

### BÀI 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

#### Mục tiêu

##### ❖ Kiến thức

- + Biết và hiểu định nghĩa giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số.
- + Biết các phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên một khoảng, trên một đoạn
- + Nhận biết được mối liên hệ của hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f(u(x))$ , khi biết bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$ , đồ thị hàm số  $y = f(x)$  hoặc đồ thị hàm số  $y = f'(x)$ .

##### ❖ Kỹ năng

- + Biết lập, đọc bảng biến thiên của một hàm số để từ đó tìm được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.
- + Tính được đạo hàm của các hàm số hợp, nhận biết được mối liên hệ của hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f(u(x))$ , khi biết bảng biến thiên của hàm số  $y = f(x)$ , đồ thị hàm số  $y = f(x)$  hoặc đồ thị hàm số  $y = f'(x)$
- + Biết chuyển bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức nhiều về khảo sát hàm một biến số
- + Tìm GTLN, GTNN của hàm số  $y = f(x)$ ,  $y = f(u(x))$ ,  $y = f(u(x)) \pm h(x) \dots$  khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  ( $y = f'(x)$ )

## I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập  $D$ .

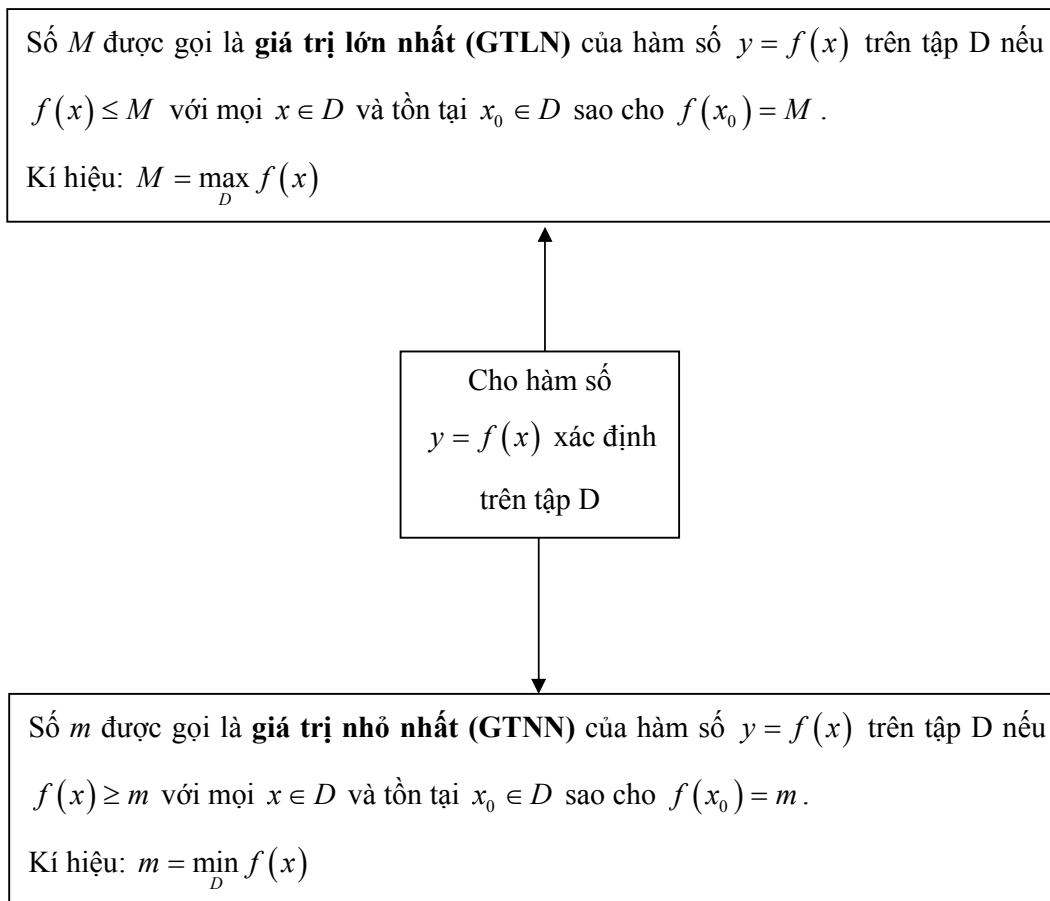
+) Số  $M$  được gọi là **giá trị lớn nhất (GTLN)** của hàm số  $y = f(x)$  trên tập  $D$  nếu  $f(x) \leq M$  với mọi  $x \in D$  và tồn tại  $x_0 \in D$  sao cho  $f(x_0) = M$ .

Kí hiệu:  $M = \max_D f(x)$

+) Số  $m$  được gọi là **giá trị nhỏ nhất (GTNN)** của hàm số  $y = f(x)$  trên tập  $D$  nếu  $f(x) \geq m$  với mọi  $x \in D$  và tồn tại  $x_0 \in D$  sao cho  $f(x_0) = m$ .

Kí hiệu:  $m = \min_D f(x)$

### SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



## II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

### Dạng 1: Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên một khoảng

#### Phương pháp giải

Ta thực hiện các bước sau

**Bước 1.** Tìm tập xác định (nếu đề chưa cho khoảng).

**Bước 2.** Tính  $y' = f'(x)$ ; tìm các điểm mà đạo hàm bằng không hoặc không xác định.

**Bước 3.** Lập bảng biến thiên

**Bước 4.** Kết luận

**Lưu ý:** Có thể dùng máy tính cầm tay để giải.

**Bước 1.** Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên miền  $(a; b)$  ta sử dụng máy tính Casio với lệnh MODE 7 (MODE 9 lập bảng giá trị)

**Bước 2.** Quan sát bảng giá trị máy tính hiển thị, giá trị lớn nhất xuất hiện là max, giá trị nhỏ nhất xuất hiện là min.

- Ta thiết lập miền giá trị của biến x Start a End b

Step  $\frac{b-a}{19}$  (có thể làm tròn để Step đẹp).

**Ví dụ:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x^3 - 3x + 1$  trên khoảng  $(0; 2)$  là

A. 1                      B. 3

C. 0                      D. -1

#### **Hướng dẫn giải**

Hàm số liên tục trên khoảng  $(0; 2)$ .

Ta có  $y' = 3x^2 - 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vì ta đang xét hàm số trên khoảng  $(0; 2)$  nên ta loại giá trị  $x = -1$

Xét bảng biến thiên của hàm số trên khoảng  $(0; 2)$

|    |   |    |   |
|----|---|----|---|
| x  | 0 | 1  | 2 |
| y' | - | 0  | + |
| y  | 1 | -1 | 3 |

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số  $\min_{(0; 2)} y = -1$  đạt tại  $x = 1$

**Chọn D**

**Chú ý:** Khi đề bài liên có các yếu tố lượng giác  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ ... ta chuyển máy tính về chế độ Radian.

### Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $f(x) = -\frac{1}{3}x^6 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ .

Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{17}{30}$

B.  $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{47}{30}$

C.  $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{67}{30}$

D. Hàm số không tồn tại giá trị lớn nhất

### Hướng dẫn giải

Tập xác định  $D = \mathbb{R}$

Ta có  $f'(x) = -2x^5 + 2x^4 - x + 1 = -(x-1)(2x^4 + 1)$

Khi đó  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -(x-1)(2x^4 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên

|         |           |                 |           |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1               | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | +         | 0               | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\frac{47}{30}$ | $-\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy  $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{47}{30}$  tại  $x = 1$

**Chọn B**

**Ví dụ 2.** Gọi  $a$  là giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \frac{6-8x}{x^2+1}$  trên khoảng  $(-\infty; 1)$

Khi đó giá trị của biểu thức  $P = \frac{6-8a}{a^2+1}$  bằng

A.  $\frac{22}{5}$

B.  $\frac{6}{13}$

C.  $-\frac{58}{65}$

D.  $-\frac{74}{101}$

### Hướng dẫn giải

Hàm số liên tục trên khoảng  $(-\infty; 1)$

Ta có  $f'(x) = \frac{8x^2 - 12x - 8}{(x^2 + 1)^2}$

Khi đó  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^2 - 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \notin (-\infty; 1) \\ x = -\frac{1}{2} \in (-\infty; 1) \end{cases}$

Bảng biến thiên

|         |           |                |      |
|---------|-----------|----------------|------|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $1$  |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$            | $-$  |
| $f(x)$  | $0$       | $8$            | $-1$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy  $\max_{(-\infty; 1)} f(x) = 8 \Rightarrow P = \frac{6-8a}{a^2+1} = -\frac{58}{65}$

**Chọn C**

**Ví dụ 3.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A.  $\min_{\mathbb{R}} f(x) = 1$

B.  $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{3}$

C.  $\min_{\mathbb{R}} f(x) = 3$

D. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất

**Hướng dẫn giải**

Tập xác định  $D = \mathbb{R}$

Ta có

$$y = f(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + x + 1} \Rightarrow y' = -\frac{2(x^2 + x + 1) - 2x(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Do đó  $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên

|      |           |      |               |           |     |
|------|-----------|------|---------------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$           | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$           | $0$       | $+$ |
| $y$  | $1$       | $3$  | $\frac{1}{3}$ | $1$       |     |

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy  $\min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{3}$  tại  $x = 1$

 **Bài tập tự luyện dạng 1**

**Câu 1:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x^2}{x-2}$  trên  $(2; 6)$  là

A.  $\min_{(2; 6)} y = 8$

B.  $\min_{(2; 6)} y = 4$

C.  $\min_{(2; 6)} y = 3$

D.  $\min_{(2; 6)} y = 9$

**Câu 2:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$  trên khoảng  $(1; +\infty)$  là

A.  $\min_{(1; +\infty)} y = 3$

B.  $\min_{(1; +\infty)} y = 1$

C.  $\min_{(1; +\infty)} y = 2$

D.  $\min_{(1; +\infty)} y = 0$

**Câu 3:** Mệnh đề nào sau đây là đúng với hàm số  $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+5}}$  trên tập xác định của nó?

A. Hàm số không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất

B. Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất

C. Hàm số có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất

D. Hàm số có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất

**Câu 4:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = x + \frac{2}{x} - (1 + \sqrt{2})^2$  trên khoảng  $(0; +\infty)$  là

A. không tồn tại

B.  $-3$

C.  $-1 + \sqrt{2}$

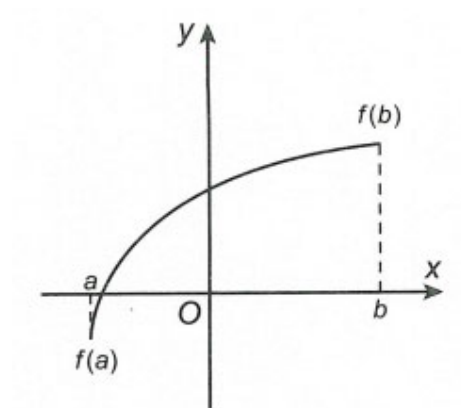
D.  $0$

**ĐÁP ÁN**

|     |     |     |     |  |  |  |  |  |  |
|-----|-----|-----|-----|--|--|--|--|--|--|
| 1-A | 2-A | 3-D | 4-B |  |  |  |  |  |  |
|-----|-----|-----|-----|--|--|--|--|--|--|

## Dạng 2: Tìm GTLN và GTNN của hàm số trên một đoạn

### 🔗 Phương pháp giải



**Bước 1.** Tính  $f'(x)$

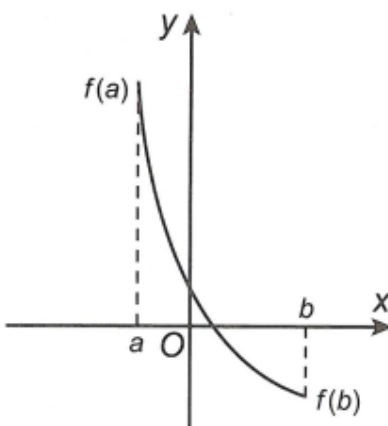
**Bước 2.** Tìm các điểm  $x_i \in (a; b)$  mà tại đó  $f'(x_i) = 0$  hoặc  $f'(x_i)$  không xác định

**Bước 3.** Tính  $f(a)$ ,  $f(x_i)$ ,  $f(b)$

**Bước 4.** Tìm số lớn nhất  $M$  và số nhỏ nhất  $m$  trong các số trên.

Khi đó  $M = \max_{[a; b]} f(x)$  và  $m = \min_{[a; b]} f(x)$

**Chú ý:**



+) Hàm số  $y = f(x)$  đồng biến trên đoạn  $[a; b]$  thì  $\begin{cases} \max f(x) = f(b) \\ \min f(x) = f(a) \end{cases}$

+) Hàm số  $y = f(x)$  nghịch biến trên đoạn  $[a; b]$  thì  $\begin{cases} \max f(x) = f(a) \\ \min f(x) = f(b) \end{cases}$

**Bài toán 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên một đoạn  $[a; b]$

### 🔗 Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ . Gọi  $M$ ,  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên  $[0; 3]$ . Giá trị của  $M + m$  bằng

A. 8

B. 10

C. 6

D. 4

**Hướng dẫn giải**

Hàm số xác định và liên tục trên  $[0; 3]$

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [0; 3] \\ x = 2 \in [0; 3] \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } y(0) = 2, y(2) = 6, y(3) = 2$$

$$\text{Vậy } M = 6; m = 2 \Rightarrow M + m = 8$$

**Chọn A.**

**Ví dụ 2.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = -x^4 + 3x^2 + 1$  trên  $[-1; 2]$  là

A. 29

B. 1

C. 3

D.  $\frac{13}{4}$

**Hướng dẫn giải**

Hàm số xác định và liên tục trên  $[-1; 2]$

$$\text{Ta có } y' = -4x^3 + 6x - 2x(2x^2 - 3) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 2] \\ x = \frac{\sqrt{6}}{2} \in [-1; 2] \\ x = -\frac{\sqrt{6}}{2} \notin [-1; 2] \end{cases}$$

$$\text{Vì } y(0) = 1; y\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{13}{4}; y(2) = -3; y(-1) = 3 \text{ nên } \max_{[-1; 2]} y = \frac{13}{4}$$

**Chọn D**

**Ví dụ 3.** Cho hàm số  $y = \frac{x+2}{x-1}$ . Giá trị của  $\left(\min_{[2; 3]} y\right)^2 + \left(\max_{[2; 3]} y\right)^2$  bằng

A. 16

B.  $\frac{45}{4}$

C.  $\frac{25}{4}$

D.  $\frac{89}{4}$

**Hướng dẫn giải**

Ta có  $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$ , do đó hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng  $(-\infty; 1); (1; +\infty) \Rightarrow$  Hàm số nghịch biến trên  $[2; 3]$ .

$$\text{Do đó } \min_{[2; 3]} y = y(3) = \frac{5}{2}; \max_{[2; 3]} y = y(2) = 4$$

$$\text{Vậy } \left(\min_{[2; 3]} y\right)^2 + \left(\max_{[2; 3]} y\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4^2 = \frac{89}{4}$$

**Chọn D**



**Ví dụ 4.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 8x}{x + 1}$  trên đoạn  $[1; 3]$  bằng

A.  $\frac{-15}{4}$

B.  $\frac{-7}{2}$

C.  $-3$

D.  $-4$

**Hướng dẫn giải**

Hàm số  $f(x) = \frac{x^2 - 8x}{x + 1}$  liên tục trên  $[1; 3]$

$$f'(x) = \frac{(2x - 8)(x + 1) - x^2 + 8x}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [1; 3] \\ x = -4 \notin [1; 3] \end{cases}$$

$$\text{Ta thấy } y(1) = \frac{-7}{2}; y(3) = \frac{-15}{4}; y(2) = -4$$

$$\text{Vậy } \max_{[1; 3]} f(x) = \frac{-7}{2}$$

**Chọn B**

**Ví dụ 5.** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = x + \sqrt{4 - x^2}$

Giá trị của biểu thức  $P = M + m$  bằng

A.  $2(\sqrt{2} - 1)$

B.  $2(\sqrt{2} + 1)$

C.  $\sqrt{2} + 1$

D.  $\sqrt{2} - 1$

**Hướng dẫn giải**

Tập xác định  $D = [-2; 2]$

$$\text{Ta có } y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}}, x \in (-2; 2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm 2 \in (-2; 2) \end{cases}$$

$$y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}; y(-\sqrt{2}) = 0; y(2) = 2; y(-2) = -2$$

$$\text{Vậy } M = 2\sqrt{2}, m = -2 \Rightarrow P = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

**Chọn A**

**Ví dụ 6.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2x^3 - 3x^2 + m$  trên đoạn  $[0; 5]$  bằng 5 khi  $m$  bằng

A. 6

B. 10

C. 7

D. 5

**Hướng dẫn giải**

Hàm số xác định và liên tục trên  $D = [0; 5]$

Ta có  $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in D \\ x = 1 \in D \end{cases}$

$f(0) = m; f(1) = m - 1; f(5) = 175 + m$

Để thấy  $f(5) > f(0) > f(1), \forall m \in \mathbb{R}$  nên  $\min_{[0; 5]} f(x) = f(1) = m - 1$

Theo đề bài  $\min_{[0; 5]} f(x) = 5 \Leftrightarrow m - 1 = 5 \Leftrightarrow m = 6$

**Chọn A.**

**Ví dụ 7.** Gọi A, B là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \frac{x + m^2 + m}{x - 1}$  trên đoạn  $[2; 3]$ . Tất cả

các giá trị thực của tham số  $m$  để  $A + B = \frac{13}{2}$  là

**A.**  $m = 1; m = -2$

**B.**  $m = -2$

**C.**  $m = \pm 2$

**D.**  $m = -1; m = 2$

**Hướng dẫn giải**

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn  $[2; 3]$

Ta có  $y' = \frac{-(m^2 + m + 1)}{(x - 1)^2} < 0, \forall m$

$\Rightarrow A = y(3) = \frac{m^2 + m + 3}{2}; B = y(2) = m^2 + m + 2$

Do đó  $A + B = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2 + m + 3}{2} + m^2 + m + 2 = \frac{13}{2}$

$\Leftrightarrow 3m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$

**Chọn A**

**Ví dụ 8.** Biết hàm số  $y = x^3 + 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1$  (với  $m$  là tham số) trên đoạn  $[-2; 0]$  đạt giá trị lớn nhất bằng 6. Các giá trị của tham số  $m$  là

**A.**  $m = 1$

**B.**  $m = 0$

**C.**  $m = 3$

**D.**  $m = -1$

**Hướng dẫn giải**

Ta có  $y' = 3x^2 + 6mx + 3(2m - 1) = 3[x^2 + 2mx + 2m - 1]$

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 - 2m \end{cases}$

Vì  $y(-2) = -1; y(0) = 1$  và theo bài ra  $\max_{[-2; 0]} y = 6$  nên giá trị lớn nhất không đạt tại  $x = -2; x = 0$ . Do đó

giá trị lớn nhất đạt tại  $y(-1)$  hoặc  $y(1 - 2m)$ .

Ta có  $y(-1) = -3m + 3, y(1 - 2m) = (1 - 2m)^2(m - 2) + 1$

- Trường hợp 1: Xét  $-3m + 3 = 6 \Leftrightarrow m = -1$

Thử lại với  $m = -1$ , ta có  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in [-2; 0] \\ x = 3 \notin [-2; 0] \end{cases}$  nên  $m = -1$  là một giá trị cần tìm.

- Trường hợp 2: Xét  $\begin{cases} (1-2m)^2(m-2)+1=6 \\ -2 < 1-2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2m)^2(m-2)=5 \quad (1) \\ \frac{1}{2} < m < \frac{3}{2} \end{cases}$

Vì  $\frac{1}{2} < m < \frac{3}{2} \Rightarrow m-2 < 0 \Rightarrow (1-2m)^2(m-2) < 0$  nên (1) vô nghiệm

**Chọn D**

**Bài toán 2. Tìm GTLN – GTNN của hàm số  $y = |f(x)|$  trên đoạn  $[a; b]$**

 **Phương pháp giải**

Thực hiện theo các bước sau

**Ví dụ:** Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ của hàm số  $y = |x^2 - 2x - 2|$  trên đoạn  $[-1; 1]$  lần lượt là  $a, b$  thì giá trị của  $a + b$  bằng

- A. 4                      B. 3  
C. 0                      D. 1

**Hướng dẫn giải**

Xét hàm  $f(x) = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

**Bước 1.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[a; b]$ , giả sử thứ tự là  $M, m$ .

Suy ra  $\max_{[-1; 1]} y = f(-1) = 1; \min_{[-1; 1]} y = f(1) = -3$

Do đó giá trị lớn nhất  $y = |-3| = 3 \Rightarrow a = 3$  tại  $x = 1$

và giá trị nhỏ nhất  $y = 0 \Rightarrow b = 0$  tại  $x = 1 - \sqrt{3}$

**Bước 2.**

+) Tìm  $\max_{[a; b]} y = \max \{|M|; |m|\}$

+) Tìm  $\min_{[a; b]} y$

- Trường hợp 1:  $M \cdot m < 0 \Rightarrow \min_{[a; b]} y = 0$

- Trường hợp 2:  $m \geq 0 \Rightarrow \min_{[a; b]} y = m$

- Trường hợp 3:  $M \leq 0 \Rightarrow \min_{[a; b]} y = |M| = -M$

Vậy giá trị  $a + b = 3 + 0 = 3$

**Chọn B**

**Bước 3.** Kết luận.

 **Ví dụ mẫu**

**Ví dụ.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = |x^3 - 9x^2 + 24x - 68|$  trên đoạn  $[-1; 4]$  bằng

A. 48

B. 52

C. -102

D. 0

**Hướng dẫn giải**Bảng biến thiên của hàm số  $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 68$  trên  $[-1; 4]$ 

|      |      |     |     |
|------|------|-----|-----|
| $x$  | -1   | 2   | 4   |
| $y'$ | +    | 0   | -   |
| $y$  | -102 | -48 | -52 |

Suy ra bảng biến thiên của hàm số  $y = |x^3 - 9x^2 + 24x - 68|$  trên đoạn  $[-1; 4]$  là

|      |     |    |    |
|------|-----|----|----|
| $x$  | -1  | 2  | 4  |
| $y'$ | -   | 0  | +  |
| $y$  | 102 | 48 | 52 |

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = |x^3 - 9x^2 + 24x - 68|$  trên đoạn  $[-1; 4]$  bằng 48.**Chọn A***Cách khác: Theo trường hợp 3 thì  $M = -48 < 0 \Rightarrow \min y = 48$* **Bài toán 3. Tìm tham số để GTLN của hàm số  $y = |f(x)|$  trên đoạn  $[\alpha, \beta]$  bằng  $k$** **Phương pháp giải**

Thực hiện theo các bước sau

**Ví dụ:** Gọi  $S$  là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \left| \frac{x^2 + mx + m}{x + 1} \right| \text{ trên đoạn } [1; 2] \text{ bằng } 2.$$

Số phần tử của tập  $S$  là

A. 3

B. 1

C. 4

D. 2

**Hướng dẫn giải**

$$\text{Xét hàm số } y = f(x) = \frac{x^2 + mx + m}{x + 1}$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1; 2] \\ x = -2 \notin [1; 2] \end{cases}$$

$$\text{Bước 1. Tìm } \max_{[\alpha; \beta]} f(x) = \max_{[\alpha; \beta]} \{|A|; |B|\}$$

$$\text{Mặt khác } f(1) = \frac{2m+1}{2}; f(2) = \frac{3m+4}{3}$$

$$\text{Do đó } \max_{[1; 2]} y = \max \left\{ \left| \frac{2m+1}{2} \right|, \left| \frac{3m+4}{3} \right| \right\}$$

- Trường hợp 1:

**Bước 2.** Xét các trường hợp

+)  $|A| = k$  tìm  $m$ , thử lại các giá trị  $m$  đó

+)  $|B| = k$  tìm  $m$ , thử lại các giá trị  $m$  đó

$$\max_{[1; 2]} y = \left| \frac{2m+1}{2} \right| = 2 \rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{+) Với } m = \frac{3}{2} \Rightarrow \left| \frac{3m+4}{3} \right| = \frac{17}{6} > 2 \text{ (loại)}$$

$$\text{+) Với } m = -\frac{5}{2} \Rightarrow \left| \frac{3m+4}{3} \right| = \frac{7}{6} < 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

- Trường hợp 2:

$$\max_{[1; 2]} y = \left| \frac{3m+4}{3} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

$$\text{+) Với } m = \frac{2}{3} \Rightarrow \left| \frac{2m+1}{2} \right| = \frac{7}{6} < 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{+) Với } m = -\frac{10}{3} \Rightarrow \left| \frac{2m+1}{2} \right| = \frac{17}{6} > 2 \text{ (loại)}$$

Vậy có hai giá trị của  $m$  thỏa mãn.

**Chọn D**

**Bước 3.** Kết luận

 **Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 1.** Gọi  $S$  là tập các giá trị nguyên của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số

$f(x) = \left| \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30 \right|$  trên đoạn  $[0; 2]$  không vượt quá 30. Tổng các phần tử của  $S$  bằng

A. 108

B. 120

C. 210

D. 136

**Hướng dẫn giải**

Xét hàm số  $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 14x^2 + 48x + m - 30$  trên đoạn  $[0; 2]$

$$\text{Ta có } g'(x) = x^3 - 28x + 48 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \notin [0; 2] \\ x = 2 \in [0; 2] \\ x = 4 \notin [0; 2] \end{cases}$$

$$\text{Để } \max_{[0; 2]} |g(x)| \leq 30 \Leftrightarrow \begin{cases} |g(0)| \leq 30 \\ |g(2)| \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m-30| \leq 30 \\ |m+14| \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 16$$

$$\Rightarrow m \in \{0; 1; 2; \dots; 15; 16\}$$

Tổng các phần tử của S là 136.

**Chọn D**

**Ví dụ 2.** Biết giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \sqrt{4-x^2} + x - \frac{1}{2} \right| + m$  bằng 18.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $0 < m < 5$

B.  $10 < m < 15$

C.  $5 < m < 10$

D.  $15 < m < 20$

**Hướng dẫn giải**

Xét hàm số  $g(x) = \sqrt{4-x^2} + x - \frac{1}{2}$  liên tục trên tập xác định  $[-2; 2]$

Ta có  $g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} + 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} + 1 = 0, x \in (-2; 2)$

$\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \in (-2; 2)$

$g(-2) = -\frac{5}{2}; g(\sqrt{2}) = \frac{-1+4\sqrt{2}}{2}; g(2) = \frac{3}{2}$

Do đó  $\max_{[-2; 2]} |g(x)| = \frac{5}{2}$  khi  $x = -2$ , suy ra giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $\frac{5}{2} + m$

Theo bài ra  $\frac{5}{2} + m = 18 \Leftrightarrow m = 15,5$ . Vậy  $15 < m < 20$

**Chọn D**

**Bài toán 4: Tìm điều kiện tham số để GTLN của hàm số  $y = |f(x) + g(m)|$  trên đoạn  $[a; b]$  đạt GTNN**

 **Phương pháp giải**

Thực hiện các bước sau

**Ví dụ:** Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số

$y = |x^2 + 2x + m - 4|$  trên đoạn  $[-2; 1]$  đạt giá trị

nhỏ nhất, giá trị của tham số  $m$  bằng

A. 1

B. 3

C. 4

D. 5

**Hướng dẫn giải**

Đặt  $f(x) = x^2 + 2x$

Ta có

$f'(x) = 2x + 2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in [-2; 1]$

$f(-2) = 0; f(1) = 3; f(-1) = -1$

Do đó  $\max_{[-2; 1]} f(x) = 3; \min_{[-2; 1]} f(x) = -1$

**Bước 1.** Tìm  $\alpha = \max_{[a; b]} f(x); \beta = \min_{[a; b]} f(x)$

**Bước 2.** Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của

$$y = |f(x) + g(m)| \text{ thì}$$

$$M = \max \{ |\alpha + g(m)|; |\beta + g(m)| \}$$

$$\geq \frac{|\alpha + g(m)| + |\beta + g(m)|}{2} = \frac{|\alpha + g(m)| + |-\beta - g(m)|}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$|\alpha + g(m)| = |-\beta - g(m)|$$

Áp dụng bất đẳng thức  $\frac{|\alpha + g(m)| + |-\beta - g(m)|}{2}$

$$\geq \frac{|\alpha + g(m) - \beta - g(m)|}{2} = \frac{|\alpha - \beta|}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$[\alpha + g(m)][-\beta - g(m)] \geq 0$$

$$\text{Suy ra } \max_{[-2; 1]} y = \max \{ |m - 5|; |m - 1| \}$$

$$\geq \frac{|m - 5| + |m - 1|}{2} \geq \frac{|5 - m + m - 1|}{2} = 2$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} |m - 5| = |m - 1| \\ (5 - m)(m - 1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

**Chọn B**

**Bước 3.** Kết luận  $\min M = \frac{|\alpha - \beta|}{2}$  khi

$$g(m) = \frac{-\alpha - \beta}{2}$$

 **Ví dụ mẫu**

**Ví dụ.** Để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{2x - x^2} - 3m + 4$  đạt giá trị nhỏ nhất thì  $m$  bằng

**A.**  $m = \frac{3}{2}$

**B.**  $m = \frac{5}{3}$

**C.**  $m = \frac{4}{3}$

**D.**  $m = \frac{1}{2}$

**Hướng dẫn giải**

Tập xác định  $D = [0; 2]$

Đặt  $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ ,  $x \in D$ .

Ta có  $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$f(0) = 0; f(2) = 0; f(1) = 1$$

$$\text{Suy ra } P = \max_D y = \max \{ |3m - 4|; |3m - 5| \} \geq \frac{|3m - 4| + |3m - 5|}{2}$$

$$\geq \frac{|5 - 3m + 3m - 4|}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} |3m - 4| = |3m - 5| \\ (5 - 3m)(3m - 4) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là nhỏ nhất khi  $m = \frac{3}{2}$

**Chọn A**

**Bài toán 5. Tìm tham số để GTNN của hàm số  $y = |ax^2 + bx + c| + mx$  đạt GTLN**

**Ví dụ 1.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x, m) = |x^2 - 2x + 5| + mx$  đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 2

B. 5

C. 8

D. 9

**Hướng dẫn giải**

Ta có  $\min f(x, m) \leq f(0, m) = 5, \forall m \in \mathbb{R}$

Xét  $m = 2$  ta có  $f(x, 2) = |x^2 - 2x + 5| + 2x \geq x^2 - 2x + 5 + 2x \geq 5, \forall x \in \mathbb{R}$

Dấu bằng xảy ra tại  $x = 0$ . Suy ra  $\min f(x, 2) = 5, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó  $\begin{cases} \min f(x, m) \leq 5, \forall m \in \mathbb{R} \\ \min f(x, 2) = 5, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \max(\min f(x, m)) = 5, \text{ đạt được khi } m = 2$

**Chọn B.**

**Tổng quát:**  $y = |ax^2 + bx + c| + mx$

**Trường hợp 1:**  $a.c > 0 \Rightarrow \max(\min y) = c$

*Đạt được khi  $m = -b$*

**Ví dụ 2.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x, m) = |x^2 - 4x - 7| + mx$  đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 7

B. -7

C. 0

D. 4

**Hướng dẫn giải**

Phương trình  $x^2 - 4x - 7 = 0$  luôn có hai nghiệm trái dấu  $x_1 < 0 < x_2$

**Trường hợp 1:** Nếu  $m \geq 0$

Ta có  $\min f(x, m) \leq f(x, m) = mx_1 \leq 0, \forall m \in \mathbb{R}$

Xét  $m = 0$  ta có  $f(x, 0) = |x^2 - 4x - 7| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Dấu bằng xảy ra tại  $x = x_{1,2}$ .

Suy ra  $\min f(x, 0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó  $\begin{cases} \min f(x, m) \leq 0, \forall m \in \mathbb{R} \\ \min f(x, 0) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \max(\min f(x, m)) = 0 \text{ khi } m = 0$

**Trường hợp 2:** Nếu  $m < 0$

Ta có  $\min f(x, m) \leq f(x_2, m) = mx_2 < 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow \max(\min f(x, m)) < 0$



So sánh cả hai trường hợp thì  $\max(\min f(x, m)) = 0$  khi  $m = 0$

**Chọn C**

Trường hợp 2:  $a.c < 0 \Rightarrow \max(\min y) = 0$  Đạt được khi  $m = 0$

### Bài tập tự luyện dạng 2

**Câu 1:** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 2$  trên đoạn  $[-1; 2]$ . Khi đó  $M - m$  có giá trị bằng

- A. -6                      B. 12                      C. -12                      D. 3

**Câu 2:** Trên đoạn  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{7}{3}\right]$  hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$  đạt giá trị lớn nhất tại

- A.  $x_0 = -\frac{1}{2}$                       B.  $x_0 = 0$                       C.  $x_0 = \frac{7}{3}$                       D.  $x_0 = 2$

**Câu 3:** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = 2x - 4\sqrt{6-x}$  trên  $[-3; 6]$ . Tổng  $M + m$  có giá trị là

- A. -12                      B. -6                      C. 18                      D. -4

**Câu 4:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x + \sqrt{2-x^2}$  trên tập xác định là

- A.  $-\sqrt{2}$                       B. -1                      C. 1                      D.  $\sqrt{2}$

**Câu 5:** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x + \cos^2 x$  trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  là

- A.  $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{1}{2}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = -1$                       B.  $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{6}$   
C.  $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = 1$                       D.  $\max_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}; \min_{\left[0; \frac{\pi}{4}\right]} f(x) = \frac{1}{2}$

**Câu 6:** Với giá trị nào của tham số  $m$  thì hàm số  $f(x) = \frac{mx-1}{x+m}$  đạt giá trị lớn nhất trên đoạn  $[1; 3]$  bằng 2?

- A.  $m = 7$                       B.  $m = -3$                       C.  $m = -7$                       D.  $m = 3$

**Câu 7:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = -x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}m$  trên đoạn  $[-1; 1]$  bằng 0 khi

- A.  $m = 4$                       B.  $m = 12$                       C.  $m = 0$                       D.  $m = 8$

**Câu 8:** Với những giá trị nào của tham số  $m$  thì hàm số  $f(x) = \frac{x-1}{x+m^2}$  đạt giá trị lớn nhất trên đoạn  $[2; 3]$  bằng  $\frac{1}{2}$ ?

- A.  $m = -2$                       B.  $m = 1$                       C.  $m = \pm 1$                       D.  $m = \pm 2$

**Câu 9:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = |x^3 + 3x^2 - 72x + 90| + m$  trên đoạn  $[-5; 5]$  bằng 2018. Trong các khẳng định dưới đây khẳng định nào đúng?

- A.  $1600 < m < 1700$     B.  $m = 1600$     C.  $m < 1500$     D.  $1500 < m < 1600$

**Câu 10:** Để giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x) = |x^3 - 3x + 2m - 1|$  trên đoạn  $[0; 2]$  là nhỏ nhất thì giá trị của  $m$  thuộc khoảng nào dưới đây?

- A.  $(0; 1)$     B.  $(-1; 0)$     C.  $(1; 2)$     D.  $(-2; -1)$

**Câu 11:** Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 + x + m|$  trên đoạn  $[2; 4]$ ,  $m_0$  là giá trị của tham số  $m$  để  $M$  đạt giá trị nhỏ nhất. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $1 < m_0 < 5$     B.  $-7 < m_0 < -5$     C.  $-4 < m_0 < 0$     D.  $m_0 < -8$

**Câu 12:** Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = |x^4 - 38x^2 + 120x + 4m|$  trên đoạn  $[0; 2]$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của tham số  $m$  bằng

- A. 26    B. 13    C. 14    D. 27

**Câu 13:** Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^4 - 38x^2 + 120x + 4m|$  trên đoạn  $[0; 2]$  đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của tham số  $m$  bằng

- A. -12    B. -13    C. -14    D. -11

**Câu 14:** Xét hàm số  $y = |x^2 + ax + b|$  với  $a, b$  là tham số. Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn  $[-1; 3]$ . Khi  $M$  nhận giá trị nhỏ nhất thì  $a + 2b$  bằng

- A. 5    B. -4    C. 2    D. -3

**Câu 15:** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 - 9x + m|$  trên đoạn  $[-2; 4]$  bằng 16. Số phần tử của  $S$  là

- A. 0    B. 2    C. 4    D. 1

**Câu 16:** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x + m|$  trên đoạn  $[0; 2]$  bằng 3. Số phần tử của  $S$  là

- A. 0    B. 2    C. 3    D. 1

**Câu 17:** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = |x^3 - 3x^2 + m|$  trên đoạn  $[-2; 4]$  bằng 50. Tổng các phần tử của tập  $S$  là

- A. 4    B. 36    C. 140    D. 0

**Câu 18:** Gọi  $S$  là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số  $m$  sao cho giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - \frac{19}{2}x^2 + 30x + m - 20 \right|$  trên đoạn  $[0; 2]$  không vượt quá 20. Tổng các phần tử của  $S$  bằng

- A. 210    B. -195    C. 105    D. 300

**Câu 19:** Cho hàm số  $f(x) = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a|$ . Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[0; 2]$ . Có bao nhiêu số nguyên  $a$  thuộc đoạn  $[-3; 2]$  sao cho  $M \leq 2m$ ?

- A. 7    B. 5    C. 6    D. 4

---

**Câu 20:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x, m) = |x^2 - 2020x + 2019| + mx$  đạt giá trị lớn nhất khi tham số  $m$  bằng

A. 2020

B. 2019

C. 0

D. 2018

**Câu 21:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x, m) = |x^2 + 6x - 10| + mx$  đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 6

B. -6

C. 0

D. 10

**ĐÁP ÁN**

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1-B  | 2-C  | 3-B  | 4-A  | 5-C  | 6-A  | 7-D  | 8-C  | 9-A  | 10-A |
| 11-D | 12-D | 13-B | 14-B | 15-D | 16-B | 17-A | 18-C | 19-D | 20-A |
| 21-C |      |      |      |      |      |      |      |      |      |

**Dạng 3: TÌM GTLN-GTNN khi cho đồ thị - bảng biến thiên****📌 Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình vẽ

|      |           |                |      |           |     |
|------|-----------|----------------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $2$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$            | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $1$       | $3$            | $-1$ | $1$       |     |

Giá trị lớn nhất của hàm số trên  $\mathbb{R}$  là

A.  $\max_{\mathbb{R}} y = -\frac{1}{2}$

B.  $\max_{\mathbb{R}} y = -1$

C.  $\max_{\mathbb{R}} y = 1$

D.  $\max_{\mathbb{R}} y = 3$

**Hướng dẫn giải**

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 3 tại  $x = -\frac{1}{2}$

**Chọn D**

**Ví dụ 2.** Hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như hình bên dưới

|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----|-----|-----------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-4$ |     | $0$ |     | $8$ | $+\infty$ |           |
| $y'$ |           | $-$  | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$       | $+$       |
| $y$  | $+\infty$ |      |     |     | $9$ |     |           | $+\infty$ |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     |     |     |           |           |
|      |           |      |     |     | </  |     |           |           |

Biết  $f(-4) > f(8)$ , khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên  $\mathbb{R}$  bằng

A. 9

B.  $f(-4)$

C.  $f(8)$

D. -4

**Hướng dẫn giải**

Từ bảng biến thiên ta có  $f(x) \geq f(-4)$ ,  $\forall x \in (-\infty; 0]$  và  $f(x) \geq f(8)$ ,  $\forall x \in (0; +\infty)$ .

Mặt khác  $f(-4) > f(8)$  suy ra  $\forall x \in (-\infty; +\infty)$  thì  $f(x) \geq f(8)$

Vậy  $\min_{\mathbb{R}} f(x) = f(8)$

**Chọn C**

**Ví dụ 3.** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên tập hợp  $D = (-\infty; -1] \cup [1; \frac{3}{2}]$  và có bảng biến thiên như sau

| $x$  | $-\infty$  | $-1$ | $1$               | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|------|------------|------|-------------------|---------------|-----------|
| $y'$ | +          |      |                   | -             |           |
| $y$  | $-1$ ↗ $0$ |      | $0$ ↘ $-\sqrt{5}$ |               |           |

Khẳng định đúng là

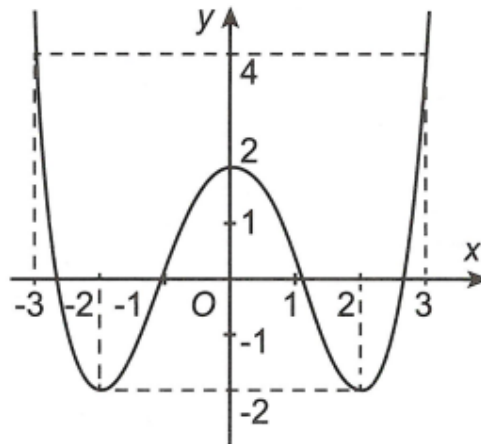
- A.  $\max_D f(x) = 0$ ; không tồn tại  $\min_D f(x)$
- B.  $\max_D f(x) = 0$ ;  $\min_D f(x) = -\sqrt{5}$
- C.  $\max_D f(x) = 0$ ;  $\min_D f(x) = -1$
- D.  $\min_D f(x) = 0$ ; không tồn tại  $\max_D f(x)$

**Hướng dẫn giải**

Dựa vào bảng biến thiên thì  $\max_D f(x) = f(\pm 1) = 0$ ;  $\min_D f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\sqrt{5}$

**Chọn B**

**Ví dụ 4.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị trên khoảng  $(-3; 3)$  như hình bên dưới



Khẳng định đúng là

- A. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3
- B. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4
- C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -3
- D. Hàm số không có giá trị lớn nhất

**Hướng dẫn giải**

Từ đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  ta thấy rằng hàm số  $y = f(x)$  xác định, liên tục và  $f(x) < 4$ , với mọi  $x \in (-3; 3)$ , nên hàm số không có giá trị lớn nhất

**Chọn D**

**Ví dụ 5.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn  $[0; 2]$  như sau

|      |   |   |
|------|---|---|
| $x$  | 0 | 2 |
| $y'$ | — |   |
| $y$  | 4 | 1 |

Giá trị lớn nhất  $M$  và giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[0; 2]$  là

A.  $M = 4$  và  $m = 1$

B.  $M = 0$  và  $m = 2$

C.  $M = 2$  và  $m = 0$

D.  $M = 1$  và  $m = 4$

**Hướng dẫn giải**

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy  $m = \min_{[0; 2]} y = 1$  khi  $x = 2$  và  $M = \max_{[0; 2]} y = 4$  khi  $x = 0$

**Chọn A**

**Ví dụ 6.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn  $[-2; 4]$  như sau

|      |     |   |    |    |   |
|------|-----|---|----|----|---|
| $x$  | -2  | 0 | 2  | 4  |   |
| $y'$ | +   | 0 | -  | 0  | + |
| $y$  | -19 | 1 | -3 | 17 |   |

Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-2; 4]$  bằng

A.  $f(-2)$

B.  $f(0)$

C.  $f(2)$

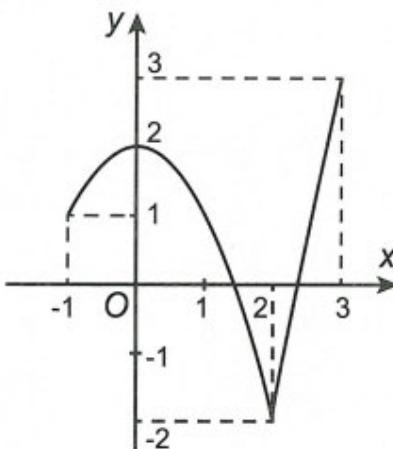
D.  $f(4)$

**Hướng dẫn giải**

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy  $\max_{[-2; 4]} y = 17$  khi  $x = 4$

**Chọn D**

**Ví dụ 7.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 3]$  và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[-1; 3]$ . Giá trị của  $M - m$  bằng

A. 1

B. 3

C. 4

D. 5

**Hướng dẫn giải**

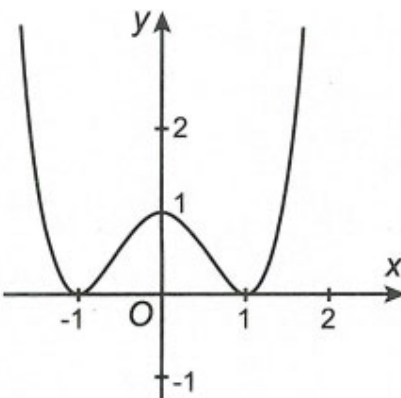
Dựa vào đồ thị suy ra

$$M = f(3) = 3; m = f(2) = -2$$

Vậy  $M - m = 5$

**Chọn D**

**Ví dụ 8.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 1]$  và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn  $[-1; 1]$ . Giá trị của  $M - m$  bằng

A. 0

B. 1

C. 2

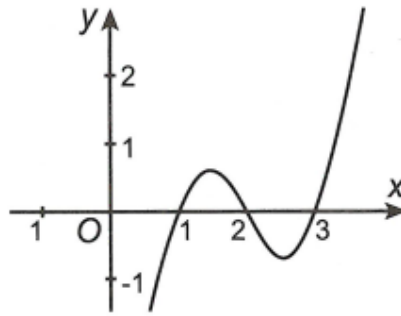
D. 3

**Hướng dẫn giải**

Từ đồ thị ta thấy  $M = 1; m = 0$  nên  $M - m = 1$

**Chọn B**

**Ví dụ 9.** Cho đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ



Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị lớn nhất trên khoảng  $[1; 3]$  tại  $x_0$ . Khi đó giá trị của  $x_0^2 - 2x_0 + 2019$  bằng bao nhiêu?

A. 2018

B. 2019

C. 2021

D. 2022

### Hướng dẫn giải

Dựa vào đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  ta có bảng biến thiên như sau

| $x$     | 1      | 2      | 3      |
|---------|--------|--------|--------|
| $f'(x)$ | +      | 0      | -      |
| $f(x)$  | $f(1)$ | $f(2)$ | $f(3)$ |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị lớn nhất trên khoảng  $[1; 3]$  tại  $x_0 = 2$ .

Vậy  $x_0^2 - 2x_0 + 2019 = 2019$

**Chọn B**

### 📌 Bài tập tự luyện dạng 3

**Câu 1:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |                |               |           |     |
|------|-----------|----------------|---------------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$           | $1$           | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $-$       | $0$            | $+$           | $0$       | $-$ |
| $y$  | $0$       | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$       |     |

Biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lần lượt là  $M, m$ . Giá trị biểu thức  $P = M^2 + m^2$  là

A.  $P = \frac{1}{4}$

B.  $P = \frac{1}{2}$

C. 2

D. 1

**Câu 2:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định và liên tục trên khoảng  $(-3; 2)$ ,



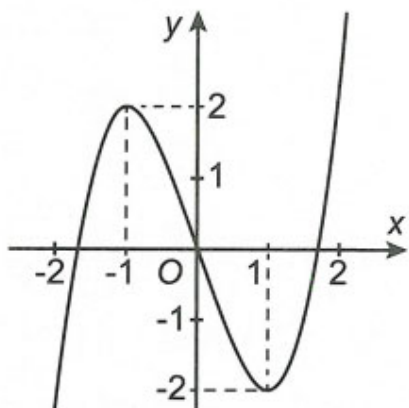
$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} f(x) = -5$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$  và có bảng biến thiên như sau

| $x$  | $-\infty$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $2$  | $+\infty$ |     |  |
|------|-----------|------|------|-----|------|-----------|-----|--|
| $y'$ |           |      | $+$  | $0$ | $-$  | $0$       | $+$ |  |
| $y$  |           |      |      | $0$ | $-2$ | $3$       |     |  |

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng  $(-3; 2)$
- B. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $-5$
- C. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $3$
- D. Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng  $(-3; 2)$  bằng  $0$ .

**Câu 3:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị trên khoảng  $(-2; 2)$  như hình bên. Khẳng định đúng là



- A. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $2$
- B. Giá trị lớn nhất của hàm số bằng  $1$
- C. Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng  $-1$
- D. Hàm số không có giá trị lớn nhất

**Câu 4:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[-5; 3)$  và có bảng biến thiên như sau

| $x$  | $-\infty$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $2$  | $+\infty$ |     |  |
|------|-----------|------|------|-----|------|-----------|-----|--|
| $y'$ |           |      | $+$  | $0$ | $-$  | $0$       | $+$ |  |
| $y$  |           |      |      | $0$ | $-2$ | $3$       |     |  |

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số  $y = f(x)$  không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên  $[-5; 3)$
- B. Hàm số  $y = f(x)$  không có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất trên  $[-5; 3)$
- C. Hàm số  $y = f(x)$  có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất trên  $[-5; 3)$
- D. Hàm số  $y = f(x)$  có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất trên  $[-5; 3)$

**Câu 5:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

|      |           |                |               |           |   |
|------|-----------|----------------|---------------|-----------|---|
| $x$  | $-\infty$ | 0              | 3             | $+\infty$ |   |
| $y'$ | -         | 0              | +             | 0         | - |
| $y$  | 0         | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0         |   |

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số  $y = f(x)$  không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất
- B. Hàm số  $y = f(x)$  không có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất
- C. Hàm số  $y = f(x)$  có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất
- D. Hàm số  $y = f(x)$  có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất

**Câu 6:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn  $[-6; 0]$  như sau

|      |    |    |   |
|------|----|----|---|
| $x$  | -6 | -3 | 0 |
| $y'$ | -  |    | + |
| $y$  | 7  | 0  | 6 |

Giá trị lớn nhất  $M$  và giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[-6; 0]$  là

- A.  $M = 7$  và  $m = 0$
- B.  $M = 0$  và  $m = 6$
- C.  $M = 6$  và  $m = 7$
- D.  $M = 0$  và  $m = 7$

**Câu 7:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $[-1; 4]$  và có bảng biến thiên như sau

|      |    |   |
|------|----|---|
| $x$  | -1 | 4 |
| $y'$ | +  |   |
| $y$  | 2  | 9 |

Mệnh đề nào sau đây sai

- A. Hàm số  $y = f(x)$  không có giá trị lớn nhất trên khoảng  $(-1; 4)$
- B. Hàm số  $y = f(x)$  không có giá trị lớn nhất trên nửa khoảng  $[-1; 4)$
- C. Hàm số  $y = f(x)$  không có giá trị nhỏ nhất trên nửa khoảng  $(-1; 4]$
- D. Hàm số  $y = f(x)$  không có giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[-1; 4]$

**Câu 8:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$  và có bảng biến thiên như sau

|      |           |                |     |           |
|------|-----------|----------------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | 3   | $+\infty$ |
| $y'$ | +         |                | 0 - |           |
| $y$  | $-\infty$ | -5             | 4   | $-\infty$ |

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số  $y = f(x)$  không có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất
- B. Hàm số  $y = f(x)$  không có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất
- C. Hàm số  $y = f(x)$  có giá trị nhỏ nhất và không có giá trị lớn nhất
- D. Hàm số  $y = f(x)$  có giá trị nhỏ nhất và có giá trị lớn nhất

**Câu 9:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[-1; 3]$  và có bảng biến thiên như sau

|      |    |    |    |    |    |
|------|----|----|----|----|----|
| $x$  | -1 | 0  | 1  | 2  | 3  |
| $y'$ | -  | 0  | +  | -  | 0  |
| $y$  | 0  | -4 | -2 | -3 | -1 |

Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x) + 2$  bằng trên đoạn  $[-1; 1]$  bằng

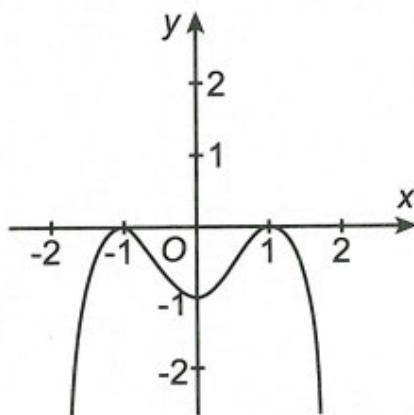
A. -4

B. -1

C. -3

D. -2

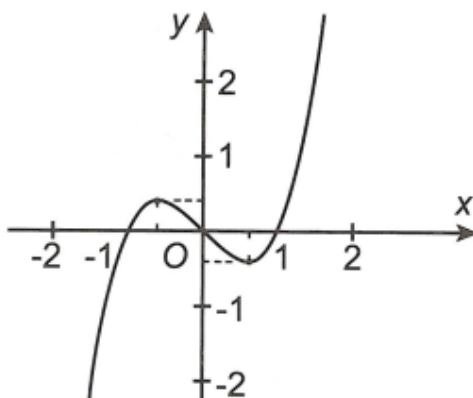
**Câu 10:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên đoạn  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[-1; 1]$  của hàm số là

A.  $\min y = -1$ B.  $\min y = 1$ C.  $\min y = 0$ D.  $\min y = -2$ 

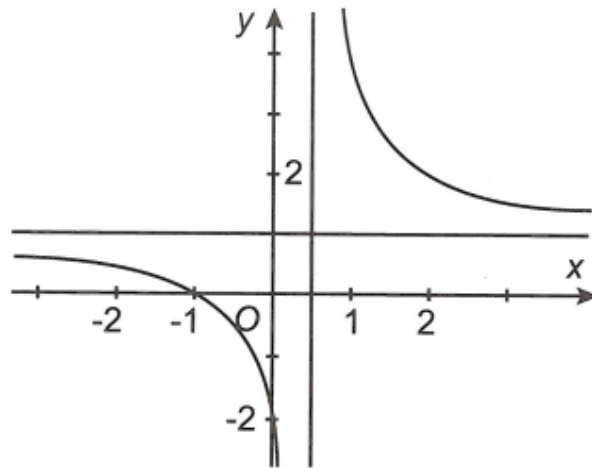
**Câu 11:** Cho đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ



Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[0; 2]$  tại  $x$  bằng bao nhiêu?

A.  $x = \frac{2}{3}$ B.  $x = 0$ C.  $x = 1$ D.  $x = 2$ 

**Câu 12:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+b}$  xác định và liên tục trên khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$  và  $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ . Đồ thị hàm số  $y = f(x)$  là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A.  $\max_{[-1; 0]} f(x) = f(0)$

B.  $\max_{[-3; 0]} f(x) = f(-3)$

C.  $\max_{[3; 4]} f(x) = f(4)$

D.  $\max_{[1; 2]} f(x) = f(2)$

### ĐÁP ÁN

|      |      |     |     |     |     |     |     |     |      |
|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 1-B  | 2-A  | 3-A | 4-D | 5-D | 6-A | 7-D | 8-B | 9-D | 10-A |
| 11-C | 12-B |     |     |     |     |     |     |     |      |

### Dạng 4: Xác định giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất bằng cách đặt ẩn phụ

#### Bài toán 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

##### 🚦 Phương pháp giải

**Ghi nhớ:** Điều kiện của các ẩn phụ

- ẩn phụ  $\begin{cases} t = \sin x \\ t = \cos x \end{cases} \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$

- ẩn phụ  $\begin{cases} t = |\cos x| \\ t = \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$

- ẩn phụ  $\begin{cases} t = |\sin x| \\ t = \sin^2 x \end{cases} \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$

- ẩn phụ  $t = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$   
 $\Rightarrow -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

**Ví dụ:** Giá trị lớn nhất  $M$  và giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$  là

A.  $M = -1; m = -\frac{3}{2}$

B.  $M = 3; m = -1$

C.  $M = 3; m = -\frac{3}{2}$

D.  $M = \frac{3}{2}; m = -3$

#### Hướng dẫn giải

**Bước 1.** Đặt ẩn phụ và tìm điều kiện cho ẩn phụ

Đặt  $t = \sin x$  với  $t \in [-1; 1]$ , ta được

$$y = 2t^2 + 2t - 1$$

**Bước 2.** Giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số theo ẩn phụ

$$\text{Khi đó } y' = 4t + 2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \in (-1; 1)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} y(-1) = -1 \\ y(1) = 3 \\ y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

**Bước 3.** Kết luận (Chọn đáp án)

$$\text{Do đó } M = 3; m = -\frac{3}{2}$$

**Chọn C**

### Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1.** Giá trị lớn nhất  $M$  và giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = 2 \cos 2x + 2 \sin x$  là

A.  $M = \frac{9}{4}; m = -4$

B.  $M = 4; m = 0$

C.  $M = 0; m = -\frac{9}{4}$

D.  $M = 4; m = -\frac{9}{4}$

### Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } y = 2 \cos 2x + 2 \sin x = 2(1 - 2 \sin^2 x) + 2 \sin x = -4 \sin^2 x + 2 \sin x + 2$$

$$\text{Đặt } t = \sin x, t \in [-1; 1], \text{ ta được } y = -4t^2 + 2t + 2$$

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow -8t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \in (-1; 1)$$

$$\text{Vì } \begin{cases} y(-1) = -4 \\ y(1) = 0 \\ y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4} \end{cases} \text{ nên } M = \frac{9}{4}; m = -4$$

**Chọn A**

**Ví dụ 2.** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{\cos^2 x + |\cos x| + 1}{|\cos x| + 1}$  bằng

A.  $\frac{3}{2}$

B.  $\frac{5}{2}$

C.  $\frac{7}{2}$

D. 3

### Hướng dẫn giải

$$\text{Đặt } t = |\cos x| \Rightarrow 0 \leq t \leq 1, \text{ ta được } y = f(t) = \frac{t^2 + t + 1}{t + 1} \text{ với } 0 \leq t \leq 1$$

Vì  $f'(t) = \frac{t^2 + 2t}{(t+1)^2} \geq 0, \forall t \in [0; 1]$  nên  $\min_{[0; 1]} f(t) = f(0) = 1; \max_{[0; 1]} f(t) = f(1) = \frac{3}{2}$

Suy ra tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng

$$\min_{[0; 1]} f(t) + \max_{[0; 1]} f(t) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

**Chọn B**

**Ví dụ 3.** Giá trị lớn nhất  $M$  của hàm số  $y = \cos^4 x + \sqrt{3} \sin^2 x + 2$  là

A.  $M = 2 + \sqrt{3}$

B.  $M = 3$

C.  $M = \frac{5}{4} + \sqrt{3}$

D.  $M = 3 + \sqrt{3}$

**Hướng dẫn giải**

Đặt  $t = \cos^2 x \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$ , ta được  $y = t^2 + \sqrt{3}(1-t) + 2$  với  $t \in [0; 1]$

Ta có  $y' = 2t - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2} \in (0; 1)$

Vì  $y(0) = 2 + \sqrt{3}; y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{4} + \sqrt{3}; y(1) = 3$  nên  $M = 2 + \sqrt{3}$

**Chọn A**

**Ví dụ 4.** Cho hàm số  $y = \frac{|\sin^2 x - (m+1)\sin x + 2m + 2|}{\sin x - 2}$  (với  $m$  là tham số thực).

Giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi  $m$  bằng

A.  $-\frac{3}{2}$

B.  $\frac{1}{2}$

C.  $\frac{3}{2}$

D.  $-\frac{1}{2}$

**Hướng dẫn giải**

Xét  $f(x) = \frac{\sin^2 x - \sin x + 2}{\sin x - 2}$

Đặt  $t = \sin x \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$ , ta được  $f(t) = \frac{t^2 - t + 2}{t - 2}$  với  $t \in [-1; 1]$

Ta có  $f'(t) = \frac{t^2 - 4t}{(t-2)^2} = 0 \Rightarrow t^2 - 4t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \in (-1; 1) \\ t = 4 \notin (-1; 1) \end{cases}$

Vì  $f(-1) = \frac{-4}{3}; f(1) = -2; f(0) = -1$  nên  $\max_{[-1; 1]} f(t) = -1$  và  $\min_{[-1; 1]} f(t) = -2$

Hay  $-2 \leq \frac{\sin^2 x - \sin x + 2}{\sin x - 2} \leq -1, \forall x$

Mặt khác  $y = \left| \frac{\sin^2 x - \sin x + 2}{\sin x - 2} - m \right| = |f(x) - m|, \forall -2 \leq f(x) \leq -1$

$$\text{Do đó } \max_{\mathbb{R}} y = \max_{[-2; -1]} |f(x) - m| = \max \{|m+2|, |m+1|\} = \max \{|m+2|, |-m-1|\}$$

$$\Rightarrow \max y \geq \frac{|m+2| + |-m-1|}{2} \geq \frac{|(m+2) + (-m-1)|}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Dấu bằng đạt được khi } \begin{cases} |m+2| = |-m-1| \\ (m+2)(-m-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$$

**Chọn A**

**Ví dụ 5.** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = |1 + 2 \cos x| + |1 + 2 \sin x|$  bằng

A.  $\sqrt{2} - 1$

B.  $\sqrt{3} - 1$

C. 1

D.  $2 - \sqrt{3}$

**Hướng dẫn giải**

$$\text{Ta có } P^2 = 6 + 4(\sin x + \cos x) + 2|1 + 2(\sin x + \cos x) + 4 \sin x \cos x|$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ với } |t| \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\text{Xét } y = P^2 = 6 + 4t + 2|2t^2 + 2t - 1| = \begin{cases} 4t^2 + 8t + 4 & \text{khi } t \leq \frac{-1-\sqrt{3}}{2}; t \geq \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ -4t^2 + 8 & \text{khi } \frac{-1-\sqrt{3}}{2} < t < \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} 8t + 8 & \text{khi } t < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}; t > \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ -8t & \text{khi } \frac{-1-\sqrt{3}}{2} < t < \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

| $t$  | $-\sqrt{2}$      | $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $0$ | $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ | $\sqrt{2}$       |
|------|------------------|-------------------------|------|-----|-------------------------|------------------|
| $y'$ | -                | +                       | 0    | +   | 0                       | -                |
| $y$  | $12 - 8\sqrt{2}$ | $4 - 2\sqrt{3}$         | $4$  | $8$ | $4 + 2\sqrt{3}$         | $12 + 8\sqrt{2}$ |

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra  $\min_{[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]} f(t) = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$

$$\Rightarrow \min P = \sqrt{3} - 1$$

**Chọn B**



**Ví dụ 6.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \sin x + \cos 2x$  trên đoạn  $[0; \pi]$  là

A.  $\max_{[0; \pi]} y = \frac{5}{4}$

B.  $\max_{[0; \pi]} y = 1$

C.  $\max_{[0; \pi]} y = 2$

D.  $\max_{[0; \pi]} y = \frac{9}{8}$

**Hướng dẫn giải**

Đặt  $t = \sin x \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2t^2$ , với  $x \in [0; \pi] \Rightarrow t \in [0; 1]$

Ta được  $f(t) = -2t^2 + t + 1$  với  $t \in [0; 1]$

Ta có  $f'(t) = -4t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \in (0; 1)$

Do  $f(0) = 1$ ;  $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}$ ;  $f(1) = 0$  nên  $\max_{[0; 1]} f(t) = \frac{9}{8}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là  $\max_{[0; \pi]} y = \frac{9}{8}$

**Chọn D**

**Bài toán 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số khác**

 **Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 1.** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 4\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3 + \frac{6x}{x^2+1} - 1$  bằng

A.  $\frac{5}{2}$

B. -5

C.  $-\frac{9}{2}$

D. 3

**Hướng dẫn giải**

Do  $x^2 + 1 \geq 2|x| \Rightarrow \frac{|x|}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$

Đặt  $t = \frac{x}{x^2+1} \Rightarrow |t| \leq \frac{1}{2}$

Khi đó  $y = 4t^3 + 6t - 1$  với  $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Vì  $y' = 12t^2 + 6 > 0$ ,  $\forall t$  nên hàm số đồng biến trên  $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Do đó  $\max_{\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]} y = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$

**Chọn A**

**Ví dụ 2.** Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{-x+9}$  lần lượt là

A. 2;  $\sqrt{2}$

B. 4; 2

C. 4;  $\sqrt{2}$

D. 4;  $2\sqrt{2}$

**Hướng dẫn giải**

Tập xác định  $D = [1; 9]$

Ta có  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{1}{2\sqrt{-x+9}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{-x+9} \Rightarrow x = 5 \in (1; 9)$

Vì  $y(1) = y(9) = 2\sqrt{2}$ ;  $y(5) = 4$  nên  $\max y = 4$ ;  $\min y = 2\sqrt{2}$ .

**Chọn D**

Nhận xét: với hàm số  $y = \sqrt{x+a} + \sqrt{-x+b}$  ( $-a \leq x \leq b$ ;  $a+b \geq 0$ ) thì

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = a+b+2\sqrt{x+a}\sqrt{-x+b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 \geq a+b \\ y^2 \leq a+b+(x+a)+(-x+b) = 2(a+b) \end{cases}$$

Suy ra  $\sqrt{a+b} \leq y \leq 2\sqrt{a+b}$  dấu bằng luôn xảy ra.

**Ví dụ 3.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} - \sqrt{(x+1)(3-x)}$  bằng

A.  $\frac{-5}{2}$

B.  $-2$

C.  $-4$

D.  $2$

**Hướng dẫn giải**

Tập xác định của hàm số là  $D = [-1; 3]$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} - \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = 4 - 2\sqrt{(x+1)(3-x)} \Rightarrow \sqrt{(x+1)(3-x)} = \frac{4-t^2}{2}$$

$$\text{Do } t^2 = 4 - 2\sqrt{(x+1)(3-x)} \leq 4, \forall x \in [-1; 3], \text{ từ đó suy ra } -2 \leq t \leq 2$$

Bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(t) = \frac{t^2}{2} + t - 2$  trên đoạn  $[-2; 2]$ .

$$\text{Ta có } g'(t) = t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \in (-2; 2)$$

$$\text{Lại có } g(-2) = -2; g(2) = 2; g(-1) = \frac{-5}{2}$$

$$\text{Suy ra giá trị nhỏ nhất bằng } \frac{-5}{2}$$

**Chọn A**

Nhận xét: Với hàm số  $y = \sqrt{x+a} - \sqrt{-x+b}$  ( $-a \leq x \leq b$ ;  $a+b \geq 0$ ) thì

$$y^2 = a+b-2\sqrt{x+a}\sqrt{-x+b} \leq a+b$$

$$\Rightarrow -\sqrt{a+b} \leq y \leq \sqrt{a+b}$$



#### Bài tập tự luyện dạng 4

**Câu 1:** Giá trị lớn nhất  $M$  và giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = \sin^4 x - 4\sin^2 x + 5$  là

A.  $M = 2; m = -5$

B.  $M = 5; m = 2$

C.  $M = 5; m = -2$

D.  $M = -2; m = -5$

**Câu 2:** Giá trị nhỏ nhất  $m$  của hàm số  $y = -\cos^3 x - \sin^2 x + \cos x - 3$  là

- A.  $m = 3$                       B.  $m = -\frac{113}{27}$                       C.  $m = \frac{113}{27}$                       D.  $m = -3$

**Câu 3:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sqrt{2} \cos 2x + 4 \sin x$  trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  là

- A.  $M = 4$                       B.  $M = 2$                       C.  $M = -\sqrt{2}$                       D.  $M = 2\sqrt{2}$

**Câu 4:** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{3 \cos^4 x + 4 \sin^2 x}{3 \sin^4 x + 2 \cos^2 x}$  theo thứ tự là

- A.  $\frac{8}{5}; \frac{4}{3}$                       B.  $-\frac{3}{2}; \frac{4}{3}$                       C.  $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}$                       D.  $\frac{3}{2}; -\frac{4}{3}$

**Câu 5:** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{\sqrt{x+1} + 2\sqrt{3-x} + 2}{2\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} + 1}$  theo thứ tự là

- A.  $2; \frac{-4}{5}$                       B.  $2; \frac{4}{5}$                       C.  $\frac{4}{5}; -2$                       D.  $\frac{-4}{5}; -2$

**Câu 6:** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2 \cos^6 x - \frac{3}{4} \cos 2x$  theo thứ tự là

- A. 4 và  $\frac{1}{4}$                       B. 4 và  $\frac{1}{2}$                       C. 2 và  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{5}{4}$  và  $\frac{1}{4}$

**Câu 7:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$  là

- A.  $\max_{[-1; 3]} y = 2\sqrt{3}$                       B.  $\max_{[-1; 3]} y = 2\sqrt{2}$                       C.  $\max_{[-1; 3]} y = 2$                       D.  $\max_{[-1; 3]} y = 3\sqrt{2}$

**Câu 8:** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \sqrt{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x^2)^2}$  bằng

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 5

**Câu 9:** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x^6 + 4(1-x^2)^3$  trên đoạn  $[-1; 1]$ . Khi đó tỉ số  $\frac{M}{m}$  bằng

- A.  $\frac{9}{4}$                       B.  $\frac{9}{16}$                       C. 9                      D.  $\frac{4}{9}$

### ĐÁP ÁN

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |  |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| 1-B | 2-B | 3-D | 4-A | 5-B | 6-D | 7-C | 8-B | 9-C |  |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|

**Dạng 5. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức nhiều biến****🚩 Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 1.** Cho biểu thức  $P = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}$  với  $x^2 + y^2 \neq 0$ . Giá trị nhỏ nhất của P bằng

- A. 3.                      B.  $\frac{1}{3}$ .                      C. 1.                      D. 4.

**Hướng dẫn giải**

- nếu  $y = 0$  thì  $P = 1$ . (1)
- nếu  $y \neq 0$  thì  $P = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right) + 1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) + 1}$ .

Đặt  $t = \frac{x}{y}$ , khi đó  $P = f(t) = \frac{t^2 + t + 1}{t^2 - t + 1}$ .

$$f'(t) = \frac{-2t^2 + 2}{(t^2 - t + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow -2t^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1.$$

Bảng biến thiên

|         |           |               |     |           |     |
|---------|-----------|---------------|-----|-----------|-----|
| $t$     | $-\infty$ | $-1$          | $1$ | $+\infty$ |     |
| $f'(t)$ | $-$       | $0$           | $+$ | $0$       | $-$ |
| $f(t)$  | $1$       | $\frac{1}{3}$ | $3$ | $1$       |     |

Dựa vào bảng biến thiên ta có  $P = f(t) \geq \frac{1}{3}$ . (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $P = f(t) \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \min P = \frac{1}{3}$ .

**Chọn B.**

**Ví dụ 2.** Cho hai số thực x,y thỏa mãn  $x \geq 0; y \geq 0$  và  $x + y = 1$ . Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$  lần lượt là

- A.  $\frac{1}{2}$  và 1.                      B. 0 và 1.                      C.  $\frac{2}{3}$  và 1.                      D. 1 và 2.

**Hướng dẫn giải**

$$\text{Ta có } P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} = \frac{x(x+1)+y(y+1)}{(x+1)(y+1)} = \frac{(x+y)^2 - 2xy + 1}{xy + x + y + 1} = \frac{2-2xy}{2+xy}.$$

$$\text{Đặt } t = xy \text{ ta được } P = \frac{2-2t}{2+t}.$$

$$\text{Vì } x \geq 0; y \geq 0 \Rightarrow t \geq 0.$$

$$\text{Mặt khác } 1 = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow t \leq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Khi đó, bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số } g(t) = \frac{2-2t}{2+t} \text{ trên } \left[0; \frac{1}{4}\right].$$

$$\text{Xét hàm số } g(t) = \frac{2-2t}{2+t} \text{ xác định và liên tục trên } \left[0; \frac{1}{4}\right].$$

$$\text{Ta có } g'(t) = \frac{-6}{(2+t)^2} < 0 \text{ với } \forall t \in \left(0; \frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \text{hàm số } g(t) \text{ nghịch biến trên đoạn } \left[0; \frac{1}{4}\right].$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} \min_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} g(t) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} \\ \max_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} g(t) = g(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min P = \frac{2}{3} \\ \max P = 1 \end{cases}.$$

**Chọn C.**

**Ví dụ 3.** Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3y^2 + 4xy + 7x + 4y - 1}{x + 2y + 1} \text{ bằng}$$

A. 3.

B.  $\sqrt{3}$ .

C.  $\frac{114}{11}$ .

D.  $2\sqrt{3}$ .

**Hướng dẫn giải**

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0.$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{(3y^2 + 4xy + 7x + 4y - 1) + (x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5)}{x + 2y + 1} \\ &= \frac{4y^2 + 4xy + x^2 + x + 2y + 4}{x + 2y + 1} = \frac{(2y + x)^2 + (x + 2y) + 4}{x + 2y + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = x + 2y.$$

$$(1^2 + 2^2)[(x-3)^2 + (y-1)^2] \geq [(x-3) + (2y-2)]^2$$

$$\Rightarrow (x + 2y - 5)^2 \leq 25 \Leftrightarrow 0 \leq x + 2y \leq 10.$$

$$\text{Ta được } P = f(t) = \frac{t^2 + t + 4}{t + 1} = t + \frac{4}{t + 1}, 0 \leq t \leq 10.$$

$$\text{Xét } f'(t) = 1 - \frac{4}{(t+1)^2} = 0 \Rightarrow (t+1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} t=1 \in (0;10) \\ t=-3 \notin (0;10) \end{cases}$$

Vì  $f(0) = 4; f(10) = \frac{114}{11}; f(1) = 3 \Rightarrow \min P = 3$  khi  $t = 1$ . **Chọn A.**

**Ví dụ 4.** Gọi  $x_0, y_0, z_0$  là ba số thực dương sao cho biểu thức

$$P = \frac{3}{2x+y+\sqrt{8yz}} - \frac{8}{\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)+4xz}+3} - \frac{1}{x+y+z} \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

Tổng  $x_0 + y_0 + z_0$  bằng

A. 3.

B. 1.

C.  $3\sqrt{3}$ .

D.  $\frac{3}{2}$ .

**Hướng dẫn giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{3}{2x+y+2\sqrt{2yz}} - \frac{8}{\sqrt{2y^2+2(x+z)^2}+3} - \frac{1}{x+y+z} \\ &\geq \frac{3}{2(x+y+z)} - \frac{8}{(x+y+z)+3} - \frac{1}{x+y+z}. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } x+y+z=t>0. \text{ Khi đó } P=f(t)=\frac{1}{2t}-\frac{8}{t+3}, (t>0).$$

$$\text{Ta có } f'(t)=\frac{3(t-1)(5t+3)}{2t^2(t+3)^2}=0 \Leftrightarrow t=1.$$

Bảng biến thiên

|         |           |                |           |
|---------|-----------|----------------|-----------|
| $t$     | 0         | 1              | $+\infty$ |
| $f'(t)$ | -         | 0              | +         |
| $f(t)$  | $+\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | 0         |

$$\text{Suy ra } P \geq -\frac{3}{2}. \text{ Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y=2z \\ y=x+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } x_0 + y_0 + z_0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1. \text{ **Chọn B.**}$$

**Ví dụ 5.** Cho  $x, y$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $\begin{cases} x^2 - xy + 3 = 0 \\ 2x + 3y - 14 \leq 0 \end{cases}$ .

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức  $P = 3x^2y - xy^2 - 2x^3 + 2x$  bằng

A. 8.

B. 0.

C. 12.

D. 4.

**Hướng dẫn giải**

Với điều kiện bài toán  $x, y > 0$  và  $x^2 - xy + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2 + 3}{x} = x + \frac{3}{x}$ .

Lại có

$$2x + 3y - 14 \leq 0 \Leftrightarrow 2x + 3\left(x + \frac{3}{x}\right) - 14 \leq 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 14x + 9 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[1; \frac{9}{5}\right].$$

$$\text{Từ đó } P = 3x^2\left(x + \frac{3}{x}\right) - x\left(x + \frac{3}{x}\right)^2 - 2x^3 + 2x = 5x - \frac{9}{x}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 5x - \frac{9}{x}; \forall x \in \left[1; \frac{9}{5}\right] \Rightarrow f'(x) = 5 + \frac{9}{x^2} > 0; \forall x \in \left[1; \frac{9}{5}\right].$$

Suy ra hàm số đồng biến trên  $\left[1; \frac{9}{5}\right]$

$$\Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{9}{5}\right) \Rightarrow -4 \leq f(x) \leq 4 \Rightarrow \max P + \min P = 4 + (-4) = 0. \text{ Chọn B.}$$

**Ví dụ 6.** Cho  $x, y, z$  là ba số thực thuộc đoạn  $[1; 9]$  và  $x \geq y, x \geq z$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{y}{10y - x} + \frac{1}{2} \left( \frac{y}{y + z} + \frac{z}{z + x} \right) \text{ bằng}$$

A.  $\frac{11}{18}$ .B.  $\frac{1}{3}$ .C.  $\frac{1}{2}$ .

D. 1.

**Hướng dẫn giải**

Với  $a, b$  dương thỏa mãn  $ab \geq 1$  ta có bất đẳng thức  $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ .

$$\text{Thật vậy } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 (\sqrt{ab} - 1) \geq 0 \text{ đúng do } ab \geq 1.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $a = b$  hoặc  $ab = 1$ .

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức trên } P = \frac{1}{10 - \frac{x}{y}} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 + \frac{z}{y}} + \frac{1}{1 + \frac{x}{z}} \right) \geq \frac{1}{10 - \frac{x}{y}} + \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{x}{y}}}.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{\frac{x}{y}} = t \in [1; 3]. \text{ Xét hàm số } f(t) = \frac{1}{10 - t^2} + \frac{1}{1 + t} \text{ trên đoạn } [1; 3].$$

$$f'(t) = \frac{2t}{(10 - t^2)^2} - \frac{1}{(1 + t)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^4 - 2t^3 - 24t^2 - 2t + 100 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (t - 2)(t^3 - 24t - 50) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \text{ do } t^3 - 24t - 50 < 0, \forall t \in [1; 3].$$

Bảng biến thiên

|         |                 |               |               |
|---------|-----------------|---------------|---------------|
| $t$     | 1               | 2             | 3             |
| $f'(t)$ | -               | 0             | +             |
| $f(t)$  | $\frac{11}{18}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{4}$ |

Suy ra  $P_{\min} = \frac{1}{2}$  khi và chỉ khi  $\begin{cases} x = 4y \\ \frac{z}{y} = \frac{x}{z} \\ \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ z = 2y \end{cases}$

**Chọn C.**

### Bài tập tự luyện dạng 5

**Câu 1:** Cho các số thực  $x, y$  thay đổi nhưng luôn thỏa mãn  $3x^2 - 2xy - y^2 = 5$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = x^2 + xy + 2y^2$  thuộc khoảng nào sau đây?

- A. (4;7).      B. (-2;1).      C. (1;4).      D. (7;10).

**Câu 2:** Cho  $x, y$  là hai số thực không âm thỏa mãn  $x + y = 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2 - xy}$$
 là

- A.  $\max P = 0$ .      B.  $\max P = 1$ .      C.  $\max P = -1$ .      D.  $\max P = \frac{1}{3}$ .

**Câu 3:** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn  $x^3 + y^3 = 2$ . Giá trị nhỏ nhất của  $P = x^2 + y^2$  là

- A.  $\min P = 1$ .      B.  $\min P = \sqrt[3]{2}$ .      C.  $\min P = \sqrt[3]{4}$ .      D.  $\min P = 2$ .

**Câu 4:** Cho hai số thực  $x, y$  thỏa mãn  $2(x^2 + y^2) - xy = 1$  và biểu thức  $P = 7(x^4 + y^4) + 4x^2y^2$ . Gọi  $M, m$  theo thứ tự là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $P$ . Tổng  $M + m$  là

- A.  $M + m = \frac{-260}{33}$ .      B.  $M + m = 0$ .      C.  $M + m = \frac{2344}{825}$ .      D.  $M + m = \frac{-232}{25}$ .

**Câu 5:** Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $x^2 - xy + y^2 = 1$  và biểu thức  $P = \frac{x^4 + y^4 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$ . Gọi  $M, m$  thứ tự là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $P$ . Tổng  $M + 15m$  bằng

- A.  $17 - 2\sqrt{6}$ .      B.  $17 + \sqrt{6}$ .      C.  $17 + 2\sqrt{6}$ .      D.  $17 - \sqrt{6}$ .

**Câu 6:** Cho các số thực  $x, y$  dương thỏa mãn  $x \geq 1, y \geq 1$  và  $3(x + y) = 4xy$ . Gọi  $M, m$  thứ tự là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $P = x^3 + y^3 + 3\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$ . Tổng  $M + m$  là



A.  $M + m = \frac{163}{4}$ .      B.  $M + m = \frac{197}{12}$ .      C.  $M + m = \frac{673}{12}$ .      D.  $M + m = \frac{613}{6}$ .

**Câu 7:** Cho các số thực dương  $x, y, z$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $M = \frac{3x^4 + 4y^3 + 16z^3 + 1}{(x + y + z)^3}$  bằng

A.  $\frac{16}{25}$ .      B.  $\frac{8}{9}$ .      C.  $\frac{9}{25}$ .      D.  $\frac{7}{25}$ .

**Câu 8:** Cho  $a, b, c$  không âm phân biệt. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a^2 + b^2 + c^2) \left[ \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} \right] \text{ bằng}$$

A.  $\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$ .      B.  $\frac{10+5\sqrt{5}}{2}$ .      C. 11.      D. 13.

**Câu 9:** Xét ba số thực  $a; b; c$  thay đổi thuộc đoạn  $[0; 3]$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = 4|(a-b)(b-c)(c-a)| + (ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \text{ bằng}$$

A.  $-\frac{3}{2}$ .      B. 0.      C.  $\frac{81}{4}$ .      D.  $\frac{41}{2}$ .

**Câu 10:** Cho  $x, y, z$  là các số thực thỏa mãn  $x > y > z > 0$  và  $x + y + z = 1$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{8}{xz} + \frac{2}{y^3} \text{ bằng}$$

A. 217.      B. 218.      C. 219.      D. 216.

**Câu 11:** Cho  $x, y, z$  là các số thực thỏa mãn  $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}z^2$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (x^4 + y^4 + z^4) \left( \frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{z^4} \right) \text{ bằng}$$

A.  $\frac{297}{8}$ .      B.  $\frac{320}{9}$ .      C.  $\frac{219}{6}$ .      D.  $\frac{412}{11}$ .

**Câu 12:** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = a + b + c - 4abc \text{ bằng}$$

A.  $\sqrt{2}$ .      B.  $\frac{5}{3\sqrt{3}}$ .      C.  $\sqrt{3}$ .      D.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Câu 13:** Cho  $x, y, z \in [1; 4]$  và  $x \geq y; x \geq z$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \text{ là}$$

A.  $\frac{33}{34}$ .      B.  $\frac{34}{35}$ .      C.  $\frac{35}{34}$ .      D.  $\frac{34}{33}$ .

**Câu 14:** Cho  $x, y, z \in [1; 4]$  và  $x \geq y$ . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \frac{(y+1)^2}{40y-4x} + \frac{y}{\sqrt{8yz+z}} + \frac{z}{2(x+z)}$  bằng

A.  $\frac{1}{2}$ .

B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

C.  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

D.  $\sqrt{2}$ .

|      |      |      |      |     |     |     |     |     |      |
|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 1-C  | 2-B  | 3-C  | 4-C  | 5-A | 6-A | 7-A | 8-A | 9-C | 10-D |
| 11-A | 12-A | 13-D | 14-A |     |     |     |     |     |      |

**Dạng 6: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số liên quan đến hàm ẩn**

**Bài toán 1.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(u(x)), y = f(u(x)) \pm h(x) \dots$  khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số  $y = f(x)$

**Phương pháp giải**

Thực hiện theo một trong hai cách

**Ví dụ:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên tập  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |     |                |           |     |
|------|-----------|------|-----|----------------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $\frac{21}{4}$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ |           | $+$  | $0$ | $-$            | $0$       | $-$ |
| $y$  |           |      |     |                |           |     |

The graph illustrates the function  $y = f(x)$  based on the provided table. The x-axis is marked with  $-\infty$ ,  $-1$ ,  $1$ ,  $\frac{21}{4}$ , and  $+\infty$ . The y-axis is marked with  $-\infty$ . The function starts at  $-\infty$  as  $x \rightarrow -\infty$ , increases to a local maximum of  $y = 4$  at  $x = -1$ , decreases to a local minimum of  $y = 2$  at  $x = 1$ , increases to a local maximum of  $y = 5$  at  $x = \frac{21}{4}$ , and finally decreases to  $-\infty$  as  $x \rightarrow +\infty$ .

Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x^2 - 2x)$  trên đoạn  $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A.  $M.m > 10$ .

B.  $\frac{M}{m} > 2$ .

C.  $M - m > 3$ .

D.  $M + m > 7$ .

**Cách 1:**

**Bước 1.** Đặt  $t = u(x)$ .

Đánh giá giá trị của  $t$  trên khoảng  $K$ .

**Chú ý:** Có thể sử dụng khảo sát hàm số, bất đẳng thức để đánh giá giá trị của  $t = u(x)$ .

**Hướng dẫn giải**

Đặt  $t = x^2 - 2x$ .

$$\text{Ta có } x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq x-1 \leq \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2 \leq \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq (x-1)^2 - 1 \leq \frac{21}{4} \Rightarrow t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right].$$

**Bước 2.** Từ bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số cho ta giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(t)$ .

Xét hàm số  $y = f(t), t \in \left[-1; \frac{21}{4}\right]$ .

Từ bảng biến thiên suy ra

$$m = \min_{\left[-1; \frac{21}{4}\right]} f(t) = f(1) = 2;$$

$$M = \max_{\left[-1; \frac{21}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{21}{4}\right) = 5$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m} > 2.$$

**Bước 3.** Kết luận.

**Cách 2:**

**Bước 1.** Tính đạo hàm  $y' = u'(x)f'(u(x))$ .

**Bước 2.** Tìm nghiệm  $y' = u'(x)f'(u(x)) = 0$ .

**Chọn B.**

Ta có  $y' = (2x-2)f'(x^2-2x) = 0$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \\ x^2-2x=-1 \\ x^2-2x=1 \\ x^2-2x=\frac{21}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{7}{2} \\ x=-\frac{3}{2} \\ x=1 \pm \sqrt{2} \end{cases}.$$

**Bước 3.** Lập bảng biến thiên.

**Bước 4.** Kết luận về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x), y = f(u(x))$ ,

$$y = f(u(x)) \pm h(x) \dots$$

Vẽ bảng biến thiên và kết luận được

$$M = 5; m = 2 \Rightarrow \frac{M}{m} > 2.$$

**Chọn B.**

 **Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 1.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |                                                                                     |      |                                                                                      |     |                                                                                       |           |
|------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$                                                                                | $1$  | $+\infty$                                                                            |     |                                                                                       |           |
| $y'$ |           | $-$                                                                                 | $0$  | $+$                                                                                  | $0$ | $-$                                                                                   |           |
| $y$  | $+\infty$ |  | $-3$ |  | $4$ |  | $-\infty$ |

Hàm số  $y = f(|x-1|)$  có giá trị nhỏ nhất trên đoạn  $[0; 2]$  bằng

- A.  $f(-2)$ .                      B.  $f(2)$ .  
C.  $f(1)$ .                         D.  $f(0)$ .

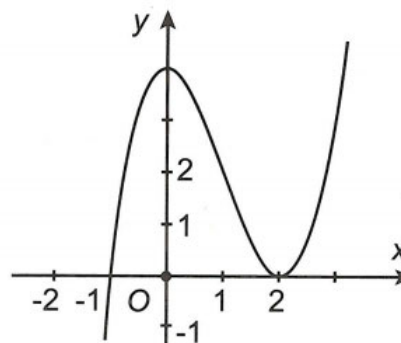
**Hướng dẫn giải**

Đặt  $t = |x-1|, \forall x \in [0; 2] \Rightarrow t \in [0; 1]$ .

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số  $y = f(t)$  có giá trị nhỏ nhất  $\min_{[0;1]} f(t) = f(0)$ .

**Chọn D.**

**Ví dụ 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Khi đó hàm số  $y = f(2 - x^2)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên  $[0; \sqrt{2}]$  bằng



- A.  $f(-2)$ .                      B.  $f(2)$ .  
C.  $f(1)$ .                         D.  $f(0)$ .

**Hướng dẫn giải**

Đặt  $t = 2 - x^2$ . Từ  $x \in [0; \sqrt{2}] \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 2 \Leftrightarrow 2 \geq 2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow t \in [0; 2]$ .

Dựa vào đồ thị, hàm số  $y = f(t)$  có giá trị nhỏ nhất  $\min_{[0;2]} f(t) = f(2)$ .

**Chọn B.**

**Ví dụ 3.** Cho hàm số  $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên sau

|      |           |      |     |     |           |     |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $-$       | $+$ |
| $y$  | $+\infty$ | $2$  | $3$ | $2$ | $+\infty$ |     |

Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x+3)$  trên đoạn  $[0; 2]$  là

- A. 64.                              B. 65.                              C. 66.                              D. 67.

**Hướng dẫn giải**

Hàm số có dạng  $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ . Từ bảng biến thiên ta có

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -2 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^4 - 2x^2 + 3.$$

Đặt  $t = x + 3, x \in [0; 2] \Leftrightarrow t \in [3; 5]$ .

Dựa vào đồ thị, hàm số  $y = f(t)$  đồng biến trên đoạn  $[3; 5]$ .

Do đó  $\min_{[0;2]} f(x+3) = \min_{[3;5]} f(t) = f(3) = 66$ .

**Chọn C.**

**Bài toán 2.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(u(x))$ ,  $y = f(u(x)) \pm h(x) \dots$

**Khi biết đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$**

**✚ Ví dụ mẫu**

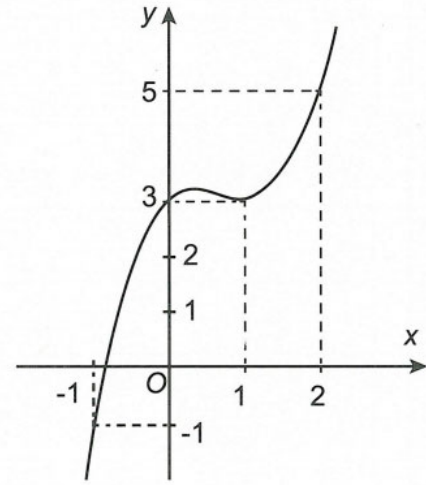
**Ví dụ.** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm và liên tục trên  $\mathbb{R}$ .

Biết rằng đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  như dưới đây.

Lập hàm số  $g(x) = f(x) - x^2 - x$ .

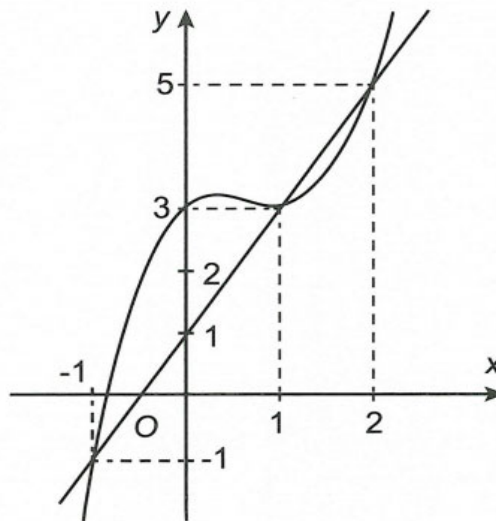
Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $g(-1) > g(1)$ .
- B.  $g(-1) = g(1)$ .
- C.  $g(1) = g(2)$ .
- D.  $g(1) > g(2)$ .



**Hướng dẫn giải**

Ta có  $g'(x) = f'(x) - 2x - 1$ .



Từ đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  và đường thẳng  $y = 2x + 1$  ta có  $g'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

|         |                                                                                   |   |   |   |   |
|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| $x$     | -1                                                                                | 1 | 2 |   |   |
| $g'(x)$ | 0                                                                                 | + | 0 | - | 0 |
| $g(x)$  |  |   |   |   |   |

Ta chỉ cần so sánh trên đoạn  $[-1; 2]$ . Đường thẳng  $y = 2x + 1$  là đường thẳng đi qua các điểm  $A(-1; -1)$ ,  $B(1; 3)$ ,  $C(2; 5)$  nên đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  và đường thẳng  $y = 2x + 1$  cắt nhau tại 3 điểm.

**Chọn D.**

### Bài tập tự luyện dạng 6

**Câu 1:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

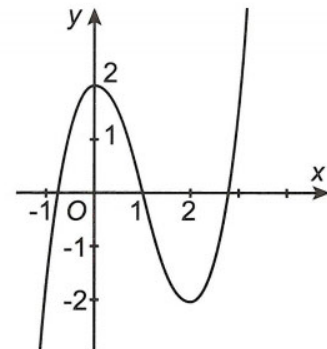
|      |           |            |      |            |     |            |           |
|------|-----------|------------|------|------------|-----|------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$       | $2$  | $+\infty$  |     |            |           |
| $y'$ | $-$       | $0$        | $+$  | $0$        | $-$ |            |           |
| $y$  | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Gọi  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số  $y = g(x) = f(3 - x)$  trên  $[0; 3]$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $M = f(0)$ .      B.  $M = f(3)$ .      C.  $M = f(1)$ .      D.  $M = f(2)$ .

**Câu 2:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ. Gọi  $M$ ,  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{3}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)$  trên đoạn  $[0; 2]$ . Khi đó  $M + m$  bằng

- A. 3      B. 1  
C. 2      D. 0



**Câu 3:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có bảng biến thiên như sau

|         |           |            |     |            |           |            |     |            |           |
|---------|-----------|------------|-----|------------|-----------|------------|-----|------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$       | $0$ | $2$        | $+\infty$ |            |     |            |           |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$        | $-$ | $0$        | $+$       |            |     |            |           |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-4$      | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số  $y = f(2\sin x)$  đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt là  $M$  và  $m$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng

A.  $m = -2M$

B.  $M = 2m$

C.  $M + m = 0$

D.  $M + m = 2$

**Câu 4:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[-2; 4]$  và có bảng biến thiên như sau

|         |    |    |    |   |   |
|---------|----|----|----|---|---|
| $x$     | -2 | -1 | 1  | 4 |   |
| $f'(x)$ | +  | 0  | -  | 0 | + |
| $f(x)$  | 0  | 3  | -1 | 1 |   |

Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = f(\cos 2x - 4\sin^2 x + 3)$ . Giá trị của  $M - m$  bằng

A. 4

B. -4

C. 2

D. 1

**Câu 5:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình

vẽ dưới đây. Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(\sqrt{4-x^2})$

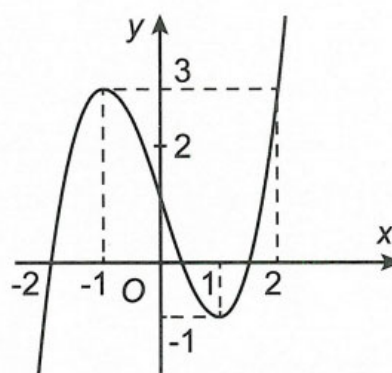
trên nửa khoảng  $[-\sqrt{2}; \sqrt{3})$  là

A. 3

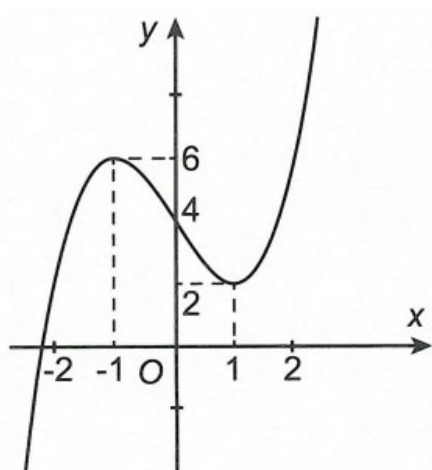
B. -1

C. 0

D. Không tồn tại



**Câu 6:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = f\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$  trên  $(-\infty; +\infty)$ . Tổng  $M + m$  bằng

A. 4

B. 6

C. 8

D. 12

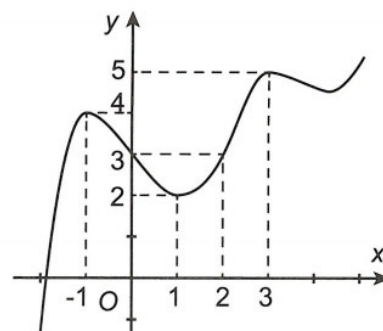
**Câu 7:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi  $M, m$  theo thứ tự là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(|x-2|)$  trên đoạn  $[-1; 5]$ . Tổng  $M + m$  bằng

A. 9.

B. 8.

C. 7.

D. 1.



**Câu 8:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình vẽ

|      |                                                                                                 |   |   |   |           |   |   |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|-----------|---|---|
| $x$  | $-\infty$                                                                                       | 1 | 4 | 6 | $+\infty$ |   |   |
| $y'$ | +                                                                                               | 0 | - | 0 | +         | 0 | - |
| $y$  | <pre>graph LR; A["-∞"] --&gt; B["4"]; B --&gt; C["-2"]; C --&gt; D["9"]; D --&gt; E["-∞"]</pre> |   |   |   |           |   |   |

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(|-x^2 + 2x + 5|)$  trên đoạn  $[-1; 3]$  lần lượt là  $M, m$ . Tổng  $M + m$  bằng

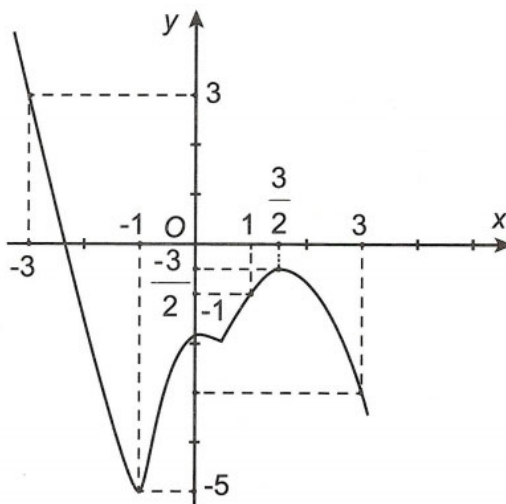
A. 13.

B. 7.

C.  $f(2) - 2$ .

D. 2.

**Câu 9:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $(-\infty; +\infty)$  và có đồ thị như hình vẽ





Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(|x^3 - 3x + 1|)$  trên đoạn  $[-2; 0]$ .

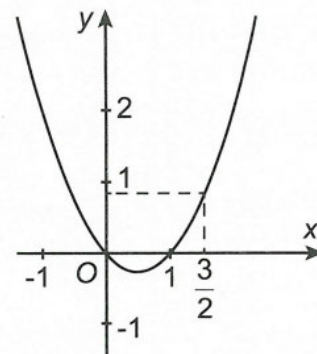
Tổng  $M + m$  bằng

- A.  $M + m = -2$ .      B.  $M + m = -\frac{7}{2}$ .      C.  $M + m = -\frac{11}{2}$ .      D.  $M + m = 0$ .

**Câu 10:** Cho hàm số  $y = f(x)$ , biết hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số  $y = f(x)$  đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn

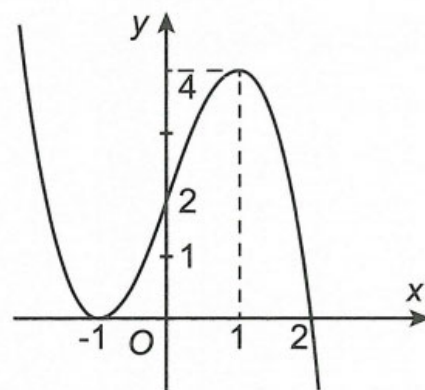
$\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$  tại điểm nào sau đây?

- A.  $x = \frac{3}{2}$ .      B.  $x = \frac{1}{2}$ .  
C.  $x = 1$ .      D.  $x = 0$ .

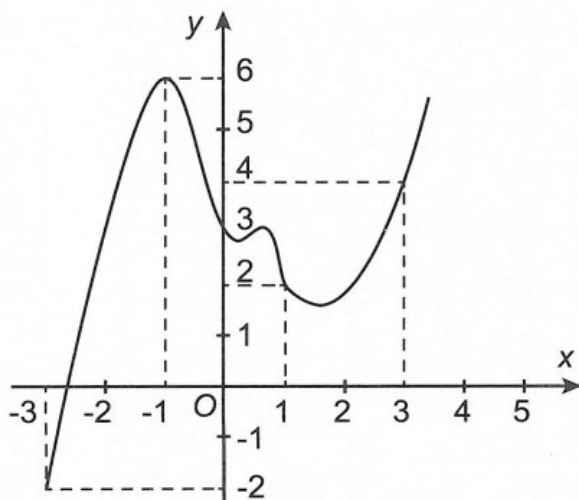


**Câu 11:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đồ thị như hình vẽ. Biết  $f(-1) = \frac{13}{4}$ ,  $f(2) = 6$ . Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = f^3(x) - 3f(x)$  trên  $[-1; 2]$  bằng

- A.  $\frac{1573}{64}$ .      B. 198.  
C.  $\frac{37}{4}$ .      D.  $\frac{14245}{64}$ .



**Câu 12:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Đồ thị của hàm số  $y = f'(x)$  như hình vẽ. Đặt  $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A.  $\min_{[-3; 3]} g(x) = g(1)$ .      B.  $\max_{[-3; 3]} g(x) = g(1)$ .

C.  $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$ .

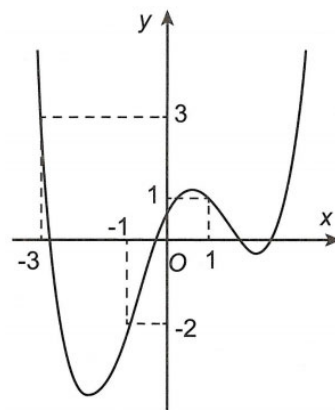
D. Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của  $g(x)$  trên  $[-3;3]$ .

**Câu 13:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị  $y = f'(x)$  như hình vẽ.

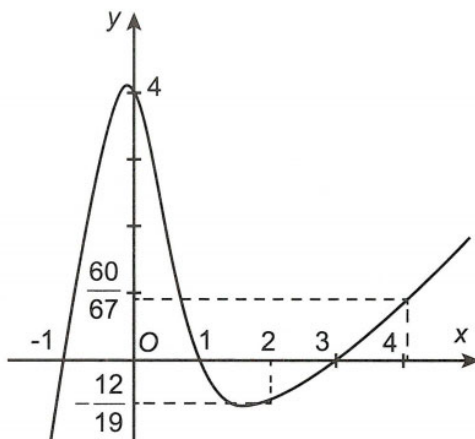
Xét hàm số  $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2018$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$ . B.  $\min_{[-3;1]} g(x) = g(1)$ .

C.  $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-3)$ . D.  $\min_{[-3;1]} g(x) = \frac{g(-3) + g(1)}{2}$ .



**Câu 14:** Cho hàm số  $y = f(x)$ , hàm số  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ



Giá trị nhỏ nhất của hàm số  $g(x) = \frac{1}{2}f(2x-1) + \frac{11}{19}(2x-1)^2 - 4x$  trên khoảng  $\left[0; \frac{5}{2}\right]$  bằng

A.  $\frac{1}{2}f(1) + \frac{11}{19}$

B.  $\frac{1}{2}f(4) - \frac{14}{19}$ .

C.  $\frac{1}{2}f(0) - 2$ .

D.  $\frac{1}{2}f(2) - \frac{70}{19}$ .

**Câu 15:** Cho hàm số  $y = f(x)$ . Biết hàm số  $y = f'(x)$

có đồ thị như hình vẽ. Trên đoạn  $[-4;3]$ , hàm số

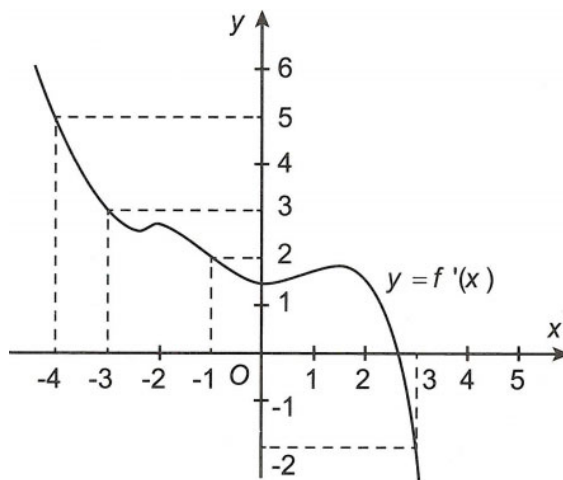
$g(x) = 2f(x) + (1-x)^2$  đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A.  $x_0 = -3$ .

B.  $x_0 = -4$ .

C.  $x_0 = -1$ .

D.  $x_0 = 3$ .



|      |      |      |      |      |     |     |     |     |      |
|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|------|
| 1-D  | 2-A  | 3-A  | 4-A  | 5-A  | 6-C | 7-C | 8-B | 9-B | 10-C |
| 11-A | 12-B | 13-A | 14-D | 15-C |     |     |     |     |      |

## Dạng 7. Ứng dụng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong các bài toán thực tế

### Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1.** Một chất điểm chuyển động theo quy luật  $s = 3t^2 - t^3$ . Thời điểm  $t$  (giây) mà tại đó vận tốc  $v(m/s)$  của chất điểm chuyển động đạt giá trị lớn nhất là

- A.  $t = 2s$                       B.  $t = 5s$                       C.  $t = 1s$                       D.  $t = 3s$

### Hướng dẫn giải

Ta có  $v(t) = s'(t) = 6t - 3t^2 \Rightarrow v(t) = -3(t-1)^2 + 3 \leq 3, \forall t \in \mathbb{R}$

Giá trị lớn nhất của  $v(t) = 3$  khi  $t = 1$ . **Chọn C**

**Ví dụ 2.** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 7 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 180 (m/s)                      B. 36 (m/s)                      C. 144 (m/s)                      D. 24 (m/s)

### Hướng dẫn giải

Ta có  $v(t) = s'(t) = -t^2 + 12t$

$$v'(t) = -2t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 6$$

Vì  $v(6) = 36; v(0) = 0; v(7) = 35$  nên vận tốc lớn nhất đạt được bằng 36 (m/s). **Chọn B**

**Ví dụ 3.** Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong  $t$  giờ được cho bởi công thức  $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1} (mg/L)$ . Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

- A. 4 giờ                      B. 1 giờ                      C. 3 giờ                      D. 2 giờ

### Hướng dẫn giải

Xét hàm số  $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1} (t > 0)$

$$c'(t) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \in (0; \infty) \\ t=-1 \notin (0; \infty) \end{cases}$$

Bảng

biến thiên

|         |   |        |           |
|---------|---|--------|-----------|
| $t$     | 0 | 1      | $+\infty$ |
| $c'(t)$ | + | 0      | -         |
| $c(t)$  | 0 | $c(1)$ | 0         |

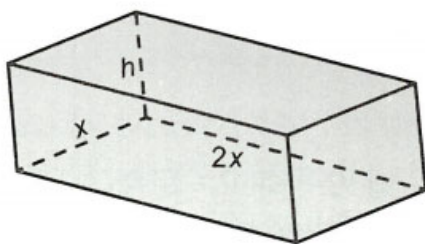
Với  $t = 1$  (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất. **Chọn B**

**Ví dụ 4.** ả gười ta xây một bể chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng  $\frac{500}{3} m^3$ . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 600.000 đồng /  $m^2$ . Hãy xác định kích thước của bể sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là

- A. 75 triệu đồng      B. 85 triệu đồng      C. 90 triệu đồng      D. 95 triệu đồng

**Hướng dẫn giải**

Gọi  $x(m)$  là chiều rộng của đáy bể, khi đó chiều dài của đáy bể là  $2x(m)$  và  $h(m)$  là chiều cao bể



$$\text{Bể có thể tích bằng } 2x^2h = \frac{500}{3} \Leftrightarrow h = \frac{250}{3x^2}$$

$$\text{Diện tích cần xây } S = 2(xh + 2xh) + 2x^2 = 6x \frac{250}{3x^2} + 2x^2 = \frac{500}{x} + 2x^2$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = \frac{500}{x} + 2x^2, (x > 0); f'(x) = -\frac{500}{x^2} + 4x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Bảng biến thiên

|         |           |                                 |           |
|---------|-----------|---------------------------------|-----------|
| $x$     | 0         | 5                               | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | –      0      +                 |           |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $\searrow$<br>150<br>$\nearrow$ | $+\infty$ |

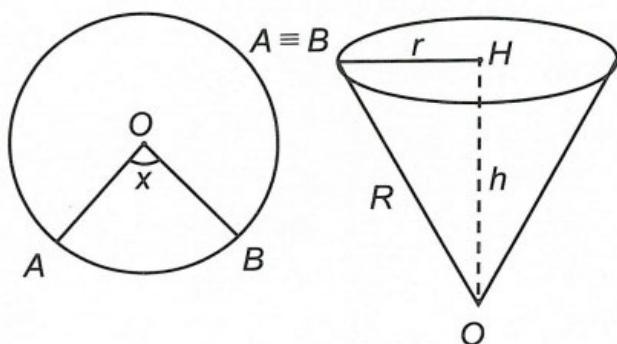
$$\text{Do đó } \min_{(0;+\infty)} f(x) = f(5) = 150$$

Chi phí thuê nhân công thấp nhất khi diện tích xây dựng là nhỏ nhất và bằng  $S_{\min} = 150$

Vậy giá thuê nhân công thấp nhất là  $150.600000 = 90.000.000$  đồng. **Chọn C**

**Ví dụ 5.** Bác Hoàng có một tấm thép mỏng hình tròn, tâm O, bán kính 4 dm. Bác định cắt ra một hình quạt tròn tâm O, quấn rồi hàn ghép hai mép của hình quạt tròn lại để tạo thành một đồ vật dạng mặt nón

tròn xoay (tham khảo hình vẽ). Dung tích lớn nhất có thể của đồ vật mà bác Hoàng tạo ra bằng bao nhiêu? (bỏ qua phần mối hàn và độ dày của tấm thép)



A.  $\frac{128\pi\sqrt{3}}{27}dm^3$

B.  $\frac{128\pi\sqrt{3}}{81}dm^3$

C.  $\frac{16\pi\sqrt{3}}{27}dm^3$

D.  $\frac{64\pi\sqrt{3}}{27}dm^3$

### Hướng dẫn giải

Khi hàn hai mép của hình quạt tròn, độ dài đường sinh của hình nón bằng bán kính của hình quạt tròn, tức là  $OA = 4dm$

Thể tích của hình nón  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(16 - h^2)h$  với  $0 < h < 4$

Ta có  $V'(h) = \frac{1}{3}\pi(16 - 3h^2) \Rightarrow V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

| $h$     | 0 | $\frac{4\sqrt{3}}{3}$       | 4 |
|---------|---|-----------------------------|---|
| $V'(h)$ |   | +                           | 0 |
| $V(h)$  |   | $\frac{128\pi\sqrt{3}}{27}$ | 0 |

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra thể tích lớn nhất của hình nón là  $\frac{128\pi\sqrt{3}}{27}dm^3$ . **Chọn A**

**Ví dụ 6.** ả gười ta làm chiếc thùng phi dạng hình trụ, kín hai đáy, với thể tích theo yêu cầu là  $2\pi m^3$ . Hỏi bán kính đáy  $R$  và chiều cao  $h$  của thùng phi bằng bao nhiêu để khi làm thì tiết kiệm vật liệu nhất

A.  $R = \frac{1}{2}m; h = 8m$

B.  $R = 1m; h = 2m$

C.  $R = 2m; h = \frac{1}{2}m$

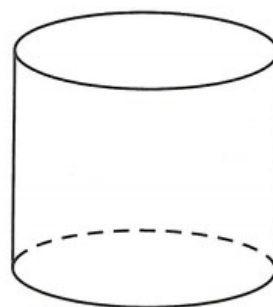
D.  $R = 4m; h = \frac{1}{5}m$

### Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có

$$V = \pi R^2 h = 2\pi \Rightarrow h = \frac{2}{R^2}$$

Diện tích toàn phần của thùng phi là



$$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi \left( R^2 + \frac{2}{R} \right)$$

Xét hàm số  $f(R) = R^2 + \frac{2}{R}$  với  $R \in (0; +\infty)$

Ta có  $f'(R) = 2R - \frac{2}{R^2} = \frac{2(R^3 - 1)}{R^2}$

$$f'(R) = 0 \Leftrightarrow R = 1$$

Bảng biến thiên

| $R$     | 0         | 1 | $+\infty$ |           |
|---------|-----------|---|-----------|-----------|
| $f'(R)$ |           | - | 0         | +         |
| $f(R)$  | $+\infty$ |   | 3         | $+\infty$ |

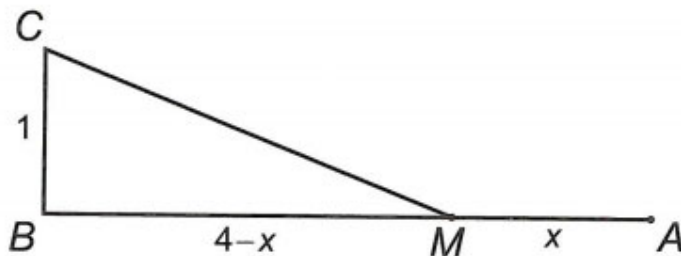
Suy ra diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất khi  $R = 1 \Rightarrow h = 2$

Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất khi làm thùng phi thì  $R = 1m; h = 2m$ . **Chọn B**

**Ví dụ 7.** Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như hình vẽ. Khoảng cách từ C đến B là 1 km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 4km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1km dây điện trên biển là 40 triệu đồng, còn trên đất liền là 20 triệu đồng. Tính tổng chi phí nhỏ nhất để hoàn thành công việc trên (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy)

- A. 120 triệu đồng      B. 164,92 triệu đồng      C. 114,64 triệu đồng      D. 106,25 triệu đồng

**Hướng dẫn giải**



Gọi M là điểm trên đoạn thẳng AB để lắp đặt đường dây điện ra biển nối với điểm C

Đặt  $AM = x \Rightarrow BM = 4 - x \Rightarrow CM = \sqrt{1 + (4 - x)^2} = \sqrt{17 - 8x + x^2}, x \in [0; 4]$

Khi đó tổng chi phí lắp đặt là  $y = x \cdot 20 + 40\sqrt{x^2 - 8x + 17}$  (đơn vị: triệu đồng)

$$y' = 20 + 40 \cdot \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}} = 20 \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 17} + 2(x - 4)}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 8x + 17} = 2(4 - x) \Leftrightarrow x = \frac{12 - \sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Ta có } y\left(\frac{12 - \sqrt{3}}{3}\right) = 80 + 20\sqrt{3} \approx 114,64; y(0) = 40\sqrt{17} \approx 164,92; y(4) = 120$$

Do đó chi phí nhỏ nhất để hoàn thành công việc là 114,64 triệu đồng. **Chọn C**

### Bài tập tự luyện dạng 7

**Câu 1:** Một vật chuyển động theo quy luật  $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$  với  $t$  (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và  $s$  (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 216 (m/s)      B. 30 (m/s)      C. 400 (m/s)      D. 54 (m/s)

**Câu 2:** Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường  $s$  (mét) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian  $t$  (giây), hàm số đó là  $s = -t^3 + 6t^2$ . Thời điểm  $t$  (giây) mà tại đó vận tốc  $v$  (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là

- A.  $t = 2s$       B.  $t = 6s$       C.  $t = 8s$       D.  $t = 4s$

**Câu 3:** Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là  $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$ , với  $t$  (s) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và  $s$  (m) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 6 giây đầu tiên, vận tốc  $v$  (m/s) của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng

- A. 29 m/s      B. 26 m/s      C. 17 m/s      D. 36 m/s

**Câu 4:** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức  $G(x) = 0,035x^2(15 - x)$ , trong đó  $x$  là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân ( $x$  được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là

- A.  $x = 8$       B.  $x = 10$       C.  $x = 15$       D.  $x = 7$

**Câu 5:** Để thiết kế một chiếc bể cá không có nắp đậy hình hộp chữ nhật có chiều cao 60cm, thể tích là  $96.000cm^3$ , người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành là 70.000 đồng /  $m^2$  và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng /  $m^2$ . Chi phí thấp nhất để làm bể cá là

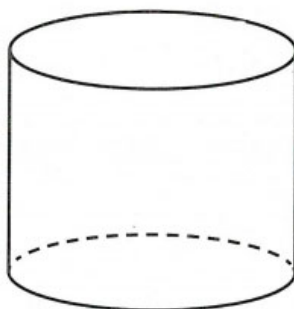
- A. 28.300 đồng      B. 38.200 đồng      C. 83.200 đồng      D. 83.200 đồng

**Câu 6:** Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 ( $m^3$ ) và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và bốn mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi  $h$  là chiều cao của hộp để giá thành làm chiếc hộp là thấp nhất. biết  $h = \frac{m}{n}$  với  $m, n$  là các số nguyên

dương nguyên tố cùng nhau. Tổng  $m + n$  bằng

- A. 12      B. 13      C. 11      D. 10

**Câu 7:** Một người thợ xây, muốn xây một bồn chứa thóc hình trụ tròn với thể tích là  $150m^3$  (như hình vẽ). Đáy làm bằng bê tông, thành làm bằng tôn và nắp bể làm bằng nhôm. Biết giá thành các vật liệu như sau: bê tông 100 nghìn đồng một  $m^2$ , tôn 90 nghìn một  $m^2$  và nhôm 120 nghìn đồng một  $m^2$ . Chi phí thấp nhất để làm bồn chứa thóc (làm tròn đến hàng nghìn) là

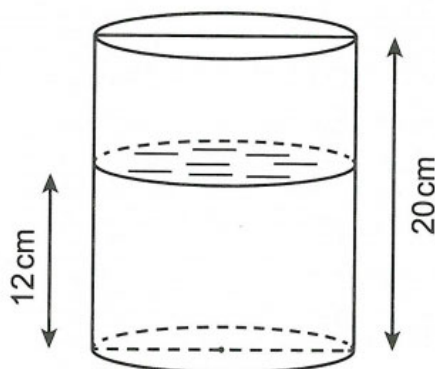


- A. 15038000 đồng      B. 15037000 đồng      C. 15039000 đồng      D. 15040000 đồng

**Câu 8:** Một công ty dự kiến chi 1 tỉ đồng để sản xuất các thùng đựng sơn hình trụ có dung tích 5 lít. Biết rằng chi phí để làm mặt xung quanh của thùng đó là  $100.000 \text{ đồng} / m^2$ , chi phí để làm mặt đáy là  $120.000 \text{ đồng} / m^2$ . Số thùng sơn tối đa mà công ty đó sản xuất được (giả sử chi phí cho các mối nối không đáng kể) là

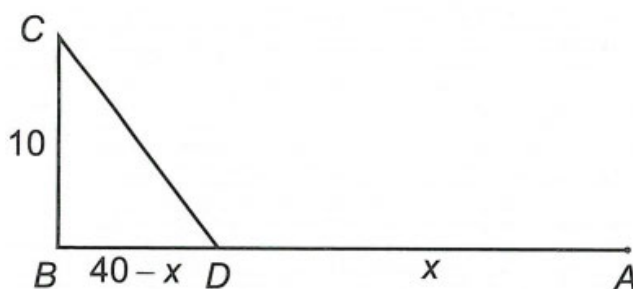
- A. 58135 thùng      B. 18209 thùng      C. 12525 thùng      D. 57582 thùng

**Câu 9:** Một cốc hình trụ có bán kính đáy là 2cm, chiều cao 20cm. Trong cốc đang có một ít nước, khoảng cách giữa đáy cốc và mặt nước là 12cm (hình vẽ). Một con quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá 6cm. Con quạ thông minh mổ những viên đá hình cầu có bán kính 0,6cm thả vào cốc để mực nước dâng lên. Để uống được nước thì con quạ cần thả vào cốc ít nhất bao nhiêu viên đá?



- A. 30      B. 27      C. 28      D. 29

**Câu 10:** Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C. Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10km, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C nhất là 40km. ả gười đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ bên). Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km, đi đường bộ là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất?





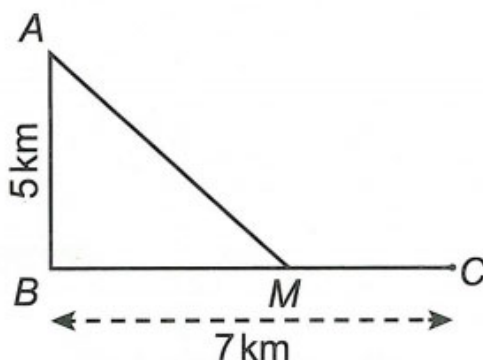
A.  $\frac{15}{2}km$

B.  $10km$

C.  $\frac{65}{2}km$

D.  $40km$

**Câu 11.** Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ biển một khoảng  $AB = 5$  (km). Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7(km). ả gười canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 4 (km/h) rồi đi bộ từ M đến C với vận tốc 6 (km/h). Vị trí của điểm M cách B một khoảng gần nhất với giá trị nào sau đây để người đó đến kho nhanh nhất?



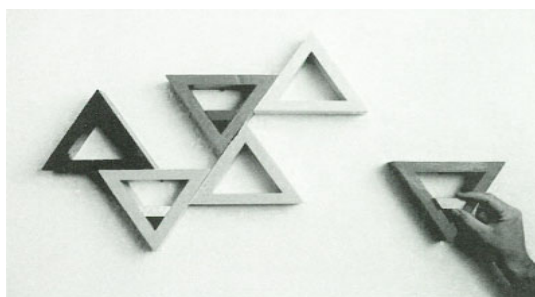
A.  $1,0km$

B.  $7,0km$

C.  $4,5km$

D.  $2,1km$

**Câu 12.** Thầy Toàn có thanh gỗ dài là 3,2 m. Thầy Toàn dự định dùng thanh gỗ để thiết kế 5 hình tam giác giống nhau làm kệ trang trí phòng đọc sách, trong đó các tam giác có 1 cạnh có độ dài là 24 cm (coi các mẫu cắt bỏ đi không đáng kể). Tổng diện tích của 5 tam giác có giá trị lớn nhất là



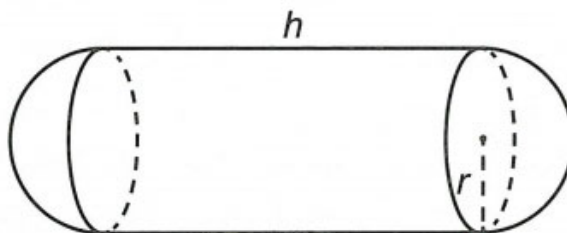
A.  $40\sqrt{119}cm^2$

B.  $16\sqrt{119}cm^2$

C.  $480cm^2$

D.  $960cm^2$

**Câu 13.** Một kĩ sư được một công ty xăng dầu thuê thiết kế một mẫu bồn chứa xăng với thể tích  $V$  cho trước, hình dạng như hình vẽ bên, các kích thước  $r, h$  thay đổi sao cho nguyên vật liệu làm bồn xăng là ít nhất. ả gười kĩ sư này phải thiết kế kích thước  $h$  như thế nào để đảm bảo được đúng yêu cầu mà công ty xăng dầu đã đưa ra?



A.  $h = 0$

B.  $h = \frac{\sqrt[3]{V}}{\pi}$

C.  $h = 2\sqrt[3]{V}$

D.  $h = \frac{\sqrt[3]{V}}{2}$

|      |      |      |     |     |     |     |     |     |      |
|------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 1-D  | 2-A  | 3-A  | 4-B | 5-C | 6-C | 7-A | 8-A | 9-C | 10-C |
| 11-C | 12-D | 13-A |     |     |     |     |     |     |      |

**Dạng 8. Ứng dụng giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong việc giải phương trình**

**Bài toán 1.** Tìm  $m$  để  $F(x; m) = 0$  có nghiệm trên tập D

 **Phương pháp giải**

Thực hiện theo các bước sau

**Bước 1.** Cô lập tham số  $m$  và đưa về dạng

$$f(x) = g(m)$$

**Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số  $f(x)$  trên  $D$

**Bước 3.** Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị tham số  $A(m)$  sao cho đường thẳng  $y = g(m)$  cắt đồ thị hàm số  $y = f(x)$

**Bước 4. Kết luận**

**Chú ý:**

+) Để hàm số  $y = f(x)$  liên tục và có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên  $D$  thì phương trình  $f(x) = g(m)$  có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_D f(x) \leq g(m) \leq \max_D f(x)$$

+) Để bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có  $k$  nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định điều kiện sao cho đường thẳng  $y = g(m)$  nằm ngang cắt đồ thị hàm

**Ví dụ:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  trong đoạn  $[-100; 100]$  để phương trình

$$2\sqrt{x+1} = x + m \text{ có nghiệm thực?}$$

A. 100

B. 101

C. 102

D. 103

**Hướng dẫn giải**

Điều kiện  $x \geq -1$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ x = t^2 - 1 \end{cases}$$

Ta được phương trình

$$2t = t^2 - 1 + m \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 1$$

Xét hàm số  $f(t) = -t^2 + 2t + 1, t \geq 0$

$$f'(t) = -2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Bảng biến thiên

|         |   |   |           |
|---------|---|---|-----------|
| $t$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(t)$ | + | 0 | -         |
| $f(t)$  | 1 | 2 | $-\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có nghiệm khi  $m \leq 2 \Rightarrow -100 \leq m \leq 2$

Vậy có 103 giá trị nguyên  $m$  thỏa mãn

**Chọn D**

số  $y = f(x)$  tại  $k$  điểm phân biệt

### Ví dụ mẫu

**Ví dụ 1.** Cho phương trình  $m(\sqrt{x^2 - 2x + 2}) - x^2 + 2x = 0$  ( $m$  là tham số). Biết rằng tập hợp các giá trị của tham số  $m$  để phương trình có nghiệm thuộc đoạn  $[0; 1 + 2\sqrt{2}]$  là đoạn  $[a; b]$ . Giá trị của biểu thức  $T = -a + 2b$  là

- A.  $T = 4$                       B.  $T = \frac{7}{2}$                       C.  $T = 3$                       D.  $T = \frac{1}{2}$

### Hướng dẫn giải

Đặt  $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

Xét hàm số  $t(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$  trên đoạn  $[0; 1 + 2\sqrt{2}]$

$$t'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vì  $t(0) = \sqrt{2}; t(1) = 1; t(1 + 2\sqrt{2}) = 3$  nên  $t \in [1; 3]$

Yêu cầu của bài toán tương đương với phương trình  $m(t+1) = t^2 - 2$  có nghiệm thuộc đoạn

$$[1; 3] \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2}{t+1} \text{ có nghiệm thuộc đoạn } [1; 3] \quad (1)$$

Xét hàm số  $f(t) = \frac{t^2 - 2}{t+1}$  trên đoạn  $[1; 3]$

$$f'(t) = \frac{t^2 + 2t + 2}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [1; 3] \text{ khi hàm số đồng biến trên đoạn } [1; 3]$$

Để phương trình (1) đã cho có nghiệm thì  $\min_{[1;3]} f(t) \leq m \leq \max_{[1;3]} f(t)$

$$\Leftrightarrow f(1) \leq m \leq f(3) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{7}{4}$$

Vậy  $a = -\frac{1}{2}; b = \frac{7}{4} \Rightarrow T = 4$ . **Chọn A**

**Ví dụ 2.** Giá trị nhỏ nhất của tham số  $m$  để hệ phương trình  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^4 + y^4 = m \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$  có nghiệm là  $m_0$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.  $m_0 \in (-20; -15)$                       B.  $m_0 \in (-12; -8)$                       C.  $m_0 \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right)$                       D.  $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$

### Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} x + y = 2 & (1) \\ x^4 + y^4 = m & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra  $y = 2 - x$  thay vào (2) ta được (2)  $\Rightarrow x^4 + (2 - x)^4 = m$  (3)

Xét hàm số  $f(x) = x^4 + (2 - x)^4$  có tập xác định  $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 4x^3 - 4(2 - x)^3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = (2 - x)^3 \Leftrightarrow x = 2 - x \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0 | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | 2 | $+\infty$ |

Hệ đã cho có nghiệm thực khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm thực

Dựa vào bảng biến thiên ta được  $m \geq 2 \Rightarrow m_0 = 2 \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$ . **Chọn D**

**Bài toán 2. Tìm m để bất phương trình  $F(x; m) > 0; F(x; m) \geq 0; F(x; m) < 0; F(x; m) \leq 0$  có nghiệm trên tập D**

#### Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

**Ví dụ:** Các giá trị của tham số m để bất phương

trình  $x + \frac{4}{x-1} - m \geq 0$  có nghiệm trên khoảng

$(-\infty; 1)$  là

**A.**  $m < 5$

**B.**  $m \leq -3$

**C.**  $m \leq 1$

**D.**  $m \geq 3$

**Bước 1.** Cô lập tham số m và đưa về dạng **Hướng dẫn giải**

$g(m) > f(x)$  hoặc  $g(m) \geq f(x)$  hoặc Bất phương trình đã cho tương đương với

$g(m) \leq f(x)$  hoặc  $g(m) < f(x)$

$$x + \frac{4}{x-1} \geq m$$

Xét hàm số  $y = x + \frac{4}{x-1}$  trên khoảng  $(-\infty; 1)$

**Bước 2.** Khảo sát sự biến thiên của hàm số

$f(x)$  trên D

$$y' = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \notin (-\infty; 1) \\ x = -1 \in (-\infty; 1) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

|      |           |      |           |
|------|-----------|------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$       |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$       |
| $y$  | $-\infty$ | $-3$ | $-\infty$ |

**Bước 3.** Dựa vào bảng biến thiên xác định các giá trị của tham số  $m$

Từ bảng biến thiên, để bất phương trình

$$x + \frac{4}{x-1} - m \geq 0 \text{ có nghiệm trên khoảng } (-\infty; 1)$$

thì  $m \leq -3$ . **Chọn B**

**Bước 4.** Kết luận

**Chú ý:** nếu hàm số  $y = f(x)$  liên tục và có giá trị lớn nhất; giá trị nhỏ nhất trên  $D$  thì

+) Bất phương trình  $g(m) \leq f(x)$  có nghiệm trên  $D \Leftrightarrow g(m) \leq \max_D f(x)$

+) Bất phương trình  $g(m) \leq f(x)$  nghiệm đúng  $\forall x \in D \Leftrightarrow g(m) \leq \min_D f(x)$

+) Bất phương trình  $g(m) \geq f(x)$  có nghiệm trên  $D \Leftrightarrow g(m) \geq \min_D f(x)$

+) Bất phương trình  $g(m) \geq f(x)$  nghiệm đúng  $\forall x \in D \Leftrightarrow g(m) \geq \max_D f(x)$

**Ví dụ mẫu**

**Ví dụ 1.** Gọi  $S$  là tập hợp các giá trị nguyên của tham số  $m \in [0; 2019]$  để bất phương trình

$$x^2 - m + \sqrt{(1-x^2)^3} \leq 0 \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in [-1; 1]. \text{ Số các phần tử của tập } S \text{ là}$$

A. 1

B. 2020

C. 2019

D. 2

**Hướng dẫn giải**

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1-x^2}, \text{ với } x \in [-1; 1] \Rightarrow t \in [0; 1]$$

$$\text{Bất phương trình đã cho trở thành } t^3 - t^2 + 1 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq t^3 - t^2 + 1 \quad (1)$$

Yêu cầu của bài toán tương đương với bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi  $t \in [0;1]$

Xét hàm số  $f(t) = t^3 - t^2 + 1 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 2t$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \notin (0;1) \\ t = \frac{2}{3} \in (0;1) \end{cases}$$

Vì  $f(0) = f(1) = 1; f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{23}{27}$  nên  $\max_{[0;1]} f(t) = 1$

Do đó bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi  $t \in [0;1]$  khi và chỉ khi  $m \geq 1$

Mặt khác  $m$  là số nguyên thuộc  $[0; 2019]$  nên  $m \in \{1; 2; 3; \dots; 2019\}$

Vậy có 2019 giá trị của  $m$  thỏa mãn bài toán. **Chọn C**

**Ví dụ 2.** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $[-1;3]$  và

có đồ thị như hình vẽ.

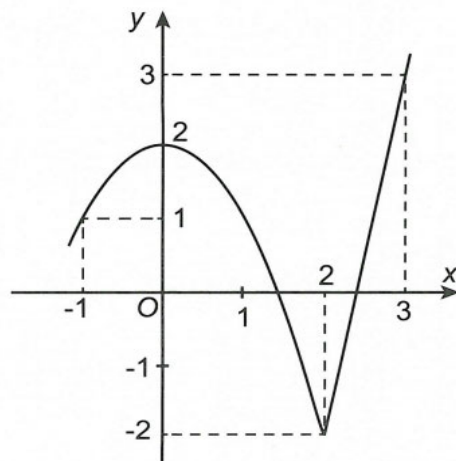
Bất phương trình  $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geq m$  có nghiệm thuộc  $[-1;3]$  khi và chỉ khi

A.  $m \leq 7$

B.  $m \geq 7$

C.  $m \leq 2\sqrt{2} - 2$

D.  $m \geq 2\sqrt{2} - 2$



**Hướng dẫn giải**

Xét hàm số  $P = \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}$  trên đoạn  $[-1;3]$

Ta có  $P^2 = 8 + 2\sqrt{(x+1) \cdot (7-x)} \leq 8 + (x+1) + (7-x) = 16 \Rightarrow P \leq 4$

Dấu bằng xảy ra khi  $x = 3$

Suy ra  $\max_{[-1;3]} P = 4$  tại  $x = 3$  (1)

Mặt khác dựa vào đồ thị của  $f(x)$  ta có  $\max_{[-1;3]} f(x) = 3$  tại  $x = 3$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $\max_{[-1;3]} (f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}) = 7$  tại  $x = 3$

Vậy bất phương trình  $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geq m$  có nghiệm thuộc  $[-1;3]$  khi và chỉ khi

$m \leq \max_{[-1;3]} (f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x}) \Leftrightarrow m \leq 7$ . **Chọn A**

 **Bài tập tự luyện dạng 8**

**Câu 1:** Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình  $x + \sqrt{4-x^2} = \frac{m}{2}$  có nghiệm. Tập S có số phần tử là

- A. 10                      B. 6                      C. 4                      D. 2

**Câu 2:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình  $\sqrt{4x+m-1} = x-1$  có hai nghiệm thực phân biệt ?

- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D. 6

**Câu 3:** Cho phương trình  $\sqrt{2x^2 - 2mx - 4} = x - 1$  (m là tham số). Gọi p, q lần lượt là các giá trị m nguyên nhỏ nhất và giá trị lớn nhất thuộc  $[-10; 10]$  để phương trình có nghiệm. Khi đó giá trị  $T = p + 2q$  là

- A. 10                      B. 19                      C. 20                      D. 8

**Câu 4:** Biết rằng tập hợp tất cả giá trị của tham số m để phương trình  $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$  có nghiệm thực là  $S = [a; b]$ . Tổng  $a + b$  là

- A.  $a + b = \frac{31}{4}$                       B.  $a + b = \frac{49}{4}$                       C.  $a + b = 10$                       D.  $a + b = \frac{5}{2}$

**Câu 5:** Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên m để bất phương trình  $\sqrt{x+5} + \sqrt{4-x} \geq m$  có nghiệm?

- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5

**Câu 6:** Tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình  $6x + \sqrt{(2+x)(8-x)} \leq x^2 + m - 1$  nghiệm đúng với mọi  $x \in [-2; 8]$  là

- A.  $m \geq 16$                       B.  $m \geq 15$                       C.  $m \geq 8$                       D.  $-2 \leq m \leq 16$

**Câu 7:** Có bao nhiêu số nguyên  $m \in (-2018; 2018)$  để bất phương trình  $x^4 + x^2 + 2m - 2 \leq 2x\sqrt{x^2 + 1}$  nghiệm đúng với mọi  $x \in [0; 1]$

- A. 2017                      B. 2018                      C. 2019                      D. 2020

**Câu 8:** Tổng các giá trị nguyên của  $m \in (-20; 20)$  để bất phương trình

$x + 2\sqrt{(2-x)(2x+2)} > m + 4(\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+2})$  có nghiệm là

- A. -195                      B. -175                      C. -165                      D. -162

**Câu 9:** Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m \in (0; 2018)$  để hệ phương trình  $\begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 \leq 0 \\ x^2 - 4x + m \leq 0 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$  có nghiệm

- A. 4                      B. 5                      C. 2014                      D. 2015

**Câu 10:** Cho hệ phương trình  $\begin{cases} x - y + m = 0 \quad (1) \\ \sqrt{xy} + y = 2 \quad (2) \end{cases}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in [0; 2019]$  để hệ phương trình có nghiệm?

- A. 2018                      B. 2019                      C. 2017                      D. 2016

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |      |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| 1-C | 2-B | 3-B | 4-A | 5-D | 6-B | 7-A | 8-D | 9-A | 10-A |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|