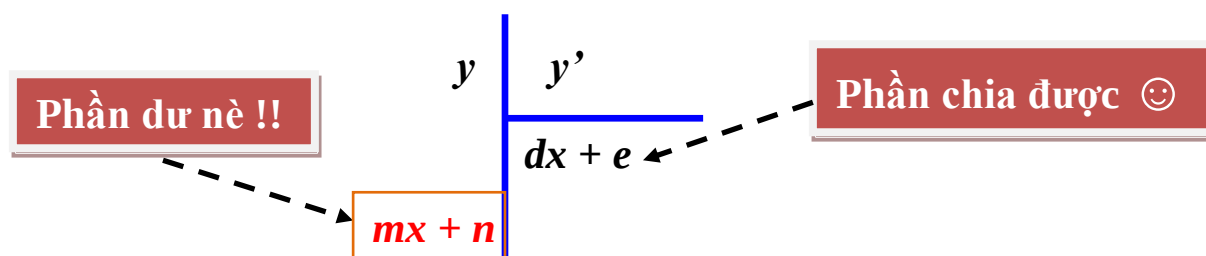
dùng công thức đường thẳng qua 2 điểm bất kì $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ sẽ ra.

Nhưng trong bài này điểm cực đại và cực tiểu không phải là “số đẹp” nên ta phải dùng cách 2 được trình bày sau đây

● **Cách 2 :** (ở đây thầy không chứng minh – trong các sách nâng cao đều có chứng minh)

Chia y / y' thì “phần dư” chính là đường thẳng cần tìm

■ **Mô tả :**



Suy ra đường thẳng qua 2 điểm cực trị là (d) : $y = mx + n$

Lời khuyên : chia cẩn thận dùm cái !!!

☐ **Thực hiện :** Ta có $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$;

Suy ra $y' = 3x^2 + 6x - 5$ Thực hiện phép chia y / y' như bảng sau :

$x^3 + 3x^2 - 5x + 1$	$3x^2 + 6x - 5$
$x^3 + 2x^2 - \frac{5}{3}x$	$\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$
$0 + x^2 - \frac{10}{3}x + 1$	Phân chia
$x^2 + 2x - \frac{5}{3}$	Phân dư
$-\frac{16}{3}x + \frac{8}{3}$	

Suy ra đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là

$(d): y = -\frac{16}{3}x + \frac{8}{3}$

Ví dụ 11 : Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Gọi A, B lần lượt là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và C(1;1). Khi đó diện tích tam giác ABC bằng bao nhiêu ?

♥ Giải : Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Khi đó tọa độ hai điểm cực trị là A(0;2) và B(2; -2)

☉ **Đặt vấn đề tính diện tích $S_{\Delta ABC}$ của tam giác ABC ??**

☺ với $\overrightarrow{AB} = (a_1; a_2)$, $\overrightarrow{AC} = (b_1; b_2)$.

$S_{\Delta ABC}$

Công thức giải nhanh

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

Thuần túy tam giác (*cạnh nhân đường cao tương ứng*) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(C; AB)$

Tiến hành làm !!

♥ Cách thuận túy : $\overrightarrow{AB} = (2; -4)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -3)$

Đường thẳng AB : $\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}$ ta được $2x + y - 2 = 0$ $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$;

$d(C; AB) = \frac{|2x_C + y_C - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$; Suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(C; AB) = 1$

♥ Cách chơi chiêu : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(-3) \times 2 - 1 \times (-4)| = 1$

☉ Ứng dụng : Cho tam giác ΔABC có $A(1; 2)$, $B(3; -2)$, $C(2; 4)$. Tính diện tích tam giác ΔABC .

(ĐS : $S = 4$)

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM PHẦN CỰC TRỊ

Câu 1 : Hàm số $y = x^4 - x^2 + 12$ có mấy điểm cực trị

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Câu 2 : Hàm số $y = \sin x$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 4 B. 3 C. 2 D. Vô số

Câu 3 : Hàm số $y = x^4 - 8x^3 + 12$ có mấy điểm cực trị

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

Câu 4 : Cho hàm số : $y = 3x^3 - 4x^2 - x - 14$. Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 . Khi đó $x_1 \cdot x_2 =$

A. $-\frac{1}{9}$ B. 3

C. $\frac{1}{7}$ D. 1

Câu 5 : (THPT Chuyên Lê Hồng Phong-Tp.Hồ Chí Minh) Cho $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m+3)x - 5$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung. Khi đó giá trị của m là

A. $m \leq -\frac{3}{2}$ B. $m \geq -\frac{3}{2}$

C. $m < -\frac{3}{2}$ D. $m > -\frac{3}{2}$

Câu 6 : Cho hàm số : $y = 3x^3 - 4x^2 - x - 14$. Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 . Khi đó $x_1 + x_2 =$

A. $\frac{-1}{9}$

B. $\frac{8}{9}$

C. $\frac{1}{7}$

D. 1

Câu 7 : Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m + 1$ (1). Với giá trị nào của m thì hàm số (1) có 1 cực trị ?

A. $m < -1$

B. $m = -1$

C. Cả A, B đều đúng

D. Cả A, B đều sai

Câu 8 : Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 3$ có điểm cực tiểu là

A. (0;3)

B. (-2;1)

C. (1;1)

D. (1;-6)

Câu 9 : Hàm số $y = x^3(1-x)^2$ đạt cực đại tại

A. $x = 1$

B. $x = \frac{3}{5}$

C. $x = -1$

D. Đáp án khác

Câu 10 : Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$. Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số là

A. $y = -2x + 4$

B. $y = -x + 3$

C. $y = -1$

D. $y = -x - 3$

Câu 11 : Hàm số $y = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$ có điểm cực đại là

A. (7;3)

B. (-2;24)

C. (-2;25)

D. (1;-6)

Câu 12 : Hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$ có điểm cực trị lần lượt là A và B. Với $M(2; 3)$. Diện tích tam giác ΔMAB là

A. $S = \frac{285}{2}$

B. $S = \frac{287}{2}$

C. $S = 78$

D. $S = \frac{87}{3}$

Câu 13 : Hàm số $y = x^4 - 4x^3 + 1$ có điểm cực tiểu là

A. (2;-15)

B. (1;2)

C. (-2;11)

D. (4;-6)

Câu 14 : Đồ thị hàm số nào sau đây chỉ có 1 điểm cực trị :

A. $y = 2x^4 - 4x^2 + 2$

B. $y = (m^2 + 4)x^4 + 9x^2 - 1$

C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$

D. $y = -x^4 + (m^2 + 1)x^2 - 1$

Câu 15 : Hàm số $y = x\sqrt{4-x^2}$ có điểm cực tiểu là

A. $(-\sqrt{2}; 2)$

B. $(-\sqrt{2}; 1)$

C. $(-\sqrt{2}; -2)$

D. $(\sqrt{2}; 2)$

Câu 16 : Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$ có phương trình

A. $y = \frac{x}{3} - 3$

B. $y = 1 - 8x$

C. $y=1+8x$

D. $y=1+3x$

Câu 17 : Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = \frac{x^3}{3} - m\frac{x^2}{2} - 2x + 1$ có cực trị

A. 3

B. 4

C. 0

D. Cả A, B, C

Câu 18 : Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1$ có 3 cực trị

A. 1

B. -1

C. 0

D. -2

Câu 19 : Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m + m^4$ có 3 cực trị

A. $m = -2$

B. $m < -1$

C. 0

D. $m > 2$

Câu 20 : Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có phương trình

A. $y = -2x + 1$

B. $y = 1 - 3x$

C. $y = 1 + 7x$

D. $y = 1 - x$

Câu 21 : Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số

$y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m^2$ có phương trình

A. $y = 3x - m^2 + m$

B. $y = 5x - m^2$

C. $y = 2x - m^2 + 1$

D. $y = 2x - m^2 + m$

Câu 22 : Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 5x$ có hệ số góc là

A. $k = -\frac{16}{3}$

B. $k = -\frac{3}{16}$

C. $k = -\frac{1}{3}$

D. $k = \frac{1}{3}$

Câu 23 : Hàm số $y = 10 + 15x + 6x^2 - x^3$ đạt cực tiểu tại:

A. $x = 5$

B. $x = -1$

C. $x = 1$

D. $x = -5$

Câu 24 : Hàm số $y = (x+1)^2(2-x)$ đạt cực trị tại hai điểm A và B.

Cho $M(1; -3)$. Diện tích tam giác ΔMAB bằng

A. 7

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{8}{3}$

D. Đáp án khác

Câu 25 : (Trường THPT Nguyễn Bình Khiêm) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Điểm cực đại của đồ thị là?

A. $(2; 2)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(0; -2)$.

D. $(2; -2)$.

Câu 26 : Cho hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 + \frac{x}{2}$. Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 . Khi đó $x_1^2 + x_2^2 =$

A. $\frac{11}{3}$

B. $\frac{13}{3}$

C. $\frac{1}{7}$

D. $\frac{3}{2}$

Câu 27 : Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Hàm số có

- A. Một cực đại. B. Một cực tiểu.
C. Một cực đại và một cực tiểu. D. Không có cực trị.

Câu 28 : Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$. Tính các giá trị cực đại và cực tiểu của hàm số bằng:

- A. $-\frac{1}{32}$. B. -1 . C. 1 . D. $\frac{1}{32}$.

Câu 29 : Giả sử hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có cực trị.

Xác định chính xác số cực trị của hàm số đã cho:

- A. Có 2 điểm cực đại
B. Chỉ có 1 điểm cực đại
C. Chỉ có 1 điểm cực tiểu
D. Cả 3 phương án B, C, D đều sai

Câu 30 : Hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 4$ có bao nhiêu điểm cực tiểu

- A. 0 B. 1
C. Không có điểm cực tiểu D. 2

Câu 31 : Hàm số $y = 3 - 2\cos x - \cos 2x$ đạt cực tiểu tại

- A. $x = k2\pi$ B. $x = k\pi$
C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Câu 32 : Hàm số $y = mx^3 + 3x^2 + 12x + 2$ đạt cực đại tại điểm $x = 2$ khi

- A. $m = -1$ B. $m = -2$
C. $m = -3$ D. $m = -4$

Câu 22 : Hàm số $y = x^3 - 6mx^2 + (4m^2 - 1)x + 2$ đạt cực đại tại điểm $x = 2$ khi

- A. $m = 0$ B. $m = \frac{11}{2}$
C. $m = 4$ D. $m = -4$

Câu 34 : Hàm số $y = x^3 - (m+3)x^2 + mx + m + 2$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$ khi

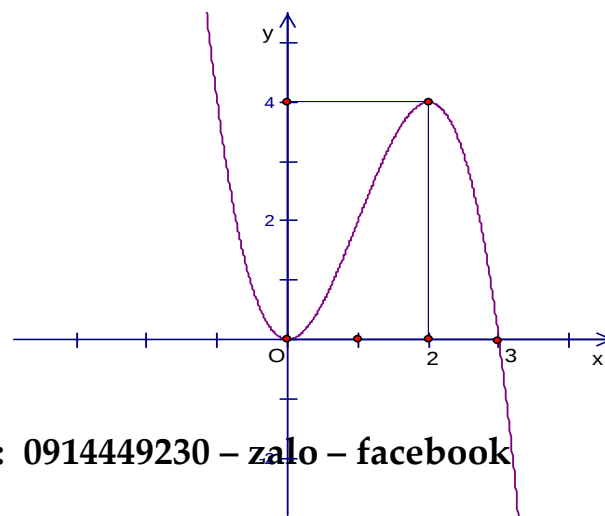
- A. $m = 0$ B. $m = \frac{11}{2}$
C. $m = 4$ D. $m = -4$

Câu 35 : Hàm số $y = f(x) = -x^3 + (m-1)x^2 - m + 2$ đạt cực đại tại điểm $x_0 = 2$ khi

- A. $m = 0$ B. $m = \frac{11}{2}$
C. $m = 4$ D. $m = -4$

Câu 36 : Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số là



- A. $y = x$
- B. $y = 2x$
- C. $y = -x$
- D. $y = -2x$

Câu 37 : Đường thẳng (d) $y = (m-1)x + 3m$ đi qua **điểm cực đại** K của đồ thị hàm số

$$y = -x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6 \text{ khi :}$$

- A. $m = 1$
- B. $m = \frac{7}{4}$
- C. $m = -2$
- D. Đáp án khác

Câu 38 : Hàm số $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + m^2x + 5$ có cực đại và cực tiểu khi :

- A. $m > 1$
- B. $-1 < m < 1$
- C. $m < -1$
- D. Đáp án khác

Câu 39 : Hàm số $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + (2m-2)x + \frac{7}{9}$ có cực đại và cực tiểu khi :

- A. $m < \frac{2}{3}$
- B. $-1 < m < \frac{3}{2}$
- C. $m < -1$
- D. $m > -1$

Câu 40 : Hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + (-m^2 + 2m + 3)x + m^4$ có cực đại và cực tiểu khi :

- A. $m > 1$
- B. $-1 < m < \frac{3}{2}$
- C. $m < -1$
- D. $m \neq 1$

Câu 41 : Hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (2m+1)x^2 + (4m+3)x + 8$ có cực đại và cực tiểu khi :

- A. $m \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- B. $-1 < m < \frac{3}{2}$
- C. $m < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ hay $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$
- D. Đáp án khác

Câu 42 : Hàm số $y = -x^3 + (3-m)x^2 - 2mx + 2$ có cực đại và cực tiểu khi :

- A. $m < 3$
- B. $6 - 3\sqrt{3} < m < 6 + 3\sqrt{3}$
- C. $m < 6 - 3\sqrt{3}$ hay $m > 6 + 3\sqrt{3}$
- D. $m = 6 - 3\sqrt{3}$ hay $m = 6 + 3\sqrt{3}$

Câu 43 : Cho hàm số $y = \frac{m+1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (m-3)x + 1$

Với giá trị nào của m thì hàm số có cực trị có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$

- A. $m = 1$
- B. $m = 8$
- C. $m = 7$

D. $m = 4$

Câu 44 : Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2m+1)x^2 + (m^2+2)x + m$

Với giá trị nào của m thì hàm số có cực trị có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = \frac{81}{8}$

A. $m = \frac{1}{4}$

B. $m = 8$

C. $m = \frac{7}{4}$

D. $m = 4$

Câu 45 : Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x$. Với giá trị nào của m thì hàm số có cực trị có hoành độ $x_1,$

x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$

A. $m = \pm 1$

B. $m = \pm 2$

C. $m = \pm 3$

D. $m = \pm 4$

Câu 46 : Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{(2m+1)}{2}x^2 + (m^2+2)x + 1$. Với giá trị nào của m thì hàm số có cực trị

có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) + 7 = 0$

A. $m = \frac{1}{4}$

B. $m = 8$

C. $m = 2$

D. $m = 4$

Câu 47 : Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{(3m+1)}{2}x^2 + (m^2 - m - 6)x + 1$. Với giá trị nào của m thì hàm số có

cực trị nằm về 2 phía Oy

A. $-2 < m < 3$

B. $-2 < m < 1$

C. $m \geq 2$

D. $m < 4$

Câu 48 : Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 5m + 5$. Với giá trị nào của m thì hàm số có 3 cực trị ?

A. $m < 2$

B. $m < 1$

C. $m > 2$

D. $m > 1$

Câu 49 : Cho hàm số $y = x^4 - 2(m-3)^2x^2 + m^2$. Với giá trị nào của m thì hàm số có 3 cực trị ?

A. $m < 3$

B. $m > 3$

C. $m \neq 3$

D. $m \in \emptyset$

Câu 50 : Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ (1). Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A và B

A. $m > 0$

B. $m > 3$

C. $m \neq 1$

D. $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Câu 51 : Cho hàm số $y = x^4 + 10000$. Số điểm cực trị ứng với hàm số là

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 52 : Cho hàm số $y = x^3 + 3x - 2$. Số điểm cực trị ứng với hàm số là

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 51 : Cho hàm số $y = -x^3 + (m^2 + 3)x^2 + m$.

Số điểm cực trị ứng với hàm số là

- A. 0 B. 1
C. 2 D. 3

Câu 52 : Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến đường phân giác của góc phần tư thứ hai trong hệ trục Oxy là

- A. 0 B. 1
C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

Câu 53 : Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 5$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có hệ số góc là

- A. -2 B. 1
C. 2 D. 5

Câu 54 : Cho hàm số $y = kx^4 + (k-1)x^2 + 1 - 2k$. Với giá trị nào của k thì đồ thị hàm số chỉ có một điểm cực trị

- A. 7 B. -2
C. 4 D. 1

Câu 55 : Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	$+\infty$				$+\infty$

Khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

Câu 56 : Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	$+\infty$				$+\infty$

Khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

- A. 0 B. $2\sqrt{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. 1

Câu 57 : Cho hàm số $y = m \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$. Với giá trị nào của m thì hàm số đạt cực trị tại $x = \frac{\pi}{3}$

- A. $m = 2$
C. $m = 0$

- B. $m = -2$
D. $m = 3$

Câu 58 : Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	$-X_0$	0	X_0	$+\infty$
y'	—	0	+	0	—
y	$+\infty$				$+\infty$

Và khoảng cách giữa hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là 8. Giá trị của x_0^2 là

- A. 4
C. 16
B. 8
D. -4

Câu 59 : Xét hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

Chọn đáp án đúng :

- A. Hàm số không có cực đại và cực tiểu
B. Nghịch biến trên $\mathbb{R}$
C. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
D. Cả A, B, C đều đúng.

Câu 60 : Xét hàm số $y = f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x$. Gọi hoành độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là x_1 và x_2 thì $x_1 + x_2 =$

- A. -1
C. -2
B. 2
D. 3

Câu 61 : Xét hàm số $y = f(x) = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ (m là tham số). Giá trị nào của tham số m thì hàm số có 3 cực trị.

- A. $m < -3$ hay $0 < m < 3$
C. $m \in \emptyset$
B. $m \in \mathbb{R}$
D. $m = 3$

Câu 62 : Cho hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$. Với giá trị nào của m thì hàm số có cực trị

- A. $-\frac{1}{\sqrt{6}} < m < \frac{1}{\sqrt{6}}$
C. $m = \frac{1}{\sqrt{6}}$
B. $m < -\frac{1}{\sqrt{6}}$ hay $m > \frac{1}{\sqrt{6}}$
D. $m \in \emptyset$

Câu 63 : Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - mx^2 + (2m-1)x - 3$. Với $m \neq 1$ thì hàm số có cực trị có hoành độ x_1 và x_2 . Với giá trị nào của m thì $x_1 \cdot x_2 = 6$

A. $m = \frac{7}{2}$

B. $m = \frac{1}{2}$

C. $m = \frac{5}{2}$

D. $m = 7$

Câu 64 : Cho hàm số $y = f(x) = 5x + \frac{5}{x} - 2$. Mệnh đề sai là

A. $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$

B. $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

C. $f(x)$ có giá trị cực đại là 8

D. $M(1;8)$ là điểm cực tiểu

Câu 65 : Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ (C). Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C) là

A. $y = 2x + 6$

B. $y = 2x - 6$

C. $y = -2x + 6$

D. $y = 3x$

Câu 66 : Với điều kiện nào của a và b để hàm số sau có cực đại và cực tiểu

$$y = f(x) = (x+a)^3 + (x+b)^3 - x^3$$

A. $a.b > 0$

B. $a.b < 0$

C. $a.b \geq 0$

D. $a.b \leq 0$

Câu 67 : Giá trị của m để hàm số $y = (x-m)(x^2 - 2x - m - 1)$ có hai điểm cực trị x_1 và x_2 thỏa mãn $|x_1.x_2| = 1$ là

A. $m = 4$

B. $m = -2$

C. $m = -3$

D. Cả A và B

Câu 68 : Giá trị của m để hàm số $y = x^3 + mx^2 - 1$ có hai điểm cực trị là

A. $m > 0$

B. $m < 0$

C. $m > 4$

D. Một kết quả khác

Câu 69 : Giá trị của m để hàm số $y = mx^4 + \frac{25}{7}x^2 - 2017$ có ba điểm cực trị là

A. $m > 0$

B. $m < 0$

C. $m \neq 0$

D. $m \leq 0$

Câu 70 : Giá trị của m để hàm số $y = mx^4 - \frac{3}{7}x^2 - 2018$ có ba điểm cực trị là

A. $m > 0$

B. $m < 0$

C. $m \neq 0$

D. $m \leq 0$

Câu 71 : Giá trị m để hàm số $y = x^4 - mx^2$ có ba điểm cực trị là *3 đỉnh của một tam giác vuông*

A. $m > 0$

B. $m = 1$

C. $m \neq 0$

D. $m = 3$

Câu 72 : Hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ có hai điểm cực trị A, B nằm trên đường thẳng có phương trình $y = ax + b$, với $a + b =$

A. 0

B. 1

C. -1

D. 2

Câu 73 : Đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2 - x + 5}{x - 2}$ có hai điểm cực trị A, B nằm trên đường thẳng có phương trình $y = ax + b$, với $a + b =$

- A. 3 B. 1
C. -1 D. 5

Câu 74 : Hàm số $y = \frac{5x^2 - x + 5}{2x - 3000}$ có hai điểm cực trị A, B nằm trên đường thẳng d. Hệ số góc của d là

- A. 3 B. 1
C. -1 D. 5

PHỤ LỤC

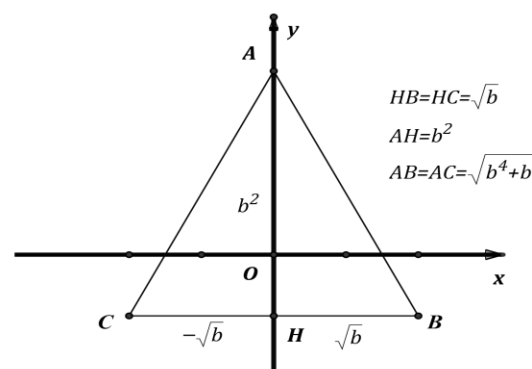
Một số dạng toán cơ bản về CỰC TRỊ hàm số

$y = ax^4 + bx^2 + c$ lập TAM GIÁC (luôn là tam giác cân)

Giả sử hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị:

$$A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

tạo thành tam giác ABC thỏa mãn đủ kiện:



Dữ kiện	Công thức thỏa $ab < 0$
1). Tam giác ABC vuông cân tại A	$8a + b^3 = 0$
2). Tam giác ABC đều	$24a + b^3 = 0$
3). Tam giác ABC có góc $BAC = \alpha$	$8a + b^3 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0$
4). Tam giác ABC có diện tích $S_{\Delta ABC} = S_0$	$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0$
5). Tam giác ABC có độ dài cạnh $BC = m_0$	$am_0^2 + 2b = 0$
6). Tam giác ABC có độ dài $AB = AC = n_0$	$16a^2n_0^2 - b^4 + 8ab = 0$
7). Tam giác ABC có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 - 4ac = 0$
8). Tam giác ABC có O là tâm đường tròn nội tiếp	$b^3 - 8a - 4abc = 0$

Ví dụ 01 : Tìm tất cả giá trị tham số thực m để hàm số $y = -x^4 + (m - 2015)x^2 + 2017$ có 3 cực trị tạo thành tam giác vuông cân tại A .

A. $m = 2017$

B. $m = 2014$

C. $m = 2016$

D. $m = 2015$

Hướng dẫn: Với $a = -1, b = m - 2015$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có: $-(m - 2015) < 0 \Rightarrow m > 2015$.

Tam giác ABC vuông cân tại A khi: $8a + b^3 = 0 \Rightarrow 8 \cdot (-1) + (m - 2015)^3 = 0 \Leftrightarrow m - 2015 = 2 \Leftrightarrow m = 2017$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Ví dụ 02 : Tìm tất cả giá trị tham số thực m để hàm số $y = x^4 + 2(m + 2016)x^2 - 2017m + 2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác vuông cân tại A .

A. $m = -2017$

B. $m = 2017$

C. $m = -2018$

D. $m = 2015$

Hướng dẫn: Với $a = 1, b = 2(m + 2016)$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có: $2(m + 2016) < 0 \Rightarrow m < -2016$

Từ $8a + b^3 = 0 \Rightarrow 8 \cdot 1 + 8(m + 2016)^3 = 0 \Leftrightarrow m + 2016 = -1 \Leftrightarrow m = -2017 \Rightarrow$ Chọn đáp án A.

Ví dụ 03 : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = \frac{9}{8}x^4 + 3(m - 2017)x^2 - 2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác đều.

A. $m = 2015$

B. $m = 2016$

C. $m = 2017$

D. $m = -2017$

Hướng dẫn: Với $a = \frac{9}{8}, b = 3(m - 2017)$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có: $\frac{9}{8} \cdot 3(m - 2017) < 0 \Rightarrow m < 2017$

Tam giác ABC đều, thì: $24a + b^3 = 0 \Leftrightarrow 24 \left(\frac{9}{8} \right) + [3(m - 2017)]^3 = 0 \Leftrightarrow m - 2017 = -1 \Rightarrow m = 2016$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Ví dụ 04 : Nếu đồ thị hàm số $y = 9x^4 + 2(m - 2020)x^2 - 2017m + 2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác đều thì giá trị tham số m thuộc khoảng nào?

A. $(2015; 2017)$

B. $(2016; 2018)$

C. $(2017; 2019)$

D. $(2017; 2020)$

Hướng dẫn: Với $a = 9, b = 2(m - 2020)$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có: $9 \cdot 2(m - 2020) < 0 \Rightarrow m < 2020$

$24a + b^3 = 0 \Leftrightarrow 24 \cdot 9 + [2(m - 2020)]^3 = 0 \Leftrightarrow m - 2020 = -3 \Rightarrow m = 2017$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án B.

Ví dụ 05 : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = -3x^4 + (m - 2015)x^2 + 2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có một góc 120° .

A. $m = -2017$

B. $m = 2015$

C. $m = 2017$

D. $m = 2016$

Hướng dẫn: Với $a = -3, b = m - 2015$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có: $-3.(m - 2015) < 0 \Rightarrow m > 2015$

Tam giác ABC có một góc 120° , thì phải có: $8a + b^3 \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 0$ với $BAC = 120^\circ \Rightarrow \tan \frac{BAC}{2} = \sqrt{3}$

Nên có $8a + 3b^3 = 0 \Leftrightarrow 8.(-3) + 3(m - 2015)^3 = 0 \Leftrightarrow m - 2015 = 2 \Leftrightarrow m = 2017$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Ví dụ 06 : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = 3x^4 + 2(m - 2018)x^2 + 2017$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có một góc 120° .

A. $m = -2018$

B. $m = -2017$

C. $m = 2017$

D. $m = 2018$

Hướng dẫn: Với $a = 3, b = 2(m - 2018)$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có: $3.2(m - 2018) < 0 \Rightarrow m < 2018$

Từ $8a + b^3 \cdot \tan^2 60^\circ = 0 \Leftrightarrow 8.3 + 8.(m - 2018)^3 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow m - 2018 = -1 \Leftrightarrow m = 2017$

$\Rightarrow$ Chọn đáp án C.

Ví dụ 07 : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = mx^4 + 2x^2 + m - 2$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng 1.

A. $m = -2$

B. $m = 2$

C. $m = 1$

D. $m = -1$

Hướng dẫn: Với $a = m, b = 2$.

Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có: $m.2 < 0 \Rightarrow m < 0$

Tam giác ABC có diện tích bằng 1, thì :

$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0 \Leftrightarrow 32.m^3.1 + 2^5 = 0 \Leftrightarrow m^3 + 1 = 0 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow$ Chọn đáp án D.

Ví dụ 08 : Tìm tất cả giá trị tham số m để hàm số $y = mx^4 + 4x^2 + 2017^m - 2016$ có 3 cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

A. $m = -2$

B. $m = 4$

C. $m = 1$

D. $m = -1$

Hướng dẫn: Với $a = m, b = 4$. Hàm số có 3 cực trị là $ab < 0$, tức là phải có: $m.4 < 0 \Rightarrow m < 0$

$32a^3(S_0)^2 + b^5 = 0 \Leftrightarrow 32.m^3(4\sqrt{2})^2 + 4^5 = 0 \Leftrightarrow m^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow$ Chọn đáp án D

PHẦN 3 : GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT

1/Định nghĩa: cho hàm số $y = f(x)$, TXĐ: D

Nếu $f(x) \leq M, \forall x \in D$ và $f(x_0) = M, x_0 \in D$ thì M là GTLN của hs trên D

Kí hiệu $\text{Max } y = M$ tại $x = x_0$

Nếu $f(x) \geq M, \forall x \in D$ và $f(x_0) = M, x_0 \in D$ thì M là GTNN của hs trên D

Kí hiệu $\text{Min } y = M$ tại $x = x_0$

2/ Tìm GTLN & GTNN:

♥ **Dạng 1:** nếu D là *đoạn* $[a, b]$

B1 : Tính y' , cho $y' = 0 \Rightarrow$ các điểm tới hạn $x_0, x_1, x_2, \dots \in [a, b]$, không thuộc $[a, b]$ ta không lấy

B2 : Tính các giá trị $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(a), f(b)$ so sánh tìm ra giá trị lớn và nhỏ nhất và kết luận Min và Max

♥ **Dạng 2 :** nếu D là *khoảng* (a, b) (vẽ bảng biến thiên)

B1 : Tính đạo hàm

B2 : lập BBT , suy ra GTLN , GTNN

PHỤ LỤC PHƯƠNG PHÁP CASIO GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN GTLN – GTNN

- **Bước 1:** Để tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên miền $[a; b]$ ta sử dụng máy tính Casio với lệnh MODE 7 (Lập bảng giá trị)

- **Bước 2:** Quan sát bảng giá trị máy tính hiển thị, giá trị lớn nhất xuất hiện là max , giá trị nhỏ nhất xuất hiện là min

- **Chú ý:**

Ta thiết lập miền giá trị của biến x Start a End b Step $\frac{b-a}{19}$ (có thể làm tròn để Step đẹp)
để bài liên có các yếu tố lượng giác $\sin x, \cos x, \tan x, \dots$ ta chuyển máy tính về **chế độ Radian**

Ví dụ 1.[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ trên đoạn $[1; 3]$

A. $\max = \frac{67}{27}$

B. $\max = -2$

C. $\max = -7$

D. $\max = -4$

Hướng dẫn giải

Sử dụng chức năng MODE 7 của máy tính Casio với thiết lập **Start 1 End 3 Step $\frac{3-1}{19}$**

	X	F(X)
1	1.052	-4.514
2	1.2105	-4.998

1

Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F(X)$ có thể đạt được là $f(3) = -2$

	X	F(X)
19	2.8947	-3.081
20	3	-2
21		

Vậy $\max = -2$, dấu = đạt được khi $x = 3 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Ví dụ 2. [Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$

A. $M = 3$

B. $M = 3\sqrt{2}$

C. $M = 2\sqrt{3}$

D. $M = 2 + \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Theo điều kiện xác định thì $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 6$

Lập bảng giá trị cho $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$ với lệnh MODE 7 Start -3 End 6 Step 0.5

	X	F(X)
9	1.5	4.236
10	2	4.2426
11	2.5	4.236

1.5

$3\sqrt{2}$

4.242640687

Quan sát bảng giá trị thấy ngay $M = 4.2421 = 3\sqrt{2}$ đạt được khi $x = -1$ và $m = 2.6 \times 10^{-3} \approx 0$ Sử dụng Casio $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Ví dụ 3. [Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 7$

A. $\min y = -5$

B. $\min y = -7$

C. $\min y = -3$

D. Không tồn tại min

Hướng dẫn giải

Đề bài không nói gì đến miền giá trị của x . Khi đó ta chọn Start -9 End 10 Step 1

Lập bảng giá trị cho $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 7$ với lệnh MODE 7

	X	F(X)
10	2	-7
11	3	-7
12	4	-7

1

Quan sát bảng giá trị thấy ngay $\min y = -3$ đạt được khi $x = 1$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là C

Ví dụ 4. [Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-4}{x+m}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên $[-2;6]$

A. $m = \frac{2}{6}$

B. $m = -\frac{4}{5}$

C. $m = \frac{3}{4}$

D. $m = \frac{6}{7}$

Hướng dẫn giải

Thử với $m = \frac{2}{6}$ thì giá trị lớn nhất là 25 $\Rightarrow$ A sai

x	y
-2	-1.5
-1	-1.5
0	-1.5
1	-1.5
2	-1.5
3	-1.5
4	-1.5
5	-1.5
6	25

Tương tự như vậy với $m = 34$ thì giá trị lớn nhất là 5. $\Rightarrow$ Đáp số C chính xác

x	y
-2	4.2564
-1	4.6329
0	4.6329
1	4.6329
2	4.6329
3	4.6329
4	4.6329
5	4.6329
6	5

BÀI TẬP TỰ LUẬN PHẦN GTLN – GTNN

Bài tập 01 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 2$ trên đoạn $[-1;2]$

♥ Giải:

.....

.....

.....

Bài tập 02 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 3}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$

(Trích đề thi ĐH Khối D – 2013)

♥ Giải:

.....

.....

.....

Bài tập 03 : Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

- a) $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên đoạn $[-4; 4]$. b) $y = f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[-4; 0]$
 c) $y = x^4 - 8x^2 + 16$ trên đoạn $[-1; 3]$. d) $y = x^3 + 5x - 4$ trên đoạn $[-3; 1]$.

♥ Giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- Bài tập 04 :** a) $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x}$ b) $y = \sqrt{x-5} + \sqrt{9-x}$
 c) $y = \sqrt{x-7} + \sqrt{11-x}$ d) $y = x^4 - 2x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$.

♥ Giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 05 : Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

- a) $y = \frac{2\sin x - 1}{\sin x + 2}$ b) $y = \cos^3 x - 6\cos^2 x + 9\cos x + 5$

♥ Giải:

.....

Bài tập 06 : a) $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ (ĐH Khối B – 2003) b) $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $[-1; 2]$ (ĐH Khối D – 2003)

c) Đề Thi THPT Quốc Gia 2015: $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$.

d) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1$, $x \in \left[-2; \frac{5}{2}\right]$ e) $y = x^3 - 3x^2 + 5$, $x \in [-1; 4]$ f) $y = \sqrt{5 - 4x}$, $x \in [-1; 1]$

♥ Giải:.....

Bài tập 07 : Tìm các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x-m^2+m}{x+1}$ trên đoạn $[0;1]$ bằng -2 .

♥ Giải:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài tập 08 : Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2mx+1}{m-x}$ trên $[2;3]$ là $-\frac{1}{3}$ khi m nhận giá trị bằng:

A. -5

B. 1

C. 0

D. -2

♥ Giải:

.....

.....

.....

.....

Bài tập 09 : Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 12t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, *kể từ lúc bắt đầu chuyển động*, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

A. 512 (m/s)

B. 90 (m/s)

C. 700 (m/s).

D. 96 (m/s).

♥ Giải:

.....

.....

Bài tập 10 : Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, *kể từ lúc bắt đầu chuyển động*, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

- A. 216 (m/s) B. 30 (m/s) C. 400 (m/s) D. 54 (m/s)

♥ Giải:

.....

Bài tập 11 : Từ một bờ tường có sẵn, người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là 100 m thẳng hàng rào . Vậy làm thế nào để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất. Khi đó: chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật là

- A. 50 và 25 B. 35 và 35 C. 75 và 25 D. 50 và 50

♥ Giải:

.....

BÀI TẬP MINH HỌA PHẦN GTLN – GTNN

Ví Dụ 01 : tìm GTLN & GTNN của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[1,3]$

Các bước chung khi giải một bài toán tìm GTLN – GTNN là

► **Bước 1:** Ứng với tập xác định $[a;b]$ của hàm $y = f(x)$, ta **tính đạo hàm** $y' = f'(x)$.

► **Bước 2:** Giải phương trình $f'(x) = 0$.

► **Bước 3:** Nếu giải ra được các nghiệm $x_0; x_1; x_2; ... x_n \rightarrow$ ta nhận (loại) các nghiệm này trên khoảng

$[a;b]$ đang xét. Khi đó ta có:
$$\begin{cases} f(a) = \\ f(b) = \\ f(x_i) = ? (\forall i = \overline{0, n}) \end{cases}$$

Sau đó, so sánh các giá trị và kết luận:
$$\begin{cases} \max_{x \in [a;b]} f(x) = \\ \min_{x \in [a;b]} f(x) = \end{cases}$$

(☹ không phải hàm số nào cũng tồn tại cả GTLN và GTNN).

* **Lưu ý rằng**, nếu pt $f'(x) = 0$ vô nghiệm hoặc các nghiệm tìm được không thuộc $[a; b]$ thì khi đó GTLN – GTNN của hàm số sẽ đạt được tại $x = a, x = b$ (tạm gọi là 2 biên).

♥ **Giải:** MXĐ : $D = \mathbb{R}$, hàm số xác định và liên tục trên $[1, 3]$

$$y' = 3x^2 - 6x, y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ nhìn vào đoạn } [1, 3] \text{ ta chỉ nhận } x = 2 \text{ không nhận } x = 0$$

$$\text{Tính các giá trị } \begin{cases} f(2) = y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = -2 \\ f(1) = y(1) = 0 \\ f(3) = y(3) = 2 \end{cases},$$

Kết luận : Max $y = 2$ khi $x = 3$ và Min $y = -2$ khi $x = 2$
[1, 3] [1, 3]

Ví Dụ 02 : Tìm GTLN & GTNN của hàm số $y = f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-x}$

♥ **Giải:** MXĐ : $D = [2, 8]$, hàm số xác định và liên tục trên $[2, 8]$

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{8-x}} = \frac{\sqrt{8-x} - \sqrt{x-2}}{2\sqrt{8-x} \cdot \sqrt{x-2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{8-x} - \sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{8-x} = \sqrt{x-2} \text{ (có dạng } \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \end{cases} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 8-x = 2-x \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 \in D, \quad f(2) = \sqrt{6}; f(5) = 2\sqrt{3}; f(8) = \sqrt{6}$$

Kết luận : Max $y = 2\sqrt{3}$ khi $x = 5$ và Min $y = \sqrt{6}$ khi $x = 2$ hay $x = 8$
[2, 8] [2, 8]

BẢNG ĐẠO HÀM

$(u^n)' = u^{n-1} \cdot u'$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{(u)' \cdot v - (v)' \cdot u}{v^2}$
$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' \cdot (1 + \tan^2 u)$
$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$	$(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u} = -u' \cdot (1 + \cot^2 u)$

Ví Dụ 03 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số : $f(x) = x \cdot \sqrt{(5-x)^3}$ trên đoạn $[0; 5]$

♥ **Giải:** $f(x) = x \cdot \sqrt{(5-x)^3}$ hàm số xác định và liên tục trên $[0; 5]$

trên $[0; 5]$ thì $5 - x > 0$; Nên $f(x) = x(5 - x)^{3/2} \quad \forall x \in (0; 5)$

$$f'(x) = \sqrt{5-x} - \frac{5}{2}x; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 5; x = 2. \text{ Tính các giá trị: } f(2) = 6\sqrt{3}, f(0) = f(5) = 0$$

$$\text{Vậy } \max_{x \in [0;5]} f(x) = f(2) = 6\sqrt{3}, \quad \min_{x \in [0;5]} f(x) = f(0) = 0$$

Ví Dụ 04 : Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1} - 4x$ trên đoạn $[0;1]$.

♥ **Giải:** Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0;1]$.

$$\text{Đạo hàm } y' = \frac{-1}{(x+1)^2} - 4 < 0, \quad \forall x \in [0;1]. \text{ Suy ra hàm số nghịch biến trên đoạn } [0;1]$$

$$\text{Vậy } \max_{[0;1]} y = y(0) = 3; \quad \min_{[0;1]} y = y(1) = -\frac{3}{2}.$$

Ví Dụ 05 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$.

♥ **Giải:** Ta có $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[2; 4]$;

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}. \text{ Với } x \in [2; 4], \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \notin [2; 4] \\ x = 3 \in [2; 4] \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } f(2) = \frac{13}{2}, \quad f(3) = 6, \quad f(4) = \frac{25}{4}.$$

Suy ra : giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $[2; 4]$ lần lượt là $\frac{13}{2}$ và 6.

Ví Dụ 06 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (2\sin x + 1)^2 + 2$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

♥ **Giải:** Đặt $t = \sin x$. Vì $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $t \in [-1; 1]$.

$$\text{Hàm số trở thành } y = (2t + 1)^2 + 2 = 4t^2 + 4t + 3, \quad t \in [-1; 1]. \quad \text{Đạo hàm } y' = 8t + 4.$$

$$\text{Suy ra } y' = 0 \Leftrightarrow 8t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \in [-1; 1].$$

$$\text{Ta có } y(-1) = 3; \quad y\left(-\frac{1}{2}\right) = 2; \quad y(1) = 11.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1;1]} f(t) = 11 \text{ khi } t = 1, \text{ suy ra } x = \frac{\pi}{2}; \quad \min_{[-1;1]} f(t) = 2 \text{ khi } t = -\frac{1}{2}, \text{ suy ra } x = -\frac{\pi}{6}.$$

Ví Dụ 07 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x$ trên đoạn $[0; \pi]$.

♥ **Giải:** Đặt $t = \sin x$. Do $x \in [0; \pi]$ nên $t \in [0; 1]$.

Hàm số trở thành $f(t) = 2t - \frac{4}{3}t^3$ xác định và liên tục trên đoạn $[0; 1]$.

Đạo hàm $f'(t) = 2 - 4t^2$. Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2 - 4t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{\sqrt{2}}{2} \in [0; 1] \\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \notin [0; 1] \end{cases}$.

Ta có $f(0) = 0$; $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $f(1) = \frac{2}{3}$.

Vậy:

► GTLN của hàm số bằng $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ khi $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, suy ra $x = \frac{\pi}{4}$ và $x = \frac{3\pi}{4}$;

► GTNN của hàm số bằng 0 khi $t = 0$, suy ra $x = 0$ và $x = \pi$.

Ví Dụ 08 : Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

♥ **Giải:** Hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

$f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin \left[\frac{1}{2}; 2\right] \\ x = -2 \notin \left[\frac{1}{2}; 2\right] \end{cases}$. Tính các giá trị $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}$; $f(2) = \frac{7}{3}$

Vậy $\min_{x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = \frac{7}{6}$ khi $x = \frac{1}{2}$; $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = \frac{7}{3}$ khi $x = 2$.

Ví Dụ 09 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ trên đoạn $[-1; 0]$.

♥ **Giải:** Miền xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = \frac{-16x^2 + 64}{(x^2 + 4)^2}$.

Suy ra

$y' = 0 \Leftrightarrow -16x^2 + 64 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Giới hạn tại vô cực

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0		-4		4		0

Vậy $\max_{x \in [-1; 0]} y = 4$ khi $x = 2$

$\min_{x \in [-1; 0]} y = -4$ khi $x = -2$.

Ví Dụ 10 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2x^2 + 1}$ trên đoạn $[-1; 0]$.

♥ **Giải:**

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 0]$.

$$\text{Đạo hàm } y' = 1 + \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2x^2 + 1} + 2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}.$$

$$\text{Suy ra } y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 1} + 2x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 1} = -2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 0 \\ 2x^2 + 1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \in [-1; 0]$$

$$\text{Ta có } y(-1) = -1 + \sqrt{3}; y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}; y(0) = 1.$$

$$\text{Vậy } \max_{[-1; 0]} y = 1 \text{ khi } x = 0; \min_{[-1; 0]} y = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ khi } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ở đây các em chú ý công

thức $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

Và đạo hàm : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Ví Dụ 11 : Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90|$ trên $[-5; 5]$.

♥ **Giải:** Xét hàm số $g(x) = x^3 + 3x^2 - 72x + 90$ trên $[-5; 5]$; Hàm số $g(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 5]$; Đạo hàm $g'(x) = 3x^2 + 6x - 72$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \in [-5; 5] \\ x = -6 \notin [-5; 5] \end{cases}$$

Tính các giá trị $g(5) = -70, g(-5) = 400, g(4) = -86$.

Suy ra $|g(5)| = 70; |g(-5)| = 400; |g(4)| = 86$

Vậy $\max_{x \in [-5; 5]} f(x) = \max_{x \in [-5; 5]} \{|g(-5)|, |g(4)|, |g(5)|\} = 400$ khi $x = -5$.

Lấy giá trị “bự” nhất trong các giá trị này

Ghi chú : Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$

Để tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = |f(x)|$ trên $[a; b]$ ta làm các bước :

- ❑ Xét hàm số $y = f(x)$ và tìm GTLN – GTNN bình thường như các bài tìm GTLN – GTNN.
- ❑ Tìm các $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a; b]$
- ❑ Tính $|f(x_1)|, |f(x_2)|, \dots, |f(x_n)|, |f(a)|, |f(b)|$
- ❑ Số lớn nhất trong các số trên là max và nhỏ nhất trong các số trên là min

Ví Dụ 12 : Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + (k^2 - k + 1)x$ trên đoạn $[-1; 2]$. Khi tham số k thay đổi trên $\mathbb{R}$, giá trị nhỏ nhất của $M - m$ bằng:

- A. $\frac{33}{4}$ B. $\frac{45}{4}$ C. 12 D. Kết quả khác.

♥ **Giải:** Chọn B.

Ta có $y' = 3x^2 + (k^2 - k + 1) = 3x^2 + \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, (\forall x, k)$. Do vậy hàm số đã cho tăng trên đoạn $[-1; 2]$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy ta có: } M - m &= y(2) - y(-1) = 2^3 + 2(k^2 - k + 1) - [-1 - (k^2 - k + 1)] \\ &= 3k^2 - 3k + 12 = 3\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{45}{4} \geq \frac{45}{4}. \end{aligned}$$

Ví Dụ 13 : Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$ xác định trên đoạn $[1; 3]$. Gọi M và n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số, giá trị $M + n$ bằng:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

♥ **Giải:** Chọn B. Ta có $y = x^3 - 3x^2 + 3, D = [1; 3] \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$$\text{Khi } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ (loại } x = 0.) \Rightarrow f(1) = 1; f(2) = -1; f(3) = 3 \Rightarrow \begin{cases} GTLN : M = 3 \\ GTNN : n = -1 \end{cases}$$

Vậy tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất bằng 2.

Ví Dụ 14 : Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4x^3 - 4x^4$ là:

- A. 3 B. 1 C. 4 D. 2

♥ **Giải:** Chọn B $y = 4x^3 - 4x^4, D = \mathbb{R} \Rightarrow y' = 12x^2 - 12x^3 = 12x^2(1 - x); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

x_∞	0		1		$+\infty$
y'	+	0	+	0	-
y					
$-\infty$					$-\infty$

Câu 15: Cho parabol $(P): y = x^2 + x - 2$ và điểm $A(7; -2)$. Tìm M trên (P) sao cho khoảng cách AM là ngắn nhất và tính khoảng cách đó:

- A. $M(1; 0), AM = \sqrt{10}$ B. $M(1; 1), AM = \sqrt{10}$ C. $M(1; 0), AM = 2\sqrt{10}$ D. $M(1; 1), AM = 2\sqrt{10}$

♥ **Giải:** Chọn C. $M \in (P) \Rightarrow M(x, x^2 + x - 2); AM$ ngắn nhất $\Leftrightarrow AM^2$ ngắn nhất.

$$f(x) = AM^2 = (x - 7)^2 + (x^2 + x)^2 = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 14x + 49$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4x - 14 = (x - 1)(4x^2 + 10x + 14) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		$-$	$+$
$f'(x)$		0	

40

Dựa vào bảng biến thiên: $\min f(x) = 40$ tại $x = 1 \Rightarrow y = 0$. Vậy $\min AM = 2\sqrt{10}$ tại $M(1; 0)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM PHẦN GTLN – GTNN

Câu 1 : Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số này trên đoạn $[1; 5]$ lần lượt là

- A. 2; -2 B. 552; $-\frac{1}{3}$ C. 553; $-\frac{1}{4}$ D. 552; $-\frac{1}{4}$

Câu 2 : Cho hàm số $y = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2$. Hiệu của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số này trên đoạn $[0; 3]$ có giá trị là M. Khi đó M bằng

- A. $\frac{11}{5}$ B. $\frac{117}{56}$ C. $\frac{375}{16}$ D. $\frac{91}{4}$

Câu 3 : Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên đoạn $[2; 5]$

- A. $\frac{26}{5}$ và $\frac{5}{2}$ B. $\frac{26}{5}$ và $\frac{5}{4}$ C. $\frac{26}{7}$ và $\frac{5}{2}$ D. $\frac{91}{4}$ và $\frac{5}{2}$

Câu 4 : Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x - \frac{2}{x}$ trên đoạn $[-4; -2]$ là

- A. -1 và $-\frac{5}{2}$ B. -1 và $-\frac{7}{2}$ C. $\frac{26}{7}$ và $-\frac{7}{2}$ D. $\frac{91}{4}$ và $\frac{5}{2}$

Câu 5 : Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 + x^2$ trên đoạn $[-2; -1]$ là nghiệm của phương trình nào sau đây

- A. $x^4 - 2x^2 = 0$ B. $x^3 - 9 = x$
C. $x^2 - 9 = \sin x$ D. $x^4 - 81 = 0$

Câu 6 : Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$. Xét các mệnh đề :

(I) $\max_{[0;2]} y = \frac{1}{3}$

(II) $\min_{[0;2]} y = -5$

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

- A. (I) đúng (II) sai B. (I) sai (II) đúng
C. (I), (II) đều đúng D. (I), (II) đều sai

Câu 7 : Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Xét các mệnh đề :

(I) $\max_{[-3;2]} y = 66$

và

(II) $\min_{[-3;2]} y = 11$

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

- A. (I) đúng (II) sai B. (I) sai (II) đúng
C. (I), (II) đều đúng D. (I), (II) đều sai

Câu 8 : Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(t) = \frac{4}{t^2 + 2}$ là:

- A. 3 B. 2
C. 25 D. 0

Câu 9 : Giá trị lớn nhất t của hàm số $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ là

- A. $3\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$
C. 3 D. $\sqrt{2}$

Câu 10 : Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$ theo thứ tự là

- A. 3 và $\frac{3}{2}$ B. 3 và $-\frac{7}{2}$
C. 3 và $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{91}{4}$ và $-\frac{5}{2}$

Câu 11 : Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 3x + 2|$ trên đoạn $[-10;10]$ là

- A. 1 và $\frac{5}{2}$ B. 132 và 0
C. $\frac{26}{7}$ và $-\frac{7}{2}$ D. 10 và 0

Câu 12 : Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x|$ trên đoạn $[-1;3]$ là

- A. 1 B. 3
C. $\frac{7}{2}$ D. 2

Câu 13 : Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 2x + 3|$ trên đoạn $[0;2]$ là

- A. 1
B. 0
C. 3
D. 2

Câu 14 : Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \frac{20x^2 + 10x + 3}{3x^2 + 2x + 1}$ theo thứ tự là

- A. 3 và $\frac{3}{2}$ B. 3 và $-\frac{7}{2}$
C. 7 và $\frac{5}{2}$ D. $\frac{91}{4}$ và $-\frac{5}{2}$

Câu 15 : Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$

- A. 4
C. 6
B. 8
D. 2

Câu 16 : Một chất điểm chuyển động theo phương trình $x(t) = 3t^3 - 9t^2 + 2$ (m; s). Vận tốc của vật đạt giá trị cực tiểu khi t(s) có giá trị

- A. 1
C. 3
B. 2
D. 4

Câu 17 : Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x^2 - 2x + 8}{x - 1}$ trên đoạn $[-2; 0]$ lần lượt là

M và n, tổng giá trị $M + n$ là :

- A. 3
C. 14
B. -14
D. -3

Câu 18 : Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x - \frac{9}{1 - x}$ trên đoạn $[-3; 0]$ lần

lượt là M và n, tổng giá trị $M^2 + n^2$ là :

- A. 107
C. 144
B. 60
D. 106

Câu 19 : Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 4 - \sqrt{x^2 + 2x + 4}$ trên đoạn $[-2; 1]$ là hệ số góc của đường thẳng nào sau đây

- A. $y - 2x + 3 = 0$
C. $y = x$
B. $y = -2x + 3$
D. $-y + x - 3 = 0$

Câu 20 : Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$ là X và Y.

Biểu thức $A = X + 2Y$

- A. 9
C. 3
B. 10
D. 2

Câu 21 : Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x - \sqrt{2})^2 (x + \sqrt{2})^2$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$

là nghiệm của phương trình

- A. $x^2 - 2x - 3 = 0$
C. $x^2 - 4x = 0$
B. $x^3 = -2x + 3$
D. $x^3 = -2x + 4$

Câu 22 : Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4; 4]$ là

- A. $\min_{[-4; 4]} f(x) = -41$ và $\max_{[-4; 4]} f(x) = 40$
B. $\min_{[-4; 4]} f(x) = -1$ và $\max_{[-4; 4]} f(x) = 40$

C. $\min_{[-4; 4]} f(x) = -4$ và $\max_{[-4; 4]} f(x) = 10$

D. $\min_{[-4; 4]} f(x) = 1$ và $\max_{[-4; 4]} f(x) = 9$

Câu 23 : Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[-2; 2]$ là

A. $\min_{[-2; 2]} f(x) = 2$ và $\max_{[-2; 2]} f(x) = 4$

B. $\min_{[-2; 2]} f(x) = -2$ và $\max_{[-2; 2]} f(x) = 0$

C. $\min_{[-2; 2]} f(x) = 2$ và $\max_{[-2; 2]} f(x) = 8$

D. $\min_{[-2; 2]} f(x) = 2$ và $\max_{[-2; 2]} f(x) = 6$

Câu 24 : Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{8x-3}{x^2-x+1}$ trên $\mathbb{R}$ là

A. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -4$ và $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{17}{3}$

B. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -3$ và $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{16}{3}$

C. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -4$ và $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{16}{3}$

D. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -3$ và $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 5$

Câu 25 : Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ là

A. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$ và $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$

B. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{3}$ và $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3$

C. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{3}$ và $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 5$

D. $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = -3$ và $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3$

Câu 26 : Tích giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 3$ trên đoạn $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$ là

A. 6

B. -75

C. 4

D. -35

Câu 27 : Cao huyết áp còn gọi là tăng huyết áp và khái niệm thường dùng trong dân chúng là bệnh tăng xông (tension). Đây là *bệnh lý thường gặp* trong cộng đồng và gia tăng theo tuổi, **chiếm 8-12% dân số**. Một số yếu tố nguy cơ làm gia tăng nguy cơ cao huyết áp như tiểu đường, thuốc lá, tăng lipid máu, di truyền. *Độ giảm huyết áp* của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30-x)$, trong đó x (mg) > 0 là liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp *giảm nhiều nhất* thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng :

A. 20 mg

B. 15 mg

C. 30 mg

D. Không xác định được

Câu 28 : Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$. GTLN của hàm số trên $[-2; 2]$ là một nghiệm của phương trình nào sau đây

A. $x^2 - 13x = 0$

B. $x^2 - 12x = 0$

C. $x^2 + 13x - 14 = 0$

D. $x^2 - 16 = 0$

Câu 29 : Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$. GTNN của hàm số trên $[-2; 2]$ có giá trị đối là

A. 5

B. -5

C. 4

D. -4

Câu 30 : Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$. Tích GTNN và GTLN của hàm số trên miền xác định là

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. 4

D. $4\sqrt{2}$

Câu 31 : Cho hàm số $y = x + \cos^2 x$. Xét các mệnh đề sau

(I) : $\max_{x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]} y = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

(II) : $\min_{x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]} y = 1$

A. (I) đúng và (II) sai

B. (I) sai và (II) đúng

C. Cả (I) và (II) đều đúng

D. Cả (I) và (II) đều sai

Câu 32 : Khi tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^2 x$. Một học sinh làm như sau

(I) : Với mọi x ta đều có $0 \leq \sin^4 x \leq 1$ (1) và $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ (2)

(II) : Cộng (1) và (2) theo vế ta được $0 \leq \sin^4 x + \cos^2 x \leq 2$

(III) : Vậy GTLN của hàm số bằng 2 và GTNN của hàm số là 0

Cách giải trên

A. Sai từ bước (I)

B. Sai từ bước (II)

C. Sai từ bước (III)

D. Cả ba bước (I), (II) và (III) đều sai

Câu 33 : (CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

A. $\max_{[-1; 2]} y = 11$.

B. $\max_{[-1; 2]} y = 6$.

C. $\max_{[-1; 2]} y = 15$.

D. $\max_{[-1; 2]} y = 10$.

Câu 34 : (SỞ BẮC NINH) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 9}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$ là

- A. $\max_{[1;4]} y = 11$.
 B. $\max_{[1;4]} y = \frac{25}{4}$.
 C. $\max_{[1;4]} y = 10$.
 D. $\max_{[1;4]} y = 6$.

Câu 35 : (TRƯỜNG THPT CHUYÊN LONG AN) Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{2x+1}$ trên $[1; 3]$ là

- A. $\max_{[1;3]} y = 0$; $\min_{[1;3]} y = -\frac{2}{7}$
 B. $\max_{[1;3]} y = \frac{2}{7}$; $\min_{[1;3]} y = 0$
 C. $\max_{[1;3]} y = 3$; $\min_{[1;3]} y = 1$
 D. $\max_{[1;3]} y = 1$; $\min_{[1;3]} y = 0$

Câu 36 : (TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Cho hàm số $y = x^3 + 5x + 7$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5; 0]$ bằng bao nhiêu?

- A. 80. B. -143. C. 5. D. 7.

Câu 37 : Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-4}{x+m}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên đoạn $[-2; 6]$.

- A. $m = 26$.
 B. $m = -\frac{4}{5}$.
 C. $m = 34$.
 D. $m = \frac{6}{7}$.

Câu 38 : Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng 2

- A. $m = 2$.
 B. $m = \frac{31}{27}$.
 C. $m > \frac{3}{2}$.
 D. $m = 1$.

Câu 39 : Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 0.

- A. $m = 4$.
 B. $m = 2$.
 C. $m = 6$.
 D. $m = 0$.

Câu 40 : (TRƯỜNG THPT CHUYÊN SƯ PHẠM) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^4 x - \sin^3 x$ là

- A. -1.
 B. 2.
 C. 0.
 D. 3.

Câu 41 : (TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG - CẦN THƠ) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 9x + m$ trên $[-1;1]$ bằng 0 khi giá trị của tham số thực m bằng

- A. -8
- B. 8 .
- C. 0 .
- D. $-\sqrt{3}$ hoặc $\sqrt{3}$

Câu 42 : (TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số

$$f(x) = \frac{mx+1}{x-m} \text{ có giá trị lớn nhất trên } [1;2] \text{ bằng } -2.$$

- A. $m = -3$.
- B. $m = 2$.
- C. $m = 4$.
- D. $m = 3$.

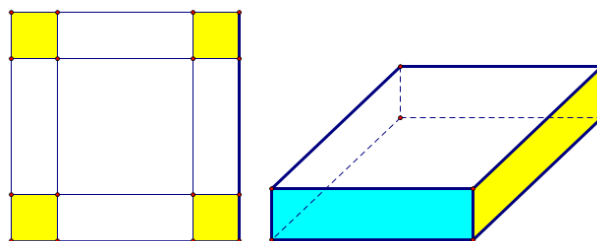
Câu 43 : Trong tất cả các hình chữ nhật có diện tích S , chu vi của hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng bao nhiêu:

- A. $2\sqrt{S}$
- B. $2S$
- C. $4S$
- D. $4\sqrt{S}$

Câu 44 : Trong số các hình chữ nhật có chu vi 24cm. Hình chữ nhật có diện tích lớn nhất là hình có diện tích bằng.

- A. $S = 36 \text{ cm}^2$
- B. $S = 24 \text{ cm}^2$
- C. $S = 49 \text{ cm}^2$
- D. $S = 40 \text{ cm}^2$

Câu 45 : Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh a như hình vẽ. Người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau, rồi gấp tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp. Để thể tích của khối hộp là lớn nhất thì cạnh của hình vuông bị cắt ra bằng:



- A. $\frac{a}{6}$.
- B. $\frac{a}{8}$.
- C. $\frac{a}{12}$.
- D. $\frac{a}{24}$.

Câu 46 : Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 48cm . Người ta cắt ở 4 góc 4 hình vuông bằng nhau và gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp. Để thể tích khối hộp lớn nhất thì cạnh hình vuông bị cắt dài:

- A. 8 cm. B. $\frac{8}{92}$ cm .
C. 24 cm. D. $\frac{48}{3}$ cm .

Câu 47 : Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$, $(0 \leq t \leq 90)$. Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $f(t) = V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng ?

- A. Tốc độ bơm giảm từ phút thứ 60 đến phút thứ 90.
B. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.
C. Tốc độ bơm luôn giảm.
D. Tốc độ bơm luôn tăng.

Câu 48 (Trích đề thi thử lần 1, k2pi.net.vn) : Người ta tiêm một loại thuốc vào mạch máu ở cách tay phải của một bệnh nhân. Sau thời gian là t giờ, nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân đó được cho bởi công thức $C(t) = \frac{0,28t}{t^2 + 4}$ ($0 < t < 24$). Hỏi sau bao nhiêu giờ thì nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân là lớn nhất ?

- A. 12 giờ. B. 8 giờ.
C. 6 giờ. D. 2 giờ.

Câu 49 : Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$

- A. $-\frac{1}{3}$. B. -5. C. 5. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 50 : Lưu lượng xe ô tô vào đường hầm được cho bởi công thức $f(v) = \frac{209,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264}$

(xe/giây), trong đó $v(km/h)$ là vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm. Tính vận tốc trung bình của các xe khi vào đường hầm sao cho lưu lượng xe là lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó.

- A. $\begin{cases} v = \frac{\sqrt{264}}{0,6} \\ f(v) \approx 8,9 \end{cases}$ B. $\begin{cases} v = \frac{\sqrt{264}}{0,5} \\ f(v) \approx 6,3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} v = \frac{\sqrt{260}}{0,6} \\ f(v) \approx 6,4 \end{cases}$ D. $\begin{cases} v = \frac{\sqrt{264}}{1,6} \\ f(v) \approx 4,9 \end{cases}$

PHẦN 4 : TIỆM CẬN

KIẾN THỨC CĂN BẢN

Định nghĩa đường tiệm cận của đồ thị của hàm số

A. Tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

B. Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$+ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$+ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$+ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$+ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

Đối với dạng này thì
chỉ cần chú ý

Lấy bậc cao nhất tử chia cho
bậc cao nhất mẫu sẽ ra TCN

Các số làm cho mẫu bằng 0
chính là TCD

Số $x = 1$ không xác định

TCD : $x = 1$

Ví dụ : $y = \frac{2 - 4x}{3x - 3}$

tử $(-4x)$ / mẫu $(3x) = -4/3$

TCN : $y = -4/3$

Chú ý : Mọi hàm *phân thức hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất* $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đều có hai tiệm cận

- Tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$.
- Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.
-

BÀI TẬP TỰ LUẬN PHẦN TIỆM CẬN

Bài 1 : Tìm tiệm cận các hàm số sau

a) $y = \frac{2x+1}{x+2};$

b) $y = \frac{3-4x}{x-1};$

c) $y = \frac{x}{1-2x};$

d) $y = \frac{-4}{x+6}.$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2 : Tính diện tích của hình chữ nhật tạo bởi 2 tiệm cận, 2 trục tọa độ của các hàm số sau

a/ $y = \frac{5x+1}{x-1}$

b/ $y = \frac{2x+1}{x+5}$

.....

.....

.....

Bài 3 : Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x+2m-1}{x+m}$ có tiệm cận đứng qua điểm $M(-3;1)$.

.....

Bài 4 : Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}$ là:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Bài 5 : Tìm tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$

- A. (1;2) B. (2;1) C. (-1;1) D. (1;-1)

Bài 6 : Cho hàm số $y = \frac{2x+m}{mx-1}$. Tìm m sao cho đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và các tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

Bài 7 : Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1}{x-1}$ là điểm nào trong các điểm có tọa độ dưới đây?

- A. (1;2) B. (1;-1) C. (-1;10) D. (1;5)

Bài 8 : Số tiệm cận ngang của hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

- A. 0 B. 1
C. 2 D. 3

Bài 9 : Đồ thị hàm số $y = \frac{x-4}{x^2-16}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 3 đường B. 4 đường
C. 1 đường D. 2 đường

Bài 10 : Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục Oy .

- A. Đáp án khác B. $m < 0$
C. $m > 0$ D. $m \neq 0$

Bài 11 : Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x+3n+1}$. Đồ thị hàm số nhận trục hoành và trục tung làm tiệm cận ngang và tiệm cận đứng. Khi đó tổng $m+n$ bằng:

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 0

Bài 12 : Tìm m để hàm số $\frac{mx-1}{x-m}$ có tiệm cận đứng

- A. $m \notin \{-1;1\}$ B. $m \neq 1$ C. $m \neq -1$ D. không có m

BÀI TẬP MINH HỌA PHẦN TIỆM CẬN

Bài 1 : Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x^2 + 1}$ và các đường thẳng $y = x + m$ (d), trục Oy đồng qui tại một điểm khi m bằng:

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

● **Hướng dẫn giải :** Tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{1}{2}$,

Giao của tiệm cận ngang với trục Oy là điểm $A(0; \frac{1}{2})$.

$$A(0; \frac{1}{2}) \in (d) \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Bài 2 : Cho hàm số $y = \frac{(m-1)x+1}{2x+m}$ (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C), O là gốc tọa độ và A(4;-6). Khi đó *ba điểm O, I, A thẳng hàng* khi m bằng:

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

● **Hướng dẫn giải :**

$$I\left(-\frac{m}{2}; \frac{m-1}{2}\right), \quad \overrightarrow{OA} = (4; -6), \quad \overrightarrow{OI} = \left(-\frac{m}{2}; \frac{m-1}{2}\right)$$

$$O, I, A \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow 4 \cdot \frac{m-1}{2} - 6 \cdot \frac{m}{2} = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

Bài 3 : Cho hàm số $y = \frac{3}{2016x - 2016m}$. Tìm m để đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số?

- A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

● **Hướng dẫn giải :**

$x = m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số vì $\lim_{x \rightarrow m^+} y = +\infty$

$$\text{Để đường thẳng } x = \frac{1}{2} \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = m \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

Bài 4 : Cho hàm số $y = \frac{1}{x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 1}$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi và chỉ

- khi: A. $m > 1$ B. $m < 1$ C. $m = 1$ D. $m = -1$

● Hướng dẫn giải :

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi và chỉ khi: $x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 1 = 0$ vô nghiệm hay

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 1$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM PHẦN TIỆM CẬN

Câu 1 : Phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{4x-5}$

- A. $x = \frac{5}{4}; y = 4$ B. $x = \frac{5}{4}; y = \frac{1}{4}$ C. $x = \frac{1}{4}; y = \frac{5}{4}$ D. $x = \frac{1}{4}; y = \frac{1}{5}$

Câu 2 : Phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1}$

- A. $x = 3; y = -1$ B. $x = -1; y = 3$ C. $x = -\frac{2}{3}; y = \frac{1}{2}$ D. $x = -1; y = \frac{1}{3}$

Câu 3 : Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^7 + 2x}{-4x^7 + x^6}$

- A. $y = -4$ B. $y = \frac{-1}{4}$ C. $y = -\frac{1}{2}$ D. $y = \frac{1}{3}$

Câu 4 : Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-1}$. Tọa độ của I là :

- A. (1; 3) B. (1; 2) C. (2; 1) D. (2; 7)

Câu 5 : Chọn phát biểu đúng trong các phát biểu sau đây:

- A. Hàm số $y = \frac{1}{2x+1}$ không có tiệm cận ngang
 B. Hàm số $y = x^4 - x^2$ không có giao điểm với đường thẳng $y = 1$
 C. Hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
 D. Đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 - 2x$ cắt trục tung tại 1 điểm

Câu 6 : Cho đường cong (C): $y = \frac{3x-1}{x+2}$ và đường thẳng (Δ): $5x - 12y - 4 = 0$. Khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của (C) đến đường thẳng (Δ) bằng

- A. $\frac{46}{3}$ B. $\frac{37}{13}$
 C. $\frac{41}{3}$ D. $\frac{50}{13}$

Câu 7 : Cho đường cong (C): $y = \frac{x+1}{x-1}$ có tâm đối xứng là I và đường cong (C'): $y = \frac{2x+1}{x-3}$ có tâm đối xứng là J. Khi đó độ dài IJ bằng

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$

Câu 8 : Cho đường cong (C): $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + x - 1}$. Xét các mệnh đề:

(I) (C) có tiệm cận đứng $x = -1$

(II) (C') có tiệm cận đứng $x = \frac{1}{2}$

(III) (C) có tiệm cận ngang $y = \frac{1}{2}$

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Chỉ (I) và (II) đúng

B. Chỉ (I) và (III) đúng

C. Chỉ (II) và (III) đúng

D. Cả (I), (II) và (III) đều đúng

Câu 9 : Cho đường cong (C): $y = \frac{x-1}{x+2}$ và đường thẳng (Δ): $3x - 4y - 4 = 0$. Khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của (C) đến đường thẳng (Δ) bằng

A. $\frac{14}{5}$

B. $\frac{21}{5}$

C. $\frac{41}{3}$

D. $\frac{50}{13}$

Câu 10 : Cho đường cong (C): $y = \frac{(m+2)x-1}{x+2}$. Giá trị của tham số m để đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đi qua điểm $M(1; -5)$

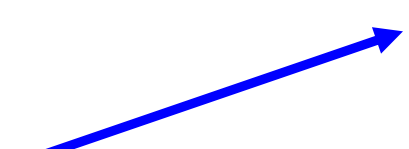
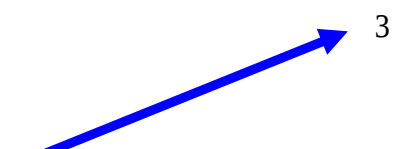
A. 5

B. 1

C. -7

D. 12

Câu 11 : Cho đường cong (C): $y = f(x)$ có bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'	+			+	
y	3				3
			$+\infty$	$-\infty$	

11.1 : Phương trình đường tiệm cận đứng là

A. $x = -4$

B. $x = -3$

C. $x = 3$

D. $x = -2$

11.2 : Phương trình đường tiệm cận ngang là

A. $y = 3$

B. $y = -2$

C. $x = \frac{3}{2}$

D. $y = -3$

Câu 12 : Cho đường cong (C): $y = \frac{mx-n}{x+2}$, ($m, n \neq 0$; $m \neq 1$; $n \neq 2$). Giao điểm của đường tiệm cận đứng đồ thị (C) với đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ là

- A. $M(-2; -4)$
- B. $M(-2; -7)$
- C. $M(-2; 0)$
- D. $M(-2; 0)$

Câu 13 : Cho đường cong (C): $y = \frac{x}{2-x}$, Phương trình đường tiệm cận ngang là

- A. $y = \frac{1}{2}$
- B. $y = -1$
- C. $y = 2$
- D. $y = -3$

Câu 14 : Cho đường cong (C): $y = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x + m}$.

Giá trị tham số m để đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng

- A. $m = 2$
- B. $m = 3$
- C. $m = -1$
- D. $m = 1$

Câu 15 : Cho đường cong (C): $y = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x + m}$. Giá trị tham số m để đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng

- A. $m = 2$
- B. $m = 3$
- C. $m = -1$
- D. $m = 1$

Câu 16 : Cho đường cong (C): $y = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x + m}$. Giá trị tham số m để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

- A. $m = 2$
- B. $m = -3$
- C. $m = -1$
- D. $m = 1$

Câu 17 : Cho đường cong (C): $y = \frac{4-3x}{2-x}$, Phương trình đường tiệm cận ngang là

- A. $y = \frac{1}{2}$
- B. $y = -1$
- C. $y = 2$
- D. $y = 3$

Câu 18 : Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{5}{4x-5}$

- A. 2
- B. 0
- C. 1
- D. 3

Câu 19 : Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{5x}{4x^2 - 5}$

- A. 2 B. 0 C. 1 D. 3

Câu 20 : Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{5}{4x^2 + 5}$

- A. 2 B. 0 C. 1 D. 3

Câu 21 : Giá trị tham số m thì đồ thị hàm số sau có tiệm cận $y = \frac{x-1}{mx^3 - 1}$

- A. $m \neq 0$
B. $m \neq 1$
C. Cả A và B
D. $m \in \mathbb{R}$

Câu 22 : Cho hàm số $y = \frac{mx+3}{x+m-2}$ (C),

(C) có giao điểm hai đường tiệm cận là I.

Tập hợp các điểm I khi m thay đổi là

- A. Đường thẳng $y = x - 2$
B. Đường thẳng $y = -x + 2$
C. Đường thẳng $y = -x + 2$ ngoại trừ hai điểm $(-1; 3)$, $(3; -1)$
D. Đường thẳng $y = x - 2$ ngoại trừ hai điểm $(1; -1)$, $(3; 1)$

Câu 23 : Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

- A. $y = 3$ B. $y = 2$
C. $y = 1$ D. $y = \pm 1$

Câu 24 : Đồ thị hàm số $y = \frac{9(x^2+1)(x+1)}{3x^2-7x+2}$

- A. Nhận đường thẳng $x = 3$ làm tiệm cận đứng
B. Nhận đường thẳng $x = -2$ làm tiệm cận đứng
C. Nhận đường thẳng $y = 0$ làm tiệm cận ngang
D. Nhận đường thẳng $y = 3x + 10$ làm tiệm cận xiên

Câu 25 : Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{1-x}{1+x}$ là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 26 : Đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 4}{2x + 1}$

- A. Nhận đường thẳng $x = 3$ làm tiệm cận đứng

B. Nhận đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$ làm tiệm cận đứng

C. Nhận đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận ngang

D. Nhận đường thẳng $y = x + 2$ làm tiệm cận xiên

Câu 27 : Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào sau đây?

- A. $y = \frac{1+x}{1-x}$ B. $y = \frac{2x-2}{x+2}$ C. $y = \frac{1+x^2}{1+x}$ D. $y = \frac{2x^2+3x+2}{2-x}$

Câu 28 : Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

- A. $y = \frac{1+x}{1-2x}$ B. $y = \frac{2x-2}{x+2}$ C. $y = \frac{x^2+2x+2}{1+x}$ D. $y = \frac{2x^2+3}{2-x}$

Câu 29 : Giá trị của m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+m}$ đi qua điểm $M(2; 3)$ là:

- A. -2 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 30 : Số đường tiệm cận của hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x-2}$ là.

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

Câu 31 : Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

- A. Đồ thị hàm số trên có tiệm cận đứng $x = 2$ B. Đồ thị hàm số trên có tiệm cận ngang $y = 1$
C. Tâm đối xứng là điểm $I(2; 1)$ D. Các câu A, B, C đều sai.

Câu 32 : Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{3x-2}$ là đường thẳng:

- A. $x = \frac{2}{3}$ B. $y = \frac{1}{2}$ C. $y = \frac{2}{3}$ D. $y = \frac{3}{2}$

Câu 33 : Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{x-2}$ là đường thẳng:

- A. $x = 2$ B. $y = 3$ C. $x = \frac{3}{2}$ D. Không có tiệm cận đứng

Câu 34 : Đồ thị hàm số $y = \frac{-x+1}{5x+3}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận:

- A. 2 B. 1 C. 3 D. 0

Câu 35 : Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = \frac{mx-1}{6x-3}$ có đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{1}{2}$

- A. $m = 0$ B. $m = 3$ C. $m = 6$ D. $m = 9$

Câu 36 : Đồ thị hàm số nào có đường tiệm cận ngang là $y = -3$:

- A. $y = \frac{x+2}{-3x+1}$ B. $y = \frac{6x+1}{2x+6}$ C. $y = \frac{6x+1}{-2x+3}$ D. $y = x^3 - 3x^2 + 2$

Câu 37 : Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{3x-m}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$:

- A. $m = 1$ B. $m = 2$ C. $m = 4$ D. $m = 6$

Câu 38 : Đồ thị hàm số nào có đường tiệm cận đứng là $x = 2$:

- A. $y = \frac{x-2}{3x+1}$ B. $y = \frac{2x+1}{x-3}$ C. $y = \frac{x+1}{2x-4}$ D. $y = \frac{2x^2-2x+1}{x+2}$

Câu 39 : Đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2-2x+1}{3x-2}$ có đường tiệm cận đứng là

- A. $y = \frac{2}{3}$ B. $x = \frac{2}{3}$ C. $y = \frac{3}{2}$ D. $x = \frac{3}{2}$

Câu 40 : Cho hàm số $y = \frac{4x-3}{x+5}$ có đồ thị (C). Khẳng định nào sau đây là đúng:

- A. Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $x = -5$ và tiệm cận ngang là $y = 4$
 B. Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $y = 4$ và tiệm cận ngang là $x = -5$
 C. Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $x = 4$ và tiệm cận ngang là $y = -5$
 D. Đồ thị (C) không có tiệm cận

Câu 41 : Đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{9-x^2}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng:

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

Câu 42 : Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{x+3}$ là:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 43 : Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{4+2x}{x-3}$ là:

- A. $x = 2$ B. $x = 3$ C. $y = 2$ D. $y = 3$

Câu 44 : Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-7}{4x+2}$ là:

- A. $x = \frac{4}{3}$ B. $x = -\frac{1}{2}$ C. $y = \frac{4}{3}$ D. $y = -\frac{1}{2}$

Câu 45 : Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. Kết quả khác.

Câu 46 : Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương

- trình: A. $y = -1$ B. $y = 1$ C. $y = -2$ D. $y = \frac{1}{2}$

Câu 47 : Cho hàm số $y = \frac{3-2x}{x+1}$. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình:

- A. $x = -2$ B. $x = \frac{2}{3}$ C. $x = -1$ D. $x = 3$

Câu 48 : Cho hàm số $y = \frac{3-2x}{2x-1}$. Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là các đường thẳng lần lượt có phương trình:

- A. $x = \frac{1}{2}, y = -1$ B. $x = -1, y = \frac{1}{2}$ C. $x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$ D. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}$

Câu 49 : Cho hàm số $y = \frac{1}{2x-3}$. Tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là các đường thẳng lần lượt có phương trình:

- A. $x = 1, y = \frac{1}{2}$ B. $x = \frac{3}{2}, y = 1$ C. $x = \frac{3}{2}, y = 0$ D. $x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$

Câu 50 : Đồ thị của hàm số nào không nhận đường thẳng $x = 2$ làm tiệm cận đứng:

- A. $y = 2 - x$ B. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ C. $y = \frac{-x+3}{x-2}$ D. $y = \frac{1}{2-x}$

Câu 51 : Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{mx+1}{x-m}$ đi qua điểm A(1;-2) khi m bằng

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

Câu 52 : Đồ thị của hàm số nào không nhận đường thẳng $y = 1$ làm tiệm cận ngang:

- A. $y = \frac{2-x}{-x+3}$ B. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ C. $y = \frac{x+3}{x-2}$ D. $y = 2 - x$