

CHUYÊN ĐỀ 3 NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 2: TÍCH PHÂN

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nắm được định nghĩa và các tính chất của tích phân.
- + Nắm vững các phương pháp tính nguyên hàm và bảng nguyên hàm cơ bản để áp dụng tính tích phân.
- + Nắm vững các tính chất tích phân của các hàm số chẵn, hàm số lẻ và các quy tắc đạo hàm của hàm số hợp.
- + Nắm vững các ý nghĩa vật lí của đạo hàm, từ đó giải quyết các bài toán thực tế sử dụng tích phân.

❖ Kỹ năng

- + Hiểu rõ định nghĩa và tính chất của tích phân để vận dụng vào việc tính tích phân.
- + Sử dụng thành thạo bảng nguyên hàm và các phương pháp tính tích phân.
- + Vận dụng tích phân vào các bài toán thực tế.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa tích phân

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, với $a < b$.

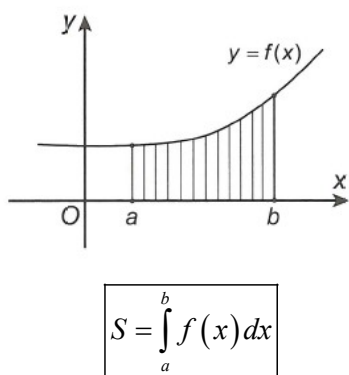
Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì giá trị $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

$$\text{Kí hiệu } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (1)$$

Công thức (1) còn được gọi là công thức Newton – Leibnitz; a và b được gọi là cận dưới và cận trên của tích phân.

Ý nghĩa hình học của tích phân

Giả sử hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, tích phân $\int_a^b f(x) dx$ chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$, với $a < b$.



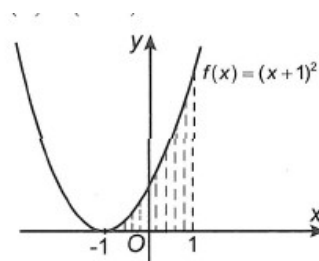
Chẳng hạn: $F(x) = x^3 + C$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$ nên tích phân

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= F(x) \Big|_0^1 = F(1) - F(0) \\ &= (1^3 + C) - (0^3 + C) = 1. \end{aligned}$$

Lưu ý: Giá trị của tích phân không phụ thuộc vào hằng số C .

Trong tính toán, ta thường chọn $C = 0$.

Chẳng hạn: Hàm số $f(x) = x^2 + 2x + 1$ có đồ thị (C) và $f(x) = (x+1)^2 \geq 0$, với $\forall x \in \mathbb{R}$.



Diện tích “tam giác cong” giới hạn bởi (C) , trục Ox và hai đường thẳng $x = -1$ và $x = 1$

$$\begin{aligned} \text{là } S &= \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Lưu ý: Ta còn gọi hình phẳng trên là “hình thang cong”.

2. Tính chất cơ bản của tích phân

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên khoảng K , trong đó K có thể là khoảng, nửa khoảng

hoặc đoạn và $a, b, c \in K$, khi đó:

a. Nếu $b = a$ thì $\int_a^a f(x) dx = 0$

b. Nếu $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì ta có:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

Chẳng hạn: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[-1; 2]$ thỏa mãn $f(-1) = 8$ và $f(2) = -1$.

Khi đó

$$\int_{-1}^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_{-1}^2 = f(2) - f(-1) = -9$$

Lưu ý: Từ đó ta cũng có

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x) dx$$

và $f(a) = f(b) - \int_a^b f'(x) dx$

c. Tính chất tuyến tính

$$\int_a^b [k \cdot f(x) + h \cdot g(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx + h \int_a^b g(x) dx$$

Với mọi $k, h \in \mathbb{R}$.

d. Tính chất trung cận

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ với } c \in (a; b)$$

e. Đảo cận tích phân

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

f. Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ và

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \text{ khi } f(x) = 0.$$

g. Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a; b]$ thì

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

h. Nếu $m = \min_{[a; b]} f(x)$ và $M = \max_{[a; b]} f(x)$ thì

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

i. Tích phân không phụ thuộc vào biến, tức là ta luôn có

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(y) dy = \dots$$

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến số

Đổi biến dạng 1

Bài toán: Giả sử ta cần tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$, trong đó

ta có thể phân tích $f(x) = g(u(x))u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số.

Phương pháp:

+ Đặt $u = u(x)$, suy ra $du = u'(x) dx$.

+ Đổi cận:

x	a	b
u	$u(a)$	$u(b)$

+ Khi đó $I = \int_a^b f(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u) du = G(u) \Big|_{u(a)}^{u(b)}$, với $G(u)$

là nguyên hàm của $g(u)$.

Lưu ý: Phương pháp đổi biến số trong tích phân cơ bản giống như đổi biến số trong nguyên hàm, ở đây chỉ thêm bước đổi cận.

Đổi biến dạng 2

Dấu hiệu	Cách đặt
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{ a }{\sin t}; t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t; t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	$x = a \cdot \cos 2t; t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a \cdot \cos 2t; t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a)\sin^2 t; t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
---------------------	--

2. Phương pháp tích phân từng phần

Bài toán: Tính tích phân $I = \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases} u = u(x) \\ dv = v'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = u'(x) dx \\ v = v(x) \end{cases}$

Chú ý: Cần phải lựa chọn u và dv hợp lý sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int_a^b v du$

dễ tính hơn $\int_a^b u dv$.

Khi đó $I = (u \cdot v) \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$ (công thức tích phân từng

phần)

III. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ ĐẶC BIỆT

1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a; a]$. Khi đó

Đặc biệt $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$ (1)

+ Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì ta có $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ (1.1)

+ Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì ta có $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ (1.2)

và $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+b^x} dx = \frac{1}{2} \int_0^a f(x) dx$ ($0 < b \neq 1$) (1.3)

2. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$

Hệ quả: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$, khi đó: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$

3. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a+b-x) = f(x)$ thì $\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$

Định nghĩa

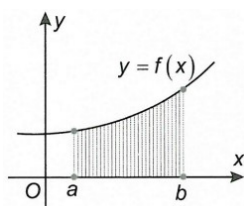
Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$, với $a < b$. Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì giá trị $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

$$\text{Kí hiệu } \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ý nghĩa hình học của tích phân

Giả sử hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, tích phân $\int_a^b f(x) dx$ chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$).

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



Tính chất cơ bản của tích phân

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên khoảng K , trong đó K có thể là khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn và $a, b, c \in K$, khi đó ta có các tính chất sau

$$\int_a^b f(x) dx = 0; \int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a);$$

$$\int_a^b [k \cdot f(x) + h \cdot g(x)] dx = k \int_a^b f(x) dx + h \int_a^b g(x) dx, \text{ với } \forall k, h \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ với } c \in (a; b); \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx;$$

$$f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b] \Rightarrow \begin{cases} \int_a^b f(x) dx \geq 0 \\ \int_a^b f(x) dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \end{cases}; f(x) \geq g(x), \forall x \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

$$\left. \begin{matrix} m = \min_{[a; b]} f(x) \\ M = \max_{[a; b]} f(x) \end{matrix} \right\} \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a); \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(y) dy = \dots$$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tính tích phân bằng cách sử dụng định nghĩa, tính chất

Phương pháp giải

Ví dụ: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$. Tính phân

$$I = \int_1^2 f'(x) dx \text{ bằng}$$

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Sử dụng các tính chất của tích phân.

Sử dụng bảng nguyên hàm và định nghĩa tích phân để tính tích phân.

$$I = \int_1^2 f'(x) dx = f(x) \Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 2 - 1 = 1.$$

Chọn C.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Giá trị của $\int_0^3 dx$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int_0^3 dx = x \Big|_0^3 = 3 - 0 = 3.$$

Chọn A.

Ví dụ 2: Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. -1.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Chọn B.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = x^3$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F(2) - F(0) = 16$.

B. $F(2) - F(0) = 1$.

C. $F(2) - F(0) = 8$.

D. $F(2) - F(0) = 4$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = 4 = F(2) - F(0)$

Chọn D.

Ví dụ 4: Giá trị của $I = \int_1^2 \frac{1}{2x-1} dx$ là

A. $I = \ln 3 - 1$.

B. $I = \ln \sqrt{3}$.

C. $I = \ln 2 + 1$.

D. $I = \ln 2 - 1$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln |2x-1| \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 3 = \ln \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Chọn B.

Ví dụ 5: Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$. Giá trị của $I = \int_0^1 [f(x) + 2g(x)] dx$ là

A. 5.

B. 7.

C. 9.

D. 12.

Hướng dẫn giải

$$I = \int_0^1 f(x) dx + 2 \int_0^1 g(x) dx = 12.$$

Chọn D.

Ví dụ 6: Cho $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_5^2 f(x) dx = 1$. Giá trị của $I = \int_1^5 f(x) dx$ là

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. -2.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} I &= \int_1^5 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx \\ &= 3 + (-1) = 2. \end{aligned}$$

Chọn A.

Ví dụ 7: Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$, $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$. Khi đó $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$ bằng

A. $I = 17$.

B. $I = \frac{17}{2}$.

C. $I = \frac{15}{2}$.

D. $I = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 + 2 \int_{-1}^2 f(x) dx - 3 \int_{-1}^2 g(x) dx$$

$$= \frac{3}{2} + 2.2 - 3(-1) = \frac{17}{2}.$$

Chọn B.

Ví dụ 8: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Giá trị của $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx$ là bao nhiêu?

A. $I = 3$.

B. $I = 5$.

C. $I = 6$.

D. $I = 7$.

Hướng dẫn giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 5 - 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 7.$$

Chọn D.

Ví dụ 9: Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Giá trị của $F(e) - F(1)$ bằng

A. $I = 0$.

B. $I = -\frac{1}{2}$.

C. $I = \frac{3}{2}$.

D. $I = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } F(e) - F(1) = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e = \frac{1}{2}.$$

Chọn D.

Ví dụ 10: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx$ bằng

A. $I = \ln \frac{4}{3}$.

B. $I = \ln \frac{3}{2}$.

C. $I = \ln \frac{1}{2}$.

D. $I = \ln \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx - \int_0^1 \frac{1}{x+2} dx = (\ln|x+1| - \ln|x+2|) \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - \ln 3.$$

Chọn A.

Ví dụ 11: Tích phân $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \sin x dx$ bằng

A. $I = 1$.

B. $I = 0$.

C. $I = 3$.

D. $I = -1$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } I = - \int_0^{\pi} \cos^3 x d(\cos x) = - \left(\frac{1}{4} \cos^4 x \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0.$$

Chọn B.

Ta có $(\cos x)' = -\sin x$ nên $\sin x dx = -d(\cos x)$

Ví dụ 12: Biết tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Giá trị biểu thức

$P = a + b + c$ là

A. $P = 8$.

B. $P = 0$.

C. $P = 2$.

D. $P = 6$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \neq 0, \forall x \in [1; 2]$ nên

$$I = \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \left(2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1} \right) \Big|_1^2$$

$= 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2$. Suy ra $a = 4, b = c = -2$ nên $P = a + b + c = 0$.

Chọn B.

Nhân liên hợp $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

Ví dụ 13: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f'(x) = x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị $f(1)$ bằng

A. $f(1) = \frac{2}{3}$.

B. $f(1) = \frac{3}{2}$.

C. $f(1) = -\frac{2}{3}$.

D. $f(1) = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Từ $f'(x) = x[f(x)]^2$ (1), suy ra $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [1; 2]$.

Suy ra $f(x)$ là hàm không giảm trên đoạn $[1; 2]$ nên $f(x) \leq f(2) < 0, \forall x \in [1; 2]$.

Chia 2 vế hệ thức (1) cho $[f(x)]^2$ ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x, \forall x \in [1; 2]$. (2)

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1; 2]$ hệ thức (2), ta được

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int_1^2 x dx \Leftrightarrow \left[\frac{-1}{f(x)} \right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 \Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(2)} = \frac{3}{2}.$$

Do $f(2) = -\frac{1}{3}$ nên suy ra $f(1) = -\frac{2}{3}$.

Chọn C.

Chú ý rằng đề bài cho $f(2)$, yêu cầu tính $f(1)$, ta có thể sử dụng nguyên hàm để tìm hằng số C.

Tuy nhiên ta cũng có thể dựa vào định nghĩa của tích phân để xử lí.

Ví dụ 14: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$ và $f(0) = 1, f(1) = -2$. Khi

đó $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $-1 + \ln 15$.

B. $3 + \ln 5$.

C. $-2 + \ln 3$.

D. $-1 - \ln 15$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_{-1}^0 f'(x) dx = f(0) - f(-1)$ nên suy ra $f(-1) = f(0) - \int_{-1}^0 f'(x) dx$.

$$= 1 - \int_{-1}^0 f'(x) dx.$$

Tương tự ta cũng có

$$f(3) = f(1) + \int_1^3 f'(x) dx$$

$$= -2 + \int_1^3 f'(x) dx.$$

$$\text{Vậy } f(-1) + f(3) = -1 - \int_{-1}^0 f'(x) dx + \int_1^3 f'(x) dx = -1 - \ln|2x-1| \Big|_{-1}^0 + \ln|2x-1| \Big|_1^3.$$

$$\text{Vậy } f(-1) + f(3) = -1 + \ln 15.$$

Chọn A.

Ví dụ 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$

và $\int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -1$. Giá trị $I = \int_0^1 f(x) dx$ là

A. 1.

B. $\frac{7}{4}$.

C. $\frac{7}{5}$.

D. 4.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \quad (1).$$

$$\int_0^1 x^6 dx = \frac{1}{7} \Rightarrow \int_0^1 49x^6 dx = 7 \quad (2).$$

$$\text{và } \int_0^1 14x^3 \cdot f'(x) dx = -14 \quad (3).$$

Cộng hai vế (1), (2) và (3) suy ra

$$\int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0 \text{ mà } [f'(x) + 7x^3]^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = -7x^3.$$

$$\text{Hay } f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C.$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{7}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Do đó } f(x) = -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4} \right) dx = \frac{7}{5}.$$

Chọn C.

Ví dụ 16: Cho $f(x), g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm

số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x) dx = 5; \int_0^1 g(x) dx = 7$.

Giá trị của $A = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 g(x) dx$ là

A. 12.

B. 24.

C. 0.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \cdot 5 = 10$

Vì $g(x)$ là hàm số lẻ nên $\int_{-1}^1 g(x) dx = 0$.

Vậy $A = 10$.

Chọn D.

Ví dụ 17: Cho $\int_0^1 \frac{xdx}{(2x+1)^2} = a + b \ln 3$ với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b$ bằng

A. $\frac{5}{12}$.

B. $-\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{12}$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_0^1 \frac{xdx}{(2x+1)^2} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x+1-1}{(2x+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{(2x+1)^2} \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{4(2x+1)} + \frac{1}{4} \ln(2x+1) \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \ln 3. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a = -\frac{1}{6}, b = \frac{1}{4} \Rightarrow a + b = \frac{1}{12}.$$

Chọn D.

Ví dụ 18: Cho $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $6a + b + c$ bằng

A. -2.

B. 1.

C. 2.

D. -1.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx = \left(\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{6} - \ln 2 + \ln 3$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{6}, b = -1, c = 1 \text{ nên } 6a + b + c = -1.$$

Chọn D.

Kỹ thuật tích phân hữu tỉ, ở đây ta tách $x = \frac{1}{2}(2x+1-1)$.

Ví dụ 19: Cho $\int_2^3 \frac{2x+3}{x^2+x} dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị biểu thức $a^2 - ab - b$ là

A. 11.

B. 21.

C. 31.

D. 41.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_2^3 \frac{2x+3}{x^2+x} dx &= \int_2^3 \frac{2x+1+2}{x^2+x} dx = \int_2^3 \left(\frac{2x+1}{x^2+x} + \frac{2}{x^2+x} \right) dx \\ &= \int_2^3 \left(\frac{2x+1}{x^2+x} + \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} \right) dx = \left(\ln|x^2+x| + 2\ln|x| - 2\ln|x+1| \right) \Big|_2^3 = -5\ln 2 + 4\ln 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 4 \end{cases} \rightarrow a^2 - ab - b = 41.$$

Chọn D.

Ví dụ 20. Biết rằng tích phân $\int_1^2 \frac{5x+6}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị

biểu thức $S = a + bc$ là bao nhiêu?

A. $S = -62$.

B. $S = 10$.

C. $S = 20$.

D. $S = -10$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^2 \frac{5x+6}{x^2+5x+6} dx &= \int_1^2 \frac{5x+6}{(x+2)(x+3)} dx = \int_1^2 \left(\frac{9}{x+3} - \frac{4}{x+2} \right) dx \\ &= \left(9\ln|x+3| - 4\ln|x+2| \right) \Big|_1^2 = 9\ln 5 + 4\ln 3 - 26\ln 2. \end{aligned}$$

Suy ra $a = -26, b = 4, c = 9$. Vậy $S = a + bc = -26 + 4 \cdot 9 = 10$.

Chọn B.

Ví dụ 21: Tích phân $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{16}$.

C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $\frac{\pi}{8}$.

Hướng dẫn giải

Xét $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ ta có

$$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$A - B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= \left(-\ln |\sin x + \cos x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\ln 1 + \ln 1 = 0.$$

Từ đó, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} A + B = \frac{\pi}{2} \\ A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{\pi}{4}.$$

Chọn C.

Ví dụ 22: Cho $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x + 1}{\cos^4 x + \sin x \cdot \cos^3 x} dx = a + b \ln 2 + c \ln(1 + \sqrt{3})$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị abc bằng

A. 0.

B. -2.

C. -4.

D. -6.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x + 1}{\cos^4 x + \sin x \cdot \cos^3 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos^2 x + \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x}{\cos^2 x (\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x)} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 + \tan x + \tan^2 x}{\cos^2 x (1 + \tan x)} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 + \tan x + \tan^2 x}{(1 + \tan x)} d(\tan x)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan x + \frac{2}{(1 + \tan x)} \right) d(\tan x) = \frac{\tan^2 x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + 2 \ln |\tan x + 1| \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$= 1 - 2\ln 2 + 2\ln(\sqrt{3} + 1)$. Suy ra $a = 1, b = -2, c = 2$ nên $abc = -4$.

Chọn C.

Ví dụ 23: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x + m, & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x\sqrt{3+x^2}, & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Biết $\int_{-1}^1 f(x) dx = ae + b\sqrt{3} + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Tổng $T = a + b + 3c$ bằng

A. 15.

B. -10.

C. -19.

D. -17.

Hướng dẫn giải

Do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại $x = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

$$\text{Ta có } \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 2x\sqrt{3+x^2} dx = \int_{-1}^0 (3+x^2)^{\frac{1}{2}} d(3+x^2) = \frac{2}{3} (3+x^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{3+x^2} \Big|_{-1}^0 = 2\sqrt{3} - \frac{16}{3}.$$

$$I_2 = \int_0^1 (e^x - 1) dx = (e^x - x) \Big|_0^1 = e - 2.$$

$$\text{Suy ra } \int_{-1}^1 f(x) dx = I_1 + I_2 = e + 2\sqrt{3} - \frac{22}{3}. \text{ Suy ra } a = 1; b = 2; c = -\frac{22}{3}.$$

$$\text{Vậy } T = a + b + 3c = 1 + 2 - 22 = -19.$$

Chọn C.

Ví dụ 24: Biết $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+3^{-x}} dx = m$. Giá trị của $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+3^x} dx$ bằng

A. $\pi - m$.

B. $\frac{\pi}{4} + m$.

C. $\pi + m$.

D. $\frac{\pi}{4} - m$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+3^{-x}} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+3^x} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2x) dx = \pi.$$

$$\text{Suy ra } \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+3^x} dx = \pi - m.$$

Chọn A.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Giả sử $f(x)$ là một hàm số liên tục trên khoảng $(\alpha; \beta)$ và $a, b, c, b+c \in (\alpha; \beta)$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

B. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b+c} f(x) dx - \int_a^c f(x) dx.$

$$\text{C. } \int_a^b f(x)dx = \int_a^{b+c} f(x)dx + \int_{b+c}^b f(x)dx.$$

$$\text{D. } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx.$$

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3$ có một nguyên hàm là $F(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F(2) - F(0) = 16$. B. $F(2) - F(0) = 1$. C. $F(2) - F(0) = 8$. D. $F(2) - F(0) = 4$.

Câu 3: Tích phân $\int_0^e \cos x dx$ bằng

A. $-\sin e$. B. $-\cos e$. C. $\sin e$. D. $\cos e$.

Câu 4: Tích phân $I = \int_0^2 (2x+1)dx$ bằng

A. $I = 5$. B. $I = 6$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

Câu 5: Cho $\int_{-1}^0 f(x)dx = 1$; $\int_0^3 f(x)dx = 3$. Tích phân $\int_{-1}^3 f(x)dx$ bằng

A. 6. B. 4. C. 2. D. 0.

Câu 6: Cho $\int_{-2}^2 f(x)dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(t)dt = -4$. Giá trị của $I = \int_2^4 f(y)dy$ là

A. $I = 5$. B. $I = 3$. C. $I = -3$. D. $I = -5$.

Câu 7: Cho $\int_a^c f(x)dx = 50$ và $\int_b^c f(x)dx = 20$. Giá trị $\int_b^a f(x)dx$ bằng

A. -30. B. 0. C. 70. D. 30.

Câu 8: Cho $\int_0^1 [f(x) - 2g(x)]dx = 12$ và $\int_0^1 g(x)dx = 5$, khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. -2. B. 12. C. 22. D. 2.

Câu 9: Cho $\int_2^5 f(x)dx = 4$ và $\int_2^5 g(x)dx = 3$, khi đó $\int_2^5 [2f(x) - 3g(x)]dx$ bằng

A. 1. B. 12. C. 7. D. -1.

Câu 10: Cho $\int_0^2 f(x)dx = -3$; $\int_2^4 f(x)dx = 6$ và $\int_0^4 g(x)dx = 8$. Khi đó $\int_0^4 [3f(x) + g(x)]dx$ bằng

A. 14. B. 3. C. 17. D. -1.

Câu 11: Cho $\int_1^2 [f(x) + 2g(x)]dx = 5$ và $\int_1^2 [2f(x) - 3g(x)]dx = -4$. Khi đó $\int_1^2 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

A. 14. B. 3. C. 17. D. -1.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x)dx = 7$, $\int_3^{10} f(x)dx = 8$ và $\int_3^6 f(x)dx = 9$. Giá

trị của tích phân $I = \int_0^{10} f(x)dx$ bằng

A. $I = 5$. B. $I = 6$. C. $I = 7$. D. $I = 8$.

- Câu 13:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;3]$, $f(3)=4$ và $\int_1^3 f'(x)dx = 7$. Khi đó $f(1)$ bằng
- A. 3. B. 11. C. -3. D. -11.
- Câu 14:** Giá trị của $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$ là
- A. $I = \frac{1}{e}$. B. $I = \frac{1}{e} + 1$. C. $I = 1$. D. $I = e$.
- Câu 15:** Cho $\int_1^2 e^{3x-1} dx = m(e^p - e^q)$ với $m, p, q \in \mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản. Giá trị $m + p + q$ bằng
- A. 10. B. 6. C. $\frac{22}{3}$. D. 8.
- Câu 16:** Cho $\int_2^3 f(x)dx = 1, \int_2^3 g(x)dx = 5$. Để $\int_2^3 [a + 2ax + 3f(x)]dx - \int_2^3 (a-2)g(x)dx = 10$ thì
- A. $a = 2$. B. $a = -3$. C. $a = 1$. D. $a = 3$.
- Câu 17:** Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và $\int_0^1 g(x).f'(x)dx = 1$, $\int_0^1 g'(x).f(x)dx = 2$. Khi đó $I = \int_0^1 [f(x).g(x)]' dx$ có giá trị là
- A. $I = 3$. B. $I = 1$. C. $I = 2$. D. $I = -1$.
- Câu 18:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0) = 2, f(1) = 6$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $\int_0^1 f'(x)dx = 8$. B. $\int_0^1 f'(x)dx = 4$. C. $\int_0^1 f'(x)dx = 3$. D. $\int_0^1 f'(x)dx = 12$.
- Câu 19:** Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x]dx = 1$. Khi đó $\int_1^2 f(x)dx$ bằng
- A. 1. B. -3. C. 3. D. -1.
- Câu 20:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^4 f(x)dx = 10, \int_3^4 f(x)dx = 4$. Tích phân $\int_0^3 f(x)dx$ bằng
- A. 4. B. 7. C. 3. D. 6.
- Câu 21:** Với a, b là các tham số thực. Giá trị tích phân $\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1)dx$ bằng
- A. $b^3 - b^2a - b$. B. $b^3 + b^2a + b$. C. $b^3 - ba^2 - b$. D. $3b^2 - 2ab - 1$.
- Câu 22:** Tích phân $\int_0^1 (3x+1)(x+3)dx$ bằng
- A. 12. B. 9. C. 5. D. 6.
- Câu 23:** Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$. Tổng $S = a + b + c$ là

A. $S = 7$.

B. $S = 5$.

C. $S = 8$.

D. $S = 6$.

Câu 24: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ có giá trị bằng

A. $\ln 2 - 1$.

B. $-\ln 2$.

C. $\ln 2$.

D. $1 - \ln 2$.

Câu 25: Cho số thực $m > 1$ thỏa mãn $\int_1^m |2mx - 1| dx = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m \in (4; 6)$.

B. $m \in (2; 4)$.

C. $m \in (3; 5)$.

D. $m \in (1; 3)$.

Câu 26: Biết rằng tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 2} dx = \frac{a \ln 2}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Biểu thức $P = a + b$ có giá trị bằng

A. -5 .

B. 3 .

C. 1 .

D. -1 .

Câu 27: Cho hai tích phân $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ và $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$. Trong các khẳng định sau, khẳng định đúng là

A. $A = 2B$.

B. $A = B$.

C. $A = -B$.

D. $A + B = 1$.

Câu 28: Cho tích phân $\int_1^5 \left| \frac{x-2}{x+1} \right| dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tích $P = abc$ là

A. $P = -36$.

B. $P = 0$.

C. $P = -18$.

D. $P = 18$.

Câu 29: Biết rằng hàm số $f(x) = mx + n$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 3, \int_0^2 f(x) dx = 8$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $m + n = 4$.

B. $m + n = -4$.

C. $m + n = 2$.

D. $m + n = -2$.

Câu 30: Biết $\int_0^2 \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x + 3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5, (a, b, c \in \mathbb{Q})$. Giá trị của abc bằng

A. -8 .

B. -10 .

C. -12 .

D. 16 .

Câu 31: Cho a là số thực dương, tính tích phân $I = \int_{-1}^a |x| dx$ theo a .

A. $I = \frac{a^2 + 1}{2}$.

B. $I = \frac{a^2 + 2}{2}$.

C. $I = \frac{-2a^2 + 1}{2}$.

D. $I = \frac{|3a^2 - 1|}{2}$.

Câu 32: Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$. Khi đó giá trị $a + b + c$ bằng

A. -3 .

B. 2 .

C. 1 .

D. 0 .

Câu 33: Biết $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b, (a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó giá trị của $a + 4b$ bằng

A. 50 .

B. 60 .

C. 59 .

D. 40 .

Câu 34: Cho $\int_3^4 \frac{5x - 8}{x^2 - 3x + 2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c \ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ.

Giá trị của 2^{a-3b+c} bằng

A. 12.

B. 6.

C. 1.

D. 64.

Câu 35: Cho $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = a\sqrt{b} - \frac{8}{3}\sqrt{a} + \frac{2}{3}$ ($a, b \in \mathbb{R}^*$). Giá trị của $a+2b$ là bao nhiêu?

A. $a+2b=7$.

B. $a+2b=5$.

C. $a+2b=-1$.

D. $a+2b=8$.

Câu 36: Biết $\int_0^1 \frac{x^2-2}{x+1} dx = \frac{-1}{m} + n \ln 2$, với m, n là các số nguyên. Tổng $S = m+n$ là

A. $S=1$.

B. $S=4$.

C. $S=-5$.

D. $S=-1$.

Câu 37: Cho $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{x}{x+1} \right) dx = \frac{10}{b} + \ln \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tổng $P = a+b$ là

A. $P=1$.

B. $P=5$.

C. $P=7$.

D. $P=2$.

Câu 38: Cho $\int_2^3 \frac{1-5x}{9x^2-24x+16} dx = a \ln b + c$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $9a+11b+22c$ bằng

A. 15.

B. -10.

C. 7.

D. 9.

Câu 39: Cho $\int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$ với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 60.

B. 50.

C. 30.

D. 40.

Câu 40: Cho $\int_0^1 \frac{4x^2+15x+11}{2x^2+5x+2} dx = a+b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Biểu thức $T = a.c - b$ bằng

A. 4.

B. 6.

C. $\frac{-1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 41: Cho $\int_0^2 \frac{2x-1}{4x^2+4x+1} dx = \frac{1}{2}(\ln a - \ln b) + c$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+10c$ bằng

A. 15.

B. -15.

C. 14.

D. 9.

Câu 42: Cho $\int_0^1 \frac{x^2-3}{x^2+3x+2} dx = a+b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

A. -2.

B. -1.

C. 2.

D. 1.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a để tích phân $\int_1^{1+a} \frac{dx}{x(x-5)(x-4)}$ tồn tại?

A. 3.

B. 5.

C. Vô số.

D. 0.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^3 f(x) dx = 6$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(|2x-1|) dx$.

A. $I=8$.

B. $I=16$.

C. $I=\frac{3}{2}$.

D. $I=4$.

Câu 45: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int_{-1}^1 |x|^3 dx = \left| \int_{-1}^1 x^3 dx \right|$.

B. $\int_1^{2019} |x^4 - x^2 + 1| dx = \int_1^{2019} (x^4 - x^2 + 1) dx$.

C. $\int_{-2}^3 |e^x(x+1)| dx = \int_{-2}^3 e^x(x+1) dx.$

D. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$

Câu 46: Cho $\int_3^4 \frac{1}{x^2(x+2)} dx = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{a}{b} \right| + \frac{1}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của $a+b-c$ bằng

A. 7.

B. -5.

C. 14.

D. 9

Câu 47: Cho $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = a + b\sqrt{3}$ với a, b là số thực. Giá trị của $a-b$ bằng

A. $-\frac{1}{3}.$

B. $\frac{2}{3}.$

C. $\frac{1}{3}.$

D. $-\frac{2}{3}.$

Câu 48: Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2$, với a, b là các số hữu tỉ thỏa mãn điều kiện

$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 2 - 3 \ln 2$. Tổng $T = a + b$ là

A. $T = -1.$

B. $T = 2.$

C. $T = -2.$

D. $T = 0.$

Câu 49: Xác định số a dương sao cho $\int_0^a \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} dx = \frac{a^2}{2} + a + \ln 3$. Giá trị của a là

A. $a = 1.$

B. $a = 2.$

C. $a = 3.$

D. $a = -4.$

Câu 50: Cho $\int_0^1 \left(\frac{2x+1}{x+1} \right)^2 dx = a + b \ln 2$, với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $2a+b$ bằng

A. -1.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Câu 51: Cho $\int_2^3 \frac{6x^2 + x - 2}{x(x^2 - 1)} dx = 2 \ln a + \frac{3}{2} \ln b + \frac{5}{2} \ln c$, với a, b, c là các số hữu tỷ.

Giá trị của $2a - 3b + 5c$ bằng

A. 10.

B. -10.

C. 8.

D. 9.

Câu 52: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^2 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{7}{2}.$

B. 1.

C. $\frac{5}{2}.$

D. $\frac{3}{2}.$

Câu 53: Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \cos 2x \cos 4x dx = a + b\sqrt{3}$, trong đó a, b là các hằng số hữu tỉ.

Giá trị $e^a + \log_2 |b|$ bằng

A. -2.

B. -3.

C. $\frac{1}{8}.$

D. 0.

Câu 54: Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \max\{\sin x, \cos x\} dx$ bằng

- A. 0. B. 1. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 55: Biết rằng $\int_2^3 \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x} - 1} dx = \frac{a - 4\sqrt{b}}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương.

Tổng $T = a + b + c$ bằng

- A. 31. B. 29. C. 33. D. 27.

Câu 56: Biết $\int_0^1 \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 3x + 2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của biểu thức

$S = 2a + b^2 + c^2$ bằng

- A. $S = 515$. B. $S = 164$. C. $S = 436$. D. $S = -9$.

Câu 57: Cho M, N là các số thực. Xét hàm số $f(x) = M \cdot \sin \pi x + N \cdot \cos \pi x$ thỏa mãn $f(1) = 3$ và

$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{\pi}$. Giá trị của $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ bằng

- A. $\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. B. $-\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. C. $-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Câu 58: Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn $\int_1^2 e^{kx} dx < \frac{2019 \cdot e^k - 2019}{k}$. Số phần tử của tập hợp S bằng.

- A. 7. B. 8. C. Vô số. D. 6.

Câu 59: Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + x \cos x - \sin^3 x}{1 + \cos x} dx = \frac{\pi^2}{a} - \frac{b}{c}$. Trong đó a, b, c là các số nguyên dương. Phân số $\frac{b}{c}$

tối giản. Giá trị của $T = a^2 + b^2 + c^2$ là

- A. $T = 16$. B. $T = 59$. C. $T = 69$. D. $T = 50$.

Câu 60: Biết $\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x} + e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}} dx = a + e^b - e^c$ với a, b, c là các số nguyên.

Giá trị của $T = a + b + c$ bằng

- A. $T = -3$. B. $T = 3$. C. $T = -4$. D. $T = -5$.

Dạng 2: Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến

Phương pháp giải

Nắm vững phương pháp đổi biến số dạng 1 và dạng 2, cụ thể:

Đổi biến dạng 1

Bài toán: Giả sử ta cần tính $I = \int_a^b f(x) dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x) = g(u(x))u'(x)$.

Bước 1: Đặt $u = u(x)$, suy ra $du = u'(x) dx$.

Bước 2: Đổi cận

x	a	B
u	$u(a)$	$u(b)$

Bước 3: Tính

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u) du = G(u) \Big|_{u(a)}^{u(b)}$$

Với $G(u)$ là một nguyên hàm của $g(u)$.

Đổi biến dạng 2

Bài toán: Giả sử ta cần tính $I = \int_a^b f(x) dx$, ta có thể đổi biến như sau:

Bước 1: Đặt $x = \varphi(t)$, ta có $dx = \varphi'(t) dt$.

Bước 2: Đổi cận

x	a	b
t	α	β

Bước 3:

Tính
$$I = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = G(t) \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

Với $G(t)$ là một nguyên hàm của $g(t)$.

Ví dụ 1: Giá trị của $I = \int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin x dx$ là

- A. π . B. 0.
C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$

$\Rightarrow \sin x dx = -du$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = \pi \Rightarrow u = -1 \end{cases}$

Khi đó $I = \int_1^{-1} u^2 (-du) = \int_{-1}^1 u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$.

Chọn D.

Ví dụ 2: Giá trị của $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2} dx$ là

- A. $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}$. B. $\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.
C. $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t \cdot dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2t) \cdot dt$

Dấu hiệu	Cách đặt
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{ a }{\sin t}, t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	$x = a \cos 2t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x = a \cos 2t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x = a + (b-a) \sin^2 t, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

Chọn A.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Giá trị của $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}} dx$ là

A. $I = \frac{1}{4} \ln \frac{3}{5}.$

B. $I = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}.$

C. $I = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3}.$

D. $I = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5}.$

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow x^2 = u^2 - 4$ nên $x dx = u du$

Đổi cận

x	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{3}$
u	3	4

Khi đó $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+4}} \cdot x dx$ nên $I = \int_3^4 \frac{1}{(u^2-4)u} \cdot u du = \int_3^4 \frac{1}{u^2-4} du.$

Suy ra $I = \frac{1}{4} \int_3^4 \left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2} \right) du = \frac{1}{4} (\ln|u-2| - \ln|u+2|) \Big|_3^4 = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}.$

Chọn B.

+ Đặt $u = \sqrt{x^2+4}.$

+ Rút $x^2 = u^2 - 4.$

+ Đổi cận.

+ Phương pháp tách phân thức hữu tỉ.

Ví dụ 2: Giá trị của $I = \int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}} dx$ là

- A. $I = \frac{11}{3} + \frac{1}{2} \ln 2$. B. $I = \frac{11}{3} + 2 \ln 2$. C. $I = \frac{11}{3} - 4 \ln 2$. D. $I = 11 - 4 \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \sqrt{x-1} \Rightarrow x = u^2 + 1$ nên $dx = 2udu$.

Đổi cận

x	I	2
u	I	1

Khi đó $I = \int_0^1 \frac{u^2+1}{1+u} \cdot 2udu = \int_0^1 \left(2u^2 - 2u + 4 - \frac{4}{u+1} \right) du$

$$= \left(\frac{2u^3}{3} - u^2 + 4u - 4 \ln|u+1| \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{3} - 4 \ln 2.$$

Chọn C.

Đổi biến số dạng 1.

Đặt $u = \sqrt{x-1}$.

Ví dụ 3: Giá trị của $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3 \ln x} \cdot \ln x}{x} dx$ là

- A. $I = \frac{116}{135}$. B. $I = \frac{116}{153}$. C. $I = \frac{153}{116}$. D. $I = \frac{161}{135}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \sqrt{1+3 \ln x} \Rightarrow \ln x = \frac{u^2-1}{3}$ nên $\frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} udu$.

Đổi cận

x	I	e
u	I	2

Khi đó $I = \int_1^2 \frac{u \cdot (u^2-1)}{3} \cdot \frac{2}{3} udu = \frac{2}{9} \int_1^2 (u^4 - u^2) du = \frac{2}{9} \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{116}{135}$.

Chọn A.

Ví dụ 4: Giá trị của $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3 \cos x}} dx$ là

- A. $I = \frac{16}{27}$. B. $I = \frac{43}{27}$. C. $I = \frac{11}{27}$. D. $I = \frac{34}{27}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow \cos x = \frac{u^2-1}{3}$ nên $\sin x dx = -\frac{2}{3} u du$.

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{2}$
u	2	1

Ta viết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x (2\cos x + 1)}{\sqrt{1+3\cos x}} dx = \int_2^1 \frac{2\cos x + 1}{\sqrt{1+3\cos x}} \sin x dx$.

Khi đó $I = \int_2^1 \frac{2\left(\frac{u^2-1}{3}\right)+1}{u} \cdot \left(-\frac{2}{3} u du\right) = \frac{4}{9} \int_1^2 (2u^2+1) du = \frac{4}{9} \left(\frac{2u^3}{3} + u\right) \Big|_1^2 = \frac{34}{27}$.

Chọn D.

Ví dụ 5: Giá trị của $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ là

A. $I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.

B. $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}$.

C. $I = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{4}$.

D. $I = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$.

Đổi cận

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
u	0	$\frac{\pi}{4}$

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 t \cdot \cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt$

$$= \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Chọn A.

Đổi biến số dạng 2:

$$x = \sin t, \text{ với } t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Ví dụ 6: Giá trị của $I = \int_{3\sqrt{2}}^6 \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} dx$ là

A. $I = \frac{\pi}{8}$.

B. $I = \frac{\pi}{36}$.

C. $I = \frac{\pi}{6}$.

D. $I = \frac{\pi}{24}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \frac{3}{\sin t} \Rightarrow dx = \frac{-3 \cos t}{\sin^2 t} dt$

Đổi cận

x	$3\sqrt{2}$	6
u	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Khi đó $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{-3 \cos t}{\sin^2 t \cdot \frac{3}{\sin t} \sqrt{\frac{9}{\sin^2 t} - 9}} dt = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{36}$.

Chọn B.

Ví dụ 7: Giá trị của $I = \int_0^1 \frac{x}{x^4 + x^2 + 1} dx$ là

A. $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}$.

B. $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

C. $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

D. $I = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$.

Hướng dẫn giải

Đột biến lần 1: (Dạng 1)

Đặt $u = x^2 \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$.

Đổi cận

x	0	1
u	0	1

Suy ra $I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{u^2 + u + 1} du = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} du$.

Đổi biến lần 2: (Dạng 2)

Đặt $u + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t$. Ta có $du = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 t) dt$

Đổi cận

x	0	1
u	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$

Khi đó $I = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

Chọn C.

Ví dụ 8: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x + 2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với a, b là các số nguyên.

Giá trị của $P = 2a + b$ là

A. 3.

B. 7.

C. 5.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x + 2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x + 1)(\sin x + 2)} d(\sin x)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin x + 1} - \frac{1}{\sin x + 2} \right) d(\sin x) = \left(\ln |\sin x + 1| - \ln |\sin x + 2| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \ln 2 - \ln 1 - (\ln 3 - \ln 2) = 2 \ln 2 - \ln 3$$

Suy ra $a = 2, b = -1 \Rightarrow 2a + b = 3$.

Chọn A.

Ví dụ 9: Biết $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 3e^{-x} + 4} = \frac{1}{c} (\ln a - \ln b + \ln c)$, với a, b, c là các số nguyên tố.

Giá trị của $P = 2a - b + c$ là

A. $P = -3$.

B. $P = -1$.

C. $P = 4$.

D. $P = 3$.

Hướng dẫn giải

Ta có $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 3e^{-x} + 4} = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4e^x + 3}$.

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$.

Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = \ln 2 \Rightarrow t = 2$.

Khi đó

$$I = \int_1^2 \frac{1}{t^2 + 4t + 3} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \frac{t+1}{t+3} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 5 + \ln 2).$$

Suy ra $a = 3, b = 5, c = 2$. Vậy $P = 2a - b + c = 3$.

Chọn D.

Ví dụ 10: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1 + \sin x} = \frac{a\sqrt{3} + b}{c}$, với $a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}^+$ và a, b, c là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng $a + b + c$ bằng

A. 5.

B. 12.

C. 7.

D. -1.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1 + \sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right)}{\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)^2} dx.$$

$$\text{Đặt } t = 1 + \tan \frac{x}{2} \Rightarrow 2dt = \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) dx.$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = 3 - \sqrt{3}.$$

$$I = \int_1^{3-\sqrt{3}} \frac{2dt}{t^2} = -\frac{2}{t} \Big|_1^{3-\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} + 3}{3}.$$

Suy ra $a = -1, b = 3, c = 3$ nên $a + b + c = 5$.

Chọn A.**Lưu ý:**

$$1 + \sin x = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2. \text{ Chia tử và mẫu cho } \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right).$$

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(2x) dx = 8$.

Giá trị của $I = \int_0^{\sqrt{2}} xf(x^2) dx$ là

A. 4.

B. 8.

C. 16.

D. 64.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } x^2 = 2u \Rightarrow 2xdx = 2du \Rightarrow xdx = du.$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow u = 0, x = \sqrt{2} \Rightarrow u = 1.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^1 f(2u) du = \int_0^1 f(2x) dx = 8.$$

Chọn B.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(0; +\infty)$ sao cho $x^2 + xf(e^x) + f(e^x) = 1$; với

mọi $x \in (0; +\infty)$. Giá trị của $I = \int_{\sqrt{e}}^e \frac{f(x) \cdot \ln x}{x} dx$ là

A. $I = -\frac{1}{8}.$

B. $I = -\frac{2}{3}.$

C. $I = \frac{1}{12}.$

D. $I = \frac{3}{8}.$

Hướng dẫn giải

Với $x \in (0; +\infty)$ ta có $x^2 + xf(e^x) + f(e^x) = 1 \Rightarrow f(e^x) = \frac{1-x^2}{1+x} = 1-x$.

Đặt $\ln x = t \Leftrightarrow x = e^t \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$.

Đổi cận $x = \sqrt{e} \Rightarrow t = \frac{1}{2}; x = e \Rightarrow t = 1$.

Khi đó $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 t f(e^t) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t(1-t) dt = \frac{1}{12}$.

Chọn C.

Ví dụ 13: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin x - \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx = \frac{-11}{13} \ln 2 + b \ln 3 + c\pi, (b, c \in \mathbb{Q})$. Giá trị của $\frac{b}{c}$ là

A. $\frac{22}{3}$.

B. $\frac{22\pi}{3}$.

C. $\frac{22}{3\pi}$.

D. $\frac{22\pi}{13}$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{aligned} \text{Phân tích } \frac{3 \sin x - \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} &= \frac{m(2 \sin x + 3 \cos x) + n(2 \cos x - 3 \sin x)}{2 \sin x + 3 \cos x} \\ &= \frac{(2m-3n) \sin x + (3m+2n) \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số ta có } \begin{cases} 2m-3n=3 \\ 3m+2n=-1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{13}; n = -\frac{11}{13}.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \sin x - \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3}{13}(2 \sin x + 3 \cos x) - \frac{11}{13}(2 \cos x - 3 \sin x)}{2 \sin x + 3 \cos x} dx.$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{3}{13} - \frac{11}{13} \cdot \frac{2 \cos x - 3 \sin x}{2 \sin x + 3 \cos x} \right] dx = \frac{3}{13} (x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{11}{13} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x - 3 \sin x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx.$$

$$= \frac{3\pi}{26} - \frac{11}{13} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(2 \sin x + 3 \cos x)}{2 \sin x + 3 \cos x} dx = \frac{3\pi}{26} - \frac{11}{13} \ln |2 \sin x + 3 \cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3\pi}{26} - \frac{11}{13} \ln 2 + \frac{11}{13} \ln 3. \text{ Do đó } \begin{cases} b = \frac{11}{13} \\ c = \frac{3}{26} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{11}{13} \cdot \frac{26}{3} = \frac{22}{3}$$

Chọn A.

Ví dụ 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 2$ và $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2$.

Giá trị của $I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx$ là

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 8.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} \cdot f(\cos^2 x) dx = 2.$$

$$\text{Đặt } t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2 \sin x \cos x dx \Rightarrow -\frac{1}{2} dt = \sin x \cos x dx.$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ và } x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}. \text{ Khi đó } A = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = 4.$$

$$\text{Đặt } B = \int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2 \Leftrightarrow \int_e^{e^2} \frac{\ln x \cdot f(\ln^2 x)}{x \ln^2 x} dx = 2.$$

$$\text{Tương tự ta có } B = \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 4.$$

$$\text{Giá trị của } I = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f(2x)}{x} dx. \text{ Đặt } t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt.$$

$$\text{Đổi cận } x = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ và } x = 2 \Rightarrow t = 4.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(t)}{t} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt + \int_1^4 \frac{f(t)}{t} dt = 4 + 4 = 8$$

Chọn D.

Ví dụ 15: Cho $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+1)^3}} dx = \sqrt{a} - \sqrt{b}$; với a, b là các số nguyên.

Giá trị của biểu thức $a^b + b^a$ bằng

A. 17.

B. 57.

C. 145.

D. 32.

Hướng dẫn giải

$$\text{Giá trị của } I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+1)^3}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}} \frac{dx}{(x+1)^2}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x+3}{x+1}} \Rightarrow 2tdt = \frac{-2}{(x+1)^2} dx \Rightarrow \frac{dx}{(x+1)^2} = -tdt.$$

$$\text{Đổi cận } x=0 \Rightarrow t=\sqrt{3}, x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{x+3}{x+1}} (x+1)^2} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{t} (-t) dt = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} dt = t \Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

$$\text{Mà } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+1)^3}} dx = \sqrt{a} - \sqrt{b} \text{ nên suy ra } a=3, b=2.$$

$$\text{Từ đó ta có giá trị } a^b + b^a = 3^2 + 2^3 = 17.$$

Chọn A.

Ví dụ 16: Cho $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}} dx = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a}{b} + \sqrt{b} \right)$, với a, b là các số nguyên tố. Giá trị của biểu thức

$$P = 2(a+b) \text{ bằng}$$

A. 12.

B. 10.

C. 18.

D. 15.

Hướng dẫn giải

$$\text{Biến đổi } I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}} \cdot \frac{1}{x^4} dx.$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{1 + \frac{1}{x^3}} \Rightarrow u^2 = 1 + \frac{1}{x^3} \Rightarrow 2udu = -\frac{3}{x^4} dx \text{ và } x^3 = \frac{1}{u^2 - 1}.$$

$$\text{Đổi cận } x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 3; x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } I = \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{2udu}{\frac{3}{(u^2-1)u}} = \frac{2}{3} \int_{\sqrt{2}}^3 \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \Big|_{\sqrt{2}}^3 = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2} \right).$$

$$\text{Suy ra } a=3, b=2. \text{ Vậy } P = 2(a+b) = 10.$$

Chọn B.

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho $\int_0^4 f(x) dx = 2019$. Giá trị của $I = \int_0^2 [f(2x) + f(4-2x)] dx$ là

A. $I = 0$.

B. $I = 2019$.

C. $I = 4038$.

D. $I = 2020$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\int_0^1 2f(x) dx = 2$ và $\int_0^2 f(x+1) dx = 4$. Giá trị của $I = \int_0^3 f(x) dx$ là

A. $I = 5$.

B. $I = 4$.

C. $I = 6$.

D. $I = 7$.

Câu 3: Biết $\int_1^4 f(x)dx = 5$ và $\int_4^5 f(x)dx = 20$. Giá trị của $I = \int_1^2 f(4x-3)dx - \int_0^{\ln 2} f(e^{2x})e^{2x}dx$ là

- A. $I = \frac{15}{4}$. B. $I = 15$. C. $I = \frac{5}{2}$. D. $I = 25$.

Câu 4: Biết $\int_e^{e^4} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = 4$. Giá trị của $I = \int_1^4 f(x)dx$ là

- A. $I = 8$. B. $I = 16$. C. $I = 2$. D. $I = 4$.

Câu 5: Cho $\int_3^8 f(x+1)dx = 10$. Giá trị của $J = \int_0^1 f(5x+4)dx$ là

- A. $J = 4$. B. $J = 10$. C. $J = 32$. D. $J = 2$.

Câu 6: Cho $\int_0^9 f(x)dx = 27$. Giá trị của $\int_{-3}^0 f(-3x)dx$ là

- A. $I = 27$. B. $I = -3$. C. $I = 9$. D. $I = 3$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $I = \int_0^1 f(x)dx$ là

- A. $\frac{\pi+2}{8}$. B. 1. C. $\frac{2+\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 8: Giá trị của $I = \int_0^1 x(1+x^2)^4 dx$ là

- A. $-\frac{31}{10}$. B. $\frac{30}{10}$. C. $\frac{31}{10}$. D. $\frac{32}{10}$.

Câu 9: Biết $\int_{-1}^{11} f(x)dx = 18$. Giá trị của $I = \int_0^2 x(2+f(3x^2-1))dx$ là

- A. $I = 5$. B. $I = 7$. C. $I = 8$. D. $I = 10$.

Câu 10: Giá trị của $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x dx$ là

- A. $I = 0$. B. $I = 1$. C. $I = \frac{1}{3}$. D. $I = \frac{\pi^3}{24}$.

Câu 11: Biết $\int_a^b \frac{1}{x} dx = 2$, trong đó a, b là các hằng số dương. Giá trị của $\int_{e^a}^{e^b} \frac{1}{x \ln x} dx$ là

- A. $I = \ln 2$. B. $I = 2$. C. $I = \frac{1}{\ln 2}$. D. $I = \frac{1}{2}$.

Câu 12: Giả sử tích phân $I = \int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5 (a, b, c \in \mathbb{Q})$. Giá trị của giá trị biểu thức $P = a + b + c$ là

A. $P = \frac{8}{3}$.

B. $P = \frac{4}{3}$.

C. $P = \frac{5}{3}$.

D. $P = \frac{7}{3}$.

Câu 13: Biết rằng $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + \frac{c}{3}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Giá trị của giá trị biểu thức

$P = a^2 + b^2 + c^2$ là

A. $P = 1$.

B. $P = 11$.

C. $P = 9$.

D. $P = 3$.

Câu 14: Biết rằng $\int_0^1 \frac{dx}{3x + 5\sqrt{3x+1} + 7} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ.

Giá trị của $a + b + c$ bằng

A. $-\frac{10}{3}$.

B. $-\frac{5}{3}$.

C. $\frac{10}{3}$.

D. $\frac{5}{3}$.

Câu 15: Có bao nhiêu số $a \in (0; 20\pi)$ sao cho $\int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = \frac{2}{7}$.

A. 10.

B. 9.

C. 20.

D. 19.

Câu 16: Biết $\int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + ex^3 2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \frac{1}{m} + \frac{1}{e \ln n} \cdot \ln \left(p + \frac{e}{e + \pi} \right)$, với m, n, p là các số nguyên dương.

Giá trị của tổng $T = m + n + p$ là

A. $T = 5$.

B. $T = 6$.

C. $T = 8$.

D. $T = 7$.

Câu 17: Biết $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x + 3}} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $T = a + b + c$ là

A. $T = -1$.

B. $T = 0$.

C. $T = 2$.

D. $T = 1$.

Câu 18: Cho $\int_1^e \frac{(3x^3 - 1) \ln x + 3x^2 - 1}{1 + x \ln x} dx = a \cdot e^3 + b + c \cdot \ln(e + 1)$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của

$P = a^2 + b^2 + c^2$ là

A. $P = 9$.

B. $P = 14$.

C. $P = 10$.

D. $P = 3$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 3]$, thỏa mãn $f(4 - x) = f(x), \forall x \in [1; 3]$ và

$\int_1^3 xf(x) dx = -2$. Giá trị $2 \int_1^3 f(x) dx$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. -2.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ luôn nhận giá trị âm và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f'(x) = (2x + 1)[f(x)]^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = -1$. Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $-\frac{1}{6}$.

B. $-\ln 2$.

C. $-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

D. $-\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

Câu 21: Cho $I = \int_1^2 f(x) dx = 2$. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xf(\sqrt{3 \cos x + 1})}{\sqrt{3 \cos x + 1}} dx$ bằng

- A. 2. B. $-\frac{4}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. -2.

Câu 22: Cho $\int_0^3 \frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a^2 - b^2 + c^2$ bằng

- A. 3. B. 63. C. 81. D. 9.

Câu 23: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2+3\tan x}}{1+\cos 2x} dx = a\sqrt{5} + b\sqrt{2}$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Giá trị của giá trị biểu thức $A = a + b$ là

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{7}{12}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 5 - x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giá trị của $I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \cos x dx + 3 \int_0^1 f(3-2x) dx$ là

- A. $I = \frac{71}{6}$. B. $I = 31$. C. $I = 32$. D. $I = \frac{32}{3}$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi } x > 2 \\ -2x + 12 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$.

Giá trị của $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x \cdot f(\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} dx + 4 \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x} \cdot f(1+e^{2x}) dx$ là

- A. $I = 309$. B. $I = 159$. C. $I = \frac{309}{2}$. D. $I = 9 + 150 \ln \frac{3}{2}$.

Câu 26: Biết $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+7} dx = a \ln \sqrt{12} + b \ln \sqrt{7}$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của tổng $a + b$ bằng

- A. -1. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. 0.

Câu 27: Cho $\int_1^2 \frac{2x-1}{4x^2+4x+1} dx = \frac{1}{2}(\ln a - \ln b) + c$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a + b + 10c$ bằng

- A. 15. B. -15. C. 14. D. 9.

Câu 28: Biết $\int_1^e \frac{(x+1)\ln x + 2}{1+x\ln x} dx = ae + b \ln\left(\frac{e+1}{e}\right)$ trong đó a, b là các số nguyên. Khi đó tỉ số $\frac{a}{b}$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 29: Biết $\int_1^e \frac{x+1}{x^2+x\ln x} dx = \ln(ae+b)$, với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $T = a^2 - ab + b^2$ là

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 8.

Câu 30: Biết rằng $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x + \sin x}{\sin x} dx = a\pi + b + c \ln 2, (a, b, c \in \mathbb{Q})$. Giá trị của tổng $S = a + b + c$ là

- A. $S = 1$. B. $S = \frac{13}{24}$. C. $S = \frac{23}{24}$. D. $S = \frac{7}{24}$.

Câu 31: Cho $\int_0^{\ln m} \frac{e^x}{e^x + 2} dx = \ln 2$. Khi đó giá trị của m là

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = 2$. C. $m = 4$. D. $m = 0, m = 4$.

Câu 32: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cdot \cos x dx = \frac{1}{64}$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị của n bằng

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 33: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + \cos x} \cdot \sin x dx$. Nếu đặt $t = 2 + \cos x$ thì kết quả nào sau đây đúng?

- A. $I = \int_3^2 \sqrt{t} dt$. B. $I = \int_2^3 \sqrt{t} dt$. C. $I = 2 \int_3^2 \sqrt{t} dt$. D. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t} dt$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f(x) + f(-x) = 2 \cos^2 x$.

Giá trị của $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

- A. 0. B. $\frac{\pi}{2}$. C. 1. D. -1.

Câu 35: Giá trị của $\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I = a \ln 3 + b \ln 5$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị $a^2 + ab + 3b^2$ là

- A. 4. B. 5. C. 1. D. 0.

Câu 36: Giá trị $I = \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}} x^2 \sin(\pi x^3) e^{\cos(\pi x^3)} dx$ gần bằng giá trị nào nhất trong các số sau đây?

- A. 0,046. B. 0,036. C. 0,037. D. 0,038.

Câu 37: Biết $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2 + x \ln x} dx = \ln(\ln a + b)$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của $P = a^2 + b^2 + ab$ là

- A. 10. B. 8. C. 12. D. 6.

Câu 38: Biết $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{35}$ với a, b, c là các số hữu tỷ.

Giá trị của $P = a + 2b + c - 7$ là

A. $-\frac{1}{9}$.

B. $\frac{86}{27}$.

C. -2 .

D. $\frac{67}{27}$.

Câu 39: Biết $\int_1^2 \frac{(3x+1)}{3x^2+x\ln x} dx = \ln\left(a + \frac{\ln b}{c}\right)$ với a, b, c là các số nguyên dương và $c \leq 4$.

Tổng $a+b+c$ bằng

A. 6.

B. 9.

C. 7.

D. 8.

Câu 40: Có bao nhiêu giá trị của tham số m trong khoảng $(0; 6\pi)$ thỏa mãn $\int_0^m \frac{\sin x}{5+4\cos x} dx = \frac{1}{2}$?

A. 6.

B. 12.

C. 8.

D. 4.

Câu 41: Biết rằng $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = 2\ln\left(\frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}\right)$ với a, b là các số nguyên dương.

Giá trị của $a+b$ bằng

A. 3.

B. 5.

C. 9.

D. 7.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^{2019} f(x) dx = 2$. Khi đó tích phân

$\int_0^{\sqrt{e^{2019}-1}} \frac{x}{x^2+1} f(\ln(x^2+1)) dx$ bằng

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 43: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x)\cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x} dx = a\pi^2 + b - \ln \frac{c}{\pi}$ với a, b, c là các số hữu

tỉ. Giá trị của biểu thức $P = ac^3 + b$ là

A. $P = 3$.

B. $P = \frac{5}{4}$.

C. $P = \frac{3}{2}$.

D. $P = 2$.

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $f(x) = 6x^2 f(x^3) - \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$. Giá trị của

$\int_0^1 f(x) dx$ là

A. 2.

B. 4.

C. -1 .

D. 6.

Câu 45: Cho $\int_0^1 \frac{(x^2+x)e^x}{x+e^{-x}} dx = a.e + b \ln(e+c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $P = a + 2b - c$ là

A. $P = 1$.

B. $P = -1$.

C. $P = 0$.

D. $P = -2$.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2x) = 3f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

Giá trị của tích phân $I = \int_1^2 f(x) dx$ bằng

A. $I = 5$.

B. $I = 3$.

C. $I = 8$.

D. $I = 2$.

Câu 47: Giá trị của $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \frac{a}{b} \pi$ trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $T = ab$ là

- A. $T = 35$. B. $T = 24$. C. $T = 12$. D. $T = 36$.

Câu 48: Giá trị của $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{1+e^x}$ bằng

- A. -1 . B. 1 . C. e . D. 0 .

Câu 49: Biết $I = \int_{\ln 3}^{\ln 6} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = 3 \ln a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của $P = ab$ là

- A. $P = 10$. B. $P = -10$. C. $P = 15$. D. $P = 20$.

Câu 50: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn $f(x) = \frac{f(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$. Giá trị của $I = \int_3^4 f(x) dx$ là

- A. $I = 3 + 2 \ln^2 2$. B. $I = 2 \ln^2 2$. C. $I = \ln^2 2$. D. $I = 2 \ln 2$.

Câu 51: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 4]$ và thỏa mãn hệ thức $\begin{cases} f(1) + g(1) = 4 \\ g(x) = -x \cdot f'(x); f(x) = -x \cdot g'(x) \end{cases}$. Giá trị của $I = \int_1^4 [f(x) + g(x)] dx$ là

- A. $8 \ln 2$. B. $3 \ln 2$. C. $6 \ln 2$. D. $4 \ln 2$.

Câu 52: Giá trị của $\int_0^3 \max\{4, x^2\} dx$ là

- A. 12 . B. 21 . C. $\frac{43}{3}$. D. 9 .

Câu 53: Giả sử $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx = \frac{1}{c} \left(a\sqrt{a} - \frac{b}{b+c} \sqrt{b} \right)$ với $a, b, c \in \mathbb{N}; 1 \leq a, b, c \leq 9$. Giá trị của biểu thức C_{2a+c}^{b-a} là

- A. 165 . B. 715 . C. 5456 . D. 35 .

Câu 54: Tính tích phân $\int_1^2 \frac{-4x^4 + x^2 - 3}{x^4 + 1} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} (a\sqrt{3} + b + c\pi) + 4$, với a, b, c là các số nguyên.

Khi đó biểu thức $a + b^2 + c^4$ có giá trị bằng

- A. 20 . B. 241 . C. 196 . D. 48 .

Dạng 3: Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

 **Phương pháp giải**

Bài toán: Tính tích phân $I = \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$.

Ví dụ: Biết $\int_0^2 2x \ln(1+x) dx = a \cdot \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$,

b là số nguyên tố. Giá trị của $3a + 4b$ bằng

A. 42.

B. 21.

C. 12.

D. 32.

Hướng dẫn giải

Xét $I = \int_0^2 2x \ln(1+x) dx$.

Đặt $\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{1+x} dx \\ v = x^2 - 1 \end{cases}$.

Ta có $I = (x^2 - 1) \ln(x+1) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2 - 1}{x+1} dx$

$= 3 \ln 3 - \int_0^2 (x-1) dx = 3 \ln 3 - \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^2 = 3 \ln 3$.

Vậy $a = 3, b = 3 \Rightarrow 3a + 4b = 21$.

Chọn B.

Đặt $\begin{cases} u = u(x) \\ dv = v'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = u'(x) dx \\ v = v(x) \end{cases}$

Khi đó

$$I = (u \cdot v) \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Chú ý: Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho

ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int_a^b v du$ dễ tính

hơn $\int_a^b u dv$.

 **Ví dụ mẫu**

Ví dụ 1: Giá trị của tích phân $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$ là

A. 1.

B. 0.

C. $\ln 2$.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$.

Đổi cận $\begin{cases} x = e \Rightarrow u = 1 \\ x = e^2 \Rightarrow u = 2 \end{cases}$.

Do đó $I = \int_1^2 \frac{du}{u} = \ln|u| \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

Chọn C.

Ví dụ 2: Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ là

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. $\frac{\pi}{16}$.

C. $\frac{\pi}{4}$.

D. $\frac{\pi}{8}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$.

$$\text{Đổi cận} \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \frac{\pi}{16}.$$

Chọn B.

Ví dụ 3: Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 x \tan^2 x dx$ là

A. $\tan 1 + \ln(\cos 1) - \frac{1}{2}$.

B. $\tan 1 - \ln(\cos 1) + \frac{1}{2}$.

C. $\cot 1 + \ln(\cos 1) - \frac{1}{2}$.

D. $\cot 1 - \ln(\cos 1) + \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt} \begin{cases} u = x \\ dv = \tan^2 x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x - x \end{cases}$$

$$I = \left(x \tan x - x^2 \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 (\tan x - x) dx = \tan 1 - 1 + \left(\ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1$$

$$= \tan 1 + \ln(\cos 1) - \frac{1}{2}.$$

Chọn A.

Ví dụ 4. Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ với a là số thực b và c là các số dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là

phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$ là

A. $P = 6$.

B. $P = 5$.

C. $P = -6$.

D. $P = 4$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{-1}{x} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = \left. \frac{-\ln x}{x} \right|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left(\frac{-\ln x}{x} + \frac{-1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}.$$

Suy ra $b = 1, c = 2, a = \frac{-1}{2}$. Do đó $P = 2a + 3b + c = 4$.

Chọn D.

+ Ưu tiên logarit.

$$+ \text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases}.$$

Ví dụ 5: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx = a\pi + b \ln 2$, với a, b là các số hữu tỉ.

Giá trị của $T = 16a - 8b$ là

A. $T = 4$.

B. $T = 5$.

C. $T = 2$.

D. $T = -2$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \Rightarrow v = \tan x \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left[x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \right] = \frac{1}{2} \left[\left(x \tan x + \ln |\cos x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2. \end{aligned}$$

Vậy $a = \frac{1}{8}, b = \frac{-1}{4}$ do đó $16a - 8b = 2 + 2 = 4$.

Chọn A.

+ Biến đổi $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$.

+ Ưu tiên đa thức.

$$+ \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases}.$$

Ví dụ 6: Cho $I = \int_0^1 x e^{2x} dx = a.e^2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của tổng $a + b$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 0.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Sử dụng phương pháp từng phần.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I = u.v \Big|_0^1 - \int_0^1 v.du = \frac{1}{2} x.e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} x.e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } a.e^2 + b = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Đồng nhất hệ số hai vế ta có } a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{4}. \text{ Vậy } a + b = \frac{1}{2}.$$

Chọn A.

+ Ưu tiên đa thức.

$$+ \text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases}.$$

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(2) = 16$ và $\int_0^2 f(x) dx = 4$. Tích phân

$$\int_0^4 x f' \left(\frac{x}{2} \right) dx \text{ bằng}$$

A. 112.

B. 12.

C. 56.

D. 144.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2t \Rightarrow dx = 2dt.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 4 \Rightarrow t = 2 \end{cases}. \text{ Do đó } \int_0^4 x f' \left(\frac{x}{2} \right) dx = \int_0^2 4t f'(t) dt = \int_0^2 4x f'(x) dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 4x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 4dx \\ v = f(x) \end{cases}.$$

Suy ra

$$\int_0^2 4xf'(x)dx = \left[4xf(x) \right]_0^2 - \int_0^2 4f(x)dx = 8f(2) - 4 \int_0^2 f(x)dx = 8.16 - 4.4 = 112.$$

Chọn A.

Ví dụ 8. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + 2\cos x)}{\cos^2 x} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c\pi$ với a, b, c là các số hữu tỉ.

Giá trị của abc bằng

A. $\frac{15}{8}$.

B. $\frac{5}{8}$.

C. $\frac{5}{4}$.

D. $\frac{17}{8}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(\sin x + 2\cos x) \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x + 2\cos x} dx \\ v = \tan x + 2 \end{cases}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + 2\cos x)}{\cos^2 x} dx &= (\tan x + 2) \ln(\sin x + 2\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - 2\sin x}{\cos x} dx \\ &= 3 \ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) - 2 \ln 2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - 2 \tan x) dx \\ &= 3 \ln 3 - \frac{7}{2} \ln 2 - \left(x + 2 \ln |\cos x|\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 3 \ln 3 - \frac{7}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} - 2 \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 \ln 3 - \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 3, b = -\frac{5}{2}, c = -\frac{1}{4}$. Vậy $abc = 18$.

Chọn A.

Ví dụ 9. Biết $\int_1^2 (x+1)^2 e^{\frac{x-1}{x}} dx = me^{\frac{p}{q}} - n$, trong đó m, n, p, q là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối

giản. Giá trị của $T = m + n + p + q$ là

A. $T = 11$.

B. $T = 10$.

C. $T = 7$.

D. $T = 8$.

Hướng dẫn giải

Ta có

$$I = \int_1^2 (x+1)^2 e^{\frac{x-1}{x}} dx = \int_1^2 (x^2 + 2x + 1) e^{\frac{x-1}{x}} dx = \int_1^2 (x^2 + 1) e^{\frac{x-1}{x}} dx + \int_1^2 2x e^{\frac{x-1}{x}} dx.$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_1^2 (x^2 + 1) e^{\frac{x-1}{x}} dx = \int_1^2 x^2 \cdot e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2} dx = \int_1^2 x^2 \cdot e^{\frac{x-1}{x}} d\left(x - \frac{1}{x}\right) = \int_1^2 x^2 d\left(e^{\frac{x-1}{x}}\right)$$

$$= x^2 e^{x-\frac{1}{x}} \Big|_1^2 - \int_1^2 e^{x-\frac{1}{x}} d(x^2) = x^2 e^{x-\frac{1}{x}} \Big|_1^2 - \int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}} dx$$

$$\Rightarrow I_1 + \int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}} dx = x^2 e^{x-\frac{1}{x}} \Big|_1^2 \Rightarrow I = x^2 e^{x-\frac{1}{x}} \Big|_1^2 = 4e^{\frac{3}{2}} - 1$$

$$\Rightarrow m=4, n=1, p=3, q=2.$$

$$\text{Khi đó } T = m + n + p + q = 4 + 1 + 3 + 2 = 10.$$

Chọn B.

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=5, \int_0^1 f(x) dx = 12$.

Giá trị của $J = \int_0^1 xf'(x) dx$ là

- A. $J = -17$. B. $J = 17$. C. $J = 7$. D. $J = -7$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $\int_0^1 x[f'(x)-2]dx = f(1)$. Giá trị của

$I = \int_0^1 f(x) dx$ bằng

- A. -2 . B. 2 . C. -1 . D. 1 .

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và thỏa $\int_0^1 (2x+1)f'(x)dx = 10, 3f(1)-f(0)=12$. Giá trị

của $I = \int_0^1 f(x) dx$ là

- A. $I = 2$. B. $I = 1$. C. $I = -1$. D. $I = -2$.

Câu 4: Cho hai hàm số liên tục $f(x)$ và $g(x)$ có nguyên hàm lần lượt là $F(x)$ và $G(x)$ trên đoạn

$[1;2]$. Biết rằng $F(1)=1, F(2)=4, G(1)=\frac{3}{2}, G(2)=2$ và $\int_1^2 f(x)G(x)dx = \frac{67}{12}$. Giá trị của

$\int_1^2 F(x)g(x)dx$ là

- A. $\frac{11}{12}$. B. $-\frac{145}{12}$. C. $-\frac{11}{12}$. D. $\frac{145}{12}$.

Câu 5: Tích phân $I = \int_{-1}^2 3xe^x dx$ nhận giá trị nào sau đây?

- A. $I = \frac{3e^3+6}{e^{-1}}$. B. $I = \frac{3e^3-6}{e^{-1}}$. C. $I = \frac{3e^3+6}{e}$. D. $I = \frac{3e^3+6}{-e}$.

Câu 6: Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 (2x+1)e^x dx$ là

- A. $5e-3$. B. $e-1$. C. $e+1$. D. $5e+1$.

Câu 7: Giá trị của $I = \int_1^e x \ln x dx$ là

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = \frac{1}{2}(e^2 - 2)$. C. $I = 2$. D. $I = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$.

Câu 8: Biết $\int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ là

- A. $T = 10$. B. $T = 9$. C. $T = 8$. D. $T = 11$.

Câu 9: Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$ được biểu diễn dưới dạng $a\pi^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Khi đó tích $a.b$ bằng

- A. 0. B. $-\frac{1}{32}$. C. $-\frac{1}{16}$. D. $-\frac{1}{64}$.

Câu 10: Giá trị của tích phân $I = \int_1^2 x^2 \ln x dx$ là

- A. $\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$. B. $\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{3}$. C. $24 \ln 2 - 7$. D. $8 \ln 2 - \frac{7}{3}$.

Câu 11: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+x) \cos 2x dx = \frac{1}{a} + \frac{\pi}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}^*$). Giá trị của tích ab bằng

- A. 32. B. 2. C. 4. D. 12.

Câu 12: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx = a + b\pi$, với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $S = a + 2b$ là

- A. $S = 0$. B. $S = 1$. C. $S = \frac{1}{2}$. D. $S = \frac{3}{8}$.

Câu 13: Giá trị của tích phân $I = \int_4^5 (x+1) \ln(x-3) dx$ là

- A. $10 \ln 2 - \frac{19}{4}$. B. $10 \ln 2 + \frac{19}{4}$. C. $10 \ln 2$. D. $\frac{19}{4} - 10 \ln 2$.

Câu 14: Giá trị $K = \int_{-3}^{e-4} (x+4) \ln(x+4) dx$ là

- A. $K = \frac{e^2 - 1}{4}$. B. $K = \frac{e^2 - 2}{2}$. C. $K = \frac{1}{2}$. D. $K = \frac{e^2 + 1}{4}$.

Câu 15: Giá trị của tích phân $\int_1^e (x+1) \ln x dx$ là

A. $\frac{e^2+5}{4}$.

B. $\frac{e^2-5}{2}$.

C. $\frac{e^2+5}{2}$.

D. $\frac{e^2-5}{4}$.

Câu 16: Cho tích phân $I = \int_1^e x \ln^2 x dx$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e + \int_1^e x \ln x dx$.

B. $I = x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e x \ln x dx$.

C. $I = x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx$.

D. $I = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx$.

Câu 17: Biết $\int_2^3 \ln(x^2 - x) dx = a \ln 3 - b$ với a, b là các số nguyên. Khi đó $a - b$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. -1.

Câu 18: Giá trị của $\int_0^1 \pi x e^x dx$ là

A. π .

B. πe .

C. $\frac{\pi}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 19: Biết $\int_1^e \frac{2 \ln x + 3}{x^2} dx = \frac{a}{e} + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. -2.

B. -8.

C. 2.

D. 8.

Câu 20: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+x) \sin 2x dx = \frac{a}{2^b} (a, b \in \mathbb{Z}^*)$. Giá trị của tích ab bằng

A. 6.

B. 2.

C. 4.

D. 12.

Câu 21: Cho $I = \int_0^m (2x-1) e^{2x} dx$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $I < m$ là khoảng $(a; b)$. Giá trị của $P = a - 3b$ là

A. $P = -3$.

B. $P = -2$.

C. $P = -4$.

D. $P = -1$.

Câu 22: Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Giá trị của $\int_1^e f'(x) \ln x dx$ bằng

A. $I = \frac{e^2-3}{2e^2}$.

B. $I = \frac{2-e^2}{e^2}$.

C. $I = \frac{e^2-2}{e^2}$.

D. $I = \frac{3-e^2}{2e^2}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x) \cos^2 x dx = 10$ và

$f(0) = 3$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2x dx$ bằng

A. -13.

B. 13.

C. 7.

D. -7.

Câu 24: Biết $J = \int_1^4 x \log_2 x dx = 16 - \frac{a}{b \ln 2}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $T = a + b$ là

A. $T = 11$.

B. $T = 19$.

C. $T = 17$.

D. $T = 13$.

Câu 25: Cho $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $P = a + 4b$ là

A. $P = 0$.

B. $P = 1$.

C. $P = 3$.

D. $P = -3$.

Câu 26: Giá trị của tích phân $I = \int_1^{2^{2019}} \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$ là

A. $I = -\frac{\ln 2^{2019}}{1+2^{2019}} + 2020 \ln \frac{2}{1+2^{2019}}$.

B. $I = -\frac{2019 \ln 2}{1+2^{2019}} + \ln \frac{2^{2019}}{1+2^{2019}}$.

C. $I = \frac{\ln 2^{2019}}{1+2^{2019}} - 2020 \ln \frac{2}{1+2^{2019}}$.

D. $I = \frac{2019 \ln 2}{1+2^{2019}} - \ln \frac{2^{2019}}{1+2^{2019}}$.

Câu 27: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1) \cos x dx = \frac{\pi-a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Khi đó $a^2 - b^2$ bằng

A. 14.

B. 12.

C. 8.

D. 4.

Câu 28: Cho tích phân $I = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} dx = a\pi^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\frac{a}{b} < -3$.

B. $a^2 - b = -4$.

C. $\frac{a}{b} \in (-1; 0)$.

D. $a - b = 6$.

Câu 29: Biết $\int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1+x - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{x+1}{x}} dx = \frac{a}{b} e^{\frac{c}{d}}$ trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và các phân số $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$

là tối giản. Giá trị của $bc - ad$ là

A. 12.

B. 1.

C. 24.

D. 64.

Câu 30: Cho tích phân $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x dx = a.e^2 + b$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của $4a + 3b$ là

A. $\frac{13}{2}$.

B. $\frac{13}{4}$.

C. $-\frac{13}{4}$.

D. $-\frac{13}{2}$.

Câu 31: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x - x \sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{a} + \frac{1}{b} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + c \ln 2$ (với a, b, c là các số nguyên). Khi

đó $a+b+c$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. -1.

D. 1.

Câu 32: Cho các hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và thỏa mãn $\int_0^1 (2x+1) f'(x) dx = 10$,

$3f(1) - f(0) = 12$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ là

A. $I = 1$.

B. $I = -2$.

C. $I = 2$.

D. $I = -1$.

Câu 33: Biết rằng tích phân $\int_0^4 \frac{(x+1)e^x}{\sqrt{2x+1}} dx = ae^4 + b$. Giá trị của $T = a^2 - b^2$ là

- A. $T = 1$. B. $T = 2$. C. $T = \frac{3}{2}$. D. $T = \frac{5}{2}$.

Câu 34: Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n = \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx$. Giá trị của $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ với $f(0) = f(1) = 1$. Biết rằng $\int_0^1 e^x [f(x) + f'(x)] dx = a.e + b$. Giá trị của $Q = a^{2019} + b^{2020}$ là

- A. $Q = 2^{2019} + 1$. B. $Q = 0$. C. $Q = 2$. D. $Q = 2^{2019} - 1$.

Câu 36: Biết $\int_1^e \frac{2 \ln x + 3}{x^2} dx = \frac{a}{e} + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a + b$ bằng

- A. -2. B. -8. C. 2. D. 8.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(2) = 16, \int_0^2 f(x) dx = 4$.

Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 x.f'(2x) dx$ là

- A. $I = 13$. B. $I = 12$. C. $I = 20$. D. $I = 7$.

Câu 38: Đặt $I_k = \int_1^e \ln \frac{k}{x} dx$, với k nguyên dương. Nếu $I_k < e - 2$ thì khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $k \in \{1; 2\}$. B. $k \in \{2; 3\}$. C. $k \in \{4; 1\}$. D. $k \in \{3; 4\}$.

Câu 39: Cho $\int_0^1 x \left[\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} \right] dx = \frac{a^2 \ln 2 - bc \ln 3 + c}{4}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}$. Giá trị của $T = a + b + c$ là

- A. $T = 13$. B. $T = 15$. C. $T = 17$. D. $T = 11$.

Câu 40: Biết $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2} + x} dx = a + \frac{\pi^2}{b} + \frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $M = a - b + c$ là

- A. $M = 35$. B. $M = 41$. C. $M = -37$. D. $M = -35$.

Dạng 4: Tính tích phân các hàm đặc biệt, hàm ẩn

Phương pháp giải

a. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a; a]$. Khi đó

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx} \quad (1)$$

Chúng minh

Ví dụ 1: Tích phân $I = \int_{-1}^1 \cos x \cdot \ln \frac{2+x}{2-x} dx$ bằng

- A. -1. B. 2.
C. 0. D. 1.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$

Xét $I = \int_{-a}^0 f(x) dx.$ Đổi biến $x = -t \Rightarrow dx = -dt.$

Đổi cận $x = -a \Rightarrow t = a; x = 0 \Rightarrow t = 0$

Khi đó

$$I = \int_a^0 f(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx$$

Do đó (1) được chứng minh.

Đặc biệt

+ Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì ta có

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = 0} \quad (1.1).$$

+ Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì ta có

$$\boxed{\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx} \quad (1.2)$$

Hàm số $f(x) = \cos x \cdot \ln \frac{2+x}{2-x}$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1; 1]$.

Mặt khác, với $\forall x \in [-1; 1] \Rightarrow -x \in [-1; 1]$ và

$$f(-x) = \cos(-x) \cdot \ln \frac{2-x}{2+x} = -\cos x \cdot \ln \frac{2+x}{2-x} = -f(x).$$

Do đó hàm số $f(x) = \cos x \cdot \ln \frac{2+x}{2-x}$ là hàm số lẻ.

$$\text{Vậy } I = \int_{-1}^1 \cos x \cdot \ln \frac{2+x}{2-x} dx = 0.$$

Chọn C.

Ví dụ 2: Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-6; 6]$.

$$\text{Biết rằng } \int_{-1}^2 f(x) dx = 8 \text{ và } \int_1^3 f(-2x) dx = 3.$$

$$\text{Tính } \int_{-1}^6 f(x) dx.$$

A. $I = 11.$

B. $I = 5.$

C. $I = 2.$

D. $I = 14.$

Hướng dẫn giải

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-6; 6]$ ta có

$$\int_1^3 f(-2x) dx = 3 \Leftrightarrow \int_1^3 f(2x) dx = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} F(2x) \Big|_1^3 = 3.$$

$$\text{Do đó } F(6) - F(2) = 6 \text{ hay } \int_2^6 f(x) dx = 6.$$

$$\text{Vậy } I = \int_{-1}^6 f(x) dx = \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx = 14.$$

Chọn D.

Ví dụ 3: Tích phân $I = \int_{-1}^1 \frac{x^{2020}}{e^x + 1} dx$ có giá trị là

$$\text{A. } I = 0. \quad \text{B. } I = \frac{2^{2020}}{2019}.$$

$$\text{C. } I = \frac{2^{2021}}{2021}. \quad \text{D. } I = \frac{2^{2019}}{2019}.$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bài toán (1.3) ở cột bên trái cho hàm số

$$f(x) = x^{2020} \text{ và } b = e \text{ ta có}$$

Ta có

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^{2020} dx = \frac{x^{2021}}{2021} \Big|_{-1}^1 = \frac{2 \cdot 2^{2021}}{2021} \Rightarrow I = \frac{2^{2021}}{2021}.$$

Chọn C.

+ Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì ta cũng có

$$\boxed{\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+b^x} dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x) dx} \quad (0 < b \neq 1) \quad (1.3).$$

Chứng minh (1.3):

$$\text{Đặt } A = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+b^x} dx \quad (*).$$

$$\text{Đổi biến } x = -t \Rightarrow dx = -dt.$$

$$\text{Đổi cận } x = -a \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = -a$$

$$\text{Khi đó } A = \int_a^{-a} \frac{f(-t)}{1+b^{-t}} (-dt) = \int_{-a}^a \frac{b' \cdot f(t)}{1+b^t} dt.$$

$$\text{Hay } A = \int_{-a}^a \frac{b^x \cdot f(x)}{1+b^x} dx \quad (**).$$

$$\text{Suy ra } 2A = \int_{-a}^a f(x) dx \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x) dx.$$

b. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx}$$

Hệ quả: hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$, khi

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều

$$\text{kiện } f(x) + f(-x) = 2 \cos x, \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Giá trị của } N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ là}$$

đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

A. $N = -1$.

B. $N = 0$.

C. $N = 1$.

D. $N = 2$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x) dx$$

$$\text{Suy ra } 2N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx.$$

$$\text{Vậy } N = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Chọn D.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(2-x) = x(2-x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Giá trị tích phân $G = \int_0^2 f(x) dx$ là

A. $G = 2$.

B. $G = \frac{1}{2}$.

C. $G = \frac{2}{3}$.

D. $G = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } G = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 f(2-x) dx$$

$$\text{Suy ra } 2G = \int_0^2 [f(x) + f(2-x)] dx = \int_0^2 x(2-x) dx$$

$$\text{Vậy } G = \frac{1}{2} \int_0^2 x(2-x) dx = \frac{2}{3}.$$

Chọn C.

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ Tích phân } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

c. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a+b-x) = f(x)$ thì

$$\int_a^b xf(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$$

A. $\frac{7}{5}$.

B. 1.

C. $\frac{7}{4}$.

D. 4.

Hướng dẫn giải

d. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(x) \geq 0$ với $\forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ và $\int_a^b f(x) dx = 0$ khi $f(x) = 0$.

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{cases}$

Ta có $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{x^3 f(x)}{3} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx$

$\Rightarrow -\frac{1}{3} \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -1$.

Cách 1: Ta có $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ (1).

$\int_0^1 x^6 dx = \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{1}{7} \Rightarrow \int_0^1 49x^6 dx = \frac{1}{7} \cdot 49 = 7$ (2).

$\int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -1 \Rightarrow \int_0^1 14x^3 \cdot f'(x) dx = -14$ (3).

Cộng hai vế (1), (2) và (3) suy ra

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \int_0^1 49x^6 dx + \int_0^1 14x^3 \cdot f'(x) dx = 0$

$\Rightarrow \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0$.

Do $[f'(x) + 7x^3]^2 \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx \geq 0$. Mà

$\int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3$.

$f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C$.

Mà $f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{7}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}$.

Do đó $f(x) = -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}$.

Vậy $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4} \right) dx = \frac{7}{5}$.

e. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, ta có

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)$$

Chứng minh

Với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$, ta có $[\lambda f(x) + g(x)]^2 \geq 0$.

$$\Leftrightarrow \lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x)g(x) + g^2(x) \geq 0$$

Suy ra

$$\lambda^2 \int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \geq 0$$

(*)

Coi (*) là tam thức bậc hai theo biến λ , và vì (*) đúng với mọi $\lambda \in \mathbb{R}$ nên ta có $\Delta' \leq 0$ khi và chỉ khi

$$\left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^2 - \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right).$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $f(x) = 0$ hoặc

$$g(x) = -\lambda f(x), \text{ với } \lambda \in \mathbb{R}.$$

🌈 Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho số thực $a > 0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0; a]$ thỏa mãn

$$f(x) \cdot f(a-x) = 1. \text{ Giá trị tích phân } I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx \text{ là}$$

A. $I = \frac{2a}{3}$.

B. $I = \frac{a}{2}$.

C. $I = \frac{a}{3}$.

D. $I = a$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = a - x \Rightarrow dt = -dx$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = 0$.

Cách 2: Tương tự như trên ta có $\int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -1$

Áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có

$$7 = 7 \left(\int_0^1 x^3 f'(x) dx \right)^2 \leq 7 \left(\int_0^1 (x^3)^2 dx \right) \cdot \left(\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \right)$$

$$\Leftrightarrow 7 \leq 7 \cdot \frac{1}{7} \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $f'(x) = ax^3$, với $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \int_0^1 x^3 \cdot f'(x) dx = -1 \Rightarrow \int_0^1 x^3 \cdot ax^3 dx = -1 \Rightarrow a = -7.$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C, \text{ mà}$$

$$f(1) = 0 \text{ nên } C = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{7}{4}(1 - x^4), \forall x \in [0; 1].$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4} \right) dx = \frac{7}{5}.$$

Chọn A.

$$\text{Khi đó } I = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-t)} dt = \int_0^a \frac{1}{1+f(a-x)} dx = \int_0^a \frac{1}{1+\frac{1}{f(x)}} dx = \int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)} dx.$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)} dx = \int_0^a 1 dx = a. \text{ Vậy } I = \frac{a}{2}.$$

Chọn B.

Ta có thể chọn hàm số $f(x) = 1$, với mọi $x \in [0; a]$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

$$\text{Khi đó } I = \int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx = \int_0^a \frac{1}{2} dx = \frac{a}{2}.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 1]$ và $f(-x) + 2019f(x) = e^x, \forall x \in [-1; 1]$. Tích phân

$$M = \int_{-1}^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{e^2 - 1}{2019e}.$

B. $\frac{e^2 - 1}{e}.$

C. $\frac{e^2 - 1}{2020e}.$

D. 0.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } M = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(-x) dx.$$

$$\text{Do đó } 2020M = 2019 \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 f(-x) dx = \int_{-1}^1 [f(-x) + 2019f(x)] dx.$$

$$\text{Suy ra } M = \frac{1}{2020} \int_{-1}^1 e^x dx = \frac{e^2 - 1}{2020e}.$$

Chọn C.

$$\text{Nếu } f(x) \text{ liên tục trên đoạn } [a; b] \text{ thì } \int_a^b f(x) dx =$$

$$= \int_a^b f(a+b-x) dx$$

Ví dụ 3. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 - 2\cos 2x}$.

$$\text{Giá trị tích phân } P = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx \text{ là}$$

A. $P = 3.$

B. $P = 4.$

C. $P = 6.$

D. $P = 8.$

Hướng dẫn giải

Ta có
$$P = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x) dx$$

$$\Rightarrow 2P = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} [f(x) + f(-x)] dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 - 2\cos 2x} dx = 4 \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x| dx.$$

Hay
$$P = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx - 2 \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx = -2 \cos x \Big|_0^{\pi} + 2 \cos x \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = 6.$$

Chọn C.

Ví dụ 4: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = \sin x$ với mọi x và $f(0) = 1$.

Tích phân $e^x \cdot f(x)$ bằng

A. $\frac{e^x - 1}{2}.$

B. $\frac{e^x - 1}{2}.$

C. $\frac{e^x + 3}{2}.$

D. $\frac{\pi + 1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Ta có $f(x) + f'(x) = \sin x$ nên $e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x \cdot \sin x, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\Leftrightarrow [e^x f(x)]' = e^x \cdot \sin x \text{ hay } \int_0^{\pi} [e^x f(x)]' dx = \int_0^{\pi} e^x \cdot \sin x dx$$

$$\Leftrightarrow [e^x f(x)] \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} [e^x (\sin x - \cos x)] \Big|_0^{\pi} \Leftrightarrow e^{\pi} f(\pi) - f(0) = \frac{1}{2} (e^{\pi} + 1)$$

$$\Leftrightarrow e^{\pi} f(\pi) = \frac{e^{\pi} + 3}{2}.$$

Chọn C.

Để ý rằng $(e^x)' = e^x$ nên nếu nhân thêm hai vế của $f(x) + f'(x) = \sin x$ với e^x thì ta sẽ có ngay $(e^x \cdot f(x))' = e^x \cdot \sin x.$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ $\frac{\pi}{2}$ và có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4} \text{ và } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \cdot \cos x dx = \frac{\pi}{4}. \text{ Giá trị của } f(2019\pi).$$

A. $-1.$

B. $0.$

C. $\frac{1}{2}.$

D. $1.$

Hướng dẫn giải

Bằng phương pháp tích phân từng phần ta có

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \cdot \cos x dx = \left[f(x) \cdot \sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(x) \cdot \sin x dx. \text{ Suy ra } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f'(x) \cdot \sin x dx = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Mặt khác } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{2x - \sin 2x}{4} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4}.$$

Suy ra

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x f'(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) + \sin x]^2 dx = 0.$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\sin x. \text{ Do đó } f(x) = \cos x + C. \text{ Vì } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ nên } C = 0.$$

$$\text{Ta được } f(x) = \cos x \Rightarrow f(2019\pi) = \cos(2019\pi) = -1.$$

Chọn A.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, và $f(1) - f(0) = \frac{\sqrt{14}}{2}$. Biết rằng

$0 \leq f'(x) \leq 2\sqrt{2x}, \forall x \in [0;1]$. Khi đó, giá trị của tích phân $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(2;4)$. B. $\left(\frac{13}{3}; \frac{14}{3}\right)$. C. $\left(\frac{10}{3}; \frac{13}{3}\right)$. D. $(1;3)$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Do } 0 \leq f'(x) \leq 2\sqrt{2x}, \forall x \in [0;1] \text{ nên } 0 \leq (f'(x))^2 \leq 8x, \forall x \in [0;1].$$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq \int_0^1 8x dx \text{ hay } \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq 4 \quad (1).$$

Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 f'(x) dx \right)^2 &\leq \int_0^1 1^2 dx \cdot \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \Leftrightarrow [f(1) - f(0)]^2 \leq \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \\ &\Leftrightarrow \frac{7}{2} \leq \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{7}{2} \leq \int_0^1 [f'(x)]^2 dx \leq 4.$$

Chọn C.

 **Bài tập tự luyện dạng 4**

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $3f(-x) - 2f(x) = \tan^2 x$, với $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Giá trị

của $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ là

- A. $1 - \frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{2} - 1$. C. $1 + \frac{\pi}{4}$. D. $2 - \frac{\pi}{2}$.

Câu 2: Biết $\int_0^\pi f(\sin x) dx = 1$. Giá trị của $\int_0^\pi xf(\sin x) dx$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. π . D. 0.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$ và $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in [-1; 1]$. Đặt

$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{f(x) \cdot f(-x)}$, với mọi $x \in [-1; 1]$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\int_{-1}^1 g(x) dx = -2 \int_0^1 g(x) dx$. B. $\int_{-1}^1 g(x) dx = 0$.
C. $\int_{-1}^1 g(x) dx = 2 \int_0^1 g(x) dx$. D. $\int_0^1 g(x) dx = 0$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$. Giá trị

của tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$ là

- A. 2. B. 6. C. 3. D. 1.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'(0) \cdot f'(2) \neq 0$ và

$g(x)f'(x) = x(x-2)e^x$. Giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x) \cdot g'(x) dx$ là

- A. -4. B. $e - 2$. C. 4. D. $2 - e$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $[0; 1]$. Biết $f(x) \cdot f(1-x) = 1$ với

$\forall x \in [0; 1]$. Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + f(x)}$ ta được kết quả là

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. 2.

Câu 7: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ và thỏa $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$.

Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{6}$.

C. $\frac{\pi}{20}$.

D. $\frac{\pi}{16}$.

Câu 8: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4x.f(x^2) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x^2}$. Tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$ là

A. $I = \frac{\pi}{4}$.

B. $I = \frac{\pi}{6}$.

C. $I = \frac{\pi}{20}$.

D. $I = \frac{\pi}{16}$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(-x) = \frac{1}{4+x^2}$.

Giá trị của $I = \int_{-2}^2 f(x) dx$ là

A. $I = -\frac{\pi}{20}$.

B. $I = \frac{\pi}{20}$.

C. $I = -\frac{\pi}{10}$.

D. $I = \frac{\pi}{10}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục thỏa mãn điều kiện $f(x) > -1, f(0) = 0$ và $f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}$. Giá trị của $f(\sqrt{3})$ là

A. 0.

B. 3.

C. 7.

D. 9.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, đồng biến trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn đẳng thức $x + 2x.f(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1;4]$. Biết rằng $f(1) = \frac{3}{2}$, giá trị của $I = \int_1^4 f(x) dx$ là

A. $I = \frac{1186}{45}$.

B. $I = \frac{1174}{45}$.

C. $I = \frac{1222}{45}$.

D. $I = \frac{1201}{45}$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Giá trị lớn nhất của $f(1)$ là bao nhiêu?

A. $\frac{2e-1}{e}$.

B. $\frac{e-1}{e}$.

C. $e-1$.

D. $2e-1$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục và khác 0 trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f'(0) = -1$ và $[f'(x)]^2 = f''(x)$. Đặt $T = f(1) - f(0)$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $-2 \leq T < -1$.

B. $-1 \leq T < 0$.

C. $0 \leq T < 1$.

D. $1 \leq T < 2$.

Câu 14: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1, f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $3 < f(5) < 4$.

B. $1 < f(5) < 2$.

C. $4 < f(5) < 5$.

D. $2 < f(5) < 3$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = -2\ln 2$ và $x(x+1).f'(x) + f(x) = x^2 + x$, với mọi $x \in (0; +\infty)$. Giá trị $f(2) = a + b\ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của $a^2 + b^2$ là

A. $\frac{25}{4}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{13}{4}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ đều nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=2$, $\int_0^1 [f'(x) \cdot [f(x)]^2 + 1] dx = 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} \cdot f(x) dx$. Giá trị của $\int_0^1 [f(x)]^3 dx$ là

A. $\frac{15}{4}$.

B. $\frac{15}{2}$.

C. $\frac{17}{2}$.

D. $\frac{19}{2}$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 9$ và $\int_0^1 x^3 f(x) dx = \frac{1}{2}$. Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{7}{4}$.

D. $\frac{6}{5}$.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ và $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x) dx = \frac{\pi}{8}$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \sin 2x dx = -\frac{\pi}{4}$. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} f(2x) dx$ là

A. $I=1$.

B. $I=\frac{1}{2}$.

C. $I=2$.

D. $I=\frac{1}{4}$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $x \in (0; +\infty)$ đồng thời thỏa mãn điều kiện $f(x) = x(\sin x + f'(x)) + \cos x$ và $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin x dx = -4$. Khi đó $f(\pi)$ nằm trong khoảng nào?

A. $(6;7)$.

B. $(5;6)$.

C. $(12;13)$.

D. $(11;12)$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm liên tục trên $[0;\pi]$ thỏa mãn $\int_0^{\pi} f(x) \cos x dx = A$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ và $\int_0^{\pi} (f'(x))^2 dx = \frac{2A^2}{\pi}$, với A là hằng số. Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x) dx$ theo A là

A. $4A$.

B. $\frac{A}{2}$.

C. $\frac{A}{\pi}$.

D. $\pi^2 A$.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa $f(1)=0$, $\int_0^1 (f'(x))^2 dx = \frac{\pi^2}{8}$ và $\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) f(x) dx = \frac{1}{2}$. Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ là

A. $\frac{\pi}{2}$.

B. π .

C. $\frac{1}{\pi}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f(0)=0, \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2 dx = \frac{\pi}{4}$ và

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{4}. \text{ Tích phân } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ bằng}$$

A. 1.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] dx = \frac{2-\pi}{2}. \text{ Tích phân } \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. 0.

C. 1.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;1)$ và $f(x) \neq 0, \forall x \in (0;1)$. Biết rằng

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = a, f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b \quad \text{và} \quad x + xf'(x) = 2f(x) - 4, \forall x \in (0;1). \quad \text{Giá trị của tích phân}$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x \cdot \cos x + 2 \sin 2x}{f^2(\sin x)} dx \text{ theo } a \text{ và } b \text{ là}$$

A. $I = \frac{3a+b}{4ab}$.

B. $I = \frac{3b+a}{4ab}$.

C. $I = \frac{3b-a}{4ab}$.

D. $I = \frac{3a-b}{4ab}$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và

$$3 \int_0^1 \left[f'(x) [f(x)]^2 + \frac{1}{9} \right] dx \leq 2 \int_0^1 \sqrt{f'(x)} f(x) dx. \text{ Giá trị của tích phân } \int_0^1 [f(x)]^3 dx \text{ là}$$

A. $\frac{3}{2}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{5}{6}$.

D. $\frac{7}{6}$.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=1, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5}$ và

$$\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}. \text{ Giá trị của tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx \text{ là}$$

A. $I = \frac{3}{5}$.

B. $I = \frac{1}{4}$.

C. $I = \frac{3}{4}$.

D. $I = \frac{1}{5}$.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0)=0$. Biết

$$\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{9}{2} \text{ và } \int_0^1 f'(x) \cos \frac{\pi x}{2} dx = \frac{3\pi}{4}. \text{ Tích phân của } \int_0^1 f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{1}{\pi}$.

B. $\frac{4}{\pi}$.

C. $\frac{6}{\pi}$.

D. $\frac{2}{\pi}$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x) = 2020 \ln \left(e^{\frac{x}{2020}} + \sqrt{e} \right)$. Giá trị của giá trị biểu thức

$T = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2019)$ là

A. $T = \frac{2019}{2}$.

B. $T = 1009$.

C. $T = \frac{2021}{2}$.

D. $T = 1010$.

Câu 29: Giá trị của tổng $T = \frac{C_{2018}^0}{3} - \frac{C_{2018}^1}{4} + \frac{C_{2018}^2}{5} - \frac{C_{2018}^3}{6} + \dots - \frac{C_{2018}^{2017}}{2020} + \frac{C_{2018}^{2018}}{2021}$ là

A. $\frac{1}{4121202989}$.

B. $\frac{1}{4121202990}$.

C. $\frac{1}{4121202992}$.

D. $\frac{1}{4121202991}$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ thỏa mãn $\int_0^1 xf(x)dx = 0$ và $\max_{[0;1]} |f(x)| = 1$. Tích phân

$I = \int_0^1 e^x f(x)dx$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right)$.

B. $\left(\frac{3}{2}; e-1\right)$.

C. $\left(-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$.

D. $(e-1; +\infty)$.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3, \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{\cos x} dx = 1$ và

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin x \cdot \tan x \cdot f(x)] dx = 2$. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot f'(x) dx$ bằng

A. 4.

B. $\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{1+3\sqrt{2}}{2}$.

D. 6.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ biết $f(x) > 0$ với mọi $x > -1$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot f'(x)$ với mọi $x > -1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $4 < f(3) < 6$.

B. $f(3) < 2$.

C. $2 < f(3) < 4$.

D. $f(3) > 6$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in [0; 1], f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $T = f^2(2)$ là

A. $\frac{43}{30}$.

B. $\frac{16}{35}$.

C. $\frac{43}{15}$.

D. $\frac{26}{15}$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x) + f(2-x) = 2(x-1)e^{x^2-2x+1} + 4$.

Giá trị của tích phân $I = \int_0^2 f(x)dx$ ta được kết quả là

A. $I = e + 4$.

B. $I = 8$.

C. $I = 2$.

D. $I = e + 2$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $[0; +\infty)$ thỏa mãn $(x+2)f(x) + (x+1)f'(x) = e^x$, với mọi $x > 0$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Giá trị của $f(2)$ là

- A. $f(2) = \frac{e}{3}$. B. $f(2) = \frac{e}{6}$. C. $f(2) = \frac{e^2}{3}$. D. $f(2) = \frac{e^2}{6}$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ thỏa mãn $3f(x) + f'(x) = \sqrt{1+3}e^{-2x}$. Khi đó

- A. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{1}{\sqrt{e^2+3}} - \frac{1}{2}$. B. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{1}{2\sqrt{e^2+3}} - \frac{1}{4}$.
C. $e^3 f(1) - f(0) = \frac{(e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8}{3}$. D. $e^3 f(1) - f(0) = (e^2+3)\sqrt{e^2+3}-8$.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f'(x).e^{f^3(x)-x^2-1} - \frac{2x}{f^2(x)} = 0$ và $f(0) = 1$.

Tích phân $\int_0^{\sqrt{7}} x.f(x)dx$ bằng

- A. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$. B. $\frac{15}{4}$. C. $\frac{45}{8}$. D. $\frac{5\sqrt{7}}{4}$.

Câu 38: Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x)dx = 1$. Giá trị của

$\int_{-2}^2 \frac{f(x)}{3^x+1} dx$ bằng

- A. 1. B. 6. C. 4. D. 3.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_1^{e^3} \frac{f(\ln x)}{x} dx = 7$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x). \sin x dx = 3$. Giá trị của

$\int_1^3 (f(x) + 2x) dx$ là

- A. 12. B. 15. C. 10. D. -10.

Câu 40: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$. Biết rằng tồn tại hằng số $a > 0$ để $\int_a^x \frac{f(t)}{t^4} dt = 2\sqrt{x} - 6$,

$\forall x > 0$. Giá trị của tích phân $\int_1^a f(x)dx$ là

- A. $\frac{21869}{5}$. B. $\frac{39364}{9}$. C. 4374. D. $-\frac{40}{3}$.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$f^3(x).[4.(f'(x))^2 + f(x).f''(x)] = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$, biết $f(0) = 0$. Khi đó $\int_0^{5\ln 2} f^5(x).dx$ bằng

A. $5\left(31 - \frac{25\ln^2 2}{2} - 5\ln 2\right).$

B. $\frac{1}{5}\left(31 - \frac{355\ln 2}{2}\right).$

C. $\frac{1}{5}\left(31 - \frac{25\ln^2 2}{2} - 5\ln 2\right).$

D. $5\left(31 - \frac{355\ln 2}{2}\right).$

Câu 42: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{1}{30},$

$\int_0^1 (2x-1)f(x)dx = -\frac{1}{30}.$ Tích phân $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{11}{12}.$

B. $\frac{11}{4}.$

C. $\frac{1}{30}.$

D. $\frac{11}{30}.$

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(1) = 0.$

$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \int_0^1 (x+1)e^x f(x) dx = \frac{e^2 - 1}{4}.$ Giá trị của $\int_0^1 f(x) dx$ là

A. $\frac{e}{2}.$

B. $2 - e.$

C. $\frac{e^2}{4}.$

D. $e - 2.$

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(-x) + 2019f(x) = 2^x, \forall x \in [-1;1].$ Giá trị của

$\int_{-1}^1 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{1}{2019\ln 2}.$

B. $\frac{3}{4040\ln 2}.$

C. 0.

D. $\frac{5}{2018\ln 2}.$

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ biết $\int_1^e \frac{f(\ln \sqrt{x})}{x} dx = 6$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x) \sin 2x dx = 2.$ Giá trị

của $\int_1^3 (f(x) + 2) dx$ bằng

A. 10.

B. 16.

C. 9.

D. 5.

Câu 46: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn:

$x^2 \cdot f^2(x) + (2x-1) \cdot f(x) = x \cdot f'(x) - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ đồng thời $f(1) = -2.$ Giá trị của $\int_1^2 f(x) dx$ là

A. $-\frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}.$

B. $-\ln 2 - \frac{1}{2}.$

C. $-\frac{\ln 2}{2} - 1.$

D. $-\ln 2 - \frac{3}{2}.$

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và dương trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0$ và

$f(0) = \frac{1}{3}.$ Giá trị của tổng $S = f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, \frac{a}{b}$ tối giản. Khi

đó $b - a$ bằng

A. $\frac{1}{2} \left[\frac{2020}{2021} + \frac{1009}{2020} \right].$

B. 1011.

C. 1.

D. 2018.

Dạng 5: Một số bài toán thực tế ứng dụng tích phân

Phương pháp giải

5.1.1. Một vật chuyển động có phương trình vận tốc $v(t)$ trong khoảng thời gian từ $t = a$ đến $t = b (a < b)$ sẽ di chuyển được quãng đường là:

$$S = \int_a^b v(t) dt$$

Ví dụ 1: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 160 - 10t (m/s)$. Quãng đường mà vật chuyển động từ thời điểm $t = 0(s)$ đến thời điểm mà vật dừng lại là

- A. 1028m. B. 1280m.
C. 1308m. D. 1380m.

Hướng dẫn giải

Khi vật dừng lại thì $v(t) = 160 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = 16$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } S &= \int_0^{16} v(t) dt = \int_0^{16} (160 - 10t) dt \\ &= (160t - 5t^2) \Big|_0^{16} = 1280(m). \end{aligned}$$

Chọn B.

5.1.2. Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau khoảng thời gian $[t_1; t_2]$ là:

$$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

Ví dụ 2: Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t) (m/s)$, có gia tốc $a(t) = v'(t) = \frac{3}{2t+1} (m/s^2)$.

Vận tốc của ô tô sau 10 giây (làm tròn đến hàng đơn vị) là

- A. 4,6 m/s. B. 7,2 m/s.
C. 1,5 m/s. D. 2,2 m/s.

Hướng dẫn giải

Vận tốc của ô tô sau 10 giây là

$$v = \int_0^{10} \frac{3}{2t+1} dt = \frac{3}{2} \ln |2t+1| \Big|_0^{10} = \frac{3}{2} \ln 21 \approx 4,6 (m/s).$$

Chọn A.

5.1.4. Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ t_1 đến t_2 là:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 3t + t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

A. $\frac{4300}{3} \text{ m}$.

B. 4300 m .

C. 430 m .

D. $\frac{430}{3} \text{ m}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Hàm vận tốc } v(t) = \int a(t) dt = \int (3t + t^2) dt = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C.$$

$$\text{Lấy mốc thời gian lúc tăng tốc } \Rightarrow v(0) = 10 \Rightarrow C = 10.$$

$$\text{Ta được } v(t) = \frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10.$$

Sau 10 giây, quãng đường vật đi được là

$$S = \int_0^{10} \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + 10 \right) dt = \left(\frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{12} + 10t \right) \Big|_0^{10} = \frac{4300}{3} (\text{m})$$

Chọn A.

$$v(t) = \int a(t) dt$$

Ví dụ 2: Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua một đoạn mạch LC có biểu thức cường độ là $i(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$. Biết $i = q'$ với q là điện tích tức thời ở tụ điện. Tính từ lúc $t = 0$, điện lượng

chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của đoạn mạch đó trong thời gian từ 0 đến $\frac{\pi}{\omega}$ là

A. $\frac{\pi\sqrt{2}I_0}{\omega}$.

B. 0 .

C. $\frac{2I_0}{\omega}$.

D. $\frac{\pi I_0}{\omega\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ 0 đến $\frac{\pi}{\omega}$ là

$$Q = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) dt = \frac{I_0}{\omega} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{2I_0}{\omega}.$$

Chọn C.

$$Q(t) = \int I(t) dt$$

Ví dụ 3: Gọi $h(t)(\text{cm})$ là mức nước trong bồn chứa sau khi bơm được t giây. Biết rằng $h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (chính xác đến $0,01\text{cm}$)

A. 2,67 cm.

B. 2,66 cm.

C. 2,65 cm.

D. 2,68 cm.

Hướng dẫn giải

Mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây là

$$\int_0^6 h'(t) dt = \int_0^6 \frac{1}{5} \sqrt[3]{t+8} dt = \left[\frac{3}{20} (t+8) \sqrt[3]{t+8} \right]_0^6 \approx 2,66 (cm)$$

Chọn B.

Bài tập tự luyện dạng 5

Câu 1: Một vật chuyển động chậm dần với vận tốc $v(t) = 160 - 10t (m/s)$. Tìm quãng đường S mà vật di chuyển trong khoảng thời gian từ thời điểm $t = 0(s)$ đến thời điểm vật dừng lại.

A. $S = 2560m$.

B. $S = 1280m$.

C. $S = 2480m$.

D. $S = 3840m$.

Câu 2: Một ô tô chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v(t) = 7t (m/s)$. Đi được $5(s)$ người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -70 (m/s^2)$. Quãng đường của ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn là bao nhiêu?

A. 87,50 m.

B. 94,00 m.

C. 97,50 m.

D. 96,25 m.

Câu 3: Một ô tô đang đi với vận tốc $60 km/h$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = 2 + 6t (km/h^2)$. Quãng đường ô tô đi được trong vòng 1h kể từ khi tăng tốc.

A. 26 km.

B. 62 km.

C. 60 km.

D. 63 km.

Câu 4: Một ô tô đang chạy với vận tốc $20 m/s$ thì người lái xe phát hiện có hàng rào chắn ngang đường ở phía trước cách xe $45 m$ (tính từ đầu xe tới hàng rào) nên người lái đạp phanh. Từ thời điểm đó, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20 (m/s)$, trong đó t là thời gian được tính từ lúc người lái đạp phanh. Khi xe dừng hẳn, khoảng cách từ xe đến hàng rào là bao nhiêu?

A. 4 m.

B. 5 m.

C. 3 m.

D. 6 m.

Câu 5: Cho hai chất điểm A và B cùng bắt đầu chuyển động trên trục Ox từ thời điểm $t = 0$. Tại thời điểm t , vị trí của chất điểm A được cho bởi $x = f(t) = -6 + 2t - \frac{1}{2}t^2$ và vị trí của chất điểm B được cho bởi $x = g(t) = 4 \sin t$. Gọi t_1 là thời điểm đầu tiên và t_2 là thời điểm thứ hai mà hai chất điểm có vận tốc bằng nhau. Tính theo t_1 và t_2 độ dài quãng đường mà chất điểm A đã di chuyển từ thời điểm t_1 đến thời điểm t_2 .

A. $4 - 2(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)$.

B. $4 + 2(t_1 + t_2) - \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2)$.

C. $2(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}(t_2^2 - t_1^2)$.

D. $2(t_1 - t_2) - \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2^2)$.

Câu 6: Một tia lửa được bắn thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc $15 m/s$. Hỏi sau 2,5 giây, tia lửa ấy cách mặt đất bao nhiêu mét, biết gia tốc là $9,8 m/s^2$?

A. 30,625m.

B. 37,5m.

C. 68,125m.

D. 6,875m.

Câu 7: Một hạt proton di chuyển trong điện trường có biểu thức gia tốc (theo cm^2/s) là $a(t) = \frac{-20}{(1+2t)^2}$

(với t tính bằng giây). Tìm hàm vận tốc v theo t , biết rằng khi $t = 0$ thì $v = 30(cm/s)$. Hàm vận tốc đó là

- A. $\frac{10}{1+2t}$. B. $\frac{10}{1+2t} + 20$. C. $(1+2t)^{-3} + 30$. D. $\frac{-20}{(1+2t)^2} + 30$.

Câu 8: Một ô tô đang chạy với vận tốc $18 m/s$ thì người lái hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -36t + 18(m/s)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Quãng đường ô tô di chuyển được kể từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu mét?

- A. $5,5 m$. B. $3,5 m$. C. $6,5 m$. D. $4,5 m$.

Câu 9: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động.

Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

- A. $22 m/s$. B. $15 m/s$. C. $10 m/s$. D. $7 m/s$.

Câu 10: Một ô tô đang chạy với vận tốc $19 m/s$ thì người lái hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -38t + 19(m/s)$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

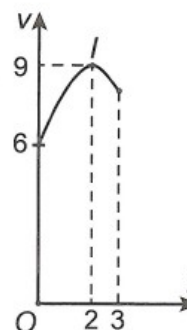
- A. $4,75m$. B. $4,5m$. C. $4,25m$. D. $5 m$.

Câu 11: Một ô tô đang chạy với tốc độ $10 m/s$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với $v(t) = -5t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

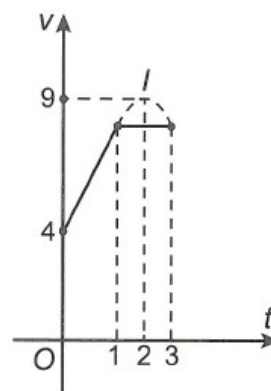
- A. $0,2 m$. B. $2 m$. C. $10 m$. D. $20 m$.

Câu 12: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó là

- A. $s = 24,25 km$.
B. $s = 26,75 km$.
C. $s = 24,75 km$.
D. $s = 25,25 km$.

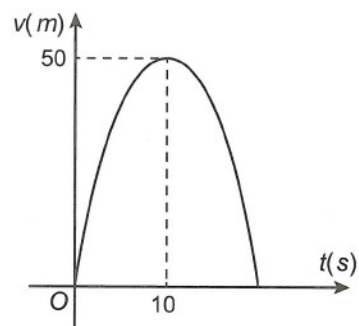


Câu 13: Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



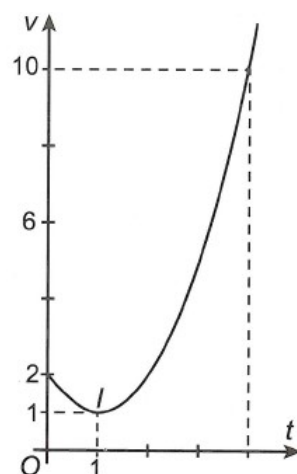
- A. $s = 23,25$ km.
- B. $s = 21,58$ km.
- C. $s = 15,50$ km.
- D. $s = 13,83$ km.

Câu 14: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu phóng nhanh với vận tốc tăng liên tục được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol có hình bên. Biết rằng sau 10s thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 50m/s và bắt đầu giảm tốc. Hỏi từ lúc bắt đầu đến lúc đạt vận tốc cao nhất thì xe đã đi được quãng đường bao nhiêu mét?



- A. $\frac{1000}{3}$ m.
- B. $\frac{1100}{3}$ m.
- C. $\frac{1400}{3}$ m.
- D. 300m.

Câu 15: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



- A. $s = 6$ km.
- B. $s = 8$ km.
- C. $s = \frac{40}{3}$ km.
- D. $s = \frac{46}{3}$ km.

Câu 16: Người ta thay nước mới cho một bể bơi dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu $h_1 = 280$ cm. Giả sử $h(t)$ cm là chiều cao của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3}$. Hỏi sau bao lâu thì nước bơm được $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi?

- A. 7545,2 giây. B. 7234,8 giây. C. 7200,7 giây. D. 7560,5 giây.

Câu 17: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 30 - 5t (m/s)$. Quãng đường vật đi chuyển từ thời điểm $t = 2(s)$ đến khi dừng hẳn là

- A. 50m. B. 30m. C. 90m. D. 40m.

Câu 18: Một vật đang chuyển động với vận tốc $v = 20 (m/s)$ thì thay đổi vận tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t) = -4 + 2t (m/s^2)$. Tính quãng đường vật đi được kể từ thời điểm thay đổi gia tốc đến lúc vật đạt vận tốc bé nhất

- A. $\frac{104}{3}m$. B. 104m. C. 208m. D. $\frac{104}{6}m$.

Câu 19: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15m/s$ thì tăng vận tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t (m/s^2)$. Tính quãng đường chất điểm đó đi được trong khoảng thời gian 3 giây kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

- A. 68,25m. B. 70,25m. C. 69,75m. D. 67,25m.

Câu 20: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 4t (m/s)$. Đi được $6(s)$, người lái xe phát hiện chương ngại vật và phanh gấp, ô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-12 (m/s^2)$. Tính quãng đường $S(m)$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn

- A. $S = 456 m$. B. $S = 240 m$. C. $S = 72 m$. D. 96 m.

Câu 21: Để đảm bảo an toàn khi lưu thông trên đường, các xe ô tô khi dừng đèn đỏ phải cách nhau tối thiểu 1m. Một ô tô A đang chạy với vận tốc 16m/s bỗng gặp ô tô B đang dừng đèn đỏ nên ô tô A hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với vận tốc được biểu thị bởi công thức $v_A(t) = 16 - 4t$ (đơn vị tính bằng m/s), thời gian tính bằng giây. Hỏi rằng để 2 ô tô A và B đạt khoảng cách an toàn khi dừng lại thì ô tô A phải hãm phanh khi cách ô tô B một khoảng ít nhất là bao nhiêu?

- A. 33 m. B. 12 m. C. 31 m. D. 32 m.

Câu 22: Một chiếc xe đua đang chạy 180 km/h. Tay đua nhấn ga để về đích kể từ đó xe chạy với gia tốc $a(t) = 2t + 1 (m/s^2)$. Hỏi rằng 5 s sau khi nhấn ga thì xe chạy với vận tốc bao nhiêu km/h?

- A. 200. B. 243. C. 288. D. 300.

Câu 23: Một vật chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian là $a(t) = t^2 + 3t$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 6 giây kể từ khi vật bắt đầu tăng tốc.

- A. 136m. B. 126m. C. 276m. D. 216m.

Câu 24: Một chiếc máy bay chuyển động trên đường băng với vận tốc $v(t) = t^2 + 10t (m/s)$ với t là thời gian được tính theo đơn vị giây kể từ khi máy bay bắt đầu chuyển động. Biết khi máy bay đạt vận tốc $200 (m/s)$ thì nó rời đường băng. Quãng đường máy bay đã di chuyển trên đường băng là

- A. 500m. B. 2000m. C. $\frac{4000}{3}m$. D. $\frac{2500}{3}m$.

Câu 25: Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn trong hồ bơi được mô hình bởi hàm số $B'(t) = \frac{1000}{(1+0,3t)^2}, t \geq 0$, trong đó $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước tại ngày thứ t . Số lượng vi

khuẩn ban đầu là 500 con trên một ml nước. Biết rằng mức độ an toàn cho người sử dụng hồ bơi là số vi khuẩn phải dưới 3000 con trên mỗi ml nước. Hỏi vào ngày thứ bao nhiêu thì nước trong hồ không còn an toàn nữa?

A. 9.

B. 10.

C. 11.

D. 12.

Câu 26: Một ô tô đang chạy đều với vận tốc $15m/s$ thì phía trước xuất hiện chướng ngại vật nên người lái đạp phanh gấp. Kể từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-a m/s^2$. Biết ô tô chuyển động thêm được $20 m$ thì dừng hẳn. Hỏi a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(3;4)$.

B. $(4;5)$.

C. $(5;6)$.

D. $(6;7)$.

Câu 27: Tại một nơi không có gió, một chiếc khinh khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khinh khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khinh khí cầu là

A. $v = 5m/p$.

B. $v = 7m/p$.

C. $v = 9m/p$.

D. $v = 3m/p$.

Câu 28: Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t (m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động.

Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A . Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $20 m/s$.

B. $16 m/s$.

C. $13 m/s$.

D. $15 m/s$.

Đáp án và lời giải

Dạng 1. Tính tích phân bằng cách sử dụng định nghĩa, tính chất

1 – B	2 – D	3 – C	4 – B	5 – B	6 – D	7 – A	8 – C	9 – D	10 – B
11 – B	12 – B	13 – C	14 – A	15 – C	16 – B	17 – A	18 – B	19 – A	20 – D
21 – A	22 – B	23 – A	24 – C	25 – D	26 – C	27 – B	28 – A	29 – A	30 – C
31 – A	32 – D	33 – C	34 – D	35 – D	36 – A	37 – B	38 – B	39 – D	40 – B
41 – C	42 – B	43 – A	44 – D	45 – B	46 – B	47 – D	48 – C	49 – B	50 – C
51 – D	52 – A	53 – A	54 – C	55 – C	56 – A	57 – A	58 – A	59 – C	60 – C

Dạng 2. Tính bằng phương pháp đổi biến

1 – B	2 – A	3 – A	4 – D	5 – D	6 – C	7 – A	8 – C	9 – B	10 – C
11 – B	12 – B	13 – D	14 – A	15 – A	16 – D	17 – B	18 – D	19 – D	20 – C
21 – C	22 – D	23 – A	24 – B	25 – A	26 – D	27 – C	28 – B	29 – B	30 – C
31 – C	32 – A	33 – B	34 – B	35 – B	36 – C	37 – C	38 – A	39 – C	40 – A

41 – B	42 – B	43 – D	44 – B	45 – D	46 – A	47 – D	48 – D	49 – A	50 – B
51 – A	52 – C	53 – D	54 – B						

Dạng 3. Giá trị của tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

1 – D	2 – C	3 – B	4 – A	5 – C	6 – C	7 – D	8 – C	9 – D	10 – A
11 – A	12 – A	13 – A	14 – D	15 – A	16 – D	17 – A	18 – A	19 – A	20 – A
21 – A	22 – A	23 – B	24 – B	25 – D	26 – A	27 – B	28 – C	29 – C	30 – B
31 – C	32 – A	33 – B	34 – A	35 – C	36 – A	37 – D	38 – A	39 – A	40 – A

Dạng 4. Tính tích phân các hàm đặc biệt, hàm ẩn

1 – D	2 – B	3 – C	4 – B	5 – C	6 – B	7 – A	8 – C	9 – B	10 – B
11 – A	12 – B	13 – A	14 – A	15 – B	16 – D	17 – B	18 – D	19 – B	20 – C
21 – D	22 – A	23 – B	24 – D	25 – D	26 – B	27 – C	28 – A	29 – B	30 – C
31 – B	32 – D	33 – C	34 – C	35 – D	36 – C	37 – C	38 – D	39 – A	40 – B
41 – A	42 – A	43 – D	44 – B	45 – D	46 – B	47 – A			

Dạng 5. Các bài toán thực tế của tích phân

1 – B	2 – D	3 – B	4 – B	5 – A	6 – C	7 – B	8 – D	9 – B	10 – A
11 – C	12 – C	13 – B	14 – A	15 – C	16 – B	17 – D	18 – A	19 – C	20 – D
21 – A	22 – C	23 – C	24 – D	25 – B	26 – C	27 – C	28 – B		