Chương 5

GIỚI HẠN, HÀM SỐ LIÊN TỤC

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A TÓM TẮT LÍ LUYẾT

1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

Định nghĩa 1.1. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Ví dụ 1

Xét dãy số $u_n = \dfrac{1}{n^2}$. Giải thích vì sao dãy số này có giới hạn là 0.

Lời giải.

Dãy số này có giới hạn là 0, bởi vì $|u_n| = \dfrac{1}{n^2}$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý khi n đủ lớn. Chẳng hạn, để $|u_n| < 0{,}0001$ tức là $\dfrac{1}{n^2} < 10^{-4}$, ta cần $n^2 > 10000$ hay $n > 100$. Như vậy, các số hạng của dãy, kể từ số hạng thứ 101 đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 0,0001. □

Từ định nghĩa dãy số có giới hạn 0, ta có các kết quả sau:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ *với k là một số nguyên dương;*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ *nếu* $|q| < 1$;
- *Nếu* $|u_n| \le v_n$ *với mọi* $n \ge 1$ *và* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ *thì* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Định nghĩa 1.2. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a khi n dần tới dương vô cực nếu

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0,$$

kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

Ví dụ 2

Xét dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Lời giải.

Ta có $u_n - 2 = \dfrac{2n+1}{n} - 2 = \dfrac{(2n+1)-2n}{n} = \dfrac{1}{n} \to 0$ khi $n \to +\infty$. Do vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$. □

- *Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = c$.*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ *khi và chỉ khi* $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0$.

2. Định lí về giới hạn hữu hạn của dãy số

Tính chất 1.1. Các quy tắc tính giới hạn

a) Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$ thì

- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = a + b$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = a - b$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

Ví dụ 3

Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+n+1}{2n^2-1}$.

Lời giải.

Để tính giới hạn của dãy số dạng phân thức, ta chia cả tử thức và mẫu thức cho luỹ thừa cao nhất của n, rồi áp dụng các quy tắc tính giới hạn.
Áp dụng các quy tắc tính giới hạn, ta được

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n+1}{2n^2-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{2-\dfrac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

□

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với công bội q. Khi đó $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$.
Vì $|q| < 1$ nên $q^n \to 0$ khi $n \to +\infty$. Do đó, ta có

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{u_1}{1-q} - \left(\frac{u_1}{1-q}\right) q^n\right] = \frac{u_1}{1-q}.$$

Giới hạn này được gọi là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n), và kí hiệu là $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$.
Như vậy

$$S = \frac{u_1}{1-q} \quad (|q| < 1).$$

Ví dụ 4

Tính tổng $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$.

Lời giải.

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$ và $q = -\frac{1}{2}$. Do đó $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$.

□

Ví dụ 5

Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $2{,}222\ldots$ dưới dạng phân số.

Lời giải.

Ta có $2{,}222\ldots = 2 + 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + \ldots = 2 + 2\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2} + 2\cdot 10^{-3} + \ldots$.
Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 2, q = 10^{-1}$ nên

$$2{,}222\ldots = \frac{u_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{10}} = \frac{20}{9}.$$

□

4. Giới hạn vô cực của dãy số

Định nghĩa 1.3.

- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $+\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.
- Dãy số (u_n) được gọi là có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$ nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Theo định nghĩa trên, ta có

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$, với k là số nguyên dương;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, với $q > 1$.

Liên quan đến giới hạn vô cực của dãy số, ta có một số quy tắc sau đây:

- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a > 0$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.

Ví dụ 6

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2 - 2n\right)$.

Lời giải.

Ta có $n^2 - 2n = n^2\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$. Hơn nữa $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) = 1$.
Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2 - 2n\right) = +\infty$. □

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Phương pháp đặt thừa số chung (lim hữu hạn)

Ví dụ 1

Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3} = \lim \frac{2 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^3}}{\dfrac{1}{n^3} - 4} = -\frac{1}{2}.$$

□

Ví dụ 2

Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{\sqrt{n^4 + 2n + 2}}{n^2 + 1}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{\sqrt{n^4 + 2n + 2}}{n^2 + 1} = \lim \frac{\sqrt{1 + \dfrac{2}{n^3} + \dfrac{2}{n^4}}}{1 + \dfrac{1}{n^2}} = 1.$$

□

Ví dụ 3

Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{3^{n+1} - 4^n}{4^{n-1} + 3}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{3^{n+1} - 4^n}{4^{n-1} + 3} = \lim \frac{9 \cdot 3^{n-1} - 4 \cdot 4^{n-1}}{4^{n-1} + 3} = \lim \frac{9 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1} - 4}{1 + 3 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}} = -4.$$

□

Ví dụ 4

Tìm giới hạn sau $\lim \dfrac{1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n}$.

Lời giải.

$$\lim \frac{1+2+2^2+\cdots+2^n}{1+3+3^2+\cdots+3^n} = \lim \frac{\frac{1-2^{n+1}}{-1}}{\frac{1-3^{n+1}}{-2}} = \lim \frac{\left(1-2^{n+1}\right)\cdot 2}{1-3^{n+1}} = \lim \frac{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)\cdot 2}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1} = 0.$$

□

Dạng 2 Phương pháp lượng liên hợp (lim hữu hạn)

Nếu giới hạn của dãy số ở dạng vô định thì ta sử dụng các phép biến đổi để đưa về dạng cơ bản.
Một số phép biến đổi liên hợp:

$$f(n)-g(n) = \frac{(f(n))^2-(g(n))^2}{f(n)+g(n)}$$
$$\sqrt{f(n)}-\sqrt{g(n)} = \frac{f(n)-g(n)}{\sqrt{f(n)}+\sqrt{g(n)}}$$
$$\sqrt{f(n)}-g(n) = \frac{f(n)-(g(n))^2}{\sqrt{f(n)}+g(n)}$$
$$\sqrt[3]{f(n)}-\sqrt[3]{g(n)} = \frac{f(n)-g(n)}{\sqrt[3]{(f(n))^2}+\sqrt[3]{f(n)g(n)}+\sqrt[3]{(g(n))^2}}$$

Ví dụ 1

Tính giới hạn $I = \lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)\\ &= \lim \frac{n^2-2n+3-n^2}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}\\ &= \lim \frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}\\ &= \lim \frac{-2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}\\ &= \frac{-2}{\sqrt{1}+1} = -1 \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2

Tính giới hạn $I = \lim\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}I &= \lim\left(\sqrt{n^2+7}-\sqrt{n^2+5}\right)\\&= \lim\frac{n^2+7-(n^2+5)}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}}\\&= \lim\frac{2}{\sqrt{n^2+7}+\sqrt{n^2+5}}\\&= 0\end{aligned}$$

□

Ví dụ 3

Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}I &= \lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)\\&= \lim\frac{n^2+2n-(n^2-2n)}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}\\&= \lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}\\&= \lim\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}\\&= \frac{4}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=2\end{aligned}$$

□

Ví dụ 4

Tính giới hạn $I=\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}I &= \lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)\\&= \lim\frac{2n^2-n+1-(2n^2-3n+2)}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}\\&= \lim\frac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}\\&= \lim\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}}\\&= \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

□

Ví dụ 5

Tính giới hạn $I = \lim\left(n - \sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right)$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \lim\left(n - \sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right)\\
&= \lim \frac{n^3-(n^3+3n^2+1)}{n^2+\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}+\sqrt[3]{(n^3+3n^2+1)^2}}\\
&= \lim \frac{-3n^2-1}{n^2+\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}+\sqrt[3]{(n^3+3n^2+1)^2}}\\
&= \lim \frac{-3-\frac{1}{n^2}}{1+\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right)^2}}\\
&= \frac{-3}{1+\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}} = -1
\end{aligned}$$

□

Dạng 3 Giới hạn tại vô cực

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n} = +\infty$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$ với k là số nguyên dương;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

Định lý:

- Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ với $v_n > 0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$;
- Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$.

Ví dụ 1

Tìm giới hạn

a) $\lim(n^3+n^2+n+1)$.

b) $\lim\left(n^2 - n\sqrt{n}+1\right)$.

Lời giải.

a) $\lim(n^3+n^2+n+1) = \lim n^3\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right) = +\infty$.

b) $\lim\left(n^2 - n\sqrt{n}+1\right) = \lim n^2\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$.

□

Ví dụ 2

Tìm giới hạn

a) $\lim \dfrac{n^5+n^4-n-2}{4n^3+6n^2+9}$. b) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12}$. c) $\lim \left(n+\sqrt{n^2-n+1}\right)$.

Lời giải.

a) $\lim \dfrac{n^5+n^4-n-2}{4n^3+6n^2+9} = \lim \dfrac{n^2+n-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}}{4+\frac{6}{n}+\frac{9}{n^3}} = \lim \dfrac{n^2+n}{4} = +\infty$.

b) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^6-7n^3-5n+8}}{n+12} = \lim \dfrac{n^2\sqrt[3]{1-\frac{7}{n^3}-\frac{5}{n^5}+\frac{8}{n^6}}}{n+12} = \lim \dfrac{n\sqrt[3]{1-\frac{7}{n^3}-\frac{5}{n^5}+\frac{8}{n^6}}}{1+\frac{12}{n}} = +\infty$.

c) $\lim \left(n+\sqrt{n^2-n+1}\right) = n\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right) = \lim 2n = +\infty$

□

Ví dụ 3

Tìm giới hạn

a) $\lim \dfrac{1^3+2^3+...+n^3}{n^2+3n\sqrt{n}+2}$. b) $\lim \left(n+\sqrt[3]{n^3-2n+1}\right)$. c) $\lim \dfrac{n^3-3n}{2n+15}$.

Lời giải.

a) $\lim \dfrac{1^3+2^3+...+n^3}{n^2+3n\sqrt{n}+2} = \lim \dfrac{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}{n^2+3n\sqrt{n}+2} = \lim \dfrac{\frac{1}{4}(n+1)^2}{1+\frac{3}{\sqrt{n}}+\frac{2}{n^2}} = \lim \dfrac{1}{4}(n+1)^2 = +\infty$.

b) $\lim \left(n+\sqrt[3]{n^3-2n+1}\right) = n\left(1+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}\right) = \lim 2n = +\infty$.

c) $\lim \dfrac{n^3-3n}{2n+15} = \lim \dfrac{n^2-3}{2+\frac{15}{n}} = +\infty$

□

Dạng 4 Tính tổng của dãy cấp số nhân lùi vô hạn

Cấp số nhân vô hạn $u_1, u_1q, ..., u_1q^{n-1}, ...$ có công bội q thỏa mãn $|q|<1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đã cho là

$$S = u_1+u_1q+u_1q^2+... = \frac{u_1}{1-q}.$$

Ví dụ 1

Cho cấp số nhân (u_n), với $u_1=1$ và công bội $q=\dfrac{1}{2}$.

a) So sánh $|q|$ với 1.

b) Tính $S_n = u_1+u_2+\cdots+u_n$ từ đó hãy tính $\lim S_n$.

Lời giải.

a) Ta có $|q| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$.

b) Ta có $S_n = \dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q} = \dfrac{1\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}} = 2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

Khi đó $\lim S_n = \lim\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2$.

□

Ví dụ 2

Tính tổng $T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots$

Lời giải.

Các số hạn của tổng lập thành câp số nhân (u_n), có $u_1 = 1, q = \frac{1}{3}$ nên

$$T = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

□

Ví dụ 3

Tính tổng $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$.

Lời giải.

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạng với $u_1 = 1$ và $q = -\frac{1}{2}$. Do đó $S = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{2}{3}$.

□

Ví dụ 4

Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $2{,}222\ldots$ dưới dạng phân số.

Lời giải.

Ta có $2{,}222\ldots = 2 + 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + \ldots = 2 + 2\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2} + 2\cdot 10^{-3} + \ldots$.
Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 2, q = 10^{-1}$ nên

$$2{,}222\ldots = \frac{u_1}{1-q} = \frac{2}{1-\frac{1}{10}} = \frac{20}{9}.$$

□

Ví dụ 5

Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,(3)$ dưới dạng phân số.

Lời giải.

Ta có $0,(3) = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10^2} + \dots + \dfrac{3}{10^n} + \dots = \dfrac{\dfrac{3}{10}}{1 - \dfrac{1}{10}} = \dfrac{1}{3}$. □

Dạng 5 Toán thực tế, liên môn liên quan đến giới hạn dãy số

$$S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}.$$

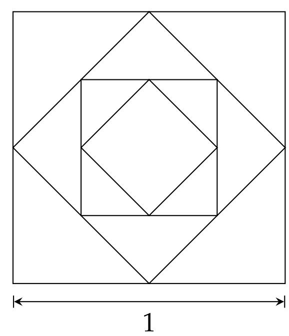
Ví dụ mẫu

Ví dụ 1

Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như hình bên. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

a) Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành từ bước thứ n.

b) Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.



Lời giải.

a) Từ giả thiết suy ra diện tích hình vuông sau bằng $\dfrac{1}{2}$ diện tích hình vuông trước.
Khi đó diện tích của các hình vuông tạo thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_1 = 1$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$.
Diện tích S_n của hình vuông được tạo thành từ bước thứ n là $S_n = S_1 \cdot q^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

b) Tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành là:

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

□

Ví dụ 2

Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là *chu kì bán rã*).

(Nguồn: Đại số và giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n).

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu 2, chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Lời giải.

a) Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì bán rã thứ 1 là $u_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$ kg.

Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì bán rã thứ 2 là $u_2 = \frac{1}{2} \cdot u_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$ kg.

Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì bán rã thứ 3 là $u_3 = \frac{1}{2} \cdot u_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2^3}$ kg.

Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì bán rã thứ n là $u_n = \frac{1}{2^n}$ kg.

b) $\lim u_n = \lim \frac{1}{2^n} = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$

c) Chất phóng xạ sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g $= 10^{-9}$ kg

$$\Leftrightarrow u_n < 10^{-9} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-9} \Leftrightarrow 2^n > 10^9 \Leftrightarrow n \geq 30.$$

Vậy sau ít nhất 30 chu kì bằng $30 \cdot 24000 = 720000$ năm thì khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người nữa.

□

Ví dụ 3

Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$.

C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$,

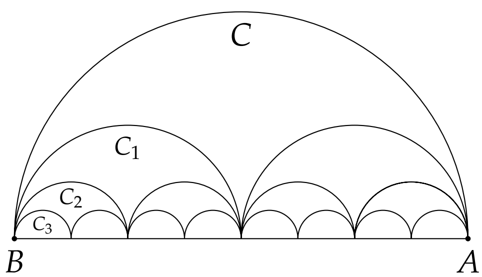
C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}, \cdots$

C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}, \cdots$

Gọi p_n là độ dài của C_n, S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB.

a) Tính p_n, S_n.

b) Tính giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).



Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} p_n &= 2^n \cdot \pi r = 2^n \cdot \pi \cdot \frac{AB}{2 \cdot 2^n} \\ &= \frac{\pi AB}{2} \\ &= \frac{\pi \cdot 2R}{2} \\ &= \pi R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= 2^n \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 \\ &= 2^n \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2\cdot 2^n}\right)^2 \\ &= 2^n \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{2R}{2\cdot 2^n}\right)^2 \\ &= 2^n \cdot \frac{1}{2}\pi\frac{R^2}{(2^n)^2} \\ &= \frac{\pi R^2}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

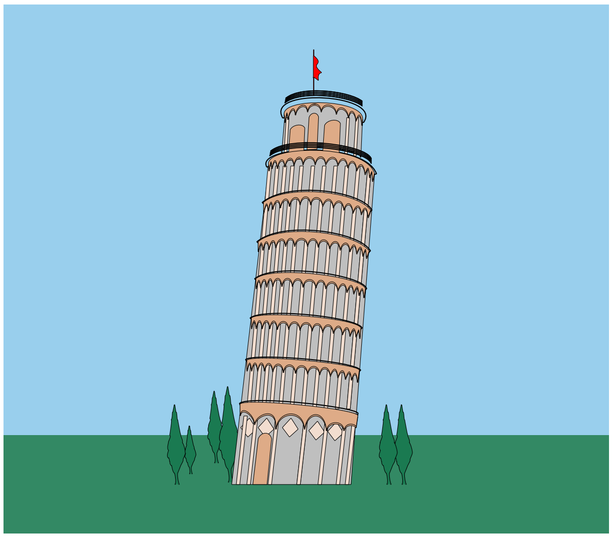
b) $\lim p_n = \lim(\pi R) = \pi R$.

$\lim S_n = \lim \dfrac{\pi R^2}{2^{n+1}} = 0$ (Vì $\lim\left(\pi R^2\right) = \pi R^2$ và $\lim 2^{n+1} = +\infty$).

□

Ví dụ 4

Từ độ cao $55,8$ m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.



Lời giải.

Mỗi khi chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng $\dfrac{1}{10}$ độ cao của lần rơi ngay trước đó và sau đó lại rơi xuống từ độ cao thứ hai này. Do đó, độ dài hành trình của quả bóng kể từ thời điểm rơi ban đầu đến:

Thời điểm chạm đất lần thứ nhất là $d_1 = 55{,}8$.

Thời điềm chạm đất lần thứ hai là $d_2 = 55{,}8 + 2\cdot\dfrac{55{,}8}{10}$.

Thời điểm chạm đất lần thứ ba là $d_3 = 55{,}8 + 2\cdot\dfrac{55{,}8}{10} + 2\cdot\dfrac{55{,}8}{10^2}$.

Thời điểm chạm đất lần thứ tư là $d_4 = 55{,}8 + 2\cdot\dfrac{55{,}8}{10} + 2\cdot\dfrac{55,8}{10^2} + 2\cdot\dfrac{55{,}8}{10^3}$.

...

Thời điểm chạm đất lần thứ n $(n > 1)$ là

$$d_n = 55{,}8 + 2\cdot 55{,}8 + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^2} + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^3} + \ldots + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^{n-1}}.$$

Do đó, quãng đường mà quả bóng đi được kể từ thời điểm rơi đến khi nằm yên trên mặt đất là:

$$d = 55{,}8 + 2.55{,}8 + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^2} + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^3} + \ldots + 2\cdot\frac{55{,}8}{10^{n-1}} + \ldots = \lim d_n.$$

Vì $2 \cdot \frac{55{,}8}{10}; 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^2}; 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^3}; \ldots; 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^{n-1}}; \ldots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{10}$ nên ta có:

$$2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^3} + \ldots + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^{n-1}} + \ldots = \frac{2 \cdot \frac{55{,}8}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 12{,}4.$$

Vậy $d = 55{,}8 + 12{,}4 = 68{,}2$ m. □

Ví dụ 5

Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1, \ldots$, tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n, \ldots$ Gọi $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ và $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$.

a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ và $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$.

Lời giải.

a) Ta có $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ lần lượt là chu vi của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$

$$p_1 = 3a$$
$$p_2 = 3 \cdot \frac{1}{2}a$$
$$\ldots$$
$$p_n = 3 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}a$$

suy ra $\lim p_n = \lim 3 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}a = 0$.

$$S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$S_2 = \frac{1}{4}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$\ldots$$
$$S_n = \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

suy ra $\lim S_n = \lim \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 0$.

b) Dựa vào dữ kiện đề bài suy ra tổng (p_n) là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{2}$ và $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = \lim (p_n) = \frac{p_1}{1-q} = \frac{3a}{1 - \frac{1}{2}} = 6a$.

Dựa vào dữ kiện đề bài suy ra tổng (S_n) là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{4}$ và $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots = \lim (S_n) = \frac{S_1}{1-q} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

□

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+n+1}{2n^2+1}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+n+1}{2n^2+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+2n}-n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1} = \dfrac{2}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1\right)} =$
1.

□

Bài 2

Cho hai dãy số không âm (u_n) và (v_n) với $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^2}{v_n-u_n}$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n+2v_n}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n^2}{v_n-u_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^2}{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n} = \dfrac{\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)^2}{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n} = \dfrac{2^2}{3-2} = 4$;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{u_n+2v_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} 2v_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + 2\lim\limits_{n\to+\infty} v_n} = \sqrt{2+2\cdot 3} = 2\sqrt{2}$.

□

Bài 3

Tìm giới hạn của các dãy số cho bởi

a) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n-1}$.

b) $v_n = \sqrt{2n^2+1}-n$.

Lời giải.

a) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n-1} = n\cdot\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{2-\dfrac{1}{n}}$.

Hơn nữa $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{2-\dfrac{1}{n}} = \dfrac{1+\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2}}{2-\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$.

Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b) $v_n = \sqrt{2n^2+1} - n = n\cdot\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{n^2}}-1\right)$.

Hơn nữa $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ và $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2+\dfrac{1}{n^2}}-1\right) = \sqrt{2}-1 > 0$.

Do đó, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

□

Bài 4

Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số

a) $1{,}(12) = 1{,}121212\ldots$;

b) $3{,}(102) = 3{,}102102102\ldots$

Lời giải.

a) $1{,}(12) = 1 + \dfrac{12}{10^2} + \dfrac{12}{10^4} + \ldots$.

Ta có $\dfrac{12}{10^2} + \dfrac{12}{10^4} + \ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \dfrac{12}{10^2}$ và công bội $q = \dfrac{1}{10^2}$.

Do đó $\dfrac{12}{10^2} + \dfrac{12}{10^4} + \ldots = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{\dfrac{12}{10^2}}{1-\dfrac{1}{10^2}} = \dfrac{4}{33}$.

Vậy $1{,}(12) = 1 + \dfrac{4}{33} = \dfrac{37}{33}$.

b) $3{,}(102) = 3 + \dfrac{102}{10^3} + \dfrac{102}{10^6} + \ldots$.

Ta có $\dfrac{102}{10^3} + \dfrac{102}{10^6} + \ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = \dfrac{102}{10^3}$ và công bội $q = \dfrac{1}{10^3}$.

Do đó $\dfrac{102}{10^3} + \dfrac{102}{10^6} + \ldots = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{\dfrac{102}{10^3}}{1-\dfrac{1}{10^3}} = \dfrac{34}{333}$.

Vậy $3{,}(102) = 1 + \dfrac{102}{333} = \dfrac{1033}{333}$.

□

Bài 5

Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5 . Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

Lời giải.

- Sau ngày thứ nhất hàm lượng thuốc còn là

$$\frac{5}{100}\cdot 150 \text{ (gam)}.$$

- Sau ngày thứ hai hàm lượng thuốc còn là

$$\frac{5}{100}\cdot 150+\left(\frac{5}{100}\right)^2\cdot 150 \text{ (gam)}.$$

- Sau ngày thứ ba hàm lượng thuốc còn là

$$\frac{5}{100}\cdot 150+\left(\frac{5}{100}\right)^2\cdot 150+\left(\frac{5}{100}\right)^3\cdot 150 \text{ (gam)}.$$

- Sau ngày thứ tư hàm lượng thuốc còn là

$$\frac{5}{100}\cdot 150+\left(\frac{5}{100}\right)^2\cdot 150+\left(\frac{5}{100}\right)^3\cdot 150+\left(\frac{5}{100}\right)^4\cdot 150 \text{ (gam)}.$$

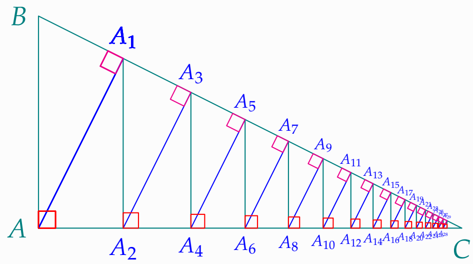
- Sau ngày thứ năm hàm lượng thuốc còn là

$$\begin{aligned}\frac{5}{100}\cdot 150+\left(\frac{5}{100}\right)^2\cdot 150+\left(\frac{5}{100}\right)^3\cdot 150+\left(\frac{5}{100}\right)^4\cdot 150+\left(\frac{5}{100}\right)^5\cdot 150 &= \frac{5}{100}\cdot 150\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{100}\right)^5}{1-\frac{5}{100}}\\ &\approx 7{,}89 \text{ (gam)}.\end{aligned}$$

□

Bài 6

Cho tam giác vuông ABC vuông tại A, có $AB = h$ và góc B bằng α (Hình vẽ bên). Từ A kẻ $AA_1 \perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2 \perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3 \perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3\ldots$ Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α.



Lời giải.

- Xét tam giác vuông ABA_1 có $AA_1 = AB\cdot\sin\alpha = h\sin\alpha$.
- Xét tam giác vuông AA_2A_1 có $\widehat{BAA_1} = \widehat{AA_1A_2}$.
  Mặt khác $\widehat{BAA_1}+\widehat{ABC} = \widehat{AA_1A_2}+\widehat{A_1AA_2} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A_1AA_2} = \widehat{ABC} = \alpha$.
  Suy ra $A_1A_2 = AA_1\cdot\sin\alpha = h\sin^2\alpha$.
- Lập luận tương tự trên ta có $A_{n-1}A_n = h\sin^n\alpha$.

Như vậy $AA_1A_2A_3\ldots = h\sin\alpha + h\sin^2\alpha + h\sin^3\alpha + h\sin^4\alpha\ldots$ là tổng lùi vô hạn của một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = h\sin\alpha$ và công bội là $\sin\alpha$. Do đó $AA_1A_2A_3\ldots = \dfrac{h\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$. □

Bài 7

Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ với $u_n = 3 + \frac{1}{n}; v_n = 5 - \frac{2}{n^2}$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim u_n, \lim v_n$.

b) $\lim(u_n + v_n), \lim(u_n - v_n), \lim(u_n \cdot v_n), \lim \frac{u_n}{v_n}$.

Lời giải.

a) Ta có
$\lim u_n = \lim\left(3 + \frac{1}{n}\right) = \lim 3 + \lim\left(\frac{1}{n}\right) = 3 + 0 = 3.$
$\lim v_n = \lim\left(5 - \frac{2}{n^2}\right) = \lim 5 - \lim\left(\frac{2}{n^2}\right) = 5 - 0 = 5.$

b) Ta có
$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = 3 + 5 = 8.$
$\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n = 3 - 5 = -2.$
$\lim(u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n = 3 \cdot 5 = 15.$
$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{3}{5}.$

□

Bài 8

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{5n+1}{2n}$;

b) $\lim \frac{6n^2+8n+1}{5n^2+3}$;

c) $\lim \frac{\sqrt{n^2+5n+3}}{6n+2}$;

d) $\lim\left(2 - \frac{1}{3^n}\right)$;

e) $\lim \frac{3^n+2^n}{4 \cdot 3^n}$;

f) $\lim \frac{2+\frac{1}{n}}{3^n}$.

Lời giải.

a) Ta có $\lim \frac{5n+1}{2n} = \lim \frac{5+\frac{1}{n}}{2} = \frac{5}{2}$.

b) Ta có $\lim \frac{6n^2+8n+1}{5n^2+3} = \lim \frac{6+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{3}{n^2}} = \frac{6}{5}$.

c) Ta có $\lim \frac{\sqrt{n^2+5n+3}}{6n+2} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}}{6+\frac{2}{n}} = \frac{1}{6}$.

d) Ta có $\lim\left(2 - \frac{1}{3^n}\right) = \lim 2 - \lim\left(\frac{1}{3^n}\right) = 2 - 0 = 2$.

e) Ta có $\lim \dfrac{3^n + 2^n}{4 \cdot 3^n} = \lim \dfrac{1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{4} = \dfrac{1}{4}$.

f) Vì $\lim \left(2 + \dfrac{1}{n}\right) = 2$ và $\lim 3^n = +\infty$ nên $\lim \dfrac{2 + \dfrac{1}{n}}{3^n} = 0$.

□

Bài 9

a) Tính tổng cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_1 = \dfrac{2}{3}, q = -\dfrac{1}{4}$.

b) Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn $1,(6)$ dưới dạng phân số.

Lời giải.

a) Ta có $S = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{\dfrac{2}{3}}{1 - \left(-\dfrac{1}{4}\right)} = \dfrac{8}{15}$.

b) Ta có $1,(6) = 1 + 0,(6) = 1 + \dfrac{6}{10} + \dfrac{6}{10^2} + \cdots + \dfrac{6}{10^n} + \cdots = 1 + \dfrac{\dfrac{6}{10}}{1 - \dfrac{1}{10}} = \dfrac{5}{3}$.

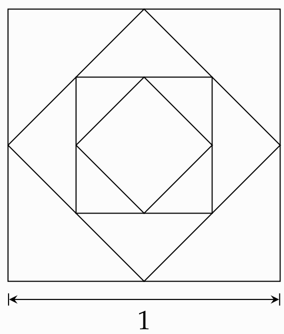
□

Bài 10

Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như hình bên. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

a) Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành từ bước thứ n.

b) Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.



Lời giải.

a) Từ giả thiết suy ra diện tích hình vuông sau bằng $\dfrac{1}{2}$ diện tích hình vuông trước.
Khi đó diện tích của các hình vuông tạo thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_1 = 1$ và công bội $q = \dfrac{1}{2}$.
Diện tích S_n của hình vuông được tạo thành từ bước thứ n là $S_n = S_1 \cdot q^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

b) Tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành là:

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2.$$

Bài 11

Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là *chu kì bán rã*).

(Nguồn: Đại số và giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n).

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu b, chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Lời giải.

a) Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì bán rã thứ 1 là $u_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 1 = 1$ kg.

Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì bán rã thứ 2 là $u_2 = \dfrac{1}{2} \cdot u_1 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^2}$ kg.

Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì bán rã thứ 3 là $u_3 = \dfrac{1}{2} \cdot u_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2^3}$ kg.

Khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì bán rã thứ n là $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ kg.

b) $\lim u_n = \lim \dfrac{1}{2^n} = \lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

c) Chất phóng xạ sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g $= 10^{-9}$ kg

$$\Leftrightarrow u_n < 10^{-9} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-9} \Leftrightarrow 2^n > 10^9 \Leftrightarrow n \geq 30.$$

Vậy sau ít nhất 30 chu kì bằng $30 \cdot 24000 = 720000$ năm thì khối lượng phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại với con người nữa.

Bài 12

Gọi C là nữa đường tròn đường kính $AB = 2R$.

C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{2}$,

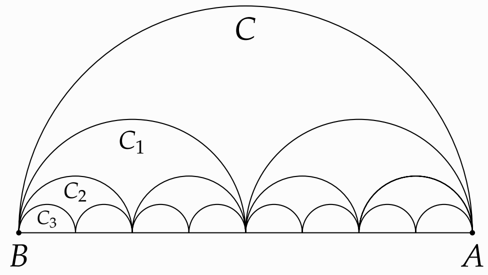
C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{4}, \cdots$

C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\dfrac{AB}{2^n}, \cdots$

Gọi p_n là độ dài của C_n, S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB.

a) Tính p_n, S_n.

b) Tính giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).



Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned} p_n &= 2^n \cdot \pi r = 2^n \cdot \pi \cdot \frac{AB}{2 \cdot 2^n} \\ &= \frac{\pi AB}{2} \\ &= \frac{\pi \cdot 2R}{2} \\ &= \pi R. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= 2^n \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 \\ &= 2^n \cdot \frac{1}{2}\pi \left(\frac{AB}{2 \cdot 2^n}\right)^2 \\ &= 2^n \cdot \frac{1}{2}\pi \left(\frac{2R}{2 \cdot 2^n}\right)^2 \\ &= 2^n \cdot \frac{1}{2}\pi \frac{R^2}{(2^n)^2} \\ &= \frac{\pi R^2}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

b) $\lim p_n = \lim (\pi R) = \pi R$.

$\lim S_n = \lim \dfrac{\pi R^2}{2^{n+1}} = 0$ (Vì $\lim \left(\pi R^2\right) = \pi R^2$ và $\lim 2^{n+1} = +\infty$).

□

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	31	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	32	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	33	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	34	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	35	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Giá trị của giới hạn $\lim\left(4+\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$ bằng

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

Lời giải.

Ta có $0 \leqslant \left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right| \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n} \to 0 \Rightarrow \lim\dfrac{(-1)^n}{n+1}=0 \Rightarrow \lim\left(4+\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)=4$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 2

Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{-3}{4n^2-2n+1}$ là

Ⓐ $-\dfrac{3}{4}$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 0. Ⓓ -1.

Lời giải.

Ta có $\lim\dfrac{-3}{4n^2-2n+1}=\lim\dfrac{\dfrac{-3}{n^2}}{4-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{0}{4}=0$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 3

Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{n+2n^2}{n^3+3n-1}$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ $\dfrac{2}{3}$. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{n+2n^2}{n^3+3n-1} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{3}{n^2-\dfrac{1}{n^3}}} = \dfrac{0}{1} = 0.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 4

Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}$ là

(A) $+\infty$. (B) 0. (C) $\dfrac{2}{7}$. (D) $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1} = \lim \dfrac{\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}{4+\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}} = \dfrac{0}{4} = 0.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 5

Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}$.

(A) $L = \dfrac{3}{2}$. (B) $L = \dfrac{1}{2}$. (C) $L = 2$. (D) $L = 1$.

Lời giải.

Ta có $L = \lim \dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1} = \lim \dfrac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 6

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

(A) $a = -4$. (B) $a = 4$. (C) $a = 3$. (D) $a = 2$.

Lời giải.

$2 = \lim u_n = \lim \dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5} = \lim \dfrac{4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{a+\dfrac{5}{n^2}} = \dfrac{4}{a}\,(a \neq 0) \Leftrightarrow a = 2.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 7

Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

(A) $\lim \dfrac{3+2n^3}{2n^2-1}$. (B) $\lim \dfrac{2n^2-3}{-2n^3-4}$. (C) $\lim \dfrac{2n-3n^3}{-2n^2-1}$. (D) $\lim \dfrac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}$.

Lời giải.

$\lim \dfrac{3+2n^3}{2n^2-1} = +\infty$: « bậc tử » > « bậc mẫu » và $a_m b_k = 2\cdot 2 = 4 > 0$.

$\lim \dfrac{2n^2-3}{-2n^3-4} = 0$: « bậc tử » < « bậc mẫu ».

$\lim \dfrac{2n-3n^3}{-2n^2-1} = +\infty$: « bậc tử » > « bậc mẫu » và $a_n b_k = (-3)\cdot(-2) > 0$.

$\lim \dfrac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$: « bậc tử » = « bậc mẫu » và $\dfrac{a_m}{b_k} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8

Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

(A) $u_n = \dfrac{1+n^2}{5n+5}$. (B) $u_n = \dfrac{n^2-2}{5n+5n^3}$. (C) $u_n = \dfrac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. (D) $\dfrac{1+2n}{5n+5n^2}$.

Lời giải.

$$\lim u_n = \lim \frac{1+n^2}{5n+5} = \lim n \cdot \frac{\frac{1}{n^2}+1}{5+\frac{5}{n}} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \dfrac{\frac{1}{n^2}+1}{5+\frac{5}{n}} = \dfrac{a_m}{b_k} = \dfrac{1}{5} > 0. \end{cases}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 9

Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

(A) $\dfrac{1+2n}{5n+5n^2}$. (B) $u_n = \dfrac{n^3+2n-1}{-n+2n^3}$.

(C) $u_n = \dfrac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$. (D) $u_n = \dfrac{n^2-2n}{5n+1}$.

Lời giải.

$u_n = \dfrac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$: « bậc tử » > « bậc mẫu » và $a_m b_k = -3.2 = -6 < 0 \Rightarrow \lim u_n = -\infty$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10

Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n}{2}}{n^2+1}$ bằng

(A) $\dfrac{1}{8}$. (B) 1. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{3}{2}+\cdots+\dfrac{n}{2} = \dfrac{1}{2}(1+2+\cdots+n) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$. Do đó

$\lim \dfrac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n}{2}}{n^2+1} = \lim \dfrac{n^2+n}{4n^2+4} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11

Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là

Ⓐ $u_1 = 3$. Ⓑ $u_1 = 4$. Ⓒ $u_1 = \frac{9}{2}$. Ⓓ $u_1 = 5$.

Lời giải.

Gọi q là công bội của cấp số nhân, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{u_1}{1-q} = 2 \\ S_3 = u_1 \cdot \dfrac{1-q^3}{1-q} = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2(1-q) \\ 2\left(1-q^3\right) = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -\dfrac{1}{2} \\ u_1 = 2\left(1+\dfrac{1}{2}\right) = 3. \end{cases}$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 12

Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-3}} + \cdots$.

Ⓐ $S = \frac{27}{2}$. Ⓑ $S = 14$. Ⓒ $S = 16$. Ⓓ $S = 15$.

Lời giải.

Ta có $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-3}} + \cdots = 9\left(\underbrace{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} + \cdots}_{\text{CSN: } u_1=1,\ q=\frac{1}{3}}\right) = 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{27}{2}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 13

Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1}\right)$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ 5.

Lời giải.

$$\lim\left(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1}\right) = \lim \frac{4}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1}} = 0.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 14

Giá trị của giới hạn $\lim\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right)$ bằng

Ⓐ 0. Ⓑ $\frac{1}{3}$. Ⓒ $\frac{1}{2}$. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}=\dfrac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n-1)=\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{(n-1)(1+n-1)}{2}=\dfrac{n^2-n}{2n^2}$.

Do đó $\lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)=\lim\dfrac{n^2-n}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 15

Giá trị của giới hạn $\lim\left(\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}\right)$ bằng

(A) 0. (B) $\dfrac{1}{3}$. (C) $\dfrac{2}{3}$. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $1+3+5+\cdots(2n-1)=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$ nên

$\lim\left(\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}\right)=\lim\dfrac{n^2}{3n^2+4}=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16

Giá trị của giới hạn $\lim\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$ là

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) 1. (C) 0. (D) $-\infty$.

Lời giải.

$\lim\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)=\lim\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=\lim\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17

Tính tổng $S=1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}+\cdots+\dfrac{2^n}{3^n}+\cdots$.

(A) $S=3$. (B) $S=4$. (C) $S=5$. (D) $S=6$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}+\cdots=\underbrace{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\cdots}_{\text{CSNlvh: } u_1=1,\ q=\frac{2}{3}}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 18

Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)$ là

(A) $-\dfrac{1}{2}$. (B) 0. (C) 1. (D) $-\infty$.

Lời giải.

$$\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)=\lim\frac{-n+1}{\sqrt{n^2-n+1}+n}=\lim\frac{-1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1}=-\frac{1}{2}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 19

Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}5111\cdots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính tổng $T=a+b$.

(A) 17. (B) 68. (C) 133. (D) 137.

Lời giải.

Ta có $0{,}5111\cdots=0{,}5+10^{-2}+10^{-3}+\cdots+10^{-n}+\cdots$ Dãy số $10^{-2};10^{-3};\ldots;10^{-n};\ldots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng $u_1=10^{-2}$, công bội bằng $q=10^{-1}$ nên $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{10^{-2}}{1-10^{-1}}=\frac{1}{90}$. Vậy $0{,}5111\ldots=0{,}5+S=\frac{46}{90}=\frac{23}{45}\Rightarrow\begin{cases}a=23\\b=45\end{cases}\Rightarrow T=a+b=68.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 20

Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A=0{,}353535\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T=ab$.

(A) 3456. (B) 3465. (C) 3645. (D) 3546.

Lời giải.

Ta có $0{,}353535\ldots=0{,}35+0{,}0035+\cdots=\frac{35}{10^2}+\frac{35}{10^4}+\cdots+\frac{35}{10^n}+\cdots$

Dãy số $\frac{35}{10^2};\frac{35}{10^4};\ldots;\frac{35}{10^n};\ldots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng $u_1=\frac{35}{10^2}$, công bội bằng $q=10^{-2}$ nên $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{\frac{35}{10^2}}{1-10^{-2}}=\frac{35}{99}$.

Vậy $0{,}353535\ldots=\frac{35}{99}\Rightarrow\begin{cases}a=35\\b=99\end{cases}\Rightarrow T=ab=3465.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 21

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=\frac{1}{n+1}$ và $v_n=\frac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim\frac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $\lim\frac{v_n}{u_n}=\lim\frac{n+1}{n+2}=\lim\frac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}=\frac{1}{1}=1.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 22

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

A $a = 10$. **B** $a = 8$. **C** $a = 6$. **D** $a = 4$.

Lời giải.

Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{an+4}{5n+3} = \lim \dfrac{a+\dfrac{4}{n}}{5+\dfrac{3}{n}} = \dfrac{a}{5}$. Khi đó $\lim u_n = 2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{5} = 2 \Leftrightarrow a = 10$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b là

A b là một số thực tùy ý. **B** $b = 2$.

C không tồn tại b. **D** $b = 5$.

Lời giải.

Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{2n+b}{5n+3} = \lim \dfrac{2+\dfrac{b}{n}}{5+\dfrac{3}{n}} = \dfrac{2}{5}$ $(\forall b \in \mathbb{R})$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 24

Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L = \lim \dfrac{5n^2 - 3an^4}{(1-a)\,n^4 + 2n + 1} > 0$.

A $a \leqslant 0; a \geqslant 1$. **B** $0 < a < 1$. **C** $a < 0; a > 1$. **D** $0 \leqslant a < 1$.

Lời giải.

$$L = \lim \dfrac{5n^2 - 3an^4}{(1-a)\,n^4 + 2n + 1} = \lim \dfrac{\dfrac{5}{n^2} - 3a}{(1-a) + \dfrac{2}{n^3} + \dfrac{1}{n^4}} = \dfrac{-3a}{(1-a)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 1. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 25

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10; 10)$ để $L = \lim\left(5n - 3\left(a^2-2\right)n^3\right) = -\infty$?

A 19. **B** 3. **C** 5. **D** 10.

Lời giải.

Ta có $\lim\left(5n - 3\left(a^2-2\right)n^3\right) = \lim n^3\left(\dfrac{5}{n^2} - 3\left(a^2-2\right)\right) = -\infty$

$\Leftrightarrow \lim\left(\dfrac{5}{n^2} - 3\left(a^2-2\right)\right) = a^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$.

Vì $a \in \mathbb{Z}, a \in (-10; 10)$ nên $a = -1; 0; 1$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 26

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt{2}\right)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\lim u_n = -\infty$.
(B) $\lim u_n = \dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$.
(C) $\lim u_n = +\infty$.
(D) Không tồn tại $\lim u_n$.

Lời giải.

Vì $\sqrt{2}, \left(\sqrt{2}\right)^2, \ldots, \left(\sqrt{2}\right)^n$ lập thành cấp số nhân có $u_1 = \sqrt{2} = q$ nên

$$u_n = \sqrt{2} \cdot \frac{1 - \left(\sqrt{2}\right)^n}{1 - \sqrt{2}} = \left(2 - \sqrt{2}\right)\left[\left(\sqrt{2}\right)^n - 1\right] \Rightarrow \lim u_n = +\infty \text{ vì } \begin{cases} a = 2 - \sqrt{2} > 0 \\ q = \sqrt{2} > 1. \end{cases}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 27

Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}, n \geqslant 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

(A) $\lim u_n = -1$.
(B) $\lim u_n = 0$.
(C) $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$.
(D) $\lim u_n = 1$.

Lời giải.

Giả sử $\lim u_n = a$ thì ta có

$$a = \lim u_{n+1} = \lim \frac{1}{2 - u_n} = \frac{1}{2 - a} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ a(2-a) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 2 \\ a^2 - 2a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 28

Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}, n \geqslant 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

(A) $\lim u_n = 1$.
(B) $\lim u_n = 0$.
(C) $\lim u_n = 2$.
(D) $\lim u_n = +\infty$.

Lời giải.

Giả sử $\lim u_n = a$ thì ta có

$$a = \lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n + 1}{2} = \frac{a+1}{2} \Leftrightarrow a = 1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 29

Biết rằng $\lim \dfrac{\sqrt[3]{an^3 + 5n^2 - 7}}{\sqrt{3n^2 - n + 2}} = b\sqrt{3} + c$ với a, b, c là các tham số. Tính giá trị của biểu thức $P = \dfrac{a+c}{b^3}$.

(A) $P=3$. (B) $P=\dfrac{1}{3}$. (C) $P=2$. (D) $P=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}} = \lim \dfrac{\sqrt[3]{a+\dfrac{5}{n}-\dfrac{7}{n^3}}}{\sqrt{3-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}} = \dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3} = b\sqrt{3}+c \Rightarrow \begin{cases}\sqrt[3]{a}=\dfrac{b}{3}\\ c=0\end{cases} \Rightarrow P=\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 30

Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)\,n+1}\right)=0$?

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)\,n+1}\right) = \lim \dfrac{\left(a^2-a-2\right)n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$

$= \lim \dfrac{a^2-a-2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{a^2-a-2}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1\\ a=2.\end{array}\right.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 31

Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n = -1$.

(A) 3. (B) 2. (C) -2. (D) -3.

Lời giải.

$-1=\lim u_n = \lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}\right) = \lim \dfrac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}$

$= \lim \dfrac{a+\dfrac{4}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow a=-2.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 32

Biết rằng $\lim\left(\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5\cdot 2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}+\dfrac{2n^2+3}{n^2-1}\right)=\dfrac{a\sqrt{5}}{b}+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $S=a^2+b^2+c^2$.

(A) $S=26$. (B) $S=30$. (C) $S=21$. (D) $S=31$.

Lời giải.

$$\lim\left(\frac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5\cdot 2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}+\frac{2n^2+3}{n^2-1}\right)=\lim\left(\frac{1-2\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}{5\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n+\sqrt{5}-3\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}+\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}+2=\frac{\sqrt{5}}{5}+2.$$

Vậy $S=1^2+5^2+2^2=30$.

Chọn đáp án (B)

Câu 33

Tìm tất cả giá trị nguyên của a thuộc $(0;2018)$ để $\lim\sqrt[4]{\dfrac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}}\leqslant\dfrac{1}{1024}$.

(A) 2007. (B) 2008. (C) 2017. (D) 2016.

Lời giải.

$$\lim\sqrt[4]{\frac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}}=\lim\sqrt[4]{\frac{1+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+4^a}}=\sqrt{\frac{1}{4^a}}=\sqrt{\frac{1}{(2^a)^2}}=\frac{1}{2^a}\leqslant\frac{1}{1024}\Leftrightarrow 2^a\geqslant 1024=2^{10}$$

$\Leftrightarrow a\geqslant 10$.

Mà $a\in(0;2018)$ và $a\in\mathbb{Z}$ nên $a\in\{10;11;\ldots;2017\}\Rightarrow$có 2008 giá trị a.

Chọn đáp án (A)

Câu 34

Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}$ là một số nguyên?

(A) 1. (B) 3. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\lim\dfrac{an^2-1}{3+n^2}=\lim\dfrac{a-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}+1}=a\\ \lim\dfrac{1}{2^n}=\lim\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0\end{cases}\Rightarrow\lim\sqrt{3+\dfrac{an^2-1}{3+n^2}-\dfrac{1}{2^n}}=\sqrt{3+a}.$

Ta có $\begin{cases}a\in(0;20),a\in\mathbb{Z}\\ \sqrt{a+3}\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow a\in\{1;6;13\}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 35

Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ $(|a|<1,|b|<1)$ bằng

(A) 0. (B) $\dfrac{1-b}{1-a}$. (C) $\dfrac{1-a}{1-b}$. (D) Không tồn tại.

Lời giải.

Ta có $1+a+a^2+\cdots+a^n$ là tổng $n+1$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu là 1 và công bội là a, nên $1+a+a^2+\cdots+a^n=\dfrac{1\cdot\left(1-a^{n+1}\right)}{1-a}=\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Tương tự: $1+b+b^2+\cdots+b^n=\dfrac{1\left(1-b^{n+1}\right)}{1-b}=\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}$.

Do đó $\lim\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}=\lim\dfrac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\lim\dfrac{1-b}{1-a}\cdot\dfrac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}=\dfrac{1-b}{1-a}$ $(|a|<1,|b|<1)$.

Chọn đáp án (B) □

—HẾT—

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Định nghĩa 2.1. Giả sử $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$, có thể trừ điểm x_0. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (a;b)$, $x_n \neq x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

Ví dụ 1

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$. Chứng tỏ rằng $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Lấy dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n \neq 1$ và $x_n \to 1$. Ta có $f(x_n) = \dfrac{x_n - 1}{x_n^2 - 1} = \dfrac{1}{x_n + 1}$.

Do đó $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{x_n + 1} = \dfrac{1}{2}$. Vậy $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{2}$. □

Tương tự đối với dãy số, ta có các quy tắc tính giới hạn của hàm số tại một điểm như sau:

a) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ thì

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M;$$
$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M;$$
$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M;$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \text{ nếu } M \neq 0.$$

b) Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Ví dụ 2

Cho $f(x) = x - 1$ và $g(x) = x^3$. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to 1} [3f(x) - g(x)]$.

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{[f(x)]^2}{g(x)}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x - 1) = \lim\limits_{x \to 1} x - \lim\limits_{x \to 1} 1 = 1 - 1 = 0$. Mặt khác, ta thấy $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^3 = 1$.

a) Ta có

$$\lim_{x \to 1} [3f(x) - g(x)] = \lim_{x \to 1} [3f(x)] - \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} 3 \cdot \lim_{x \to 1} f(x) - \lim_{x \to 1} g(x) = 3 \cdot 0 - 1 = -1.$$

b) Ta có

$$\lim_{x \to 1} \frac{[f(x)]^2}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} [f(x)]^2}{\lim\limits_{x \to 1} g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to 1} f(x)}{\lim\limits_{x \to 1} g(x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Ví dụ 3

Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$.

Lời giải.

Do mẫu thức có giới hạn là 0 khi $x\to 0$ nên ta không thể áp dụng ngay quy tắc tính giới hạn của thương hai hàm số.

Chú ý rằng $\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\dfrac{(\sqrt{x+9})^2-3^2}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\dfrac{x}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}[\sqrt{x+9}+3]}=\dfrac{1}{6}$. □

2. Nhận biết giới hạn một bên

Định nghĩa 2.2.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$. Ta nói số L là giới hạn bên phải của $f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L$.
- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$. Ta nói số L là giới hạn bên trái của $f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn a $<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=L$.

Ví dụ 4

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{nếu } 0<x<1\\ x+1 & \text{nếu } 1\le x<2.\end{cases}$

Tính $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$.

Lời giải.

Với dãy số (x_n) bất kì sao cho $0<x_n<1$ và $x_n\to 1$, ta có $f(x_n)=x_n^2$.
Do đó $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=1$.
Tương tự, với dãy số (x_n) bất kì mà $1<x_n<2$, $x_n\to 1$, ta có $f(x_n)=x_n+1$, cho nên $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=2$. □

Định lý 2.1. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=L$.

3. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

Định nghĩa 2.3.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>$ a và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < b$ và $x_n \to -\infty$, ta có $f(x_n) \to L$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to -\infty$.

Ví dụ 5

Cho $f(x) = 2 + \dfrac{4}{x-1}$. Sử dụng định nghĩa, tìm $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Lời giải.

Lấy dãy (x_n) bất kì sao cho $x_n > 1$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) = 2 + \dfrac{4}{x_n - 1}$.

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 2$.

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

Tương tự, ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$. □

Định lý 2.2.

- Các quy tắc tính giới hạn hữu hạn tại một điểm cũng đúng cho giới hạn hữu hạn tại vô cực.
- Với c là hằng số, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} c = c$, $\lim\limits_{x\to-\infty} c = c$.
- Với k là một số nguyên dương, ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$.

Ví dụ 6

Tính $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right) \\
&= -\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\
&= -\sqrt{\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} \\
&= -\sqrt{1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}} = -1.
\end{aligned}$$

□

4. Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm

Định nghĩa 2.4. Giả sử khoảng $(a; b)$ chứa x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b) \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x \to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in (a; b) \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to +\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $-\infty$ khi $x \to x_0$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} [-f(x)] = +\infty$.

Ví dụ 7

Tính $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{|x-1|}$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{|x-1|}$. Lấy dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n \neq 1$, $x_n \to 1$.
Khi đó, $|x_n - 1| \to 0$.
Do đó $f(x_n) = \dfrac{1}{|x_n - 1|} \to +\infty$. Vậy $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{|x-1|} = +\infty$. □

Định lý 2.3.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x \to x_0$ về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $x_0 < x_n < b$, $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to +\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Ta nói hàm số $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi $x \to x_0$ về bên trái nếu với dãy số (x_n) bất kì thoả mãn $a < x_n < x_0$, $x_n \to x_0$, ta có $f(x_n) \to +\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$.
- Các giới hạn một bên $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự.

Ví dụ 8

Trong Thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?

Lời giải.

Từ công thức khối lượng

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

ta thấy m là một hàm số của v, với tập xác định là nửa khoảng $[0; c)$. Rõ ràng khi v tiến gần tới vận tốc ánh sáng, tức là $v \to c^-$, ta có $\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \to 0$. Do đó $\lim\limits_{v \to c^-} m(v) = +\infty$, nghĩa là khối lượng m của vật trở nên vô cùng lớn khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng. □

Các giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự như giới hạn của hàm số $f(x)$ tại vô cực.
Chẳng hạn: Ta nói hàm số $y = f(x)$, xác định trên khoảng $(a; +\infty)$, có giới hạn là $-\infty$ khi $x \to +\infty$

nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to -\infty$, kí hiệu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \to -\infty$ khi $x \to +\infty$.
Một số giới hạn đặc biệt:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ *với k nguyên dương;*
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ *với k là số chẵn;*
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ *với k là số lẻ.*

5. Một số quy tắc tính giới hạn vô cực

Chú ý các quy tắc tính giới hạn hữu hạn không còn đúng cho giới hạn vô cực.
Ta có một số quy tắc tính giới hạn của tích và thương hai hàm số khi một trong hai hàm số đó có giới hạn vô cực.

- Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x) \cdot g(x)$.

Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$). Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

- Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tuỳ ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
	0	$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
	0	$-$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$.

Ví dụ 9

Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x^2}$.

Lời giải.

Ta sử dụng quy tắc tìm giới hạn của thương. Rõ ràng, giới hạn của tử số $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$.
Ngoài ra, mẫu số nhận giá trị dương với mọi $x\neq 0$ và $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$.

Do vậy $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x^2}=+\infty$. □

Ví dụ 10

Tính $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x(1-x)}$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x(1-x)}$.

Lời giải.

Viết $\dfrac{1}{x(1-x)}=\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{1-x}$, ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1>0$.
Hơn nữa $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{1-x}=-\infty$ do $1-x<0$ khi $x>1$.
Áp dụng quy tắc tìm giới hạn của tích, ta được $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x(1-x)}=-\infty$.
Lí luận tương tự, ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x(1-x)}=+\infty$. □

B MỘT SỐ DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Thay số trực tiếp

Ví dụ 1

Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4x+2)$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-2}{2x+1}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4x+2)=\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}(4x)+\lim\limits_{x\to 1}2=1^2-4\lim\limits_{x\to 1}x+2=1-4\cdot 1+2=-1$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-2}{2x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(3x-2)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)}=\dfrac{3\lim\limits_{x\to 2}x-2}{2\lim\limits_{x\to 2}x+1}=\dfrac{3\cdot 2-2}{2\cdot 2+1}=\dfrac{4}{5}$. □

Ví dụ 2

Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2}{x^3-x-6}}$.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{2x^4+3x+2}{x^2-x+2}}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2}{x^3-x-6}}$; do $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2}{x^3-x-6}=\dfrac{3^2}{3^3-3-6}=\dfrac{1}{2}>0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2}{x^3-x-6}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{2x^4+3x+2}{x^2-x+2}}$; do $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^4+3x+2}{x^2-x+2}=\dfrac{7}{2}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2}\sqrt[3]{\dfrac{2x^4+3x+2}{x^2-x+2}}=\sqrt[3]{\dfrac{7}{2}}=\dfrac{\sqrt[3]{28}}{2}$.

□

Ví dụ 3

Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-16}{x-1}=24$. Tính giới hạn sau

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-16}{(x-1)\left(\sqrt{2f(x)+4}+6\right)}.$$

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-16}{x-1}=24$ nên $f(1)=16$. Khi đó

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-16}{(x-1)\left(\sqrt{2f(x)+4}+6\right)}=\frac{1}{12}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-16}{x-1}=2.$$

□

Dạng 2 Phương pháp đặt thừa số chung - kết quả hữu hạn

- Nếu tam thức bậc hai ax^2+bx+c có hai nghiệm x_1, x_2 thì $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.
- $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$.
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}c=c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$ với c là hằng số và $k\in\mathbb{N}$.
- $a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b} & a\geq 0\\ -\sqrt{a^2b} & a<0.\end{cases}$

Ví dụ 1

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$. $I=6$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$. □

Ví dụ 2

Tính giới hạn $I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$. $I=-1$.

Lời giải.

$I=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-3)=-1$. □

Ví dụ 3

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4+7}{x^4+1}$. 1.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4+7}{x^4+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(1+\frac{7}{x^4}\right)}{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{7}{x^4}}{1+\frac{1}{x^4}}=1.$$

□

Ví dụ 4

Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}$. 0.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^4+x^2-3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{2+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{2+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}}}=0.$$

□

Ví dụ 5

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$. -1.

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-1.$$

□

Ví dụ 6

Cho m,n là các số thực khác 0. Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+mx+n}{x+5}=3$, hãy tìm mn. $mn=520$.

Lời giải.

Vì $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+mx+n}{x-5}=3$ nên $x=-5$ là nghiệm của phương trình $x^2+mx+n=0$.
$\Rightarrow -5m+n+25=0\Leftrightarrow n=5m-25$.

$$\begin{aligned}\text{Khi đó } \lim\limits_{x\to-5}\frac{x^2+mx+n}{x-1}&=\lim\limits_{x\to-5}\frac{x^2+mx+5m-25}{x+5}\\&=\lim\limits_{x\to-5}\frac{(x+5)(x-5+m)}{x+5}\\&=\lim\limits_{x\to-5}(x-5+m)=m-10.\end{aligned}$$

Ta có $m-10=3\Leftrightarrow m=13\Rightarrow n=40$.
Vậy $mn=13\cdot40=520$. □

Ví dụ 7

Tìm số thực a thỏa mãn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2024}{2x+2023}=\dfrac{1}{2}$. $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2x^2+3}+2024}{2x+2023}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a\sqrt{2+\dfrac{3}{x^2}}+\dfrac{2024}{x}}{2+\dfrac{2023}{x}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. □

Dạng 3 Phương pháp đặt thừa số chung - kết quả vô cực

Để tìm giới hạn của hàm số ta cần nhớ

- $\lim\limits_{x\to+\infty}x^k=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=\begin{cases}+\infty, k=2n\\ -\infty, k=2n+1.\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}c=c$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

Ví dụ 1

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3$. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$. □

Ví dụ 2

Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x+1\right)$. $-\infty$

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)\right]=-\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=1>0$. □

Ví dụ 3

Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^5-3x^3+x+1\right)$. $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4x^5-3x^3+x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5\left(-4-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right)=+\infty$.

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-4-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right)=-4<0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^5=-\infty\end{cases}$ □

Ví dụ 4

Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+2}{(x+3)^2}$. $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+2}{(x+3)^2} = -\infty$.

Vì $\lim\limits_{x \to -3} (x+2) = -3+2 = -1 < 0$, $\lim\limits_{x \to -3} (x+3)^2 = 0$ và $(x+3)^2 > 0$ khi $x \neq -3$. □

Ví dụ 5

Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để $I = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[(m^2-1)x^3 + 2x\right] = -\infty$. $m = 0$

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(m^2-1\right)x^3 + 2x\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left[m^2 - 1 + \dfrac{2}{x^2}\right]$.

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ nên $I = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left[m^2 - 1 + \dfrac{2}{x^2}\right] < 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$. □

Dạng 4 Phương pháp lượng liên hợp kết quả hữu hạn

Ví dụ 1

Cho $P = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$. Tính P.

Ⓐ $P = \dfrac{1}{4}$. Ⓑ $P = \dfrac{1}{2}$. Ⓒ $P = 1$. Ⓓ $P = 0$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \dfrac{1}{4}$.

Vậy $P = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án A □

Ví dụ 2

Cho m là hằng số. Tính $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+mx-x-m}$.

Ⓐ $\dfrac{1}{m}$. Ⓑ 1. Ⓒ $\dfrac{1}{4}$. Ⓓ $\dfrac{1}{4(m+1)}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+mx-x-m} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)(x+m)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \dfrac{1}{4(m+1)}$.

Chọn đáp án D □

Ví dụ 3

Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right)=a$. Tính $2a+1$.

Ⓐ -1. Ⓑ -3. Ⓒ 0. Ⓓ 3.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x+1\right) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2+1}-(x+1)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}\\ &= 1\\ \Rightarrow\ & a=1.\end{aligned}$$

Vậy $2a+1=3$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Ví dụ 4

Biết $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-(ax+b)\right)=0$. Tính giá trị biểu thức $T=a-4b$.

Ⓐ $T=-2$. Ⓑ $T=5$. Ⓒ $T=-1$. Ⓓ $T=3$.

Lời giải.

Từ giả thiết, đường thẳng $y=ax+b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x^2-3x+1}$, khi $x\to+\infty$. Từ đó,

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-3x+1}}{x}=2,\\ b &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+1}-2x\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+1}{\sqrt{4x^2-3x+1}+2x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{1}{x}}{\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}=-\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Suy ra $a-4b=5$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Ví dụ 5

Cho $f(x)$ là hàm đa thức thỏa $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)+1}{x-2}=a$ và tồn tại $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{f(x)+2x+1}-x}{x^2-4}=T$. Chọn đẳng thức đúng

Ⓐ $T=\dfrac{a+2}{16}$. Ⓑ $T=\dfrac{a+2}{8}$. Ⓒ $T=\dfrac{a-2}{8}$. Ⓓ $T=\dfrac{a-2}{16}$.

Lời giải.

Vì $f(x)$ là đa thức và $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)+1}{x-2}=a$ nên suy ra $f(x)+1=(x-2)g(x), g(2)=a$.

Do đó

$$\begin{aligned} T &= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{(x-2)g(x)+2x}-x}{x^2-4} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)g(x)+2x-x^2}{(x-2)(x+2)\left[\sqrt{(x-2)g(x)+2x}+x\right]} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{g(x)-x}{(x+2)\left[\sqrt{(x-2)g(x)+2x}+x\right]} \\ &= \frac{a-2}{16}. \end{aligned}$$

Chọn đáp án D □

Dạng 5 Giới hạn một bên

Ví dụ 1

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}}$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}} = 0$

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(2-x)(1-x)}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to 2^-} (1-x)\sqrt{2-x} = 0.$$

□

Ví dụ 2

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{x^3+1}{x^3+2x^2+x}$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{x^3+1}{x^3+2x^2+x} = -\infty$

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{x^3+1}{x^3+2x^2+x} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)^2} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{x^2-x+1}{x(x+1)}.$$

Khi $x \to (-1)^+$ thì $\begin{cases} x+1 \to 0 \\ x+1 > 0 \\ \dfrac{x^2-x+1}{x} \to -3 \end{cases}$ suy ra $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{x^2-x+1}{x(x+1)} = -\infty$.

Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{x^3+1}{x^3+2x^2+x} = -\infty$. □

Ví dụ 3

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & \text{khi } -3 \le x < 3 \\ 1 & \text{khi } x = 3 \\ \sqrt{x^2-9} & \text{khi } x > 3. \end{cases}$

Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \to 3$ hay không?

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0$

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \sqrt{x^2-9} = 0$.
Suy ra $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 0$.
Vậy $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0$. □

Ví dụ 4

Ta gọi phần nguyên của số thực x là số nguyên lớn nhất không lớn hơn x và kí hiệu nó là $[x]$.
Ví dụ $[5] = 5$; $[3,12] = 3$; $[-2,725] = -3$.
Tìm $\lim\limits_{x\to 1^-} [x]$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} [x]$. Giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}[x]$ có tồn tại hay không?

$\lim\limits_{x\to 1^-} [x] = 0$; $\lim\limits_{x\to 1^+} [x] = 1$

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} [x] = 0$; $\lim\limits_{x\to 1^+} [x] = 1$.
Suy ra $\lim\limits_{x\to 1^+} [x] \neq \lim\limits_{x\to 1^-} [x]$.
Vậy giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}[x]$ không tồn tại. □

Ví dụ 5

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{2x}}{4-x^2} & \text{khi } x < 2 \\ x^2 - x + m & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ (m là tham số).
Tìm m để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \to 2$.

$m = -\dfrac{17}{8}$

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-\sqrt{2x}}{4-x^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x(x-2)}{-(x-2)(x+2)(x+\sqrt{2x})} = -\frac{1}{8};$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2 - x + m) = 2 + m.$$

Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \to 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{8} = 2 + m \Leftrightarrow m = -\frac{17}{8}.$$

□

Dạng 6 Toán thực tế, liên môn về hàm số liên tục

Ví dụ 1

Tính $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x\sqrt{x}} - x + 1\right)$.

(A) $+\infty$. (B) 4. (C) $-\infty$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x\sqrt{x}}-x+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x\sqrt{x}-x^2}{\sqrt{x^2+3x\sqrt{x}}+x}+1\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+3x\sqrt{x}}+x}+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}\dfrac{3}{\sqrt{1+3\sqrt{x}}+1}+1\right)=+\infty.$

Chọn đáp án (A) □

Ví dụ 2

Giới hạn hàm số $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x\sqrt{|x|}+3}+x\right)$ bằng

(A) 0. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $+\infty$. (D) $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x\sqrt{|x|}+3}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-x\sqrt{|x|}+3}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x\sqrt{|x|}+3}-x\right)}{\sqrt{x^2-x\sqrt{|x|}+3}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{|x|}+3}{\sqrt{x^2-x\sqrt{|x|}+3}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{|x|}\dfrac{-1+\dfrac{3}{x\sqrt{|x|}}}{-\sqrt{1-\sqrt{|x|}+\dfrac{3}{x^2}}-1}=+\infty.$

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 3

Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+4x^3+1}-x^2\right)$

(A) $I=-4$. (B) $I=1$. (C) $I=-2$. (D) $I=-1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^4+4x^3+1}-x^2\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+4x^3+1}+x^2\right)\left(\sqrt{x^4+4x^3+1}-x^2\right)}{\sqrt{x^4+4x^3+1}+x^2}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3+1}{\sqrt{x^4+4x^3+1}+x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3+1}{\sqrt{x^4+4x^3+1}+x^2}\\
&= \lim_{x\to-\infty}x\frac{4+\dfrac{1}{x^3}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^4}}+1}=-\infty.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Ví dụ 4

Tính $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-7x\sqrt{|x|}+1}-\sqrt{x^2-3x\sqrt{|x|}+2}\right)$.

(A) $L=+\infty$. (B) $L=-\infty$. (C) $L=2$. (D) $L=-2$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x\sqrt{|x|}-1}{\sqrt{x^2-7x\sqrt{|x|}+1}+\sqrt{x^2-3x\sqrt{|x|}+2}}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x\sqrt{|x|}-1}{-x\sqrt{1-\dfrac{7}{\sqrt{|x|}}+\dfrac{1}{x^2}}-x\sqrt{1-\dfrac{3}{\sqrt{|x|}}+\dfrac{2}{x^2}}}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{|x|}\frac{-4-\dfrac{1}{x\sqrt{|x|}}}{-\sqrt{1-\dfrac{7}{\sqrt{|x|}}+\dfrac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\dfrac{3}{\sqrt{|x|}}+\dfrac{2}{x^2}}}\\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án C □

Ví dụ 5

Tìm tham số m để $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^3+mx^2}-x\sqrt{x}) = -\infty$.

- A) $m = 0$.
- B) $m > 0$.
- C) $m < 0$.
- D) $m = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^3+mx^2}-x\sqrt{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{mx^2}{\sqrt{x^3+mx^2}+x\sqrt{x}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\frac{m}{\sqrt{1+\dfrac{m}{x}}+1}.
\end{aligned}$$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^3+mx^2}-x\sqrt{x}) = -\infty \Leftrightarrow m < 0$.

Chọn đáp án C □

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Cho hai hàm số $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ và $g(x) = x+1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $f(x) = g(x)$.

b) $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} g(x)$.

Lời giải.

a) Ta có $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ và $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$.
Do tập xác định của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ khác nhau nên $f(x) \neq g(x)$.
Cách khác: Do $f(x)$ không xác định, $g(1) = 2$ nên $f(x) \neq g(x)$.

b) Ta có $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}(x+1) = \lim\limits_{x\to1} g(x)$.

□

Bài 2

Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)^2-4}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)^2-4}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+4x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x+4)=4$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2\cdot\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}=\dfrac{1}{6}$.

□

Bài 3

Cho hàm số $H(t)=\begin{cases}0 & \text{nếu } t<0\\ 1 & \text{nếu } t\geq 0\end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$). Tính $\lim\limits_{t\to 0^+}H(t)$ và $\lim\limits_{t\to 0^-}H(t)$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{t\to 0^+}H(t)=1$ và $\lim\limits_{t\to 0^-}H(t)=0$.

□

Bài 4

Tính các giới hạn một bên

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x^2-x+1}{4-x}$.

Lời giải.

a) Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)=-1<0$.
Hơn nữa $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$, và $x-1>0$ khi $x>1$.
Áp dụng quy tắc tìm giới hạn của thương, ta được $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-2}{x-1}=-\infty$.

b) Ta có $\lim\limits_{x\to 4^-}(x^2-x+1)=13>0$.
Hơn nữa $\lim\limits_{x\to 4^-}(4-x)=0$, và $4-x>0$ khi $x<4$.
Áp dụng quy tắc tìm giới hạn của thương, ta được $\lim\limits_{x\to 4^-}\dfrac{x^2-x+1}{4-x}=+\infty$.

□

Bài 5

Cho hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|x-2|}$. Tìm $\lim\limits_{x\to 2^+}g(x)$ và $\lim\limits_{x\to 2^-}g(x)$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}$ (do $x>2$) $= \lim\limits_{x\to 2^+}(x-3) = -1$.

Tương tự $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} -\dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2}$ (do $x<2$) $= -\lim\limits_{x\to 2^-}(x-3) = 1$. □

Bài 6

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}} &= -\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x^2-4x+1}{x^2+1}}\\
&= -\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4-\frac{4x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}}\\
&= -\sqrt{4-\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x^2+1}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2+1}}\\
&= -\sqrt{4-\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}}\\
&= -2.
\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x+2}-x &= \frac{\left(\sqrt{x^2+x+2}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+x+2}+x} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2}+x}\\
&= \frac{x\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)} = \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}.
\end{aligned}$$

Khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}+1} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

□

Bài 7

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)(x-2)}$. Tìm $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$.

Lời giải.

Viết $\dfrac{2}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{2}{x-1}\cdot\dfrac{1}{x-2}$, ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2}{x-1} = 2 > 0$.

Hơn nữa $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2} = +\infty$ do $x-2>0$ khi $x>2$.

Áp dụng quy tắc tìm giới hạn của tích, ta được $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2}{(x-1)(x-2)} = +\infty$.

Lí luận tương tự, ta có $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x(1-x)} = -\infty$.

□

Bài 8

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -2} (x^2+5x-2)$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to -2} (x^2+5x-2) = (\lim\limits_{x\to -2} x)^2 + \lim\limits_{x\to -2} (5x) - \lim\limits_{x\to -2} 2 = (-2)^2 + 5\cdot(-2) - 2 = -8$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = \lim\limits_{x\to 1} x + 1 = 1+1 = 2$.

□

Bài 9

Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to -1} (3x^2-2x+1)$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^3-3x)(x+1)}{x^2+3}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to -1} (3x^2-2x+1) = 3\lim\limits_{x\to -1} x^2 - 2\lim\limits_{x\to -1} x + \lim\limits_{x\to -1} 1 = 3(1)^2 - 2\cdot 1 + 1 = 2$.

b) Do $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3) = 2^2+3 = 7 \neq 0$ và

$$\lim\limits_{x\to 2}(x^3-3x)(x+1) = \lim\limits_{x\to 2}(x^3-3x)\cdot\lim\limits_{x\to 2}(x+1) = (2^3-3\cdot 2)\cdot(2+1) = 6$$

Nên $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^3-3x)(x+1)}{x^2+3} = \dfrac{6}{7}$.

□

Bài 10

Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{2}{x^2-x+3}}$.

b) $\lim\limits_{x\to -3} \sqrt[3]{\dfrac{-5}{x^2+x-12}}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{x}{x^2-x+3}}$; do $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{x^2-x+3} = \dfrac{2}{2^2-2+3} = \dfrac{2}{5} > 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{2}{x^2-x+3}} = \sqrt{\dfrac{2}{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

b) $\lim\limits_{x\to -3} \sqrt[3]{\dfrac{-5}{x^2+x-12}}$; do $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{-5}{x^2+x-12} = \dfrac{5}{6} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -3} \sqrt[3]{\dfrac{-5}{x^2+x-12}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{6}} = \dfrac{\sqrt[3]{180}}{6}$.

□

Bài 11

Cho $f(x) = x - 1$ và $g(x) = x^3$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to 1} [3f(x) - g(x)]$.

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{[f(x)]^2}{g(x)}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x-1) = \lim\limits_{x \to 1} x - \lim\limits_{x \to 1} 1 = 1 - 1 = 0$. Mặt khác, ta thấy $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^3 = 1$.

a) Ta có

$$\lim_{x \to 1} [3f(x) - g(x)] = \lim_{x \to 1} [3f(x)] - \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} 3 \cdot \lim_{x \to 1} f(x) - \lim_{x \to 1} g(x) = 3 \cdot 0 - 1 = -1.$$

b) Ta có

$$\lim_{x \to 1} \frac{[f(x)]^2}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} [f(x)]^2}{\lim\limits_{x \to 1} g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to 1} f(x)}{\lim\limits_{x \to 1} g(x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

□

Bài 12

Tính $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. 4

Lời giải.

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 2 + 2 = 4$. □

Bài 13

Tính $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 12x + 35}{25 - 5x}$. $\dfrac{2}{5}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 12x + 35}{25 - 5x} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(x-7)(x-5)}{5(5-x)} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{7-x}{5} = \dfrac{2}{5}$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 12x + 35}{25 - 5x} = \dfrac{2}{5}$. □

Bài 14

Tính giới hạn $I = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$. $I = 3$.

Lời giải.

Ta có $I = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = \dfrac{12}{4} = 3$. □

Bài 15

Tìm giới hạn $A = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 8}$. $A = 1$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 8} = \lim_{x \to 2} \frac{\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 4\right)}{x^3 - 2^3} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{\left(x^2 - 1\right)(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)\left(x^2 + 2x + 4\right)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{\left(x^2 - 1\right)(x + 2)}{x^2 + 2x + 4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Bài 16

Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + 3x}{\sqrt{2x^2 + 3}}$. $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + 3x}{\sqrt{2x^2 + 3}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x \cdot \left(\dfrac{1}{x} + 3\right)}{-x \cdot \left(\sqrt{2 + \dfrac{3}{x}}\right)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x} + 3}{-\sqrt{2 + \dfrac{3}{x}}} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. □

Bài 17

Tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - \sqrt{3x^2 + 2}}{5x + \sqrt{x^2 + 2}}$. $\dfrac{2 - \sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - \sqrt{3x^2 + 2}}{5x + \sqrt{x^2 + 2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x} \cdot \dfrac{2 - \sqrt{3 + \dfrac{2}{x^2}}}{5 + \sqrt{1 + \dfrac{2}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 - \sqrt{3 + \dfrac{2}{x^2}}}{5 + \sqrt{1 + \dfrac{2}{x^2}}} = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{6}$. □

Bài 18

Giá trị của $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{2024} + x - 2}{x^{2023} + x - 2}$ bằng $\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của $a^2 - b^2$. 4049.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \lim_{x \to 1} \frac{x^{2024} + x - 2}{x^{2023} + x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{x^{2024} - 1 + x - 1}{x^{2023} - 1 + x - 1} \\ = \ & \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^{2023} + x^{2022} \cdots + x + 1) + x - 1}{(x - 1)(x^{2022} + x^{2021} + \cdots + x + 1) + x - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x\to 1} \frac{x^{2023}+x^{2022}\cdots+x+2}{x^{2022}+x^{2021}+\cdots+x+2} \\ &= \frac{1+1+\cdots+1+2}{1+1+\cdots+1+2} = \frac{2025}{2024}. \end{aligned}$$

Vậy $a^2 - b^2 = 2025^2 - 2024^2 = 4049$. □

Bài 19

Cho giới hạn $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+ax+b}{x-3} = 3$. Tìm a, b. $a=-3, b=0$.

Lời giải.

Để $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+ax+b}{x-3} = 3$ thì ta phải có $x^2+ax+b = (x-3)(x-m)$.
Khi đó $3-m = 3 \Leftrightarrow m = 0$. Vậy $x^2+ax+b = (x-3)x = x^2-3x$.
Suy ra $a = -3$ và $b = 0$. □

Bài 20

Tìm m để $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2} = \dfrac{1}{2}$. $m=-4$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}+4}{mx-2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x}{x} \cdot \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - \frac{4}{x}}{m-\frac{2}{x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + \frac{4}{x}}{m-\frac{2}{x}} = -\frac{2}{m}.$$

Theo bài ra ta có $-\dfrac{2}{m} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = -4$. □

Bài 21

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{m}{1-x^m} - \dfrac{n}{1-x^n}\right)$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. $\dfrac{m-n}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right) &= \lim_{x\to 1}\left[\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{1}{1-x}\right)-\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right)\right] \\ &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{1}{1-x}\right) - \lim_{x\to 1}\left(\frac{n}{1-x^n}-\frac{1}{1-x}\right) = A - B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{1}{1-x}\right) \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{m-\left(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}\right)}{1-x^m} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)+\left(1-x^2\right)+\cdots+\left(1-x^{m-1}\right)}{1-x^m} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\left[1+(1+x)+\cdots+\left(1+x+\cdots+x^{m-2}\right)\right]}{(1-x)\left(1+x+\cdots+x^{m-1}\right)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 1} \frac{1+(1+x)+\cdots+\left(1+x+\cdots+x^{m-2}\right)}{1+x+\cdots+x^{m-1}}\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1+2+\cdots+m-1}{m}\\
&= \frac{m-1}{2}.
\end{aligned}
$$

Tương tự, ta tính được $B=\dfrac{n-1}{2}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)=A-B=\dfrac{m-n}{2}$. □

Bài 22

Tính $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2$.

$+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2=+\infty$. □

Bài 23

Tính $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-x^4-\dfrac{1}{x}\right)$.

$-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -\infty} -x^4=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Suy ra $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-x^4-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$. □

Bài 24

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x^3+5x^2+2x+1\right)$.

$-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x^3+5x^2+2x+1\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x^3\left(-1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)\right]$.

Do $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3=+\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-1+\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=-1<0$ nên $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x^3+5x^2+2x+1\right)=-\infty$.
□

Bài 25

Tính $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2-x}{x+1}$.

$+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2}{x}\cdot\left(\dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot\left(\dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}\right)=+\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=3$. □

Bài 26

Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)$ là bao nhiêu? $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+2}-1\right)=+\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+2}-1\right)=\sqrt{2}-1>0$. □

Bài 27

Tính $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{1}{(x-3)^3}$. $-\infty$

Lời giải.

$$\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(x-3)^3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{3-x}{3x}\cdot\frac{1}{(x-3)^3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{-1}{3x(x-3)^2}=-\infty.$$ □

Bài 28

Có bao nhiêu giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ để $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+mx-1\right)=-\infty$? 18.

Lời giải.

Ta có
$$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+mx-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+mx-1\right)$$
$$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+m-\frac{1}{x}\right).$$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}+m-\dfrac{1}{x}\right)=2+m$

Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x+2}+mx-1\right)=-\infty$ khi $2+m<0\Leftrightarrow m<-2$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ nên $m\in\{-20;-19;-18;\ldots;-3\}$.

Vậy có 18 giá trị m nguyên thuộc đoạn $[-20;20]$ thỏa bài toán. □

Bài 29

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-x^2-x+2}{x^2-3x^2+3x-1}$. $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-x^2-x+2}{x^2-3x^2+3x-1}=-\infty$

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-x^2-x+2}{x^2-3x^2+3x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-(x-1)(x+2)}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-x-2}{(x-1)^2}$.

Khi $x\to1^-$ thì $\begin{cases}(x-1)^2\to0\\(x-1)^2>0\\-x-2\to-3\end{cases}$ suy ra $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-x-2}{(x-1)^2}=-\infty$.

Vậy $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{-x^2-x+2}{x^2-3x^2+3x-1}=-\infty$. □

Bài 30

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{1-x} & \text{khi } x < 1 \\ x^3 - 2x^2 + 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1^-} -(x+1) = -2$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^3 - 2x^2 + 3) = 2$. □

Bài 31

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x^2-3x+2|}{x^2-4}$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x^2-3x+2|}{x^2-4} = -\dfrac{1}{4}$

Lời giải.

Khi $x \to 2^-$ thì $x^2 - 3x + 2 < 0$ nên

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x^2-3x+2|}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-x^2+3x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1-x}{x+2} = -\frac{1}{4}.$$

□

Bài 32

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-2x+1} & \text{khi } x > 1 \\ \dfrac{2x}{x^3-2x+1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$

Lời giải.

Xét $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1-\sqrt{x}}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1-x}{(x-1)^2(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{(1-x)(\sqrt{x}+1)}$.

Khi $x \to 1^+$ thì $\begin{cases} 1-x < 0 \\ 1-x \to 0 \\ \sqrt{x}+1 \to 2 \end{cases}$, suy ra $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.

Xét $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x}{x^3-2x+1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x}{(x-1)(x^2+x-1)}$.

Khi $x \to 1^-$ thì $\begin{cases} x-1 < 0 \\ x-1 \to 0 \\ x^2+x-1 \to 1 \end{cases}$, suy ra $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. Vậy $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$. □

Bài 33

Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$. Tính các giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x+3)-f(3)}{x}$ và $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x+3)-f(3)}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x+3)-f(3)}{x} = -4$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x+3)-f(3)}{x} = 4$

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x+3)-f(3)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|(x+3)^2-2(x+3)-3|-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x(x+4)|}{x}$.

Khi $x\to 0^-$ thì $x<0$, suy ra $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x(x+4)|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}-(x+4)=-4$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x+3)-f(3)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|(x+3)^2-2(x+3)-3|-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x(x+4)|}{x}$.

Khi $x\to 0^+$ thì $x>0$, suy ra $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x(x+4)|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+4)=4$. □

Bài 34

Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{2x} & \text{khi } x<0\\ x^2+m & \text{khi } x\geq 0\end{cases}$ có giới hạn khi $x\to 0$.

Không tồn tại m

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+m)=m$.

Xét $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\dfrac{1}{2x}$.

Chọn dãy số $x_n=-\dfrac{2}{n\pi}$. Dễ thấy $x_n<0$ và $\lim x_n=0$.

Ta có $\lim\sin\dfrac{1}{2x}=\lim\sin(-n\pi)=0$.

Chọn dãy số $x_n=-\dfrac{2}{\frac{\pi}{2}+n2\pi}$. Dễ thấy $x_n<0$ và $\lim x_n=0$.

Ta có $\lim\sin\dfrac{1}{2x}=\lim\sin(-\frac{\pi}{2}-n2\pi)=-1$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ không tồn tại.

Vậy không tồn tại m để $f(x)$ có giới hạn khi $x\to 0$. □

Bài 35

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1} & \text{nếu } x>1\\ mx+2 & \text{nếu } x\geq 1\end{cases}$.

Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to 1$? Tìm giới hạn này.

$m=-1$; $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}f(x)&=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x-2}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}\\&=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x^2+x+1}=1.\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(mx+2)=m+2$.

$f(x)$ có giới hạn khi $x\to 1\Leftrightarrow m+2=1\Leftrightarrow m=-1$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$. □

Bài 36

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x < 0 \\ \sin x^2 + m & \text{khi } x \geq 0. \end{cases}$

Tìm m để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \to 0$.

$m = 0$

Lời giải.

Xét $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x\cos\dfrac{1}{x}$.

Ta có $0 \leq |x\cos\dfrac{1}{x}| \leq |x|$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} |x| = 0$. Suy ra $\lim\limits_{x\to 0^-} x\cos\dfrac{1}{x} = 0$.

Ta lại có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (\sin x^2 + m) = m$.

$f(x)$ có giới hạn khi $x \to 0$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow m = 0.$$

□

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	A B C D	8	A B C D	15	A B C D	22	A B C D	29	A B C D
2	A B C D	9	A B C D	16	A B C D	23	A B C D	30	A B C D
3	A B C D	10	A B C D	17	A B C D	24	A B C D	31	A B C D
4	A B C D	11	A B C D	18	A B C D	25	A B C D	32	A B C D
5	A B C D	12	A B C D	19	A B C D	26	A B C D	33	A B C D
6	A B C D	13	A B C D	20	A B C D	27	A B C D	34	A B C D
7	A B C D	14	A B C D	21	A B C D	28	A B C D	35	A B C D

Câu 1

Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+7x+11\right)$ là

A. 37. B. 38. C. 39. D. 40.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+7x+11\right)=3\cdot 2^2+7\cdot 2+11=37.$

Chọn đáp án A □

Câu 2

Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3}{x^3+2}$ là

A. 1. B. -2. C. 2. D. $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3}{x^3+2}=\dfrac{(-1)^2-3}{(-1)^3+2}=-2.$

Chọn đáp án B □

Câu 3

Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ là

A. $-\dfrac{3}{2}$. B. $\dfrac{1}{2}$. C. $-\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}=\dfrac{\sqrt{3+1}+1}{-1-1}=-\dfrac{3}{2}.$

Chọn đáp án A □

Câu 4

Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ là

(A) $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) $-\dfrac{15}{2}$. (D) 1.

Lời giải.

Vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}(x-15)=-13<0\\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0\ \ \&\ \ x-2>0, \forall x>2\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}=-\infty.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 5

Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là

(A) $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) $-\dfrac{15}{2}$. (D) Không xác định.

Lời giải.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x+2}=2>0\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0\ \ \&\ \ \sqrt{x-2}>0, \forall x>2\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}=+\infty.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 6

Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là

(A) $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) $-\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-x}{(2-x)(1-2x)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{1-2x}=-\dfrac{1}{3}.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 7

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x<1\\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x\geqslant 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ là

(A) $+\infty$. (B) 2. (C) 4. (D) $-\infty$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{3x^2+1}=\sqrt{3\cdot 1^2+1}=2.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 8

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\geqslant 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ -1. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{1-x}=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+1\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0 \ \& \ 1-x>0\,(\forall x<1).\end{cases}$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 9

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{với } x>3\\ 1 & \text{với } x=3\\ 3-2x^2 & \text{với } x<3\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

Ⓐ $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=6$.

Ⓑ Không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=6$.

Ⓓ $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-15$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(x^2-2x+3\right)=6\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(3-2x^2\right)=-15\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

Suy ra không tồn tại giới hạn khi $x\to 3$.

Vậy chỉ có khẳng định $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=6$ sai.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 10

Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}(x-x^3+1)$ là

Ⓐ 1. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 0. Ⓓ $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to-\infty}(x-x^3+1)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(\frac{1}{x^2}-1+\frac{1}{x^3}\right)=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-1+\dfrac{1}{x^3}\right)=-1<0.\end{cases}$$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 11

Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|^3+2x^2+3|x|\right)$ là

Ⓐ 0. Ⓑ $+\infty$. Ⓒ 1. Ⓓ $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|^3+2x^2+3|x|\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+2x^2-3x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=+\infty$.

Giải nhanh: $|x|^3+2x^2+3|x|\sim|x|^3\to+\infty$ khi $x\to-\infty$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12

Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ là

(A) 0. (B) $+\infty$. (C) 3. (D) Không xác định.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{12}{4}=3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13

Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}}\frac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2}=a\sqrt{3}+b$. Tính a^2+b^2.

(A) 10. (B) 25. (C) 5. (D) 13.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}}\frac{2x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}}\frac{2\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x^2-\sqrt{3}x+3\right)}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}}\frac{2\left(x^2-\sqrt{3}x+3\right)}{\sqrt{3}-x}$

$=\frac{2\left[\left(-\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)+3\right]}{\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)}=\frac{18}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2=10$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14

Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}$ là

(A) 0. (B) $-\infty$. (C) 1. (D) $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\left(x^2+x\right)-x}{x^2\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}=+\infty$

vì $1>0$; $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}\right)=0$ và $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}>0$ với mọi $x>0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15

Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}$ là

(A) -2. (B) $+\infty$. (C) 3. (D) 2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{3}{x^2}}=2.$

Giải nhanh: khi $x\to-\infty$ thì: $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}\sim\dfrac{2x^2}{x^2}=2.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 16

Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}$ là

(A) -2. (B) $+\infty$. (C) 0. (D) $-\infty$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{7}{x^4}+\dfrac{11}{x^6}}{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^6}}=\dfrac{0}{3}=0.$

Giải nhanh: khi $x\to-\infty$ thì: $\dfrac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}\sim\dfrac{2x^3}{3x^6}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x^3}\to0.$

Chọn đáp án (C) □

Câu 17

Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2\right)$ là

(A) 1. (B) $+\infty$. (C) -1. (D) $-\infty$.

Lời giải.

Giải nhanh: $x\to-\infty\Rightarrow 2x^3-x^2\sim2x^3\to-\infty.$

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(2-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)=2>0.\end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 18

Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)$ là

(A) 0. (B) $+\infty$. (C) $\sqrt{2}-1$. (D) $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+2}-1\right)=+\infty.$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+2}-1\right)=\sqrt{2}-1>0.$

Giải nhanh: $x\to+\infty\Rightarrow\sqrt{1+2x^2}-x\sim\sqrt{2x^2}-x=\sqrt{2}x-x=\left(\sqrt{2}-1\right)x\to+\infty.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 19

Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$ là

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ $+\infty$. Ⓒ 0. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x+2-1}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x+1}{x^2-4}\right)=-\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)=3>0$; $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-4\right)=0$ và $x^2-4<0$ với mọi $x\in(-2;2)$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 20

Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$ là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ -1. Ⓒ 0. Ⓓ $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=0-1=-1$.

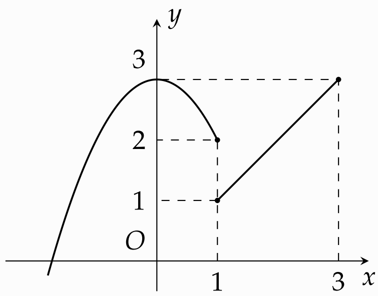
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 21

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)+\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)$.

Ⓐ 5. Ⓑ 4 .

Ⓒ 2. Ⓓ 0.

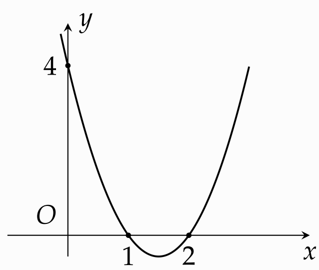


Câu 22

Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình bên. Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{3x^2+1}$.

Ⓐ $\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{2}{3}$.

Ⓒ 2. Ⓓ 1.



Câu 23

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$. Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(mx+n)\right]=0$. Tính $m+n$.

Ⓐ $m+n=0$. Ⓑ $m+n=1$. Ⓒ $m+n=-1$. Ⓓ $m+n=3$.

Câu 24

Biết rằng $b > 0$, $a + b = 5$ và $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} = 2$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

(A) $1 < a < 3$. (B) $b > 1$. (C) $a^2 + b^2 > 10$. (D) $a - b < 0$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sqrt[3]{ax+1} - 1}{x} + \dfrac{1 - \sqrt{1-bx}}{x} \right)$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{ax}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1\right)} + \frac{bx}{x\left(1 + \sqrt{1-x}\right)} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{a}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1\right)} + \frac{b}{\left(1 + \sqrt{1-x}\right)} \right) = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 2.$$

Vậy ta được: $\begin{cases} a + b = 5 \\ \dfrac{a}{3} + \dfrac{b}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ 2a + 3b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow a = 3, b = 2.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 25

Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{2x^2+1} + ax\right)$ là $+\infty$.

(A) $a > \sqrt{2}$. (B) $a < \sqrt{2}$. (C) $a > 2$. (D) $a < 2$.

Lời giải.

Giải nhanh: $x \to -\infty \Rightarrow \sqrt{2x^2+1} + ax \sim \sqrt{2x^2} + x = -\sqrt{2}x + ax = \left(a - \sqrt{2}\right)x \to +\infty$
$\Leftrightarrow a - \sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow a < \sqrt{2}$.

Cụ thể: vì $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ nên $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{2x^2+1} + ax\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x \left(-\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}} + a \right) = +\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}} + a \right) = a - \sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow a < \sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 26

Biết rằng $a + b = 4$ và $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{a}{1-x} - \dfrac{b}{1-x^3} \right)$ hữu hạn. Tính giới hạn

$$L = \lim_{x \to 1} \left(\frac{b}{1-x^3} - \frac{a}{1-x} \right).$$

(A) 1. (B) 2. (C) 1. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{a}{1-x} - \dfrac{b}{1-x^3} \right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{a + ax + ax^2 - b}{1 - x^3} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{a + ax + ax^2 - b}{(1-x)\left(1 + x + x^2\right)}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn $\Leftrightarrow 1+a\cdot1+a\cdot1^2-b=0\Leftrightarrow 2a-b=-1$.

Vậy ta có $\begin{cases}a+b=4\\2a-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}\Rightarrow L=-\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$

$=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=-\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-(x+2)}{1+x+x^2}=1.$

Chọn đáp án C □

Câu 27

Giá trị của $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}$ là

A $\dfrac{3}{2}$. B $\dfrac{5}{2}$. C $\dfrac{7}{5}$. D $\dfrac{8}{7}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x-2}{x-3}=\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 28

Tìm giới hạn $F=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt[3]{1-x^3}\right)$

A 0. B $+\infty$. C $-\infty$. D $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

$F=-\infty$

Chọn đáp án C □

Câu 29

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{3+2x}{x+2}$.

A $-\infty$. B 2. C $+\infty$. D $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-2)^-}(3+2x)=-1<0$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^-}(x+2)=0$; $x+2<0$ khi $x\to(-2)^-$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{3+2x}{x+2}=+\infty$.

Chọn đáp án C □

Câu 30

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2-x-4}{x^2-1}$.

A $\dfrac{7}{6}$. B $\dfrac{7}{2}$. C 3. D $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2 - x - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x\to -1} \frac{(3x-4)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{3x-4}{x-1} = \frac{7}{2}.$$

Chọn đáp án B

Câu 31

Tính $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$.

A $\dfrac{5}{2}$.
B $+\infty$.
C 2.
D 3.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x+2}{x+1} = \dfrac{5}{2}$.

Chọn đáp án A

Câu 32

Giới hạn nào sau đây không tồn tại?

A $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4}$.
B $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4}$.
C $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4}$.
D $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{|x^2-4|}$.

Lời giải.

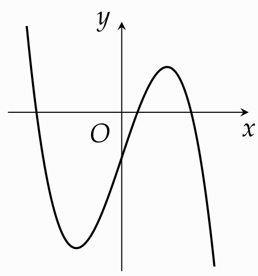
$\forall x > 2$, ta có $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4} = \dfrac{|x-2|}{(x-2)(x+2)}$.

- $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$.
- $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-1}{x+2} = -\dfrac{1}{4}$.
- Vì $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4} \neq \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4}$ nên $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-4}$ không tồn tại.
- $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{|x^2-4|} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{|(x-2)(x+2)|} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án B

Câu 33

Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$ ($a, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A $a > 0$; $d > 0$.
B $a < 0$; $d > 0$.
C $a > 0$; $d < 0$.
D $a < 0$; $d < 0$.

Lời giải.

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(ax^3+3x+d\right) = -\infty \Rightarrow a<0$.

Vì giao điểm của ĐTHS $y = ax^3+3x+d$ với trục tung $Oy: x=0$ nằm phía dưới trục hoành $Ox: y=0$ nên $d<0$.

Suy ra: $\begin{cases} a<0 \\ d<0 \end{cases}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 34

Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{2x^2+5x+2}$.

(A) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{2x^2+5x+2} = -\dfrac{1}{3}$.

(B) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{2x^2+5x+2} = 0$.

(C) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{2x^2+5x+2} = -\dfrac{1}{2}$.

(D) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{2x^2+5x+2} = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{2x^2+5x+2} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{(x+2)(2x+1)} = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{1}{2x+1} = -\dfrac{1}{3}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35

Xác định $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{|x|}{x^2}$.

(A) 0.

(B) $-\infty$.

(C) Không tồn tại.

(D) $+\infty$..

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{|x|}{x^2} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{|x|}{x^2} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{-x}{x^2} = \lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{-1}{x} = +\infty$.

Vậy không tồn tại $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{|x|}{x^2}$.

Chọn đáp án (C) □

—HẾT—

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Định nghĩa 3.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ chứa điểm x_0. Hàm số $f(x)$ được gọi là **liên tục tại điểm** $x = x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm x_0 được gọi là **gián đoạn** tại điểm đó.

Ví dụ 1

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải.

Rõ ràng, hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, do đó $x_0 = 2$ thuộc tập xác định của hàm số.
Ta có

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x+1} = 3 = f(2).$$

Do đó, hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$. □

Ví dụ 2

Xét tính liên tục của **hàm dấu** $s(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

Lời giải.

Ta thấy rằng $\lim\limits_{x \to 0^+} s(x) = 1$ và $\lim\limits_{x \to 0^-} s(x) = -1$. Do đó, không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} s(x)$.
Vậy hàm số không liên tục tại $x = 0$. □

Hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Ví dụ 3

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

Lời giải.

Ta có $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = 0$.
Suy ra $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.
Vậy hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 0$. □

2. Hàm số liên tục trên một khoảng

Định nghĩa 3.2.

- Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng này.
- Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $[a;b]$ nếu nó liên tục trên $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Ví dụ 4

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{nếu } x\in(0;1) \\ 1 & \text{nếu } x=1 \end{cases}$ trên nửa khoảng $(0;1]$.

Lời giải.

Ta có $f(x)=x-1$ với $x\in(0;1)$. Với $x_0\in(0;1)$ bất kì, ta có

$$\lim_{x\to x_0}(x-1)=x_0-1=f(x_0).$$

Do đó, hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(0;1)$.
Hơn nữa, ta có

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=0=f(1)$$

nên $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[0;1)$. □

Về tính liên tục của các hàm sơ cấp cơ bản đã biết, ta có kết quả dưới đây.

Định lý 3.1.

a) Hàm đa thức và các hàm số $y=\sin x$, $y=\cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Các hàm số $y=\tan x$, $y=\cot x$, y=$\sqrt{x}$ và các hàm phân thức hữu tỉ (thương của các hàm đa thức) liên tục trên tập xác định của chúng.

Ví dụ 5

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x)$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D}=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$. Vậy, hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. □

Ví dụ 6

Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+2}$.

Lời giải.

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$. Vậy hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty,-2)$ và $(-2,+\infty)$. □

3. Một số tính chất cơ bản

Ta có khẳng định đây về tổng, hiệu, tích và thương của hai hàm số liên tục.

Định lý 3.2. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại x_0. Khi đó

a) Các hàm số $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0.

b) Hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

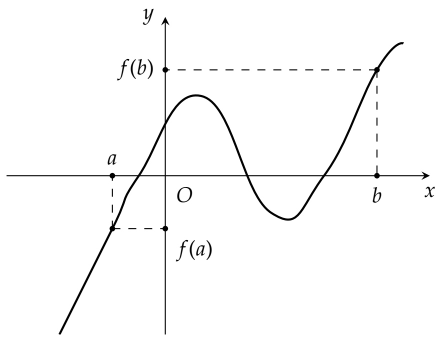
Ví dụ 7

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \dfrac{\sin x}{x-1}$.

Lời giải.

Hàm số xác định trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. Trên các khoảng này, tử thức (hàm lượng giác) và mẫu thức (hàm đa thức) là các hàm liên tục. Do đó, hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. □

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$. Kết quả này được minh họa bởi hình 5.1



Hình 5.1: Hoạt động 3

Ví dụ 8

Chứng minh rằng phương trình $x^5 + x^3 - 10 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^5 + x^3 - 10$ với $x \in \mathbb{R}$. Ta có

- Vì $f(x)$ là hàm số đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- $f(0) = -1 < 0$, $f(2) = 30 > 0$. Suy ra $f(0)f(2) < 0$.

Suy ra $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(0; 2)$. □

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

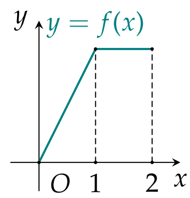
Dạng 1 Dựa vào đồ thị xét tính liên tục của hàm số tại một điểm, một khoảng.

Để xét tính liên tục của hàm số khi biết đồ thị, ta cần nhớ:

- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền nét trên khoảng đó.
- Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0;2)$.



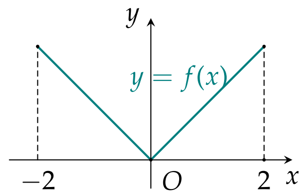
Hàm số liên tục trên khoảng $(0;2)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số là một đường liền nét trên khoảng $(0;2)$ nên hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(0;2)$. □

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-2;2)$.



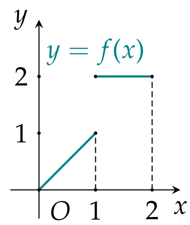
Hàm số liên tục trên khoảng $(-2;2)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số là một đường liền nét trên khoảng $(-2;2)$ nên hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(-2;2)$. □

Ví dụ 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0;2)$.



Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(0,1)$, $(1,2)$ và gián đoạn tại $x = 1$.

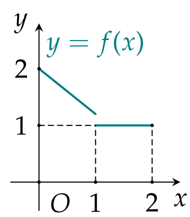
Lời giải.

- Đồ thị hàm số là các đường liền nét trên các khoảng $(0;1)$, $(1;2)$ do đó hàm số liên tục trên các khoảng này.
- Đồ thị hàm số không liền nét tại điểm $x = 1$ do đó hàm số đã cho gián đoạn tại điểm này.

□

Ví dụ 4

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(0;2)$.



Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(0,1)$, $(1,2)$ và gián đoạn tại $x=1$.

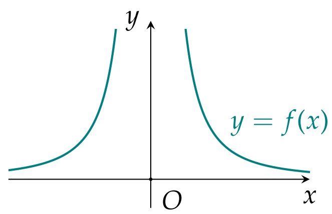
Lời giải.

- Đồ thị hàm số là các đường liền nét trên các khoảng $(0;1)$, $(1;2)$ do đó hàm số liên tục trên các khoảng này.
- Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) > f(1) = 1$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1$.
  Do đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.
  Vậy hàm số đã cho gián đoạn tại $x=1$.

□

Ví dụ 5

Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có đồ thị như hình bên. Xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ trên $\mathscr{D}$.



Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$. Gián đoạn tại điểm $x=0$.

Lời giải.

Vì hàm số đã cho có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ nên

- $f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;0)$ nên liên tục trên khoảng này.
- $f(x)$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$ nên liên tục trên khoảng này.
- $f(x)$ không xác định tại điểm $x=0$ nên gián đoạn tại điểm này.

□

Dạng 2 Hàm số liên tục tại một điểm

Để kiểm tra tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại điểm $x=x_0$ ta cần làm như sau:

- Bước 1: Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
- Bước 2: Tính $=f(x_0)$. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ thì kết luận hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=x_0$.
  Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì kết luận hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=x_0$.

Ví dụ 1

Biết rằng $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. Hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan x}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0\end{cases}$. Xét tính liên tục của $y=f(x)$ tại $x=0$?

$f(x)$ không liên tục tại $x=0$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 1 \cdot \dfrac{1}{\cos 0} = 1 \neq f(0) \Rightarrow f(x)$ không liên tục tại $x = 0$. □

Ví dụ 2

Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \dfrac{x^4 + x}{x^2 + x} & \text{khi } x \neq -1,\ x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số tại $x = -1, x = 0$.

Hàm số liên tục tại $x = -1, x = 0$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Dễ thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1), (-1; 0)$ và $(0; +\infty)$.
(i) Xét tại $x = -1$, ta có
$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to-1} (x^2 - x + 1) = 3 = f(-1)$. Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = -1$.
(ii) Xét tại $x = 0$, ta có
$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \lim\limits_{x\to0} (x^2 - x + 1) = 1 = f(0)$. Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0$. □

Ví dụ 3

Tìm số điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{khi } x = -1 \\ \dfrac{x(x+1)}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq -1,\ x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$?

Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Hàm số $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x^2 - 1}$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ và $(1; +\infty)$.
(i) Xét tại $x = -1$, ta có $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x(x+1)}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x}{x - 1} = \dfrac{1}{2} = f(-1) \Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x = -1$.
(ii) Xét tại $x = 1$, ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x(x+1)}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x}{x - 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x(x+1)}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x}{x - 1} = -\infty \end{cases}$ $\Rightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$. □

Ví dụ 4

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x + 1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$ tại $x = 0$?

Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Mặt khác $\begin{cases} f(0) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (1 - \cos x) = 1 - \cos 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{0+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$. □

Ví dụ 5

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x} \text{ khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 \text{ khi } x = 0 \\ \sqrt{x} \text{ khi } x \geq 1 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 0, x = 1$?

Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0$ và $x = 1$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Dễ thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 0), (0; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Ta có $\begin{cases} f(1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 1^-} x = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 1$. □

Dạng 3 Hàm số liên tục trên khoảng, đoạn

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a, b]$ nếu nó liên tục trên khoảng (a, b) và
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$
- Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một đường liền nét trên khoảng đó.

Ví dụ 1

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+2} - 2} & khi\ x > 2 \\ m^2 x - 4m + 6 & khi\ \ x \leq 2 \end{cases}$, m là tham số. Với giá trị nào của m thì hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$? $m = 1$.

Lời giải.

Ta có
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{(x-2)(x-1)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2^+} (x-1)\left(\sqrt{x+2}+2\right) = 4.$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(m^2 x - 4m + 6\right) = 2m^2 - 4m + 6.$

$f(2) = 2m^2 - 4m + 6.$

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ thì $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 6 = 4 \Leftrightarrow 2m^2 - 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$. □

Ví dụ 2

Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x < -1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ liên tục tại $x = -1$? $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải.

Ta có

- $f(-1) = -m + 2$.
- $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = -m + 2$.
- $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{-1}{2}$.

Hàm số liên tục tại $x = -1 \Leftrightarrow f(-1) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) \Leftrightarrow -m + 2 = \dfrac{-1}{2} \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{2}$.

□

Ví dụ 3

Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & khi\, x > 4 \\ mx + 1 & khi\, x \leq 4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 4$. $m = \frac{7}{4}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = f(4) = 4m + 1$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4^+} (x + 4) = 8$.

Hàm số liên tục tại điểm $x = 4 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 4m + 1 = 8 \Leftrightarrow m = \dfrac{7}{4}$. □

Ví dụ 4

Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{khi} x > -1 \\ mx - 2m^2 & \text{khi } x \leq -1 \end{cases}$ liên tục tại $x = -1$. $m \in \left\{1; -\frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- $f(-1) = -m - 2m^2$
- $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (mx - 2m^2) = -m - 2m^2$.
- $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^2 - x - 2}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} (x-2) = -3$.

Hàm số liên tục tại $x = -1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

$\Leftrightarrow -m - 2m^2 = -3 \Leftrightarrow 2m^2 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$.

Vậy các giá trị của m là $m \in \left\{1; -\dfrac{3}{2}\right\}$. □

Ví dụ 5

Tìm giá trị của m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x} & \text{khi} \quad x < 0 \\ m + \dfrac{1-x}{1+x} & \text{khi} \quad x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$?

$m = -2$.

Lời giải.

Ta có

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(m + \dfrac{1-x}{1+x}\right) = m + 1$. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-2x}{x\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1\right.}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-2}{\left(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}\right)} = -1$.

$f(0) = m + 1$.

Để hàm liên tục tại $x = 0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m + 1 = -1 \Rightarrow m = -2$. □

C BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục tại $x = 1$. Biết $f(1) = 2$ và $\lim\limits_{x\to 1} [2f(x) - g(x)] = 3$. Tính $g(1)$.

Lời giải.

Ta có $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục tại $x = 1$. Do đó, hàm số $2f(x) + g(x)$ cũng liên tục tại $x = 1$. Từ đó, ta có

$$\lim_{x\to 1} [2f(x) - g(x)] = 2f(1) - g(1) \Leftrightarrow 3 = 2.2 - g(1) \Leftrightarrow g(1) = 1.$$

Vậy $g(1) = 1$. □

Bài 2

Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng:

a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 6}$;

b) $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{nếu } x < 1 \\ 4 - x & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$

Lời giải.

a) Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R} \setminus \{-2; -3\}$. Do đó hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; -3)$, $(-3; -2)$ và $(-2, +\infty)$;

b) Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$. Với $x < 1$, ta có $f(x) = 1 + x^2$ là hàm đa thức, do đó liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$. Với $x > 1$, ta có $f(x) = 4 - x$ cũng là hàm đa thức, do đó liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$. Tại $x = 1$, ta có

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (1 + x^2) = 2.$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (4 - x) = 3.$

Vì $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ do đó hàm số đã cho không liên tục tại $x = 1$. Vậy hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

□

Bài 3

Tìm giá trị của tham số m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x + m & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.
Xét tại $x = 0$.
Ta có

- $f(0) = \sin 0 = 0.$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sin x = 0.$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x + m) = m.$

Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \Leftrightarrow m = 0.$ □

Bài 4

Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa ($0,5$ km đầu)	Giá cước các km tiếp theo đến 30 km	Giá cước từ km thứ 31
10 000 đồng	13 500 đồng	11 000 đồng

a) Viết công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển.

b) Xét tính liên tục của hàm số ở câu a.

Lời giải.

a) Gọi x là quãng đường di chuyển, $f(x)$ là giá tiền tính theo quãng đường.

- $0 \le x \le 0{,}5$, ta có $f(x) = 10000$ đồng.
- $0{,}5 < x \le 30$, $f(x) = 10000 + 13500(x - 0{,}5)$ đồng.
- $x > 30$, $f(x) = 408250 + 11000(x - 30)$ đồng.

Vậy $f(x) = \begin{cases} 10000 & \text{nếu } 0 \le x \le 0{,}5 \\ 10000 + 13500(x - 0{,}5) & \text{nếu } 0{,}5 < x \le 30 \\ 408250 + 11000(x - 30) & \text{nếu } x > 30. \end{cases}$

b) Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(0; 0{,}5)$, $(0{,}5; 30)$ và $(30; +\infty)$.

Tại $x = 0{,}5$, ta có $f(0{,}5) = 10000$, $\lim\limits_{x \to 0{,}5^+} f(x) = 10000$, $\lim\limits_{x \to 0{,}5^-} f(x) = 10000$.

Vì $f(0,5) = \lim\limits_{x \to 0{,}5^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0{,}5^-} f(x)$, do đó $f(x)$ liên tục tại $x = 0,5$.

Tại $x = 30$, ta có $f(30) = 408250$, $\lim\limits_{x \to 30^-} f(x) = 408250$, $\lim\limits_{x \to 30^+} f(x) = 408250$.

Vì $f(30) = \lim\limits_{x \to 30^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 30^+} f(x)$, do đó$f(x)$ liên tục tại $x = 30$.

Vậy $f(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. □

Bài 5

Dùng định nghĩa xét tính liên tục của hàm số $f(x) = 2x^3 + x + 1$ tại điểm $x = 2$.

Lời giải.

Hàm số trên là hàm sơ cấp nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

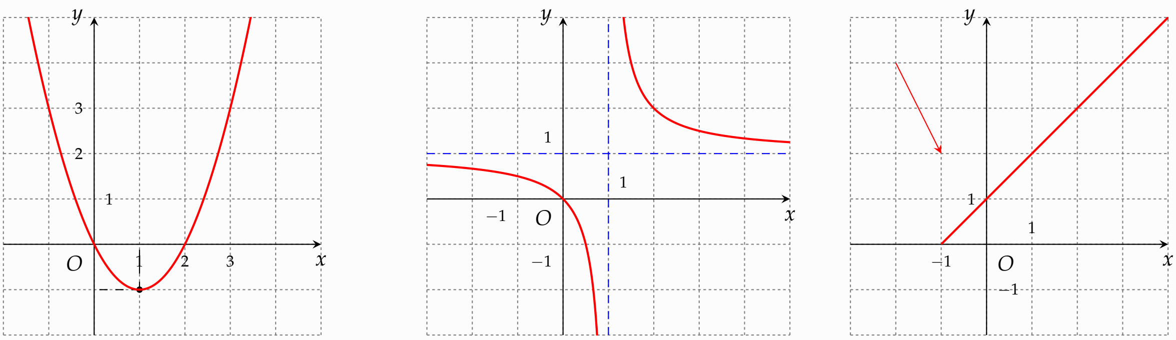
Ta có $f(2) = 2 \cdot 2^3 + 2 + 1 = 19$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \left(2x^3 + x + 1\right) = 2 \cdot 2^3 + 2 + 1 = 19$.

Vậy $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 19$ nên hàm số $y = 2x^3 + x + 1$ liên tục tại $x = 2$. □

Bài 6

Trong các hàm số có đồ thị ở *Hình 15a, 15b, 15c* hàm số nào liên tục trên tập xác định của hàm số đó? Giải thích.



a) Đồ thị hàm số $f(x) = x^2 - 2x$

b) Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

c) Đồ thị hàm số $h(x) = \begin{cases} -2x \text{ nếu } x < -1 \\ x + 1 \text{ nếu } x \ge 1 \end{cases}$

Hình 15

Lời giải.

Hàm số liên tục trên tập xác định là $f(x) = x^2 - 2x$. Vì đồ thị hàm số ở hình *Hình 15a* là một đường liền nét trên mặt phẳng tọa độ. □

Bài 7

Bạn Nam cho rằng: "Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0, còn hàm số $y = g(x)$ không liên tục tại x_0, thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ không liên tục tại x_0". Theo em, ý kiến của bạn Nam đúng hay sai? Giải thích.

Lời giải.

Giả sử hàm số $h(x) = f(x) + g(x)$ là hàm số liên tục tại x_0.
Khi đó, hàm số $g(x) = h(x) - f(x)$ là hiệu của hai hàm số liên tục tại x_0 nên hàm số $g(x)$ là hàm số liên tục tại x_0. Điều này mâu thuẫn với giả thiết là $g(x)$ không liên tục tại x_0.
Vậy ý kiến trên là đúng. □

Bài 8

Xét tính liên tục của mỗi hàm số sau trên tập xác định của hàm số đó

a) $f(x) = x^2 + \sin x$.

b) $g(x) = x^4 - x^2 + \dfrac{6}{x-1}$.

c) $h(x) = \dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{x-1}{x+4}$.

Lời giải.

a) Hàm số $y = x^2$ và hàm số $y = \sin x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x) = x^2 + \sin x$ là tổng của hai hàm số trên cũng liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-4; 3\}$.
Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -4)$; (-4;3) và $(3; +\infty)$.

□

Bài 9

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{nếu } x \neq 4 \\ 2a + 1 & \text{nếu } x = 4. \end{cases}$

a) Với $a = 0$, xét lính liên tục của hàm số tại $x = 4$.

b) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục tại $x = 4$.

c) Với giá trị nào của a thì hàm số liên tục trên tập xác định của nó?

Lời giải.

a) Hàm số trên là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f(4) = 2a + 1 = 1$ (do $a = 0$).
$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \left(x^2 + x + 1\right) = 4^2 + 4 + 1 = 21$.
Vì $\lim\limits_{x \to 4} f(x) \neq f(4)$ nên hàm số trên không liên tục tại $x = 4$ khi $a = 0$.

b) Hàm số trên là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f(4) = 2a + 1$.
$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \left(x^2 + x + 1\right) = 4^2 + 4 + 1 = 21$.

Để hàm số liên tục tại $x = 4$ thì $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 2a + 1 = 21 \Leftrightarrow a = 10$.
Vậy $a = 10$ thì hàm số liên tục tại $x = 4$.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

- TH1: $x \neq 4$, hàm số trên là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
- TH2: $x = 4$, hàm số trên là hàm hằng nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vậy hàm số trên liên tục trên $\mathbb{R}$.

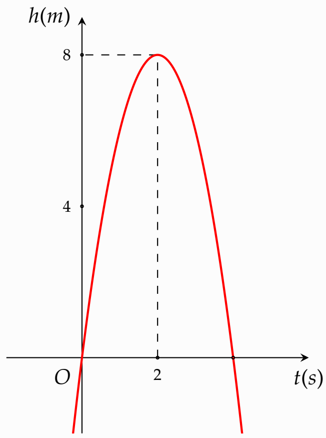
□

Bài 10

Hình bên cạnh biểu thị độ cao h (m) của một quả bóng được đá lên thời gian t (s), trong đó $h(t) = -2t^2 + 8t$.

a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.

b) Dựa và đồ thì hãy xác định $\lim\limits_{t \to 2} \left(-2t^2 + 8t\right)$.



Lời giải.

a) Hàm số trên là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Dựa vào đồ thị ta có $\lim\limits_{t \to 2} \left(-2t^2 + 8t\right) = 8$.

□

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BẢNG TÔ ĐÁP ÁN TỰ LUYỆN – ĐỀ SỐ 1

Học sinh làm BTTL xong, tô phương án đúng. Buổi học sau, cùng với GV kiểm tra kết quả.

1	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	8	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	15	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	22	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	29	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
2	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	9	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	16	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	23	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	30	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
3	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	10	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	17	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	24	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	31	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
4	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	11	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	18	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	25	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	32	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
5	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	12	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	19	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	26	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	33	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
6	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	13	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	20	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	27	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	34	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ
7	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	14	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	21	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	28	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ	35	Ⓐ Ⓑ Ⓒ Ⓓ

Câu 1

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2}{x}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A Hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x\neq 0$.

B Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

C $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

D Vì $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ nên $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x=0$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ sai.

Do $f(0)$ không tồn tại nên hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$, do đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ sai.

Chọn đáp án (A) □

Câu 2

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x+4}$ với $x\neq -4$. Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=-4$ thì ta cần bổ sung giá trị $f(-4)$ bằng bao nhiêu?

A 5. **B** -5. **C** 3. **D** 0.

Lời giải.

$$f(-4)=\lim_{x\to -4}\frac{x^2+3x-4}{x+4}=\lim_{x\to -4}\frac{(x-1)(x+4)}{x+4}=\lim_{x\to -4}(x-1)=-5.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 3

Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x=1$?

A $y=\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$.

B $y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$.

C $y=(x-1)(x^2+x+1)$.

D $y=\dfrac{x^2+2}{x-1}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+2}{x-1} = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+2}{x-1} = -\infty$ nên hàm số $y = \dfrac{x^2+2}{x-1}$ gián đoạn tại điểm $x = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4

Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

(A) $a = -1$.
(B) $a = 2$.
(C) $a = 1$.
(D) $a = 0$.

Lời giải.

Ta có

- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$;
- $f(1) = a$.
- Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$ thì $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a = 2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 5

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3+x^2+7 \text{ khi } x \neq -1 \\ 2x+m-1 \text{ khi } x = -1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

(A) $m = 10$.
(B) $m = 8$.
(C) $m = -10$.
(D) $m = 12$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+x^2+7) = 7$ và $f(-1) = m-3$.
Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -1$ thì $m-3 = 7 \Leftrightarrow m = 10$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 6

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ mx+1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 2$.

(A) $m = \dfrac{15}{2}$.
(B) $m = \dfrac{11}{2}$.
(C) $m = \dfrac{17}{2}$.
(D) $m = \dfrac{13}{2}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 12$.
$f(2) = 2m+1$
Hàm số liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow m = \dfrac{11}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7

Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ n & \text{khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Biết hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$. Giá trị của m, n là

(A) $n = m = 1$. (B) $n = 1$, $m = 0$. (C) $n = -1$, $m = 0$. (D) $n = 0$, $m = 1$.

Lời giải.

Ta có

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^3 - x^2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (mx + 1) = m + 1$; $f(1) = n$.

Do hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên ta có $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = 1 = n$. Suy ra $n = 1, m = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8

Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + ax + b}{x - 1} & \text{, với } x \neq 1 \\ 2ax - 1 & \text{, với } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $a - b$.

(A) -5. (B) 7. (C) -1. (D) 0.

Lời giải.

Nếu $x = 1$ không là nghiệm của $x^2 + ax + b = 0$ thì $\lim\limits_{x \to 1} (x) = \infty$, nên hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$, vô lý.

Vậy $x = 1$ là nghiệm của $x^2 + ax + b = 0$, hay $a + b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -a - 1$.

Khi đó: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + ax - a - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1 + a) = 2 + a$.

Mà $f(1) = 2a - 1$, nên để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $2 + a = 2a - 1 \Leftrightarrow a = 3$, suy ra $b = -4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 9

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{khi } x \neq 4 \\ ax - 1 & \text{khi } x = 4 \end{cases}$. Tập hợp các giá trị của a để hàm số liên tục tại $x = 4$ là

(A) $\{8\}$. (B) $\{0\}$. (C) $\left\{-\dfrac{9}{4}\right\}$. (D) $\left\{\dfrac{9}{4}\right\}$.

Lời giải.

Ta có:

- $f(4) = a \cdot 4 - 1 = 4a - 1$.
- $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x-4)(x+4)}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4}(x + 4) = 8$.

Do đó, điều kiện cần và đủ để hàm số đã cho liên tục tại $x = 4$ là

$$\lim_{x \to 4} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 8 = 4a - 1 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4}.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 10

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x & \text{khi } |x| \le 1 \\ x + 1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

(B) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

(C) Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

(D) Hàm số gián đoạn tại $x = \pm 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x+1) = 2$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \sin \pi x = \sin \pi = 0$. Suy ra hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \sin \pi x = \sin(-\pi) = 0$ và $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x+1) = 0$; $f(-1) = \sin(-x) = 0$.

Suy ra hàm số liên tục tại $x = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + m & \text{khi } x \ge 2 \\ 3x - 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ (m là tham số). Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$.

(A) $m = 0$. (B) $m = 1$. (C) $m = 3$. (D) $m = 2$.

Lời giải.

$f(2) = 4 + m$;

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(x^2 + m\right) = 4 + m$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 1) = 5$.

Hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4 + m = 5 \Leftrightarrow m = 1.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 12

Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $m(x-1)^3(x-2) + 2x - 3 = 0$ vô nghiệm.

(A) $m = 1$. (B) $m = 0$.

(C) $\forall m \in \mathbb{R}$. (D) Không có giá trị m.

Lời giải.

C1: Gọi $f(x) = m(x-1)^3(x-2) + 2x - 3$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.
$f(1) = -1, f(2) = 1 \Rightarrow f(1)\cdot f(2) < 0, \forall m \in \mathbb{R}$ suy ra phương trình luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.
C2: Dùng chức năng Shift Solve của Casio.

Chọn đáp án (D) □

Câu 13

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & \text{với } x \neq 2 \\ 2m+1 & \text{với } x = 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của m sau đây để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

(A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) -1.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
$x = 2 \in \mathscr{D}$, $f(2) = 2m+1$.
$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x-1) = 1$.
Để hàm số liên tục tại $x = 2$ thì $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 1 = 2m+1 \Leftrightarrow m = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{4}{3}x^3 - 5x + 3$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) Hàm số đã cho gián đoạn tại $x_0 = \dfrac{1}{5}$.
(B) Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$.
(C) Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$.
(D) Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Ta có $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot f\left(\dfrac{4}{5}\right) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in \left(0; \dfrac{9}{10}\right) : f(x_0) = 0$.
Do đó: "Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(-1; 1)$" và "Phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên khoảng $(0; +\infty)$" là hai mệnh đề đúng.
Hàm số $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Nên mệnh đề "Hàm số đã cho gián đoạn tại $x_0 = \dfrac{1}{5}$" là mệnh đề sai.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{, khi } x > 1 \\ 2x+1 & \text{, khi } x \leq 1 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng.

(A) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1$.
(B) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
(C) Hàm số $f(x)$ không xác định tại $x = 1$.

(D) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x=1$ vì $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x-2) = -1$.
và $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x+1) = 3$.
Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow$ Không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
Do đó hàm số gián đoạn tại điểm $x=1$ vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 16

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 8+a^2 & \text{khi } x=1 \end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số liên tục tại $x=1$.

(A) 2. (B) 0. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Để hàm số liên tục tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Do giả thiết ta có $f(1) = 8+a^2$ và

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\left[\frac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2}\right] \\
&= \lim_{x\to 1}\left[\frac{(ax+2)\cdot(x-1)}{\sqrt{x+3}-2}\right] \\
&= \lim_{x\to 1}\left[\frac{(ax+2)\cdot(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\right] \\
&= \lim_{x\to 1}\left[\frac{(ax+2)\cdot(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1}\right] \\
&= \lim_{x\to 1}\left[(ax+2)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)\right] \\
&= 4(a+2) = 4a+8.
\end{aligned}$$

Suy ra $4a+8 = 8+a^2 \Leftrightarrow a^2-4a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=4 \end{array}\right.$. Vậy tồn tại 2 giá trị của a để hàm số liên tục tại $x=1$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 17

Cho hàm số $f(x) = x^5+x-1$. Xét phương trình $f(x)=0$ (1). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) Phương trình (1) vô nghiệm.
(B) Phương trình (1) không có nghiệm trên khoảng $(-1;1)$.
(C) Phương trình (1) có nghiệm trên khoảng $(0;1)$.

(D) Phương trình (1) không có nghiệm trên khoảng $(0;1)$.

Lời giải.

Vì $f(x)=x^5+x-1$ là hàm số đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f(-1)=-3$, $f(0)=-1$ và $f(1)=1$.
Mà $f(0)\times f(1)=-1<0$ nên phương trình (1) có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 18

Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

(A) $m=-2$. (B) $m=2$. (C) $m=-1$. (D) $m=1$.

Lời giải.

Hàm số liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=m\Leftrightarrow \lim_{x\to 1}(x-2)=m\Leftrightarrow m=-1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 19

Tìm P để hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{khi } x>1\\ 6Px-3 & \text{khi } x\leq 1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(A) $P=\dfrac{1}{3}$. (B) $P=\dfrac{5}{6}$. (C) $P=\dfrac{1}{6}$. (D) $P=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

/Tập xác định của hàm số : $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
Với $x>1$ và $x<1$ hàm số xác định nên liên tục.
Xét tại $x=1$, ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} y=6P-3=y(1)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} y=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-3)=-2$.
Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $\lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^+} y=y(1)\Leftrightarrow 6P-3=-2\Leftrightarrow P=\dfrac{1}{6}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 20

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} & \text{khi } x\neq 0\\ 2a-\dfrac{5}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

(A) $a=\dfrac{3}{4}$. (B) $a=-\dfrac{3}{4}$. (C) $a=\dfrac{4}{3}$. (D) $a=-\dfrac{4}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \dfrac{1}{4}$.

Ta lại có $f(0) = 2a - \dfrac{5}{4}$.

Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} = 2a - \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21

Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

(A) Hàm số $y = 2x^3 - 10x^2 + 3x + 2017$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

(B) Hàm số $y = \dfrac{1}{x^2+x+1}$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

(C) Hàm số $y = \dfrac{1}{x^3+1}$ liên tục tại mọi điểm $x \neq -1$.

(D) Hàm số $y = \dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$ liên tục tại mọi điểm $x \neq 2$.

Lời giải.

- Hàm số $y = 2x^3 - 10x^2 + 3x + 2017$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ đúng vì hàm số $y = 2x^3 - 10x^2 + 3x + 2017$ là hàm đa thức có tập xác định $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

- Hàm số $y = \dfrac{1}{x^2+x+1}$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$ đúng vì hàm số $y = \dfrac{1}{x^2+x+1}$ là hàm phân thức hữu tỉ, có tập xác định $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

- Hàm số $y = \dfrac{1}{x^3+1}$ liên tục tại mọi điểm $x \neq -1$ đúng vì hàm số $y = \dfrac{1}{x^3+1}$ là hàm phân thức hữu tỉ, có tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ nên hàm số liên tục tại mọi điểm $x \neq -1$.

- Hàm số $y = \dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$ liên tục tại mọi điểm $x \neq 2$ **sai** vì hàm số $y = \dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$ có tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty; 2)$ nên hàm số bị gián đoạn tại các điểm $x \in [2; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22

Hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x \leq 1 \\ x+m & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi m nhận giá trị

(A) $m = 1$. (B) $m = 2$. (C) $m = -1$. (D) $m = -2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+1) = 2$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x+m) = 1+m$.

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ thì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \Leftrightarrow 2 = m+1 \Leftrightarrow m = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) \geq x^4 + \dfrac{2}{x^2} - 2x,\ \forall x > 0$ và $f(1) = -1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- **A** phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm trên $(0; +\infty)$.
- **B** phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(0; 1)$.
- **C** phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(1; 2)$.
- **D** phương trình $f(x) = 0$ có 1 nghiệm trên $(2; 5)$.

Lời giải.

Ta có $x^4 + \dfrac{2}{x^2} - 2x \geq 2\sqrt{2x^2} - 2x \geq 0\ \forall x > 0$, nên $f'(x) > 0\ \forall x > 0$, hay hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Suy ra $f(0) < f(1) = -1$ và $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(0; +\infty)$.
Mà

$$f(2) = f(1) + \int_1^2 f'(x)\mathrm{d}x \geq \int_1^2 \left(x^4 + \frac{2}{x^2} - 2x\right)\mathrm{d}x = \frac{16}{5} > 0.$$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$.

Chọn đáp án C □

Câu 24

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) \leq 0$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- **A** Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[a; b]$.
- **B** Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$.
- **C** Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$ là "đường liền".
- **D** Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = a$.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ thì liên tục trên $(a; b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} = f(b)$. Hàm số chưa chắc liên tục tại $x = a$, vì để hàm số liên tục tại $x = a$ thì $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Chọn đáp án D □

Câu 25

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K chứa a. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = a$ nếu

- **A** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- **B** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = a$.
- **C** $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi $x \to a$.
- **D** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.

Lời giải.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K chứa a. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = a$ nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Chọn đáp án A □

Câu 26

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+a-1 & \text{khi } x\le 0\\ \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x} & \text{khi } x>0\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

(A) $a=2$. (B) $a=3$. (C) $a=1$. (D) $a=4$.

Lời giải.

• Xét $x<0$: $f(x)=3x+a-1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty;0)$.

• Xét $x>0$: $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(0;+\infty)$.

• Xét tính liên tục tại $x=0$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(3x+a-1)=a-1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x}{x\sqrt{2x+1}+1}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1}=1$.

$f(0)=a-1$.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\Leftrightarrow a-1=1\Leftrightarrow a=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 27

Biết hàm số $y=f(x)=\begin{cases}3x+5 & \text{khi } x\ne 1,\\ a & \text{khi } x=1\end{cases}$. Để hàm số liên tục tại $x=1$ thì giá trị của a bằng

(A) 1. (B) -1. (C) 2. (D) 8.

Lời giải.

Hàm số liên tục tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow a=8$

Chọn đáp án (D) □

Câu 28

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x^2-4}-2}{x-2} & x\ne 2\\ a & x=2\end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$.

(A) 8. (B) 6. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

TXĐ: $\mathscr{D}=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$.

$x=2\in\mathscr{D}; f(2)=a$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-4}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-8}{(x-2)(\sqrt{x^2-4}+2)}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+4}{\sqrt{x^2-4}+2}=2$.

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow a=2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 29

Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(B) Hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(C) Hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(D) Hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Dễ thấy các hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ không xác định trên $\mathbb{R}$ nên không liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 30

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x}{x+1} & \text{với } x<0, x\neq -1\\ 1 & \text{với } x=-1\\ \sqrt{x}\cos x & \text{với } x\geq 0.\end{cases}$

Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(B) $f(x)$ liên tục tại mọi điểm, trừ điểm $x=-1$.

(C) $f(x)$ liên tục tại mọi điểm, trừ điểm $x=0$.

(D) $f(x)$ liên tục tại mọi điểm, trừ điểm $x=0$ và $x=1$.

Lời giải.

Ta có:

$f(x)=\sqrt{x}\cos x$ với $x\geq 0$ nên $f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$.

$f(x)=\dfrac{x^3-x}{x+1}$ với $x<0$, $x\neq -1$ nên $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;0)$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x-1)(x+1)}{(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}x(x-1)=2\neq f(-1)$, suy ra $f(x)$ gián đoạn tại $x=-1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x-1)(x+1)}{(x+1)}=0.$

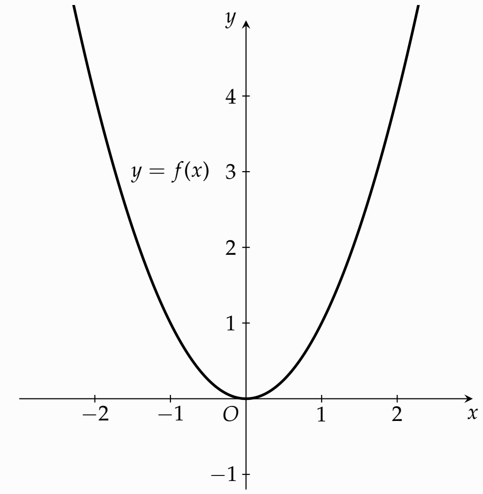
$\lim\limits_{x\to 0^+}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cos x=0=f(0)$. Vậy $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Vậy $f(x)$ liên tục tại mọi $x\neq -1$.

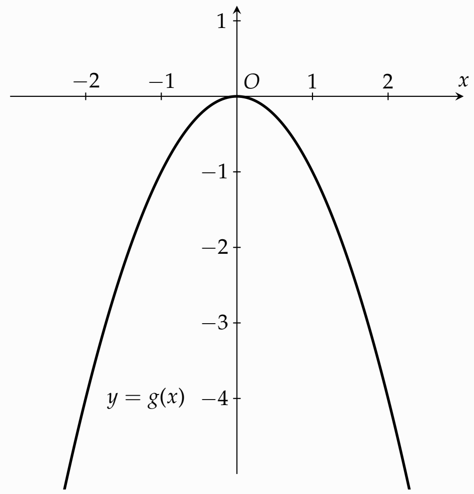
Chọn đáp án (B) □

Câu 31

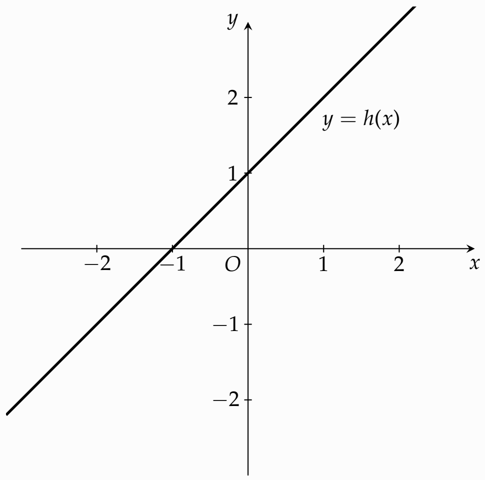
Các đồ thị của các hàm số $y=f(x), y=g(x), y=h(x), y=t(x)$ như hình vẽ bên dưới. Đồ thị nào thể hiện hàm số không liên tục trên khoảng $(-2;2)$?



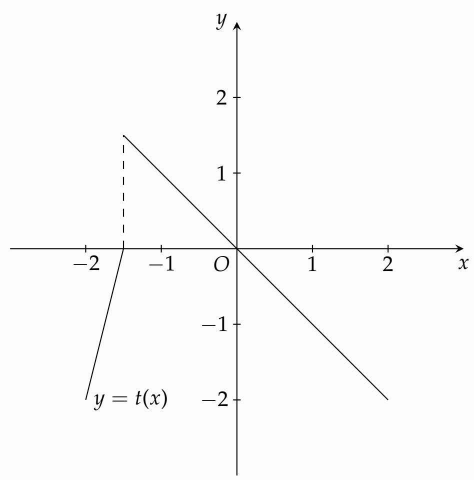
Ⓐ



Ⓑ



Ⓒ



Ⓓ

Lời giải.

Nhìn trên các đồ thị ta thấy đồ thị trong các đáp án A, B, C đều là các nét liền nên nó biểu diễn hàm số liên tục. Trong đồ thị ý D hàm số gián đoạn tại $x = -1,5$, do $\lim\limits_{x \to -1,5^-} t(x) \neq \lim\limits_{x \to 1,5^+} t(x)$.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 32

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ thỏa mãn $\dfrac{a}{m+2} + \dfrac{b}{m+1} + \dfrac{c}{m} = 0$, với $m > 0$. Chọn câu khẳng định đúng trong các câu sau.

Ⓐ Phương trình luôn có nghiệm $x \in (-2; -1)$.

Ⓑ Phương trình luôn có nghiệm $x \in (1; 2)$.

Ⓒ Phương trình luôn có nghiệm $x \in (2; 3)$.

Ⓓ Phương trình luôn có nghiệm $x \in (0; 1)$.

Lời giải.

Xét $f(x) = \dfrac{a.x^{m+2}}{m+2} + \dfrac{b.x^{m+1}}{m+1} + \dfrac{c.x^m}{m}$. Ta thấy $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 1]$. Theo định lý Lagrange thì tồn tại $x_0 \in [0; 1]$ sao cho: $f'(x_0) = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \dfrac{a}{m+1} + \dfrac{b}{m+1} + \dfrac{c}{m} = 0$

Suy ra

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow a.x^{m+1} + b.x^m + c.x^{m-1} = 0 \Leftrightarrow x^{m-1}\left(ax_0^2 + bx_0 + c\right) = 0 \Leftrightarrow ax_0^2 + bx_0 + c = 0$$

Vậy phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x_0 \in (0;1)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 33

Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x > 4 \\ mx+1 & \text{khi } x \le 4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 4$.

(A) $m = 8$. (B) $m = -\dfrac{7}{4}$. (C) $m = \dfrac{7}{4}$. (D) $m = -8$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{x^2-16}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4^+} (x+4) = 8$.
Và: $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} (mx+1) = 4m+1 = f(4)$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 4$ nếu $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$. $\Rightarrow 4m+1 = 8 \Leftrightarrow m = \dfrac{7}{4}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 34

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

(A) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 thì có đạo hàm tại điểm đó.
(B) Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì liên tục tại điểm đó.
(C) Hàm số $y = f(x)$ xác định tại điểm x_0 thì có đạo hàm tại điểm đó.
(D) Hàm số $y = f(x)$ luôn có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định của nó.

Lời giải.

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì liên tục tại điểm đó.
Chọn đáp án (B) □

Câu 35

Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên khoảng $(a;b)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

(A) Hàm số $g(x) = (f(x))^2$ liên tục trên khoảng $(a;b)$.
(B) Hàm số $h(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ liên tục trên khoảng $(a;b)$.
(C) Hàm số $k(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ liên tục trên khoảng $(a;b)$.
(D) Hàm số $u(x) = |f(x)|$ liên tục trên khoảng $(a;b)$.

Lời giải.

Đối với hàm số $k(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, cần thêm điều kiện $f(x) \neq 0,\ \forall x \in (a;b)$.

Chọn đáp án (C) □

—HẾT—

§4. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

A TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}$. Mệnh đề đúng là

(A) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. (B) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. (C) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. (D) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}\right)}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(n\cdot\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}\right) = +\infty.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 2

Cho $u_n = \dfrac{2+2^2+\ldots+2^n}{2^n}$. Giới hạn của dãy số (u_n) bằng

(A) 1. (B) 2. (C) -1. (D) 0.

Lời giải.

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{2+2^2+...+2^n}{2^n} = \frac{2\cdot\frac{1-2^n}{1-2}}{2^n} = -2\cdot\frac{1-2^n}{2^n}\\ \lim u_n &= \lim\left(-2\cdot\frac{1-2^n}{2^n}\right) = \lim\left(-2\cdot\frac{2^n\left(\frac{1}{2^n}-1\right)}{2^n}\right) = \lim\left(-2\cdot\left(\frac{1}{2^n}-1\right)\right) = 2.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 3

Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_n = \dfrac{2}{3^n}$. Tổng của cấp số nhân này bằng

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 6.

Lời giải.

Cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = \dfrac{2}{3}$ và công bội $q = \dfrac{1}{3}$ là cấp số nhân lùi vô hạn.
Ta có công thức tổng cấp số nhân lùi vô hạn là

$$S_n = \lim \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} \right) = 1.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 4

Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$. Mệnh đề đúng là

(A) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. (B) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. (C) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$. (D) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} \right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right)} = 0. \end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 5

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x - x^2}{|x|}$. Khi đó $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ bằng

(A) 0. (B) 1. (C) $+\infty$. (D) -1.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - x^2}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x(1-x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} (1 - x) = 1.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 6

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên

(A) $(-\infty; +\infty)$. (B) $(-\infty; -1]$.
(C) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. (D) $[-1; +\infty)$.

Lời giải.

Ta có $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x > -1 \\ -1 & \text{nếu } x < -1. \end{cases}$
Như vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 7

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{nếu } x\neq 1\\ a & \text{nếu } x=1\end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ khi

(A) $a=0$. (B) $a=3$. (C) $a=-1$. (D) $a=1$.

Lời giải.

Ta có

- $f(1)=a$.
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ khi $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow a=3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 là

(A) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

(B) $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$.

(C) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$.

(D) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$.

Lời giải.

Theo định nghĩa về hàm số liên tục ta có điều kiện cần và đủ để hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 là $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9

Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x+1}{5x-1}$.

(A) 0. (B) $\dfrac{4}{5}$. (C) $\dfrac{5}{4}$. (D) -1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x+1}{5x-1}=\dfrac{5}{4}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 10

Tính $\lim\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}$.

(A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{5}$. (C) $-\dfrac{3}{2}$. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2} = \lim \dfrac{n^3(\frac{1}{n}-3)}{n^3(2+\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^3})} = \lim \dfrac{\frac{1}{n}-3}{2+\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^3}} = -\frac{3}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 11

Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0 ?

(A) $(\sqrt{2})^n$. (B) $(-1,101)^n$. (C) $(0,919)^n$. (D) $(1,001)^n$.

Lời giải.

do $|0,919| < 1$ nên $\lim(0,919)^n = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 12

Tính $\lim(\sqrt{4n^2+2n}-2n)$.

(A) 0. (B) $\dfrac{1}{4}$. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $\lim(\sqrt{4n^2+2n}-2n) = \lim \dfrac{2n}{\sqrt{4n^2+2n}+2n} = \lim \dfrac{2}{\sqrt{4+\frac{2}{n}}+2} = \frac{1}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13

Tính $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$.

(A) 0. (B) $+\infty$. (C) 3. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+2x+4}{x+2} = \frac{12}{4} = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 14

Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

(A) $\lim \dfrac{2^n+3}{1-2^n}$. (B) $\lim \dfrac{(2n+1)(n-3)^2}{n-2n^3}$.

(C) $\lim \dfrac{1-n^3}{n^2+2n}$. (D) $\lim \dfrac{2^n+1}{3.2^n-3^n}$.

Lời giải.

$$\lim \dfrac{2^n+1}{3.2^n-3^n} = \lim \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{3.\left(\frac{2}{3}\right)^n-1} = 0$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 15

Tính $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}$.

Ⓐ $-\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ 1. Ⓓ -1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{x+3}=\dfrac{1}{3}$

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 16

Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2-x+2}{x^2-4} & \text{nếu } x\neq -2\\ a & \text{nếu } x=-2\end{cases}$. Hàm số liên tục tại $x=-2$ khi:

Ⓐ $a=\dfrac{3}{4}$. Ⓑ $a=-\dfrac{3}{4}$. Ⓒ $a=\dfrac{1}{4}$. Ⓓ $a=-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải.

Ta có $f(-2)=a$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=\lim\limits_{x\to -2}\frac{-x^2-x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{-1.(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to -2}\frac{-x+1}{x-2}=-\frac{3}{4}$.

Vậy $a=-\frac{3}{4}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 17

Chọn mệnh đề **sai**.

Ⓐ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}=\dfrac{9}{8}$. Ⓑ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=2$.

Ⓒ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}=\dfrac{5}{4}$. Ⓓ $\lim\limits_{x\to 1}(4x^6-5x^5+x)=0$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+5)}=\dfrac{8}{9}\neq\dfrac{9}{8}$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 18

Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+10}-x\right)$.

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ 0. Ⓒ $+\infty$. Ⓓ $-\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+10}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+10}{\sqrt{x^2+x+10}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{10}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{10}{x^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 19

Tính $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3-2x+1}{4x-x^2}$.

Ⓐ -3. Ⓑ $\dfrac{3}{4}$. Ⓒ $-\infty$. Ⓓ $+\infty$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3-2x+1}{4x-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3\left(3-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}$

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} 3-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}=3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}=0$.

Vậy : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3-2x+1}{4x-x^2}=+\infty$

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 20

Tính $\lim\left(\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

Ⓐ $\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{2}{3}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}]$

Suy ra $\lim(\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)})=\dfrac{1}{2}\lim(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$

$=\dfrac{1}{2}\lim(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2n+1})=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 21

Tính $\lim\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2-1}$

Ⓐ 0. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ 1. Ⓓ $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Do đó $\lim\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2-1}=\lim\dfrac{n(n+1)}{2(n^2-1)}=\dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 22

Tính $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)$.

Ⓐ -2. Ⓑ 2. Ⓒ 1. Ⓓ -1.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}\right)=\lim\limits_{x\to2}\left[\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}\right]$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-3+x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2}{(x-1)(x-3)}=-2.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 23

Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5x+1}+x}{3x+1}$.

(A) 0. (B) $\dfrac{2}{3}$. (C) $-\dfrac{2}{3}$. (D) $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5x+1}+x}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x.\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}+x}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}{3+\frac{1}{x}}=0.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 24

Với giá trị nào của a hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x\neq2\\ 5x+a & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $a=2$. (B) $a=1$. (C) $a=-1$. (D) $a=-2$.

Lời giải.

Với $x\neq2$ thì $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$ là hàm số xác định do đó nó liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Với $x=2$, ta có:

$f(2)=10+a\quad(1)$

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x^2+2x+4)=12\ \ (2)$

Để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=2\Leftrightarrow10+a=12\Leftrightarrow a=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25

Với giá trị nào của a hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x>2\\ a+2x & \text{khi } x\le2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$?

(A) $a=-20$. (B) $a=5$. (C) $a=12$. (D) $a=10$.

Lời giải.

Với $x>2$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$ là hàm số xác định do đó nó liên tục trên $(2;+\infty)$.

Với $x<2$ thì $f(x)=a+2x$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $(-\infty;2)$.

Xét tại $x=2$, ta có:

$f(2)=4+a\quad(1)$

$\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to2^+}(x+2).\left(\sqrt{x+2}+2\right)=16\ \ (2)$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (a + 2x) = a + 4 \quad (3)$

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow 4 + a = 16 \Leftrightarrow a = 12$.

Chọn đáp án C □

Câu 26

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A Phương trình $2x^3 - 10x - 7 = 0$ có nghiệm.

B Phương trình $2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3$ có đúng 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 7)$.

C Phương trình $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có 5 nghiệm thuộc khoảng $(-2; 3)$.

D Phương trình $\cos^2 x - \sqrt{x} = 0$ vô nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = \cos^2 x - \sqrt{x}$ có tập xác định $D = [0; +\infty)$.
$f(0) = 1$ và $f(\frac{\pi}{2}) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Suy ra $f(0).f(\frac{\pi}{2}) < 0$ mà hàm số liên tục trên $[0; \frac{\pi}{2}]$. Nên phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x - \sqrt{x} = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(0; \frac{\pi}{2})$.

Phân tích phương án:

Đáp án A: Xét $f(x) = 2x^3 - 10x - 7$ là hàm đa thức có $f(0) = -7$, $f(-1) = 1$.

Đáp án B: $2x + 6\sqrt[3]{1-x} = 3 \Leftrightarrow (2x-3)^3 - 216(x-1) = 0$. Xét hàm số $f(x) = (2x-3)^3 - 216(x-1)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-4) = -251$, $f(0) = 189$, $f(1) = -1$, $f(7) = 35$. Suy ra $f(-4).f(0) < 0$, $f(0).f(1) < 0$, $f(1).f(7) < 0$. Nên phương trình có ít nhất 3 nghiệm thuộc khoảng $(-4; 7)$ mà $f(x)$ là đa thức bậc 3 nên $f(x)$ có đúng 3 nghiệm (có thể dùng máy tính để kiểm tra)

Đáp án C: Xét $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x - 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$; tính các giá trị sau $f(-2)$, $f(-\frac{3}{2})$, $f(-1)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(1)$, $f(3)$. Từ đó kết luận phương trình có 5 nghiệm (có thể dùng máy tính để kiểm tra).

Chọn đáp án D □

Câu 27

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$

A 2. B 0. C 1. D -2.

Lời giải.

Ta có:

$u_n - u_{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$;

$u_{n-1} - u_{n-2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$;

......................................;

$u_2 - u_1 = \dfrac{1}{2}$

Cộng vế theo vế, ta được: $u_n - u_1 = \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{2} \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Vì $u_1 = 1 \Rightarrow u_n = 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \lim u_n = 2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28

Có bao nhiêu giá trị của tham số $m \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+m}+\sqrt[3]{x-m}}{x}=1.$$

(A) 1. (B) 3. (C) 0. (D) 2.

Lời giải.

Ta có : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+m}+\sqrt[3]{x-m}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt[3]{x+m}^2-\sqrt[3]{x+m}.\sqrt[3]{x-m}+\sqrt[3]{x-m}^2}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{m^2}}$.

Thay vào ta được phương trình $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{m^2}}=1\Leftrightarrow m^2=\dfrac{27}{8}\Leftrightarrow m=\pm\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29

Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-x\sqrt{3}}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{6}+d(a,b,c,d\in\mathbb{Q})$. Tính $ab-cd$.

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Tính được $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-x\sqrt{3}}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}-\dfrac{1}{2}$ nên $ab-cd=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 30

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{2017x^2-2017}$ có giá trị bao nhiêu?

(A) $-\dfrac{11}{48408}$. (B) $\dfrac{11}{48408}$. (C) $-\dfrac{11}{48409}$. (D) $-\dfrac{11}{46391}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{2017(x^2-1)}=\frac{1}{2017}[\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1}-\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1}]=\tfrac{1}{2017}(-\frac{3}{8}-\tfrac{1}{12})=-\tfrac{11}{48408}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 31

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{100}-2017.x^{50}+32}-x^{50})$ có giá trị bao nhiêu?

(A) 0. (B) $-\dfrac{1}{2}$. (C) $-\dfrac{2017}{2}$. (D) $+\infty$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{100}-2017.x^{50}+32}-x^{50})=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2017.x^{50}+32}{\sqrt{x^{100}-2017.x^{50}+32}+x^{50}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2017+\dfrac{32}{x^{50}}}{\sqrt{1-\dfrac{2017}{x^{50}}+\dfrac{32}{x^{100}}}+1}$$
$$=\frac{-2017}{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

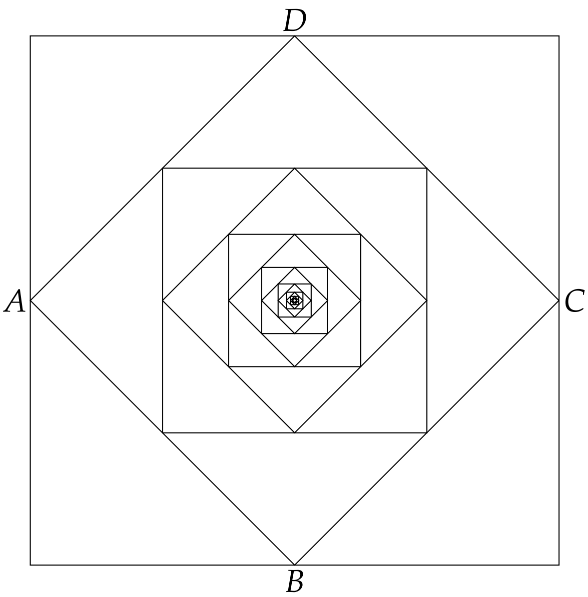
Câu 32

Từ một hình vuông có diện tích là 1m^2. Gọi A, B, C, D lần lượt là trung điểm bốn cạnh của hình vuông, bạn Hùng dùng bút chì vẽ theo hình vuông $ABCD$ để được hình vuông thứ hai. Bạn Hùng lại tiếp tục vẽ theo bốn trung điểm các cạnh của hình vuông $ABCD$ để được hình vuông thứ ba, và cứ tiếp tục như vậy. Tính tổng diện tích tất cả các hình vuông đã có.

(A) 4. (B) 2. (C) 3. (D) $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

Đặt $a=1$ là độ dài cạnh hình vuông, $S_1=1$ là diện tích hình vuông ban đầu.
Do M, N là trung điểm hai cạnh của hình vuông nên
$MN=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow S_2=MN^2=\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{S_1}{2}=\dfrac{1}{2}$.
Lại lấy trung điểm các cạnh của hình vuông $MNPQ$ để tiếp tục, khi đó, hình vuông mới sinh ra có diện tích là $S_3=\left(\dfrac{MN\sqrt{2}}{2}\right)^2=\dfrac{MN^2}{2}=\dfrac{S_1}{4}=\dfrac{1}{4}$.
Vậy các hình vuông sinh ra có diện tích lần lượt là 1, $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \ldots$.
Vậy tổng diện tích các hình vuông tạo thành là
$S=1\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$.



Chọn đáp án (B) □

Câu 33

Cho $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt[4]{1+5x}}{x-3}=\dfrac{a}{b}$, với $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tìm giá trị của tổng a^2+b^2.

(A) 4709. (B) 6005. (C) 1145. (D) 449.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}-\sqrt[4]{1+5x}}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}-2}{x-3}+\lim_{x\to3}\frac{2-\sqrt[4]{1+5x}}{x-3}=\frac{6}{12}-\frac{5}{32}=\frac{11}{32}$$

Chọn đáp án (C) □

B TỰ LUẬN

Bài 1

Cho dãy số (u_n) có tính chất $|u_n - 1| < \dfrac{2}{n}$. Có kết luận gì về giới hạn của dãy số này?

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} |u_n - 1| < \dfrac{2}{n} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 1| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1.$ □

Bài 2

Tìm giới hạn của các dãy số sau

a) $u_n = \dfrac{n^2}{3n^2 + 7n - 2}$;

b) $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{3^k + 5^k}{6^k}$;

c) $w_n = \dfrac{\sin n}{4n}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{3n^2 + 7n - 2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3 + \dfrac{7}{n} - \dfrac{2}{n^2}} = \dfrac{1}{3}.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{3^k + 5^k}{6^k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k + \sum\limits_{k=0}^{n} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{6}\right)^k = 0.$

c) Ta có $w_n = \left|\dfrac{\sin n}{4n}\right| \le \dfrac{1}{4n}$, nhưng mà $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n} = 0$. Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

□

Bài 3

Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số.

a) 1,(01);

b) 5,(132).

Lời giải.

a) 1,(01);
Ta có

$$\begin{aligned} 1{,}(01) &= 1{,}010101\ldots = 1 + 0{,}01 + 0{,}0001 + 0{,}000001 + \ldots \\ &= 1 + 10^{-2} + 10^{-4} + 10^{-6} + \ldots \end{aligned}$$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$, $q = 10^{-2}$ nên

$$1{,}(01) = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{100}} = \frac{100}{99}.$$

b) 5,(132).
Ta có

$$\begin{aligned}5{,}(132) &= 5{,}132132132\ldots = 132 + 0{,}132 + 0{,}000132 + 0{,}000000132 + \ldots - 127\\ &= 132 + 132\cdot 10^{-3} + 132\cdot 10^{-6} + 132\cdot 10^{-9} + \ldots - 127\end{aligned}$$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 132$, $q = 10^{-3}$ và trừ đi 127 nên

$$5{,}(132) = \frac{u_1}{1-q} - 127 = \frac{132}{1-\dfrac{1}{1000}} - 127 = \frac{1709}{333}.$$

□

Bài 4

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2-x}{(1-x)^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+2}{\sqrt{4x^2+1}}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7} &= \lim_{x\to 7}\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-3^2}{(x-7)\left(\sqrt{x+2}+3\right)} = \lim_{x\to 7}\frac{x-7}{(x-7)\left(\sqrt{x+2}+3\right)}\\ &= \lim_{x\to 7}\frac{1}{\sqrt{x+2}+3} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

c) Ta có $\lim\limits_{x\to 1}(2-x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^2 = 0$; $(1-x)^2 > 0, \forall x \neq 0$ nên $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-x}{(1-x)^2} = +\infty$.

d) Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -\infty}\frac{x+2}{\sqrt{4x^2+1}} &= \lim_{x\to -\infty}\frac{x+2}{|x|\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{-x\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}\\ &= \lim_{x\to -\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

Bài 5

Tính các giới hạn một bên:

a) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-9}{|x-3|}$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$.

Lời giải.

a) Ta có $x \to 3^+ \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x - 3 > 0$. Vậy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{|x-3|} &= \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}\\ &= \lim_{x\to 3^+} (x+3) = 6.\end{aligned}$$

b) Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} x = 1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} = 0$ và $\sqrt{1-x} > 0, \forall x < 1$ nên $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} = +\infty$.

□

Bài 6

Chứng minh rằng giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ không tồn tại.

Lời giải.

- $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} (-1) = -1$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$.

Vậy $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$ nên giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ không tồn tại. □

Bài 7

Giải thích tại sao các hàm số sau đây gián đoạn tại điểm đã cho.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$;

b) $g(x) = \begin{cases} 1+x & \text{nếu } x < 1 \\ 2-x & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

Lời giải.

a) Ta có

- $f(0) = 1$.
- Xét $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ không tồn tại.

Vậy hàm số gián đoạn tại $x = 0$.

b) Ta có

- $f(1) = 2 - 1 = 1$.
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (1 + x) = 2$.
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2 - x) = 1$.

Vậy $f(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

□

Bài 8

Lực hấp dẫn tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm Trái Đất là

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{nếu } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{nếu } r \geq R, \end{cases}$$

trong đó M và R lần lượt là khối lượng và bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Xét tính liên tục của hàm số $F(r)$.

Lời giải.

Ta có

- Với $r < R$, $F(r) = \dfrac{GMr}{R^3}$ là hàm liên tục.
- Với $r > R$, $F(r) = \dfrac{GM}{R^2}$ là hàm liên tục.

Tại $r = R$.

- $F(R) = \dfrac{GM}{R^2}$.
- $\lim\limits_{r \to R^+} F(r) = \lim\limits_{r \to R^+} \dfrac{GM}{r^2} = \dfrac{GM}{R^2}$.
- $\lim\limits_{r \to R^-} F(r) = \lim\limits_{r \to R^-} \dfrac{GMr}{R^3} = \dfrac{GMR}{R^3} = \dfrac{GM}{R^2}$.

Ta có $F(R) = \lim\limits_{r \to R^+} F(r) = \lim\limits_{r \to R^-} F(r)$ nên hàm số liên tục tại $r = R$.
Vậy $F(r)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. □

Bài 9

Tìm tập xác định của các hàm số sau và giải thích tại sao các hàm này liên tục trên các khoảng xác định của chúng.

a) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2 + 5x + 6}$;

b) $g(x) = \dfrac{x - 2}{\sin x}$.

Lời giải.

a) Điều kiện $x^2 + 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq -3. \end{cases}$
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{-2; -3\}$.
Hàm số là hàm phân thức, chứa các hàm $\sin x$, $\cos x$ nên liên tục trên tập xác định.

b) Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$.
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R} \backslash \{k\pi\}$.
Hàm số là hàm phân thức, chứa các hàm $\sin x$, $\cos x$ nên liên tục trên tập xác định.

□

Bài 10

Tìm các giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \leq a \\ x^2 & \text{nếu } x > a \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; a)$ và $(a; +\infty)$.
Ta có

- $f(a) = a + 1$.
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} (x+1) = a + 1$.
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} x^2 = a^2$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$, ta cần

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) \Leftrightarrow a + 1 = a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

□

Bài 11

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{2n^2+6n+1}{8n^2+5}$;

b) $\lim \dfrac{4n^2-3n+1}{-3n^3+5n^2-2}$;

c) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2-n+3}}{8n-5}$;

d) $\lim \left(4 - \dfrac{2^{n+1}}{3^n}\right)$;

e) $\lim \dfrac{4.5^n + 2^{n+2}}{6.5^n}$;

f) $\lim \dfrac{2 + \frac{4}{n^3}}{6^n}$.

Lời giải.

a) $\lim \dfrac{2n^2+6n+1}{8n^2+5} = \lim \dfrac{2 + \dfrac{6}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{8 + \dfrac{5}{n^2}} = \dfrac{1}{4}$.

b) $\lim \dfrac{4n^2-3n+1}{-3n^3+5n^2-2} = \lim \dfrac{\dfrac{4}{n} - \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}}{-3 + \dfrac{5}{n} - \dfrac{2}{n^3}} = 0$.

c) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2-n+3}}{8n-5} = \lim \dfrac{\sqrt{4-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}}}{8-\dfrac{5}{n}} = \dfrac{1}{4}$.

d) $\lim \left(4-\dfrac{2^{n+1}}{3^n}\right) = \lim \left(4-\dfrac{2\cdot 2^n}{3^n}\right) = \lim \left(4-2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) = 4$.

e) $\lim \left(\dfrac{4\cdot 5^n+2^{n+2}}{6\cdot 5^n}\right) = \lim \left(\dfrac{4+4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n}{6}\right) = \dfrac{2}{3}$.

f) $\lim \left(\dfrac{2+\frac{4}{n^3}}{6^n}\right) = \lim \left(\dfrac{\dfrac{2}{6^n}+\dfrac{4}{n^3\cdot 6^n}}{1}\right) = 0$.

□

Bài 12

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -3}\left(4x^2-5x+6\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x-2}$; c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to -3}\left(4x^2-5x+6\right) = 4(-3)^2-5(-3)+6 = 57$.

b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x-1)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(2x-1) = 3$.

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-16} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x+4)} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{(\sqrt{x}+2)(x+4)} = \dfrac{1}{32}$.

□

Bài 13

Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{6x+8}{5x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x+8}{5x-2}$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-x+1}}{3x-2}$;

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-x+1}}{3x-2}$; e) $\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{3x^2+4}{2x+4}$; f) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{3x^2+4}{2x+4}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{6x+8}{5x-2} = \dfrac{6}{5}$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x+8}{5x-2} = \dfrac{6}{5}$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-x+1}}{3x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{9-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(3-\dfrac{2}{x}\right)}=-1.$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2-x+1}}{3x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{9-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(3-\dfrac{2}{x}\right)}=1.$

e) Vì $\lim\limits_{x\to2^-}(3x^2+4)=16>0$; $\lim\limits_{x\to2^-}(x+2)=0$ và $x\to-2^-\Rightarrow x+2<0$ nên $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{3x^2+4}{2x+4}=-\infty$

f) Vì $\lim\limits_{x\to2^+}(3x^2+4)=16>0$; $\lim\limits_{x\to2^+}(x+2)=0$ và $x\to-2^+\Rightarrow x+2>0$ nên $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{3x^2+4}{2x+4}=+\infty$

□

Bài 14

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+a & \text{nếu } x<2\\ 4 & \text{nếu } x=2\\ -3x+b & \text{nếu } x>2\end{cases}$

a) Với $a=0,b=1$, xét tính liên tục của hàm số tại $x=2$.

b) Với giá trị nào của a,b thì hàm số liên tục tại $x=2$?

c) Với giá trị nào của a,b thì hàm số liên tục trên tập xác định?

Lời giải.

a) Với $a=0;b=1$, ta có:

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{nếu } x<2\\ 4 & \text{nếu } x=2\\ -3x+1 & \text{nếu } x>2.\end{cases}$$

Ta có

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(2x)=4 \text{ và } \lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}(-3x+1)=-5.$$

Vì $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to2}f(x)$.

b) Ta có

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(2x+a)=4+a \text{ và } \lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}(-3x+b)=-6+b.$$

Hàm số liên tục của hàm số tại $x=2$ khi và chỉ khi tồn tại $\lim\limits_{x\to2}f(x)$ và $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4+a=4\\ -6+b=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=10.\end{cases}$$

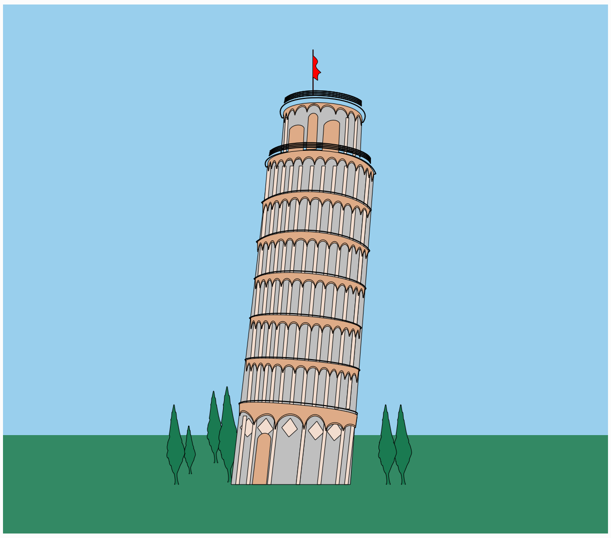
Vậy $a=0;b=10$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

c) Để hàm số liên tục trên tập xác định điều kiện cần và đủ là hàm số liên tục tại $x = 2$. Do đó với $a = 0, b = 10$ thì hàm số liên tục trên tập xác định.

□

Bài 15

Từ độ cao $55,8$ m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.



Lời giải.

Mỗi khi chạm đất quả bóng lại nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao của lần rơi ngay trước đó và sau đó lại rơi xuống từ độ cao thứ hai này. Do đó, độ dài hành trình của quả bóng kể từ thời điểm rơi ban đầu đến:

Thời điểm chạm đất lần thứ nhất là $d_1 = 55{,}8$.

Thời điểm chạm đất lần thứ hai là $d_2 = 55{,}8 + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10}$.

Thời điểm chạm đất lần thứ ba là $d_3 = 55{,}8 + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10} + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^2}$.

Thời điểm chạm đất lần thứ tư là $d_4 = 55{,}8 + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^3}$.

...

Thời điểm chạm đất lần thứ n $(n > 1)$ là

$$d_n = 55{,}8 + 2 \cdot 55{,}8 + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^3} + \ldots + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^{n-1}}.$$

Do đó, quãng đường mà quả bóng đi được kể từ thời điểm rơi đến khi nằm yên trên mặt đất là:

$$d = 55{,}8 + 2.55{,}8 + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^3} + \ldots + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^{n-1}} + \ldots = \lim d_n.$$

Vì $2 \cdot \frac{55{,}8}{10}; 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^2}; 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^3}; \ldots; 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^{n-1}}; \ldots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{10}$ nên ta có:

$$2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^3} + \ldots + 2 \cdot \frac{55{,}8}{10^{n-1}} + \ldots = \frac{2 \cdot \frac{55{,}8}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 12{,}4.$$

Vậy $d = 55{,}8 + 12{,}4 = 68{,}2$ m.

□

Bài 16

Cho một tam giác đều ABC cạnh a. Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1, \ldots,$ tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n, \ldots$ Gọi $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ và $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$.

a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n).

b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ và $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots$.

Lời giải.

a) Ta có $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ lần lượt là chu vi của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \ldots, A_nB_nC_n, \ldots$

$$\begin{aligned}
&p_1 = 3a\\
&p_2 = 3 \cdot \frac{1}{2}a\\
&\ldots\\
&p_n = 3 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}a
\end{aligned}$$

suy ra $\lim p_n = \lim 3 \cdot \dfrac{1}{2^{n-1}}a = 0$.

$$\begin{aligned}
&S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\\
&S_2 = \frac{1}{4}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\\
&\ldots\\
&S_n = \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

suy ra $\lim S_n = \lim \dfrac{1}{4^{n-1}} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 0$.

b) Dựa vào dữ kiện đề bài suy ra tổng (p_n) là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \dfrac{1}{2}$

và $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = \lim (p_n) = \dfrac{p_1}{1-q} = \dfrac{3a}{1-\frac{1}{2}} = 6a$.

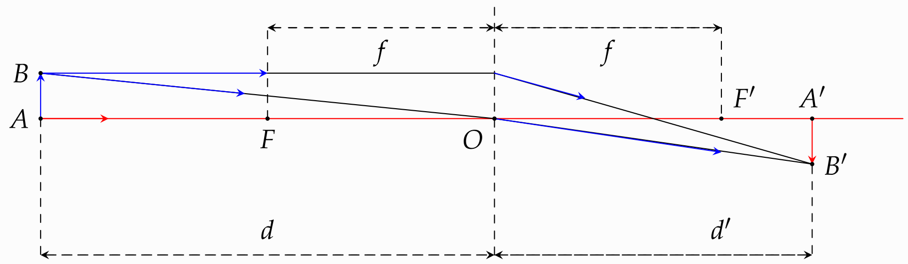
Dựa vào dữ kiện đề bài suy ra tổng (S_n) là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \dfrac{1}{4}$

và $S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots = \lim (S_n) = \dfrac{S_1}{1-q} = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

□

Bài 17

Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như hình vẽ bên dưới. Công thức thấu kính là $\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{d}=\dfrac{1}{f}$.



a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d'=\varphi(d)$.

b) Tìm $\lim\limits_{d\to f^+}\varphi(d)$, $\lim\limits_{d\to f^-}\varphi(d)$ và $\lim\limits_{d\to f}\varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

Lời giải.

a) Ta có

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d'}=\frac{1}{f}\Leftrightarrow d'=\frac{df}{d-f}.$$

Vậy $\varphi(d)=\dfrac{df}{d-f}$.

b) Vì $\lim\limits_{d\to f^+}df=f^2$; $\lim\limits_{d\to f^+}(d-f)=0; d\to f^+\Rightarrow d-f>0$ nên $\lim\limits_{d\to f^+}\dfrac{df}{d-f}=+\infty$.

Vậy $\lim\limits_{d\to f^+}\varphi(d)=\lim\limits_{d\to f^+}\dfrac{df}{d-f}=+\infty$.

Ý nghĩa: Khi đặt vật nằm ngoài tiêu cự và tiến dần đến tiêu điểm thì cho ảnh thật ngược chiều với vật ở vô cùng.

Vì $\lim\limits_{d\to f^-}df=f^2$; $\lim\limits_{d\to f^+}(d-f)=0; d\to f^-\Rightarrow d-f<0$ nên $\lim\limits_{d\to f^+}\dfrac{df}{d-f}=-\infty$.

Vậy $\lim\limits_{d\to f^+}\varphi(d)=\lim\limits_{d\to f^+}\dfrac{df}{d-f}=-\infty$.

Ý nghĩa: Khi đặt vật nằm trong tiêu cự và tiến dần đến tiêu điểm thì cho ảnh ảo cùng chiều với vật và nằm ở vô cùng.

Vì không tồn tại $\lim\limits_{d\to f^+}\varphi(d)$ và $\lim\limits_{d\to f^-}\varphi(d)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{d\to f}\varphi(d)$.

□

§5. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V - TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Trong các giới hạn sau, giới hạn nào bằng 0?

Ⓐ $\lim(n^3-3n+1)$. Ⓑ $\lim\dfrac{n^2+n}{n^3+1}$. Ⓒ $\lim\dfrac{n^2+n+1}{4n+1}$. Ⓓ $\lim\dfrac{2^n-3^n}{3^n+2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\dfrac{n^2+n}{n^3+1}=\lim\dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^3}}=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2

Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

(A) $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

(B) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương.

(C) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

(D) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim c = c$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ khi $|q| < 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ khi $q > 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3

Tính $\lim \dfrac{n^2+1}{2n^2+n+1}$ ta được kết quả là

(A) $\lim \dfrac{n^2+1}{2n^2+n+1} = 0$.

(B) $\lim \dfrac{n^2+1}{2n^2+n+1} = \dfrac{1}{2}$.

(C) $\lim \dfrac{n^2+1}{2n^2+n+1} = +\infty$.

(D) $\lim \dfrac{n^2+1}{2n^2+n+1} = 1$.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{n^2+1}{2n^2+n+1} = \lim \dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4

$\lim \dfrac{2023^n + 2024^n}{2025^n}$ có giá trị bằng

(A) $\dfrac{3}{5}$. (B) $+\infty$. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Ta có $\lim \dfrac{2023^n + 2024^n}{2025^n} = \lim \left(\dfrac{2023}{2025}\right)^n + \lim \left(\dfrac{2024}{2025}\right)^n = 0 + 0 = 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5

Tìm $\lim \left(\sqrt{n^2+1} - 2n\right)$ ta được kết quả là

(A) $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) 0. (D) $-\dfrac{2}{3}$.

Lời giải.

Cách 1: $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-2n\right)=\lim n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-2\right)=-\infty$

(vì $\lim n=+\infty$ và $\lim\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-2\right)=-1<0$).

Cách 2: $\lim\left(\sqrt{n^2+1}-2n\right)=\lim\dfrac{n^2+1-4n^2}{\sqrt{n^2+1}+2n}=\lim\dfrac{-3n+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+2}=-\infty.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 6

Tính tổng vô hạn $S=9+3+1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-3}}+\cdots$

(A) $S=14$. (B) $S=15$. (C) $S=\frac{27}{2}$. (D) $S=16$.

Lời giải.

Dãy số $(u_n):9;3;1;\frac{1}{3};\cdots;\frac{1}{3^{n-3}};\cdots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1=9$, công bội $q=\frac{1}{3}$.

Do đó tổng của dãy là $S=9+3+1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-3}}+\cdots=\dfrac{u_1}{1-q}=\dfrac{9}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{27}{2}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

(A) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

(B) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n-3}=2$.

(C) $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2-2n+1)=+\infty$.

(D) $\lim\limits_{n\to+\infty}n^k=-\infty\ (k\in\mathbb{N}^*)$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}n^k=+\infty\ (k\in\mathbb{N}^*)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 8

Tính $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)$.

(A) $\frac{2}{3}$. (B) $+\infty$. (C) $-\infty$. (D) 1.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)\\
&=\lim n\left[\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)+\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)\right]\\
&=\lim n\left[\frac{3}{\sqrt{4n^2+3}+2n}+\frac{-n}{(2n)^2+2n\cdot\sqrt[3]{8n^3+n}+\sqrt[3]{8n^3+n}^2}\right]\\
&=\lim\left[\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}+2}+\frac{-1}{2^2+2\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^2}}^2}\right]\\
&=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 9

Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{\sqrt{2n^3+n}+3n-1}{\sqrt{6n^3+2n^2+n}}$ có giới hạn bằng $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, $a>0, b>0$ và ƯCLN$(a,b=1)$. Hãy tính giá trị của a^2+b^2.

(A) 5. (B) 40. (C) 9. (D) 10.

Lời giải.

Ta có

$$\lim u_n=\lim\frac{\sqrt{2n^3+n}+3n-1}{\sqrt{6n^3+2n^2+n}}=\lim\frac{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}+\frac{3}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n\sqrt{n}}}{\sqrt{6+\frac{2}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}}=\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Suy ra $a=1, b=3\Rightarrow a^2+b^2=10$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số b để biểu thức $A=\lim\dfrac{9-b^2n^2}{11n^2+3}<0$.

(A) $b\le 0$. (B) $b\neq 0$. (C) $b<0$. (D) $b>0$.

Lời giải.

Ta có $A=\lim\dfrac{9-b^2n^2}{11n^2+3}=\lim\dfrac{n^2\left(\frac{9}{n^2}-b^2\right)}{n^2\left(11+\frac{3}{n^2}\right)}=\lim\dfrac{\frac{9}{n^2}-b^2}{11+\frac{3}{n^2}}=-\dfrac{b^2}{11}$.

Yêu cầu bài toán xảy ra khi $-\dfrac{b^2}{11}<0\Leftrightarrow b^2>0\Leftrightarrow b\neq 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11

Cho các giới hạn: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 3$. Tính $M = \lim\limits_{x\to x_0}[3f(x) - 4g(x)]$.

Ⓐ $M = 5$. Ⓑ $M = 2$. Ⓒ $M = -6$. Ⓓ $M = 3$.

Lời giải.

Ta có $M = \lim\limits_{x\to x_0}[3f(x) - 4g(x)] = 3\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - 4\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 6 - 12 = -6$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 12

Giá trị của $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3 - x^2 + 1\right)$ bằng

Ⓐ -11. Ⓑ 12. Ⓒ 5. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^3 - x^2 + 1\right) = \lim\limits_{x\to -2}\left((-2)^3 - (-2)^2 + 1\right) = -11$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 13

Giá trị của $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+5} - x\right)$ là

Ⓐ $+\infty$. Ⓑ $-\infty$. Ⓒ 1. Ⓓ 0.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+5} - x\right) = \lim_{x\to -\infty} x\left(-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}} - 1\right) = +\infty.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 14

Giá trị của $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2 - x + 1}{x+2}$ là

Ⓐ $-\infty$. Ⓑ $+\infty$. Ⓒ -2. Ⓓ 1.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2 - x + 1}{x+2} = \lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to -\infty}\left[x\cdot\dfrac{\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{1 + \frac{2}{x}}\right] = -\infty$.

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 15

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$. Ta xét các mệnh đề sau

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$. (2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$. (3) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty$.

Trong các mệnh đề trên có tất cả bao nhiêu mệnh đề đúng?

(A) Có một mệnh đề đúng. (B) Có hai mệnh đề đúng.
(C) Có ba mệnh đề đúng. (D) Không có mệnh đề nào đúng.

Lời giải.

- Mệnh đề (1), (2) sai nếu ta chọn $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3}{(x-1)^2}$ và $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2}{(x-1)^2}$. Khi đó

$$\lim_{x\to 1}\left[f(x)+g(x)\right]=+\infty \text{ và } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{-3}{2}.$$

- Mệnh đề (3) sai vì $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|=+\infty$ nhưng $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|\neq\lim\limits_{x\to x_0}|g(x)|$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16

Cho a là số thực khác 0. Tính $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x-a}$.

(A) a^3. (B) $4a^3$. (C) $2a^3$. (D) $3a^3$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)(x+a)\left(x^2+a^2\right)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\left[\left(x^2+a^2\right)(x+a)\right]=2a^2\cdot 2a=4a^3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 17

Cho $2a+b=2$ và $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax^2+bx-4}{x-2}=5$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $a=-1, b=4$. (B) $a=1, b=0$. (C) $a=\dfrac{3}{2}, b=-1$. (D) $a=-2, b=6$.

Lời giải.

Ta có $2a+b=2\Leftrightarrow b=2-2a$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{ax^2+bx-4}{x-2}=5 &\Leftrightarrow \lim_{x\to 2}\frac{ax^2+(2-2a)x-4}{x-2}=5\Leftrightarrow\lim_{x\to 2}\frac{(ax+2)(x-2)}{x-2}=5\\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to 2}(ax+2)=5\Leftrightarrow 2a+2=5\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}\Rightarrow b=-1.\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 18

Tính $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}+x-4}{x^2-3x+2}$ ta được kết quả là

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{1}{3}$. Ⓒ $\dfrac{5}{4}$. Ⓓ $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}+x-4}{x^2-3x+2} &= \lim_{x\to 2}\frac{3x+2+(x-4)^3}{(x^2-3x+2)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-(x-4)\sqrt[3]{3x+2}+(x-4)^2\right]}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x^3-12x^2+51x-62}{(x^2-3x+2)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-(x-4)\sqrt[3]{3x+2}+(x-4)^2\right]}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-10x+31)}{(x-2)(x-1)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-(x-4)\sqrt[3]{3x+2}+(x-4)^2\right]}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-10x+31}{(x-1)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-(x-4)\sqrt[3]{3x+2}+(x-4)^2\right]}\\ &= \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 19

Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^3-3x^2}$ ta được kết quả là

Ⓐ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $-\dfrac{1}{4}$. Ⓒ $-\dfrac{1}{6}$. Ⓓ $-\dfrac{1}{8}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^3-3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(2x^3-3x^2)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(2x-3)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}=-\frac{1}{6}.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 20

Kết quả của $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}$ là

Ⓐ $\dfrac{7}{23}$. Ⓑ $\dfrac{7}{24}$. Ⓒ $\dfrac{7}{25}$. Ⓓ $\dfrac{7}{26}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)+\left(\sqrt{x+16}-4\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}+\frac{\sqrt{x+16}-4}{x}\right]\\ &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}+\frac{x}{x\left(\sqrt{x+16}+4\right)}\right]\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+16}+4}\right]$$
$$= \frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{7}{24}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 21

Giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x}\right)$ bằng

(A) $-\frac{3}{2}$.
(B) $\frac{1}{2}$.
(C) $\frac{3}{2}$.
(D) $-\frac{1}{2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{x\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}=\frac{3}{2}.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 22

Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-3a}{3x+2a}$ (với a là tham số) có giá trị bằng

(A) 2.
(B) -1.
(C) $\frac{3}{2}$.
(D) $\frac{2}{3}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-3a}{3x+2a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{3a}{x}}{3+\frac{2a}{x}}=\frac{2}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 23

Tìm giới hạn $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x-2}\right)$.

(A) $I=\frac{3}{2}$.
(B) $I=\frac{1}{2}$.
(C) $I=\frac{17}{11}$.
(D) $I=\frac{46}{31}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
I = \lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2-x-2}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+1-\sqrt{x^2-x-2}\right)\left(x+1+\sqrt{x^2-x-2}\right)}{x+1+\sqrt{x^2-x-2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2-(x^2-x-2)}{x+1+\sqrt{x^2-x-2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+3}{x+1+\sqrt{x^2-x-2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 24

Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$ là

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 1.
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 25

Cho $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}=\dfrac{a}{b}$, trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tổng $a+b$ có giá trị bằng

(A) 9. (B) 8. (C) 7. (D) 6.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x^2-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}\\
&= \frac{1}{(1+1)\left(\sqrt{1+3}+2\right)} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $a+b=1+8=9$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 26

Tính $I=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+2}{1-x}$ ta được kết quả là

(A) $I=+\infty$. (B) $I=-\infty$. (C) $I=0$. (D) $I=-3$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}(3x+2)=5$, $\lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)=0$ và $1-x<0$ khi $x>1$.

Nên $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+2}{1-x}=-\infty$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 27

Tính $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{-x^2+5}{x-3}$ ta được kết quả là

(A) $-\infty$. (B) $+\infty$. (C) 1. (D) Không tồn tại.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^+}(-x^2+5)=-4<0$, $\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3)=0$ và $x-3>0, \forall x>3$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{-x^2+5}{x-3}=-\infty$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28

Tính $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{|x^2-4|}{x+2}$ ta được kết quả là

(A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3D.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{|x^2-4|}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{4-x^2}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2^+}(2-x)=4$.

Chọn đáp án (B)

Câu 29

Tính $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{x-1}$ ta được kết quả là

(A) 0. (B) $+\infty$. (C) $-\infty$. (D) Không tồn tại.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}(2x+1)=3>0$; $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0$ và $x-1<0, \forall x<1$ nên $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+1}{x-1}=-\infty$.

Tương tự, ta cũng có $\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+1)=3>0$; $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$ và $x-1>0, \forall x>1$ nên $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+1}{x-1}=+\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+1}{x-1}\neq\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+1}{x-1}$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{x-1}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 30

Giá trị của $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$ $(a\neq 0)$ là

(A) $+\infty$. (B) $\dfrac{a+1}{3a^2}$. (C) $\dfrac{a-1}{3a}$. (D) $\dfrac{a-1}{3a^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-1)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)}=\frac{a-1}{3a^2}.$$

Chọn đáp án (D)

Câu 31

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu điều kiện nào sau đây xảy ra?

(A) $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^+}f(x)=f(b)$.

(B) $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$.

(C) $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to b^+}f(x)=b$.

(D) $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=b$.

Lời giải.

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$.

Chọn đáp án (B)

Câu 32

Trong các hàm số sau, hàm số nào liên tục tại điểm $x=0$?

(A) $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x}$.

(B) $y=x^3-2x^2-x+1$.

(C) $y=\cot x$.

(D) $y=\sqrt{2x^2-1}$.

Lời giải.

- Hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x}$ có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên bị gián đoạn tại điểm $x = 0$.
- Hàm số $y = x^3 - 2x^2 - x + 1$ là hàm đa thức, liên tục trên $\mathbb{R}$ nên nó liên tục tại điểm $x = 0$.
- Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ nên bị gián đoạn tại điểm $x = 0$.
- Hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 1}$ có tập xác định là $\mathscr{D} = \left(-\infty; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$ nên bị gián đoạn tại điểm $x = 0$.

Chọn đáp án (B)

Câu 33

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

(A) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(a;b)$.

(B) Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a;b)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a)f(b) < 0$.

(C) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm trên $(a;b)$.

(D) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm trên $[a;b]$.

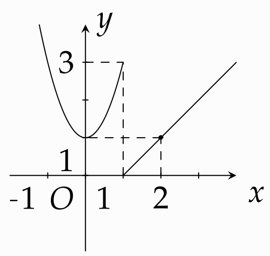
Lời giải.

Định lí về sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng.
Chọn đáp án (A)

Câu 34

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị dưới đây, trên khoảng $(-2;3)$ hàm số gián đoạn tại điểm nào?

(A) $x = 0$. (B) $x = 1$.
(C) $x = 2$. (D) $x = 3$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0$, suy ra $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. Do đó hàm số gián đoạn tại $x = 1$.
Chọn đáp án (B)

Câu 35

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & ,\text{khi } x > 1 \\ 2x + 1 & ,\text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Chọn khẳng định đúng.

(A) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1$.

(B) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì $\lim\limits_{x\to1} f(x) \neq f(1)$.

(C) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.

(D) Hàm số $f(x)$ không xác định tại $x = 1$.

Lời giải.

Ta có

- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} (x-2) = -1.$
- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} (2x+1) = 3.$

Vì $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.
Do đó hàm số gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì không tồn tại $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 36

Hàm số nào sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) $y = \cos\dfrac{3}{x}$. (B) $y = \cot 3x$. (C) $y = \dfrac{1-x}{x^2+4}$. (D) $y = \sqrt{x+2}$.

Lời giải.

- Hàm số $y = \cos\dfrac{3}{x}$ có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên không liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cot 3x$ có tập xác định là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ nên không liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \dfrac{1-x}{x^2+4}$ là hàm sơ cấp nên có tập xác định $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \sqrt{x+2}$ có tập xác định là $\mathscr{D} = [-2; +\infty)$ nên không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 37

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-5x+6}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng nào dưới đây?

(A) $(2; 3)$. (B) $(-3; 3)$. (C) $(-3; +\infty)$. (D) $(-\infty; 3)$.

Lời giải.

Hàm số xác định trên tập $\mathscr{D} = (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$, suy ra hàm số liên tục trên khoảng $(2; 3)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 38

Cho hàm số $y = \dfrac{x+4}{x-3}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số liên tục tại $x = 3$. (B) Hàm số liên tục trên $(-\infty; +\infty)$.

(C) Hàm số liên tục tại $x = 2$ và $x = 3$. (D) Hàm số liên tục trên $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Lời giải.

Với $x_0 \neq 3$, ta có $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ suy ra hàm số liên tục $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 39

Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ n & \text{khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Biết hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$. Giá trị của m, n là

(A) $n = 1, m = 0$. (B) $n = 0, m = 1$. (C) $n = m = 1$. (D) $n = -1, m = 0$.

Lời giải.

Ta có

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^3 - x^2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$.
- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (mx + 1) = m + 1$.
- $f(1) = n$.

Do hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên ta có

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = 1 = n.$$

Suy ra $n = 1, m = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + 7 \text{ khi } x \neq -1 \\ 2x + m - 1 \text{ khi } x = -1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

(A) $m = 12$. (B) $m = 8$. (C) $m = -10$. (D) $m = 10$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 + x^2 + 7) = 7$ và $f(-1) = m - 3$.

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -1$ thì $m - 3 = 7 \Leftrightarrow m = 10$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41

Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $m(x-1)^3(x-2) + 2x - 3 = 0$ vô nghiệm.

(A) $\forall m \in \mathbb{R}$. (B) $m = 1$.

(C) Không có giá trị m. (D) $m = 0$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = m(x-1)^3(x-2) + 2x - 3$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(1) = -1$, $f(2) = 1 \Rightarrow f(1) \cdot f(2) < 0, \forall m \in \mathbb{R}$ suy ra phương trình luôn có nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 42

Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0;1)$?

Ⓐ $2x^2-3x+4=0$.
Ⓑ $(x-1)^5-x^7-2=0$.
Ⓒ $3x^4-4x^2+5=0$.
Ⓓ $3x^{2024}-8x+4=0$.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=3x^{2024}-8x+4=0$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta có $f(0)=4$; $f(1)=-1 \Rightarrow f(0)\cdot f(1)=-4<0$ suy ra phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 43

Hàm số nào sau đây gián đoạn tại $x=-\sqrt{2}$?

Ⓐ $y=\cos x$.
Ⓑ $y=\dfrac{3x+2\sqrt{2}}{x^2-2}$.
Ⓒ $y=x+\sqrt{2}$.
Ⓓ $y=\tan x$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{2})^-}\dfrac{3x+2\sqrt{2}}{x^2-2}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-\sqrt{2})^+}\dfrac{3x+2\sqrt{2}}{x^2-2}=+\infty$ nên hàm số $y=\dfrac{3x+2\sqrt{2}}{x^2-2}$ gián đoạn tại $x=-\sqrt{2}$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 44

Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 2m+2 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

Ⓐ $m=2$.
Ⓑ $m=1$.
Ⓒ $m=-1$.
Ⓓ $m=-2$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=0$, $f(0)=2m+2$.
Hàm số liên tục tại $x=0\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)\Leftrightarrow 2m+2=0\Leftrightarrow m=-1$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 45

Hàm số nào sau đây **không** liên tục trên $\mathbb{R}$?

Ⓐ $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.
Ⓑ $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.
Ⓒ $f(x)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{5}\right)$.
Ⓓ $f(x)=x^3-2x^2+x-7$.

Lời giải.

- Hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ là hàm sơ cấp nên có tập xác định $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ có tập xác định $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ nên hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

- Hàm số $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{5}\right)$ là hàm sơ cấp nên có tập xác định $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $f(x)=x^3-2x^2+x-7$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 46

Cho hàm số $f(x)$ chưa xác định tại $x=0$, $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2}{x^2}$. Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$ thì phải gán cho $f(0)$ giá trị bằng bao nhiêu?

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+2x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}(x+2)=2$.
Do đó, để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$ thì phải gán cho $f(0)=2$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 47

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{nếu } x\neq3\\ m & \text{nếu } x=3\end{cases}$. Hàm số đã cho liên tục tại $x=3$ khi m bằng

(A) 1. (B) 4. (C) -1. (D) -4.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(-\sqrt{x+1}-2)=-4$.

Hàm số liên tục tại $x=3$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=f(3)\Leftrightarrow -4=m\Leftrightarrow m=-4$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 48

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x\neq4\\ ax-1 & \text{khi } x=4\end{cases}$. Tập hợp các giá trị của a để hàm số liên tục tại $x=4$ là

(A) $\left\{\dfrac{9}{4}\right\}$. (B) $\left\{-\dfrac{9}{4}\right\}$. (C) $\{8\}$. (D) $\{0\}$.

Lời giải.

Ta có:

- $f(4)=a\cdot4-1=4a-1$.
- $\lim\limits_{x\to4} f(x)=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}(x+4)=8$.

Do đó, điều kiện cần và đủ để hàm số đã cho liên tục tại $x=4$ là

$$\lim_{x\to4} f(x)=f(4)\Leftrightarrow 8=4a-1\Leftrightarrow a=\frac{9}{4}.$$

Chọn đáp án (A)

Câu 49

Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3m-2 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

(A) $m=1$. (B) $m=\dfrac{4}{3}$. (C) $m=2$. (D) $m=0$.

Lời giải.

Với $x\neq 1$, ta có $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1}$ nên hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.
Do đó, để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số liên tục tại $x=1$.
Ta có $f(1)=3m-2$.
Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\left[1+\frac{x^3+x-2}{(x-1)\left(x^2-x\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)}\right]\\ &= \lim_{x\to 1}\left[1+\frac{x^2+x+2}{x^2-x\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\right]=2.\end{aligned}$$

Nên hàm số liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow 3m-2=2\Leftrightarrow m=\dfrac{4}{3}$.

Vậy $m=\dfrac{4}{3}$.

Chọn đáp án (B)

Câu 50

Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}m^2x^2 & \text{khi } x\leq 2\\ (1-m)x & \text{khi } x>2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

(A) 0. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có hàm số luôn liên tục $\forall x\neq 2$.
Tại $x=2$, ta có

- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(1-m)x=(1-m)\cdot 2=2-2m$;
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(m^2x^2\right)=4m^2$;
- $f(2)=4m^2$.

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)\Leftrightarrow 4m^2=2-2m\Leftrightarrow 4m^2+2m-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\dfrac{1}{2}\\ m=-1.\end{array}\right.$$

Vậy có hai giá trị của m.

Chọn đáp án B □