

Câu 1: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 1-NH2017-2018) Phát biểu nào sau đây là **sai** ?

A. $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số).

B. $\lim q^n = 0$ ($|q| > 1$).

C. $\lim \frac{1}{n} = 0$.

D. $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ ($k > 1$).

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số (SGK ĐS11-Chương 4) thì $\lim q^n = 0$ ($|q| < 1$).

Câu 2: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 1-NH2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$. Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ là ?

A. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

B. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.

C. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.

D. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số f xác định trên đoạn $[a; b]$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$, đồng thời $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Câu 3: (THPT Nguyễn Khuyến-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Tính giới hạn $\lim \frac{2n+1}{3n+2}$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim \frac{2n+1}{3n+2} = \lim \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{2}{3}$.

Câu 4: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2-năm 2017-2018) Tính giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.

A. $A = -\infty$.

B. $A = 0$.

C. $A = 3$.

D. $A = +\infty$.

Lời giải

Chọn C

$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$.

Câu 5: (THPT Quảng Xương-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018) Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1)$ bằng:

A. $+\infty$.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải.

Chọn B

$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 1) = 3.1^2 - 2.1 + 1 = 2$.

Câu 6: (THPT Chuyên Lam-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018) Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0 ?

A. $u_n = \left(\frac{-2}{3}\right)^n$.

B. $u_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n$.

C. $u_n = \frac{n^3 - 3n}{n + 1}$.

D. $u_n = n^2 - 4n$.

Lời giải:

Chọn A

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^n = 0 \text{ (Vì } \left|\frac{-2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1).$$

Câu 7: (Đề tham khảo BGD năm 2017-2018) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3}$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.

B. 1.

C. 2.

D. -3.

Lời giải

Chọn B

Chia cả tử và mẫu cho x , ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{1} = 1$.

Câu 1: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-MĐ 903 lần 1-năm 2017-2018) Cho $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x - x$. Khi đó $f'(x)$ bằng

- A.** $1 - \sin 2x$. **B.** $-1 + 2 \sin 2x$. **C.** $-1 + \sin x \cdot \cos x$. **D.** $1 + 2 \sin 2x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x - x = -\cos 2x - x \Rightarrow f'(x) = 2 \sin 2x - 1$.

Câu 2: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 1 MĐ 904 năm 2017-2018) Tìm giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1}$.

- A.** $I = 2$. **B.** $I = 0$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 1$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 2.$$

Câu 3: (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018) Tính $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 12x + 35}{25 - 5x}$.

- A.** $-\frac{2}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 12x + 35}{25 - 5x} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-7)(x-5)}{-5(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-7}{-5} = \frac{2}{5}.$$

Câu 4: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

- A.** $\left(\frac{4}{e}\right)^n$. **B.** $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. **C.** $\left(\frac{5}{3}\right)^n$. **D.** $\left(\frac{-5}{3}\right)^n$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

$$\text{Mặt khác } \left|\frac{4}{e}\right| > 1; \left|\frac{5}{3}\right| = \left|\frac{-5}{3}\right| > 1; \left|\frac{1}{3}\right| < 1. \text{ Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0.$$

Câu 5: (THPT Triệu Thị Trinh-lần 1 năm 2017-2018) Tính $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ bằng:

- A.** 3 . **B.** 6 . **C.** $+\infty$. **D.** -3 .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6.$$

Câu 6: (THPT Thạch Thành 2-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018) Phát biểu nào trong các phát biểu sau là sai?

- A.** $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ($|q| > 1$). **B.** $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số).

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k > 1).$

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$

Lời giải:

Chọn A

A sai vì $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ khi $|q| < 1.$

Câu 7: (THPT Thạch Thành 2-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018) Phát biểu nào trong các phát biểu sau là đúng?

A. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm $-x_0.$

B. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trái tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

C. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm phải tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

D. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Lời giải

Chọn D

Đáp án D đúng vì nó là một định lý trong SGK Đại số và Giải tích lớp 11.

Câu 8: (THPT Thạch Thành 2-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b).$ Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên $[a; b]$ là

A. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$ B. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$

C. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$ D. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b).$

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa hàm số liên tục trên đoạn $[a; b].$

Câu 9: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 3 năm 2017-2018) Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}.$

A. $I = -1.$

B. $I = 0.$

C. $I = 1.$

D. $I = 5.$

Lời giải

Chọn A

$$I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = -1.$$

Câu 10: (THPT Hồng Quang-Hải Dương năm 2017-2018) Tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5}}{4x - 1}.$

A. $-\frac{1}{4}.$

B. 1.

C. 0.

D. $\frac{1}{4}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 5}}{4x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}}{4 - \frac{1}{x}} = -\frac{1}{4}.$$

Câu 11: (THPT Lê Hoàn-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018) Giả sử ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ và

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$.

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = a - b$.

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = a + b$.

Lời giải

Chọn C

Vì có thể $b = 0$.

Câu 12: (THPT Quảng Xương 1-Thanh Hóa năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng

K chứa a . Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = a$ nếu

A. $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow a$.

B. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$.

C. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

D. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a$.

Lời giải

Chọn C

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K chứa a . Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = a$ nếu

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Câu 13: (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018) Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{n+1}$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - 1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1$.

Câu 14: (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 7)$ bằng ?

A. 5.

B. 9.

C. 0.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 7) = (-1)^2 - (-1) + 7 = 9$.

Câu 15: (THPT Mộ Đức-Quảng Ngãi-lần 1 năm 2017-2018) Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. 2.

D. -1.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 2.$$

Câu 1: (SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 1 năm 2017-2018) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{6x-2}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

• Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{6x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{6-\frac{2}{x}} = \frac{1}{6}$.

Câu 2: (SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 2 năm 2017-2018) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{4x+3}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{4x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{4+\frac{3}{x}} = \frac{1}{4}$.

Câu 3: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 2 năm 2017-2018) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$.

B. 2.

C. 1.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{n+2}}{2n-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{2-\frac{3}{n}} = \frac{2-0}{2} = 1$.

Câu 4: (THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018) Tính $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{2n^2+3n+1}$.

A. $I = -\infty$.

B. $I = 0$.

C. $I = +\infty$.

D. $I = 1$.

Lời giải

Chọn B

$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{2n^2+3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2\left(\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} = 0$.

Câu 5: (THPT Đức THọ-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2-3x+1)$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. $+\infty$.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 1) = 0$.

Câu 6: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 2 năm 2017-2018) Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x}$ bằng

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \frac{2}{x} \right) = 1 + \frac{2}{2} = 2.$$

Câu 7: (THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) và xét hai số phức

$\alpha = z^2 + (\bar{z})^2$ và $\beta = 2z\bar{z} + i(z - \bar{z})$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. α là số thực, β là số thực.

B. α là số ảo, β là số thực.

C. α là số thực, β là số ảo.

D. α là số ảo, β là số ảo.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\alpha = z^2 + (\bar{z})^2 = (a^2 - b^2 + 2abi) + (a^2 - b^2 - 2abi) = 2(a^2 - b^2)$, do đó α là số thực.

$\beta = 2z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 2(a^2 + b^2) + i(2bi) = 2(a^2 + b^2) - 2b$, do đó β là số thực.

Câu 8: (THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{2n^2+1}$ bằng

A. 0.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}-1}{2+\frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 9: (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018) Tính giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3}$

A. $L = -\infty$.

B. $L = 0$.

C. $L = +\infty$.

D. $L = 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{3-3}{3+3} = 0.$$

Câu 10: (THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh lần 2 năm 2017-2018) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{-x+1}$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. -1.

D. -4.

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x+1}{-x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4+\frac{1}{x}}{-1+\frac{1}{x}} = -4.$$

Câu 11: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-lần 2 năm 2017-2018) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{3n+1}$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. 1.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}-2}{3+\frac{1}{n}} = -\frac{2}{3}.$$

Câu 12: (THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-lần 1 năm 2017-2018) Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2 + 1)$

A. $+\infty$.

B. $-\infty$.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty.$$

Câu 13: (SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018) Tính $L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1}$.

A. $L = -2$.

B. $L = -1$.

C. $L = -\frac{1}{2}$.

D. $L = 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{2+0}{1+0} = 2.$$

Câu 14: (THPT Chuyên ĐH Vinh – lần 1 - năm 2017 – 2018) Hàm số nào trong các hàm số dưới đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. $y = |x|$.

B. $y = \frac{x}{x+1}$.

C. $y = \sin x$.

D. $y = \frac{x}{|x|+1}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Tập xác định của hàm số } y = \frac{x}{x+1} \text{ là } \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Hàm số liên tục trên từng khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ nên hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 15: (THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc – lần 4 - năm 2017 – 2018) Tìm giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n+3}$.

A. $I = -\frac{2}{3}$.

B. $I = 1$.

C. $I = 3$.

D. $k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}} = 3.$

Câu 16: (THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc – lần 4 - năm 2017 – 2018) Tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = -\frac{1}{2}.$

- A. $S = 2.$ B. $S = \frac{3}{2}.$ C. $S = 1.$ **D. $S = \frac{2}{3}.$**

Lời giải

Chọn D

$$S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Câu 17: (SGD Bắc Giang – năm 2017 – 2018) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{2x+5}$ bằng

- A. 0.** B. $+\infty.$ C. $-\infty.$ D. $-\frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn A

Câu 18: (THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang - Lần 3 năm 2017 – 2018) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{3x+2}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}.$ B. $\frac{1}{2}.$ **C. $-\frac{1}{3}.$** D. $-\frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}-1}{3+\frac{2}{x}} = -\frac{1}{3}.$

Câu 19: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x+5}$ bằng

- A. 3. B. -3. C. $-\frac{1}{5}.$ D. 5.

Câu 20: (THPT Chuyên Ngữ – Hà Nội - Lần 1 năm 2017 – 2018) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x+5}$ bằng

- A. 3.** B. -3. C. $-\frac{1}{5}.$ D. 5.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}} = 3.$

Câu 21: (THPT Trần Phú – Hà Tĩnh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{cx^2 + a}{x^2 + b}$ bằng?

- A. a . B. b . **C. c .** D. $\frac{a+b}{c}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{cx^2 + a}{x^2 + b} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c + \frac{a}{x^2}}{1 + \frac{b}{x^2}} = \frac{c+0}{1+0} = c.$$

Câu 22: (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x_0 = -1$.

- A. $y = (x+1)(x^2+2)$. **B. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.** C. $y = \frac{x}{x-1}$. D. $y = \frac{x+1}{x^2+1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = \frac{2x-1}{x+1}$ không xác định tại $x_0 = -1$ nên gián đoạn tại $x_0 = -1$.

Câu 23: (SGD Quảng Nam – năm 2017 – 2018) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{3-x}$ bằng.

- A. -2 .** B. $\frac{2}{3}$. C. 1 . D. 2 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{3-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\frac{3}{x} - 1} = -2.$$

Câu 24: (THPT Chuyên ĐH Vinh – Lần 2 – năm 2017 – 2018) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{(x+2)^2}$ bằng

- A. $-\infty$.** B. $\frac{3}{16}$. C. 0 . D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{(x+2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)^2} \cdot (x+1) = -\infty.$$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -2} (x+1) = -1 < 0.$$

Câu 1: (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2018}{2n+1}$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. 4.

C. 2.

D. 2018.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2018}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2018}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = 2.$$

Câu 2: (THPT Nghèn – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Chọn kết quả đúng của

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 - 3x^3 + x + 1).$$

A. 0.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. -4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 - 3x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(-4 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right) = +\infty.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-4 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right) = -4 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty \end{cases}.$$

Câu 3: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n+3}$ bằng.

A. $-\frac{2}{3}$.

B. 1.

C. 3.

D. -2.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = 3.$$

Câu 4: (SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018) Tính giới hạn $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{2x+1}$.

A. $I = -2$.

B. $I = -\frac{3}{2}$.

C. $I = 2$.

D. $I = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-2}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{3}{2}.$$

Câu 5: (Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định - năm 2017-2018) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2+1}$ bằng.

A. $-\infty$.

B. 1.

C. $+\infty$.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Câu 6: Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{3+x}$.

A. -1.

B. $\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-x}{3+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} - 1}{\frac{3}{x} + 1} = -1.$$

Câu 7: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$ bằng

A. $\frac{5}{4}$.

B. $-\frac{5}{4}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. 2.

Câu 8: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$ bằng

A. $\frac{5}{4}$.

B. $-\frac{5}{4}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{5}{4}.$$

Câu 9: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-1}$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. 2.

D. -2.

Câu 10: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-1}$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. 2.

D. -2.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 2.$$

Câu 11: Tính tổng vô hạn sau: $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$.

- A. $2^n - 1$. B. $\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$. C. 4. D. 2.

Câu 12: Tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2}$.

- A. 1. B. $-\frac{1}{2}$. C. 2. D. $-\infty$.

Câu 13: Tính tổng vô hạn sau: $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$.

- A. $2^n - 1$. B. $\frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$. C. 4. **D. 2.**

Lời giải

Chọn D

Đây là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn, với $u_1 = 1$; $q = \frac{1}{2}$.

$$\text{Khi đó: } S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Câu 14: Tìm $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2}$.

- A. 1. B. $-\frac{1}{2}$. **C. 2.** D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = 2.$$

Câu 15: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+2}{2018x-1}$ bằng:

- A. $\frac{5}{2018}$.** B. -2. C. -5. D. $-\infty$.

Câu 16: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+2}{2018x-1}$ bằng:

- A. $\frac{5}{2018}$.** B. -2. C. -5. D. $-\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+2}{2018x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5+\frac{2}{x}}{2018-\frac{1}{x}} = \frac{5}{2018}.$$

Câu 17: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n-1}$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. -2.

Câu 18: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n-1}$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. -2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 2.$$

Câu 19: Tìm $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-2}{n+1}$.

A. $I = 0$.

B. $I = -2$.

C. $I = 3$.

D. $I = 2$.

Câu 20: Tìm $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-2}{n+1}$.

A. $I = 0$.

B. $I = -2$.

C. $I = 3$.

D. $I = 2$.

Lời giải

Chọn C

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\left(3-\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3-\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 3.$$

Câu 21: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n+1) = -\infty$.

C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2-n}{3n^2} = -\infty$.

D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3}{-2n+1} = \frac{3}{2}$.

Câu 22: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n+1) = -\infty$.

C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2-n}{3n^2} = -\infty$.

D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3}{-2n+1} = \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n\left(-2+\frac{1}{n}\right) = -\infty.$$

Câu 23: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2+1}$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. -2.

Câu 24: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2+1}$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. -2.

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

Câu 25: Tính $M = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{2x+3}$.

A. $M = -\frac{2}{3}$.

B. $M = 0$.

C. $M = +\infty$.

D. $M = \frac{1}{2}$.

Câu 26: Tính $M = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{2x+3}$.

A. $M = -\frac{2}{3}$.

B. $M = 0$.

C. $M = +\infty$.

D. $M = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } M = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 27: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{n-2} = a$

A. $a = 1$.

B. $a = -\frac{1}{2}$

C. $a = 3$.

D. $a = -\frac{3}{2}$.

Câu 28: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{n-2} = a$

A. $a = 1$.

B. $a = -\frac{1}{2}$

C. $a = 3$.

D. $a = -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{n-2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{2}{n}} = 3 \Rightarrow a = 3.$$

Câu 29: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{n^2 - 1}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Câu 30: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{n^2 - 1}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3}{n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = 2.$$

Câu 31: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Số phức liên hợp của z có mô đun bằng mô đun của iz .

B. Mô đun của z là một số thực dương.

C. $z^2 = |z|^2$.

D. Điểm $M(-a; b)$ là điểm biểu diễn của $\bar{z}$.

Câu 32: Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) tùy ý. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Số phức liên hợp của z có mô đun bằng mô đun của iz .

B. Mô đun của z là một số thực dương.

C. $z^2 = |z|^2$.

D. Điểm $M(-a; b)$ là điểm biểu diễn của $\bar{z}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$|iz| = |ai - b| = |a - bi| = |\bar{z}|. \text{ Do đó số phức liên hợp của } z \text{ có mô đun bằng mô đun của } iz.$$

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0, \forall z. \text{ Do đó mô đun của } z \text{ là một số thực dương là sai.}$$

$$z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi \neq |z|^2. \text{ Do đó } z^2 = |z|^2 \text{ là sai.}$$

Điểm biểu diễn của $\bar{z}$ là $M(a; -b)$. Do đó điểm $M(-a; b)$ là điểm biểu diễn của $\bar{z}$ là sai.

Câu 33: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n}{1 - 3n^2}$ bằng

A. 1.

B. 0.

C. $-\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 34: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - n}{1 - 3n^2}$ bằng

A. 1.

B. 0.

C. $-\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{1-3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} - 3} = 0.$$

Câu 35: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 + 2018)$ bằng

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. 1.

D. 0.

Câu 36: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 + 2018)$ bằng

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 + 2018) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2018}{x^3} \right) = -\infty$$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2018}{x^3} \right) = 1 > 0.$$

Câu 37: Cho $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + 2] = 1$. Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$.

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3$.

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$.

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

Câu 38: Cho $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + 2] = 1$. Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$.

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3$.

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1$.

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + 2] = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 - 2 = -1.$$

Câu 39: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^3 + 2}$.

A. $-\infty$.

B. 0.

C. $+\infty$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 40: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^3 + 2}$.

A. $-\infty$.

B. 0.

C. $+\infty$.

D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^3 + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{2(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{2(x^2 - x + 1)} = 0.$$

Câu 1: (THTT Số 1-484 tháng 10 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tìm giá trị

của a để hàm số liên tục tại $x_0 = 0$.

- A.** $a = 1$. **B.** $a = \frac{1}{2}$. **C.** $a = -1$. **D.** $a = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}-1}{ax} \cdot a = a.$$

$$f(0) = \frac{1}{2}; \text{ hàm số liên tục tại } x_0 = 0 \text{ khi và chỉ khi: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Câu 2: (THTT Số 1-484 tháng 10 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định

nào dưới đây là **sai**?

- A.** Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.
B. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.
C. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ và hàm số $f(x)$ cũng có đạo hàm tại $x = 1$.
D. Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3-x^2}{2} = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1. \text{ Do đó, hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } x = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x^2}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1+x}{-2} = -1 \text{ và}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x} = -1. \text{ Do đó, hàm số } f(x) \text{ có đạo hàm tại } x = 1.$$

Câu 3: (THPT Chuyên Bắc Ninh-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

- A.** $m \neq 2$. **B.** $m \neq 1$. **C.** $m \neq 2$. **D.** $m \neq 3$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

$$\text{Hàm số gián đoạn tại } x = 1 \text{ khi } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} \neq 3m$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} \neq 3m \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) \neq 3m \Leftrightarrow 3 \neq 3m \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Câu 4: (THPT Chuyên Bắc Ninh-lần 1-năm 2017-2018) Cho $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{3x+1}-1)}{x}$ và

$$J = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x+1}. \text{ Tính } I - J.$$

A. 6.

B. 3.

C. -6.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{3x+1}-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{x(\sqrt{3x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{\sqrt{3x+1}+1} = 3.$$

$$J = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-2) = -3.$$

Khi đó $I - J = 6$.

Câu 5: (THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc-năm 2017-2018) Tính giới hạn

$$\lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right].$$

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Vậy } \lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Câu 6: (THPT Sơn Tây-Hà Nội-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x+a-1 & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}.$

Tìm tất cả giá trị của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $a = 1$.

B. $a = 3$.

C. $a = 2$.

D. $a = 4$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + a - 1) = a - 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+2x}+1} = 1.$$

$$f(0) = a - 1.$$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ Hàm số liên tục tại điểm $x = 0 \Leftrightarrow a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 2$.

Câu 7: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Chọn kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}$.

A. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}+3\right)}{|x|\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}+3}{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 8: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-đề 2-năm 2017-2018) Chọn kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}$.

A. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}+3\right)}{|x|\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}+3}{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 9: (THPT Nguyễn Khuyến-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m^2+3m & \text{khi } x = 2 \end{cases}. \text{ Tìm } m \text{ để hàm số liên tục tại } x_0 = 2.$$

A. $m = 0$ hoặc $m = 1$.

B. $m = 1$ hoặc $m = -4$.

C. $m = -4$ hoặc $m = -1$.

D. $m = 0$ hoặc $m = -4$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4.$$

Hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$\Leftrightarrow 4 = m^2 + 3m \Leftrightarrow m^2 + 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}.$$

Câu 10: (THPT Nguyễn Khuyến-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Tìm $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

A. -1 .

B. $\frac{2}{3}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{\sqrt{1+3}+2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Câu 11: (THPT Hai Bà Trưng-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-\sqrt{x+2}}{x^2-4} & \text{khi } x > 2 \\ x^2+ax+3b & \text{khi } x < 2 \text{ liên tục tại } x=2. \text{ Tính } I=a+b? \\ 2a+b-6 & \text{khi } x=2 \end{cases}$$

A. $I = \frac{19}{30}$.

B. $I = -\frac{93}{16}$.

C. $I = \frac{19}{32}$.

D. $I = -\frac{173}{16}$.

Lời giải

Chọn C

Để hàm $f(x)$ liên tục tại $x=2$ cần có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x-\sqrt{x+2}}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-x-2}{(x+2)(x-2)(x+\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{(x+2)(x+\sqrt{x+2})} = \frac{3}{16}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2+ax+3b) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2+ax+3b) = 2a+3b+4$$

$$f(2) = 2a+b-6$$

$$\text{Suy ra ta được hệ phương trình: } \begin{cases} 2a+b-6 = \frac{3}{16} \\ 2a+3b+4 = \frac{3}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{179}{32} \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow a+b = \frac{19}{32}.$$

Câu 12: (THPT Việt Trì-Phú Thọ-lần 1-năm 2017-2018) Tìm a để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi } x > 4 \\ \frac{(a+2)x}{4} & \text{khi } x \leq 4 \end{cases} \text{ liên tục trên tập xác định.}$$

A. $a = 3$.

B. $a = \frac{5}{2}$.

C. $a = 2$.

D. $a = -\frac{11}{6}$.

Lời giải

Chọn D

* TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

NX: Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 4)$ và $(4; +\infty)$

Do đó, để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ ta cần tìm a để hàm số liên tục tại $x=4$

$$\text{ĐK: } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5})(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5})}{(x-4)(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5})} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+5}} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(a+2)x}{4} = a+2 = f(4)$$

$$\text{Cần có: } a+2 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow a = -\frac{11}{6}.$$

Câu 13: (THPT Việt Trì-Phú Thọ-lần 1-năm 2017-2018) Giá trị giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x} - \sqrt{4x^2+1}}{2x+3}$ bằng:

A. $-\frac{1}{2}$.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x} - \sqrt{4x^2+1}}{2x+3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}} - |x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}} + x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2+\frac{3}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x}} + \sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{-\sqrt{1-0} + \sqrt{4+0}}{2+0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Câu 14: (THPT Thạch Thành-Thanh Hóa-năm 2017-2018) Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?

A. $\frac{1}{n}$.

B. $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

C. $\frac{n+1}{n}$.

D. $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1.$$

Câu 15: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2-năm 2017-2018) Cho bốn hàm số $f_1(x) = \sqrt{x-1}$; $f_2(x) = x$;

$$f_3(x) = \tan x; \quad f_4(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}. \text{ Hỏi trong bốn hàm số trên có bao nhiêu hàm số}$$

liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

+ Hàm số $f_1(x) = \sqrt{x-1}$ và $f_3(x) = \tan x$ không có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên hàm số không liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Hàm số $f_2(x) = x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

+ Hàm số $f_4(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$. Ta cần xét tính liên tục của hàm số $y = f_4(x)$ tại $x = 1$.

Ta có $f_4(1) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f_4(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 = f_4(1)$ nên hàm số liên tục tại $x = 1$. Do đó, hàm số $y = f_4(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Vậy trong bốn hàm số trên có 2 hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 16: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2-năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+m & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+4x}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$.

Tìm tất cả các giá trị của m để tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

A. $m = 2$.

B. $m = -1$.

C. $m = 3$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+m) = m$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+4x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4}{\sqrt{1+4x}+1} = 2$$

Tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 17: (THPT Quảng Xương-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018) Tìm tất cả các giá trị của tham số m

để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ mx-4 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $m = 1$.

B. Không tồn tại m .

C. $m = 3$.

D. $m = -2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(2) = 2m - 4$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} (mx - 4) = 2m - 4$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2$.

Để hàm số liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2m - 4 = 2 \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 18: (THPT Quảng Xương-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018) Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a\sqrt{x^2+1}+2017}{x+2018} = \frac{1}{2}$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+bx+1} - x) = 2$. Tính $P = 4a + b$.

A. $P = 3$.

B. $P = -1$.

C. $P = 2$.

D. $P = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a\sqrt{x^2+1}+2017}{x+2018} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(-a\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{2017}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2018}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-a\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{2017}{x}}{1+\frac{2018}{x}} = -a.$$

$$\text{Nên } -a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+bx+1}-x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+bx+1}-x)(\sqrt{x^2+bx+1}+x)}{\sqrt{x^2+bx+1}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx+1}{x\left(\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(b+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Nên } \frac{b}{2} = 2 \Leftrightarrow b = 4.$$

$$\text{Vậy } P = 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 2.$$

Câu 19: (THPT Bình Xuyên-Vĩnh Phúc-năm 2017-2018) Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục

tại điểm $x_0 = 1$ thì a bằng?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. -1.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2; \quad f(1) = a.$$

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow a = 2$.

Câu 20: (THPT Bình Xuyên-Vĩnh Phúc-năm 2017-2018) Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2+3}$ có kết quả là:

A. 2.

B. 0.

C. $+\infty$.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n^3}}}{2+\frac{3}{n^2}} = \frac{0}{2+0} = 0.$$

Câu 21: (THPT Ngô Sĩ Liên-Bắc Giang-lần 1-năm 2017-2018) Giá trị của $I = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x+\sqrt{2}}{x^2-2}$ bằng

A. 2.

B. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

C. 1.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$I = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x + \sqrt{2}}{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{1}{x - \sqrt{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}.$$

Câu 22: (THPT Tam Phước-Đồng Nai-lần 1-năm 2017-2018) Cho đường cong $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là:

A. $y = 8x + 1$.

B. $y = 3x - 1$.

C. $y = 3x + 1$.

D. $y = -8x + 1$.

Lời giải

Chọn C

Tọa độ giao điểm là $M(0;1) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$ nên phương trình tiếp tuyến là:

$$(\Delta): y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow (\Delta): y = 3x + 1$$

Câu 23: (THPT Chuyên Lam-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ ax + \frac{5}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases}. \text{Xác định } a \text{ để hàm số liên tục trên } \mathbb{R}.$$

A. $a = -\frac{5}{2}$.

B. $a = \frac{5}{2}$.

C. $a = \frac{15}{2}$.

D. $a = -\frac{15}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Với $x \neq 1$, ta có $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x - 1}$ liên tục trên tập xác định.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 3x - 3)(x - 1)}{x - 1} = -5.$$

$$f(1) = a + \frac{5}{2}.$$

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x = 1$. Điều này xảy ra khi

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + \frac{5}{2} = -5 \Leftrightarrow a = -\frac{15}{2}.$$

Câu 24: (THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018) Xác định $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2}$.

A. 0.

B. $-\infty$.

C. Không tồn tại.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty.$$

$$\text{Vậy không tồn tại } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2}.$$

Câu 25: (THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018) Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho

$$\text{hàm số } f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - m & \text{khi } x \geq 0 \\ mx + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \text{ liên tục trên } \mathbb{R}.$$

A. $m = 2$.

B. $m = \pm 2$.

C. $m = -2$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn C

Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $f(x) = 2\sqrt{x} - m$ là hàm số liên tục.

Trên khoảng $(-\infty; 0)$ hàm số $f(x) = mx + 2$ là hàm số liên tục.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\sqrt{x} - m) = -m = f(0) \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (mx + 2) = 2.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -m = 2 \Leftrightarrow m = -2.$$

Câu 26: (SGD Vĩnh Phúc-KSCL lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{8} & \text{khi } x = 1 \end{cases}. \text{ Tính } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$

A. $\frac{1}{8}$.

B. $+\infty$.

C. 0 .

D. $-\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4 - x - 3}{(x-1)(x+1)(2 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{(x+1)(2 + \sqrt{x+3})} = +\infty.$$

Câu 27: (THPT Lê Văn Thịnh-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ x + m & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên

tục tại điểm $x_0 = 1$ khi m nhận giá trị

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. m bất kỳ.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 0; f(1) = 0; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + m) = m + 1$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 1: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-MĐ 903 lần 1-năm 2017-2018) Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{1+n}$ được kết quả là

- A.** 2. **B.** 0. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{1+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{1}{n}+1\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{2+0}{0+1} = 2.$$

Câu 2: (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi } x \neq 4 \\ a+2 & \text{khi } x = 4 \end{cases}. \text{ Tìm tất cả giá trị thực của tham số } a \text{ để hàm số liên}$$

tục tại $x_0 = 4$.

- A.** $a = \frac{5}{2}$. **B.** $a = 2$. **C.** $a = -\frac{11}{6}$. **D.** $a = 3$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số liên tục tại $x = 4$ khi $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

Ta có $f(4) = a + 2$;

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1-x-5}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}} = \frac{1}{6}$$

$$\text{Suy ra } f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \Leftrightarrow a + 2 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow a = -\frac{11}{6}.$$

Câu 3: (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018) Giới hạn nào dưới đây có kết quả là $\frac{1}{2}$?

- A.** $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2}(\sqrt{x^2+1}-x)$. **B.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}+x)$.
C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2}(\sqrt{x^2+1}+x)$. **D.** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Xét: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 4: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Tính $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2x^2 - 6}{x - \sqrt{3}} = a\sqrt{b}$ (a, b nguyên). Khi đó giá trị của $P = a + b$ bằng

- A.** 7. **B.** 10. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2x^2 - 6}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2(x^2 - 3)}{x - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} 2(x + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3}.$$

Suy ra $a = 4, b = 3$. Vậy $P = a + b = 7$.

Câu 5: (THPT Triệu Thị Trinh-lần 1 năm 2017-2018) Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{khi } x \leq -1 \\ 4x + a & \text{khi } x > -1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = -1$ thì giá trị của a là

- A.** 4. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -4.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-1) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x^2 + 3x + 2) = 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (4x + a) = a - 4.$$

Hàm số đã cho liên tục tại $x = -1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1)$

$$\Leftrightarrow a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4.$$

Câu 6: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 3 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = \begin{cases} 3x + 1 & \text{khi } x \geq -1 \\ x + m & \text{khi } x < -1 \end{cases}$, m là

tham số. Tìm m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A.** $m = 5$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = -3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x = -1$.

$$\text{Có } y(-1) = -2 = \lim_{x \rightarrow -1^+} y \text{ và } \lim_{x \rightarrow -1^-} y = -1 + m.$$

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $y(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} y \Leftrightarrow -2 = -1 + m \Leftrightarrow m = -1$.

Câu 7: (SGD Bắc Ninh năm 2017-2018) Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{khi } x > 4 \\ mx + 1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục tại

điểm $x = 4$.

- A.** $m = -8$. **B.** $m = 8$. **C.** $m = -\frac{7}{4}$. **D.** $m = \frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x + 4) = 8.$$

$$\text{Và: } \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (mx + 1) = 4m + 1 = f(4).$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 4$ nếu $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$.

$$\Rightarrow 4m + 1 = 8 \Leftrightarrow m = \frac{7}{4}.$$

Câu 8: (SGD Bắc Ninh năm 2017-2018) Tính giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 2017}{3n + 2018}$.

A. $I = \frac{2}{3}$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = \frac{2017}{2018}$.

D. $I = 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 2017}{3n + 2018} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2017}{n}}{3 + \frac{2018}{n}} = \frac{2}{3}.$$

Câu 9: (SGD Ninh Bình năm 2017-2018) Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào có giá trị khác với các giới hạn còn lại?

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 1}{3n + 1}$.

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{2n - 1}$.

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 1}{3n - 1}$.

D. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{n - 1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 1}{3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{3} = 1 \text{ vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{2n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{2}{2} = 1 \text{ vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 1}{3n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{4}{3} \text{ vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 1 \text{ vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Câu 10: (THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x + 2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x + 2} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Câu 11: (THPT Chuyên Hạ Long-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Tìm tất cả các giá trị thực của

$$m \text{ để hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m^2 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ liên tục tại } x = 2.$$

A. $m = \sqrt{3}$.

B. $m = 1$.

C. $m = \pm\sqrt{3}$.

D. $m = \pm 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = m^2 \Leftrightarrow 3 = m^2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}.$$

Câu 12: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An- lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + mx & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}. \text{ Tìm } m \text{ để hàm số đã cho liên tục tại } x = 1.$$

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{-3}{4}$.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Nhận xét: } f(1) = 1 + m.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + mx) = 1 + m.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Để hàm số đã cho liên tục tại } x = 1 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-3}{4}.$$

Câu 13: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An- lần 1 năm 2017-2018) Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{3n+1}$.

A. -5.

B. 7.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 2}{3 + \frac{1}{n}} = -\frac{2}{3}.$$

Câu 14: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc - lần 3 năm 2017-2018) Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^5 - 2n^3 + 1}{4n^5 + 2n^2 + 1}$.

A. 2.

B. 8.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^5 - 2n^3 + 1}{4n^5 + 2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(8 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^5} \right)}{n^5 \left(4 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^5} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^5}}{4 + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^5}} = \frac{8}{4} = 2.$$

Câu 15: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 3 MĐ 234 năm học 2017-2018) Tìm $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 2n^3 + 1}{3n^3 + 2n^2 + 1}$.

A. $\frac{7}{3}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. 0.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 2n^3 + 1}{3n^3 + 2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{n} - 2 + \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}} = -\frac{2}{3}.$$

Câu 16: (THPT Hoài Ân-Hải Phòng năm 2017-2018) Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0;1)$

A. $2x^2 - 3x + 4 = 0$.

B. $(x-1)^5 - x^7 - 2 = 0$.

C. $3x^4 - 4x^2 + 5 = 0$.

D. $3x^{2017} - 8x + 4 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = 3x^{2017} - 8x + 4$.

Hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0).f(1) = 4.(-1) = -4 \Rightarrow f(0).f(1) < 0$.

Vậy phương trình $3x^{2017} - 8x + 4 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0;1)$.

Câu 17: (THPT Hoài Ân-Hải Phòng năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2m + 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m

để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = \frac{13}{2}$.

C. $m = \frac{11}{2}$.

D. $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$f(2) = 2m + 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) = 12.$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x_0 = 2 \Leftrightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Leftrightarrow 2m + 1 = 12 \Leftrightarrow m = \frac{11}{2}.$$

Câu 18: (THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018) Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ bằng

A. 0.

B. 4.

C. -4.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

Câu 19: (THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018) Cho dãy số $u_1 = 1; u_n = u_{n-1} + 2$, $(n \in \mathbb{N}, n > 1)$. Kết quả nào đúng ?

A. $u_5 = 9$.

B. $u_3 = 4$.

C. $u_2 = 2$.

D. $u_6 = 13$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_n = u_{n-1} + 2 \Rightarrow u_n - u_{n-1} = 2$ nên dãy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 2$.

Nên theo công thức tổng quát của CSC $u_n = u_1 + (n - 1)d$.

Do đó: $u_2 = u_1 + d = 1 + 2 = 3$; $u_3 = u_1 + 2d = 1 + 2.2 = 5$; $u_5 = u_1 + 4d = 1 + 4.2 = 9$;

$u_6 = u_1 + 5d = 1 + 5.2 = 11$.

Vậy $u_5 = 9$.

Câu 20: (THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018) Cho hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 2} & \text{khi } x < 2 \\ a + \frac{1 - x}{2 + x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}. \text{Biết } a \text{ là giá trị để hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } x_0 = 2, \text{ tìm}$$

số nghiệm nguyên của bất phương trình $-x^2 + ax + \frac{7}{4} > 0$.

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Tại $x_0 = 2$, ta có:

$$\bigcirc f(2) = a - \frac{1}{4}$$

$$\bigcirc \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(a + \frac{1 - x}{2 + x} \right) = a - \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \bigcirc \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(2x - 3)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(2x - 3)}{x - 2} = - \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - 3) = -1. \end{aligned}$$

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ thì $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

$$\Leftrightarrow a - \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}.$$

Với $a = -\frac{3}{4}$, xét bất phương trình $-x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{4} > 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{4} < x < 1$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên.

Câu 21: (THPT Lê Hoàn-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a; b]$.

Tìm mệnh đề đúng.

A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

B. Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

C. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, tăng trên $[a; b]$ và $f(a)f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

D. Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$ thì hàm số $f(x)$ phải liên tục trên $(a; b)$.

Lời giải

Chọn C

Vì $f(a)f(b) > 0$ nên $f(a)$ và $f(b)$ cùng dương hoặc cùng âm. Mà $f(x)$ liên tục, tăng trên $[a; b]$ nên đồ thị hàm $f(x)$ nằm trên hoặc nằm dưới trục hoành trên $[a; b]$ hay phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

Câu 22: (THPT Lê Hoàn-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018) Số nào trong các số sau là bằng

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + x} - 2\sqrt{3}}{x - 3} ?$$

A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

B. $-\frac{\sqrt{3}}{12}$.

C. $\frac{7\sqrt{3}}{12}$.

D. $-\frac{7\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + x} - 2\sqrt{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{(x - 3)(\sqrt{x^2 + x} + 2\sqrt{3})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 4)}{(x - 3)(\sqrt{x^2 + x} + 2\sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + x} + 2\sqrt{3}} = \frac{3 + 4}{\sqrt{3^2 + 3} + 2\sqrt{3}} = \frac{7}{4\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{12}.$$

Câu 23: (THPT Ninh Giang-Hải Dương năm 2017-2018) Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2}{n^3 + 2n + 7}$ có giá trị bằng ?

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. 0.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có kết quả quen thuộc } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\text{Do đó } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2}{n^3 + 2n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3 + 2n + 7)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6\left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{7}{n^3}\right)} = \frac{1 \cdot 2}{6} = \frac{1}{3}.$$

(THPT Phan Đăng Lưu-Huế-lần 1 năm 2017-2018) Tính

Câu 24: Giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{2-x}-1}$.

A. $L = -6$.

B. $L = -4$.

C. $L = 2$.

D. $L = -2$.

Lời giải.

Chọn C

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{-x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{2-x}+1) = 2.$$

Câu 25: (THPT Phan Đăng Lưu-Huế-lần 1 năm 2017-2018) Cho bốn hàm số $f_1(x) = 2x^3 - 3x + 1$,

$f_2(x) = \frac{3x+1}{x-2}$, $f_3(x) = \cos x + 3$ và $f_4(x) = \log_3 x$. Hỏi có bao nhiêu hàm số liên tục trên tập $\mathbb{R}$?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

* Ta có hai hàm số $f_2(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ và $f_4(x) = \log_3 x$ có tập xác định không phải là tập $\mathbb{R}$ nên không thỏa yêu cầu.

* Cả hai hàm số $f_1(x) = 2x^3 - 3x + 1$ và $f_3(x) = \cos x + 3$ đều có tập xác định là $\mathbb{R}$ đồng thời liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 26: (THPT Phan Đăng Lưu-Huế-lần 1 năm 2017-2018) Hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ x + m & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục

tại điểm $x_0 = 1$ khi m nhận giá trị

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = -1$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + m) = 1 + m$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$. Để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$ thì $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Leftrightarrow 2 = m + 1 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 27: (THPT Thanh Miện 1-Hải Dương-lần 1 năm 2017-2018) Cho các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$;

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3$, hỏi $\lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)]$ bằng

A. 5.

B. 2.

C. -6.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} 3f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} 4g(x) = 3 \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - 4 \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -6$.

Câu 28: (THPT Tú Kỳ-Hải Dương năm 2017-2018) Hàm số $f(x) = \begin{cases} ax+b+1, & \text{khi } x > 0 \\ a \cos x + b \sin x, & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

- A.** $a-b=1$. **B.** $a-b=-1$. **C.** $a+b=1$ **D.** $a+b=1$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Khi $x < 0$ thì $f(x) = a \cos x + b \sin x$ liên tục với $x < 0$.

Khi $x > 0$ thì $f(x) = ax + b + 1$ liên tục với mọi $x > 0$.

Tại $x = 0$ ta có $f(0) = a$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b + 1) = b + 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a \cos x + b \sin x) = a.$$

Để hàm số liên tục tại $x = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow a = b + 1 \Leftrightarrow a - b = 1$.

Câu 29: (THPT Tú Kỳ-Hải Dương năm 2017-2018) Biết $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)^4}$ bằng:

- A.** $-\infty$. **B.** 4 . **C.** $+\infty$. **D.** 0 .

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4 > 0$.

$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^4 = 0$ và với $\forall x \neq -1$ thì $(x+1)^4 > 0$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)^4} = +\infty$.

Câu 30: (THPT Xuân Trường-Nam Định năm 2017-2018) Cho số thực a thỏa mãn

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018} = \frac{1}{2}$. Khi đó giá trị của a là

- A.** $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a = \frac{1}{2}$. **D.** $a = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2x^2+3}+2017}{2x+2018} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}+\frac{2017}{x}}{2+\frac{2018}{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 31: (THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018) Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$.

- A. $L = 1$. B. $L = -1$. C. $L = 0$. D. $L = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt: $t = x - \frac{\pi}{2}$.

Khi $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ thì $t \rightarrow 0$. Vậy $L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} = -1$.

Câu 32: (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018) Giá trị của tham số a để hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a+2x & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ liên tục tại } x = 2.$$

- A. $\frac{1}{4}$. B. 1. C. $-\frac{15}{4}$. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}$.

Hàm số liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow a+4 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{15}{4}$.

Câu 33: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018) Tính giới hạn $K = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x}$.

- A.** $K = -\frac{2}{3}$. B. $K = \frac{2}{3}$. C. $K = \frac{4}{3}$. D. $K = 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $K = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(x-3)(\sqrt{4x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{(x-3)(\sqrt{4x+1}+1)} = -\frac{2}{3}$.

Câu 34: (THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018) Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3+2x}{x+2}$.

- A. $-\infty$. B. 2. **C.** $+\infty$. D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3+2x}{x+2}$ thấy: $\lim_{x \rightarrow -2^-} (3+2x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+2) = 0$ và $x+2 < 0$ với mọi $x < -2$ nên

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3+2x}{x+2} = +\infty.$$

Câu 35: (THPT Trần Nhân Tông-Quảng Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**

A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = \frac{-3}{2}.$

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = +\infty.$

C. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty.$

D. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

+ Với đáp án A ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1 - x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-3}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x \left(3 - \frac{3}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right)} \right) = \frac{-3}{2} \Rightarrow \text{A đúng.}$$

+ Với đáp án B ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1 - x^2 + 4x - 4}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-3}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x \left(3 - \frac{3}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{2}{x} \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{0} \right) = +\infty \Rightarrow \text{B đúng.}$$

+ Với đáp án C ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0$, $x+1 < 0$ với mọi $x < -1$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} (3x+2) = -1 < 0$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+2}{x+1} = +\infty \Rightarrow \text{C sai.}$

+ Với đáp án D ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0$, $x+1 > 0$ với mọi $x > -1$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} (3x+2) = -1 < 0$.

Vậy $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+2}{x+1} = -\infty \Rightarrow \text{D đúng.}$

Câu 36: (THTT số 5-488 tháng 2 năm 2018) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$u_n = \sqrt{n+2018} - \sqrt{n+2017}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \text{ Khẳng định nào sau đây sai?}$$

A. Dãy số (u_n) là dãy tăng.

B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$

C. $0 < u_n < \frac{1}{2\sqrt{2018}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

D. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_n = \sqrt{n+2018} - \sqrt{n+2017} = \frac{1}{\sqrt{n+2018} + \sqrt{n+2017}}.$

Suy ra: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+2018} + \sqrt{n+2017}}{\sqrt{n+2019} + \sqrt{n+2018}} < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*.$

Do đó, dãy số (u_n) giảm.

Vậy Chọn A

Chú ý:

$$+ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2018} + \sqrt{n+2017}} = 0.$$

$$+ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+2018} + \sqrt{n+2017}}{\sqrt{n+2019} + \sqrt{n+2018}} = 1.$$

$$+ 0 < u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2018} + \sqrt{n+2017}} < \frac{1}{2\sqrt{n+2017}} \leq \frac{1}{2\sqrt{2018}}.$$

Câu 37: (THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên-lần 1 năm 2017-2018) Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$

B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty.$

C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty.$

D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ do $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ và $x > 0$. Vậy đáp án A đúng.

Suy ra đáp án B sai.

Các đáp án C và D đúng. Giải thích tương tự đáp án **A**.

Câu 1: (THPT Lê Quý Đôn-Hà Nội năm 2017-2018) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 2} - x)$

A. -4.

B. -2.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 2} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 2} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x + 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = -2. \end{aligned}$$

Câu 2: (THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Tìm m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} & \text{khi } x > -1 \\ mx + 2 & \text{khi } x \leq -1 \end{cases} \text{ liên tục tại điểm } x = -1.$$

A. $m = 2$.

B. $m = 0$.

C. $m = -4$.

D. $m = 4$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x+1)(x+3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x+3) = 2.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (mx + 2) = -m + 2.$$

$$\bullet f(-1) = -m + 2.$$

Để hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = -1$ thì

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow 2 = -m + 2 \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 3: (THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018) Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{1-3x}$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $-\frac{2}{3}$.

C. $-\frac{3}{2}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{1-3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{\frac{1}{x} - 3} = -\frac{2}{3}.$$

Câu 4: (THPT Lê Quý Đôn-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018) Tính $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 1} \right) \right]$.

A. $I = +\infty$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = 1,499$.

D. $I = 0$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } I = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 - 1} \right) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 - 1}}$$

Câu 5: (THPT Lê Quý Đôn-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 5x^2 - 9\sqrt{2}x - 2017)$

bằng

A. $-\infty$.

B. 3.

C. -3.

D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 5x^2 - 9\sqrt{2}x - 2017) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(3 + 5\frac{1}{x} - 9\sqrt{2}\frac{1}{x^2} - 2017\frac{1}{x^3} \right) = -\infty.$$

Câu 6: (THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 3x + a - 1 & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}. \text{ Tìm tất cả giá trị của } a \text{ để hàm số đã cho liên tục tại điểm}$$

$x = 0$.

A. $a = 1$.

B. $a = 3$.

C. $a = 2$.

D. $a = 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + a - 1) = a - 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x(\sqrt{1+2x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+2x}+1} = 1.$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x = 0 \Leftrightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 2.$$

Câu 7: (THPT Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$.

A. Không tồn tại.

B. -1.

C. ± 1 .

D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}.$$

Xét:

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1.$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1.$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} \text{ nên không tồn tại } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}.$$

Câu 8: (SGD Hà Nội-lần 11 năm 2017-2018) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ bằng

A. $\frac{1}{4}$.

B. $+\infty$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}.$$

Câu 9: (THPT Nguyễn Trãi-Đà Nẵng-lần 1 năm 2017-2018) Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1}$

A. $+\infty$.

B. 2.

C. $-\infty$.

D. -2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1} = +\infty \text{ vì } \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x-3) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0, x-1 > 0 \text{ khi } x \rightarrow 1^+.$$

Câu 10: (THPT Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-lần 1 năm 2017-2018) Tính giới hạn

$$T = \lim \left(\sqrt{16^{n+1} + 4^n} - \sqrt{16^{n+1} + 3^n} \right).$$

A. $T = 0$.

B. $T = \frac{1}{4}$.

C. $T = \frac{1}{8}$.

D. $T = \frac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T &= \lim \left(\sqrt{16^{n+1} + 4^n} - \sqrt{16^{n+1} + 3^n} \right) = \lim \frac{4^n - 3^n}{\sqrt{16^{n+1} + 4^n} + \sqrt{16^{n+1} + 3^n}} \\ &= \lim \frac{4^n - 3^n}{\sqrt{16 \cdot 16^n + 4^n} + \sqrt{16 \cdot 16^n + 3^n}} = \lim \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\sqrt{16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n} + \sqrt{16 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}} = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Câu 11: (PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018) Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2ax - 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ liên tục trên } \mathbb{R}. \text{ Tính } a - b.$$

A. 0.

B. -1.

C. -5.

D. 7.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f(1) = 2a - 1.$$

$$\text{Để hàm số liên tục trên } \mathbb{R} \text{ thì phải tồn tại } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} \text{ và } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1).$$

$$\text{Để tồn tại } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} \text{ thì } (x^2 + ax + b) : (x-1) \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow b = -a - 1.$$

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+a+1) = a+2.$$

$$\text{Do đó để hàm số liên tục trên } \mathbb{R} \text{ thì } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\Leftrightarrow 2a - 1 = a + 2 \Leftrightarrow a = 3. \text{ Suy ra } b = -4.$$

$$\text{Vậy } a - b = 7.$$

Câu 12: (THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc – lần 4 - năm 2017 – 2018) Tìm giới hạn

$$I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x \right).$$

A. $I = -2$.

B. $I = -4$.

C. $I = 1$.

D. $I = -1$.

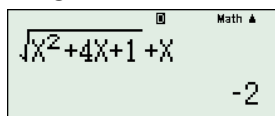
Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} = \frac{4}{-2} = -2.$$

Cách 2: Sử dụng máy tính cầm tay tính giá trị biểu thức $\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x$ tại $x = -10^{10}$:



Vậy $I = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 1} + x \right) = -2$.

Câu 13: (THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc – lần 4 - năm 2017 – 2018) Tìm P để hàm số

$$y = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ 6Px - 3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \text{ liên tục trên } \mathbb{R}.$$

A. $P = \frac{5}{6}$.

B. $P = \frac{1}{2}$.

C. $P = \frac{1}{6}$.

D. $P = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow y = f(x)$ liên tục tại $x = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 3) = -2$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (6Px - 3) = 6P - 3$

- $f(1) = 6P - 3$

Do đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 6P - 3 = -2 \Leftrightarrow P = \frac{1}{6}$.

Câu 14: (THPT Hồng Bàng – Hải Phòng – năm 2017 – 2018) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 4x}{5x + 2}$ bằng

A. $\frac{5}{4}$.

B. $-\frac{5}{4}$.

C. $-\frac{4}{5}$.

D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-4x}{5x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\frac{3}{x} - 4 \right)}{x \left(5 + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{3}{x} - 4 \right)}{\left(5 + \frac{2}{x} \right)} = \frac{-4}{5}.$$

Câu 15: (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3})$ bằng

- A.** 0. **B.** 2. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x-3}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}} = 0.$$

Câu 16: (Chuyên ĐB Sông Hồng – Lần 1 năm 2017 – 2018) Tính giới

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 3}}{3x + 2}.$$

- A.** $-\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+3}}{3x+2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{3x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{3+\frac{2}{x}} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Câu 17: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc – Vĩnh Phúc - Lần 4 năm 2017 – 2018) Cho hàm số

$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - m & \text{khi } x \geq 0 \\ mx + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của m để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A.** $m = 1$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = -2$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} - m) = -m; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (mx + 1) = 1; \quad f(0) = -m.$$

$$f(x) \text{ liên tục tại } x=0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -m = 1 \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 18: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018) Tính $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$.

- A.** $L = -5$. **B.** $L = 0$. **C.** $L = -3$. **D.** $L = 5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+4) = 5.$

Câu 19: (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Kết quả của $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{3n+1}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $-\frac{1}{3}$.

C. -2 .

D. 1 .

Lời giải.

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{n \left(3 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{3}.$$

Câu 20: (THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An – Lần 2 năm 2017 – 2018) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x}}{x+1}$ bằng

A. -2 .

B. 2 .

C. 0 .

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = 2.$$

Câu 21: (ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018) Nếu hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x < -5 \\ x + 17 & \text{khi } -5 \leq x \leq 10 \\ ax + b + 10 & \text{khi } x > 10 \end{cases} \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \text{ thì } a + b \text{ bằng}$$

A. -1 .

B. 0 .

C. 1 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn A

Với $x < -5$ ta có $f(x) = x^2 + ax + b$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; -5)$.

Với $-5 < x < 10$ ta có $f(x) = x + 7$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(-5; 10)$.

Với $x > 10$ ta có $f(x) = ax + b + 10$, là hàm đa thức nên liên tục trên $(10; +\infty)$.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại $x = -5$ và $x = 10$.

Ta có:

$$f(-5) = 12; f(10) = 17.$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} (x^2 + ax + b) = -5a + b + 25.$$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} (x + 17) = 12.$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} (x + 17) = 27.$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} (ax + b + 10) = 10a + b + 10.$$

Hàm số liên tục tại $x = -5$ và $x = 10$ khi

$$\begin{cases} 5a + b + 25 = 12 \\ 10a + b + 10 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a + b = -13 \\ 10a + b = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1$$

Câu 22: (THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$ bằng

- A. 2. B. 4. **C. $\frac{1}{4}$.** D. 0.

Lời giải

Chọn C .

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

Câu 23: (THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018) Tìm giá trị của tham số m để

$$\text{hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ liên tục tại điểm } x_0 = 1.$$

- A. $m = 3$. B. $m = 1$. **C. $m = \frac{3}{4}$.** D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1-2^2}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{3}{4}.$$

Với $f(1) = m$ ta suy ra hàm số liên tục tại $x = 1$ khi $m = \frac{3}{4}$.

Câu 1: (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018) Tính giới

$$\text{hạn } K = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1}.$$

A. $K = 0$.

B. $K = 1$.

C. $K = -2$.

D. $K = 4$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } K = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = -2.$$

Câu 2: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018) Tìm tham số thực m để hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 12}{x + 4} & \text{khi } x \neq -4 \\ mx + 1 & \text{khi } x = -4 \end{cases} \text{ liên tục tại điểm } x_0 = -4.$$

A. $m = 4$.

B. $m = 3$.

C. $m = 2$.

D. $m = 5$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có:

$$+ \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x - 3)(x + 4)}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4} (x - 3) = -7.$$

$$+ f(-4) = -4m + 1.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -4$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = f(-4) \Leftrightarrow -4m + 1 = -7$

$$\Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 3: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội – Lần 2 năm 2017 – 2018) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$

bằng:

A. 1.

B. 2.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(2x - 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3.$$

Câu 4: (SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**

$$\text{A. } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{B. } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x + 2}{x + 1} = -\infty.$$

$$\text{C. } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = +\infty.$$

$$\text{D. } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x + 2}{x + 1} = -\infty.$$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2 \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1 - (x - 2)^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - (x - 2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 3}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{2}{x}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{đáp án A đúng.}\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right).$$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right) = 2 > 0 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty \Rightarrow$$

đáp án C đúng.

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x + 2) = -1 < 0 \text{ và } x + 1 < 0 \text{ với } \forall x < -1 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x + 2}{x + 1} = +\infty \Rightarrow \text{đáp án B sai.}$$

$$\text{Do } \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x + 2) = -1 < 0 \text{ và } x + 1 > 0 \text{ với } \forall x > -1 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x + 2}{x + 1} = -\infty \Rightarrow \text{đáp án D đúng.}$$

Câu 5: (THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 1}{x}$ bằng

A. $+\infty$.

B. 1.

C. $-\infty$.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \frac{-1 + 1}{x} \leq \frac{\sin x + 1}{x} \leq \frac{1 + 1}{x} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\sin x + 1}{x} \leq \frac{2}{x}.$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \text{ nên } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 1}{x} = 0.$$

Câu 6: (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An - năm 2017-2018) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2}$

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $-\frac{3}{2}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{\sqrt{4x^2 + 1} - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 3}{x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 7: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$.

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 8: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$.

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 5.$$

Câu 9: Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 - 4}{an^3 + 2} = \frac{1}{2}$ với a là tham số. Khi đó $a - a^2$ bằng

A. -12.

B. -2.

C. 0.

D. -6.

Câu 10: Biết $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 - 4}{an^3 + 2} = \frac{1}{2}$ với a là tham số. Khi đó $a - a^2$ bằng

A. -12.

B. -2.

C. 0.

D. -6.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 - 4}{an^3 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(2 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^3} \right)}{n^3 \left(a + \frac{2}{n^3} \right)} = \frac{2}{a} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $a = 4$. Khi đó $a - a^2 = 4 - 4^2 = -12$.

Câu 11: $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x}$ bằng.

A. 1.

B. -1.

C. $\frac{5}{4}$.

D. $-\frac{5}{4}$.

Câu 12: $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x}$ bằng.

A. 1.

B. -1.

C. $\frac{5}{4}$.

D. $-\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x - 1}{x} = \frac{5}{4}.$$

Câu 13: Giá trị của m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 3x - m & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$ là

A. -5.

B. 1.

C. -1.

D. 5.

Câu 14: Giá trị của m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 3x - m & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$ là

A. -5.

B. 1.

C. -1.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(1) = 3 - m$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 3 - m = 2 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 15: Giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ ax - \frac{1}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. -1 .

C. 1 .

D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 16: Giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ ax - \frac{1}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. -1 .

C. 1 .

D. $-\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải**Chọn C**

$$f(1) = a - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(ax - \frac{1}{2} \right) = a - \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

Hàm số liên tục tại $x = 1$ khi $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$.

Câu 17: Giá trị của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2m - \frac{5}{4}x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$ là

A. 3 .

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{1}{8}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 18: Cho biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 7x + 12}}{a|x| - 17} = \frac{2}{3}$. Giá trị của a bằng

A. -3 .

B. 3 .

C. 6 .

D. -6 .

Câu 19: Giá trị của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2m - \frac{5}{4}x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$ là

A. 3 .

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{1}{8}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2m - \frac{5}{4}x \right) = 2m \text{ và } f(0) = 2m.$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 2m = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \frac{1}{8}.$$

Câu 20: Cho biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 7x + 12}}{a|x| - 17} = \frac{2}{3}$. Giá trị của a bằng

A. -3.

B. 3.

C. 6.

D. -6.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 7x + 12}}{a|x| - 17} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{-x\left(a + \frac{17}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{a + \frac{17}{x}} = \frac{2}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 3$$

Câu 21: Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

A. 0.

B. -2.C. $-\infty$.

D. 2.

Câu 22: Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng

A. 0.

B. -2.C. $-\infty$.

D. 2.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}} = -2.$$

Câu 23: Cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}x-2}{x+3} = a$ là một số thực. Khi đó giá trị của a^2 bằng

A. 1.

B. 9.

C. 3.

D. 4.

Câu 24: Cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}x-2}{x+3} = a$ là một số thực. Khi đó giá trị của a^2 bằng

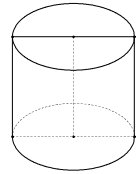
A. 1.

B. 9.**C.** 3.

D. 4.

Lời giải**Chọn C**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}x-2}{x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{3}-\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \sqrt{3} = a. \text{ Suy ra } a^2 = 3.$$



Câu 25: Giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{2a+1}{6} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. 3. **D. 1.**

Câu 26: Giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{2a+1}{6} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. 3. **D. 1.**

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(2) = \frac{2a+1}{6}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{2}.$$

Hàm số liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{2a+1}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$.

Câu 27: Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+5x+6}{x+2} & \text{khi } x > -2 \\ mx+n & \text{khi } x \leq -2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và n là một số thực tùy ý.

Giá trị của m (tính theo n) bằng

A. $\frac{n}{2}$. B. $\frac{n+1}{2}$. **C. $\frac{n-1}{2}$.** D. 1.

Câu 28: Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+5x+6}{x+2} & \text{khi } x > -2 \\ mx+n & \text{khi } x \leq -2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và n là một số thực tùy ý.

Giá trị của m (tính theo n) bằng

A. $\frac{n}{2}$. B. $\frac{n+1}{2}$. **C. $\frac{n-1}{2}$.** D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x^2+5x+6}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (x+3) = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (mx + n) = -2m + n.$$

$$f(-2) = -2m + n.$$

Để hàm số liên tục tại $x = -2$ thì

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = f(-2) \Leftrightarrow -2m + n = 1 \Leftrightarrow m = \frac{n-1}{2}.$$

Câu 29: Hàm số nào trong các hàm số sau **không** liên tục trên khoảng $(-1;1)$?

A. $y = \sin x$.

B. $y = \cos x$.

C. $y = \tan x$.

D. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \geq 0 \\ \cos x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

Câu 30: Hàm số nào trong các hàm số sau **không** liên tục trên khoảng $(-1;1)$?

A. $y = \sin x$.

B. $y = \cos x$.

C. $y = \tan x$.

D. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \geq 0 \\ \cos x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ và $y = \tan x$ đều xác định trên khoảng $(-1;1)$ nên chúng liên tục trên khoảng $(-1;1)$.

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \geq 0 \\ \cos x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Do $f(0) = \sin 0 = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1$ nên hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \geq 0 \\ \cos x & \text{khi } x < 0 \end{cases} \text{ không liên tục trên khoảng } (-1;1).$$

Câu 31: Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + x) = 5$. Khi đó giá trị a là

A. -6 .

B. 10 .

C. -10 .

D. 6 .

Câu 32: Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + x) = 5$. Khi đó giá trị a là

A. -6 .

B. 10 .

C. -10 .

D. 6 .

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + 5}{\sqrt{x^2 + ax + 5} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(a + \frac{5}{x} \right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{5}{x^2}} - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a + \frac{5}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{5}{x^2}} - 1} = -\frac{a}{2}. \text{ Vậy } a = -10. \end{aligned}$$

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x > 4 \\ mx+1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 8$ hoặc $m = -\frac{7}{4}$.

B. $m = \frac{7}{4}$.

C. $m = -\frac{7}{4}$.

D. $m = -8$ hoặc $m = \frac{7}{4}$.

Câu 34: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x > 4 \\ mx+1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 8$ hoặc $m = -\frac{7}{4}$.

B. $m = \frac{7}{4}$.

C. $m = -\frac{7}{4}$.

D. $m = -8$ hoặc $m = \frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Trên các khoảng $(-\infty; 4)$ và $(4; +\infty)$ thì hàm số được xác định bởi biểu thức $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$.

Do đó, nó liên tục trên các khoảng này.

Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số phải liên tục tại điểm $x = 4$. Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x+4) = 8.$$

$$f(4) = 4m+1.$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 4m+1 = 8 \Leftrightarrow m = \frac{7}{4}.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = \frac{7}{4}$.

Câu 35: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ với m là tham số thực. Tìm m để hàm số liên tục tại tại $x = 1$.

A. $m = 2$.

B. $m = 1$.

C. $m = -2$.

D. $m = -1$.

Câu 36: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ với m là tham số thực. Tìm m để hàm số liên tục tại tại $x = 1$.

$x = 1$.

A. $m = 2$.

B. $m = 1$.

C. $m = -2$.

D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$, chứa $x = 1$.

Ta có $f(1) = m$.

$$\checkmark \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3.$$

$$\checkmark \quad f(1) = 2m + 1.$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1 \Leftrightarrow 3 = 2m + 1 \Leftrightarrow m = 1.$

Câu 43: Giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a+2x & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$

A. $\frac{1}{4}.$

B. 1.

C. $-\frac{15}{4}.$

D. 4.

Câu 44: Giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a+2x & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$

A. $\frac{1}{4}.$

B. 1.

C. $-\frac{15}{4}.$

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(2) = a + 4.$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Để hàm số liên tục tại } x = 2 \text{ thì } a + 4 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = -\frac{15}{4}.$$

Câu 1: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 1-NH2017-2018) Tìm tất cả các giá trị của m để

$$\text{hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{khi } x < 0 \\ m + \frac{1-x}{1+x} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \text{ liên tục tại } x = 0.$$

A. $m = 1$.

B. $m = -2$.

C. $m = -1$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(m + \frac{1-x}{1+x} \right) = m + 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})} = -1.$$

$$f(0) = m + 1$$

$$\text{Để hàm liên tục tại } x = 0 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m + 1 = -1 \Rightarrow m = -2.$$

Câu 2: (THPT Chuyên Bắc Ninh-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$.

Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$.

B. $f(\sqrt{2}) < 0$.

C. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

D. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

$$\text{Ta có } f(0) = 1 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Vì $f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nên $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$. Do đó $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

$$\forall x \neq 0 \quad f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} \geq 0 \text{ nên } f(\sqrt{2}) > 0. \text{ Vậy A, B, C sai.}$$

Câu 3: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+8}-2}{\sqrt{x+2}} & \text{khi } x > -2 \\ 0 & \text{khi } x = -2 \end{cases}.$$

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

$$(I) \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 0.$$

(II) $f(x)$ liên tục tại $x = -2$.

(III) $f(x)$ gián đoạn tại $x = -2$.

A. Chỉ (III).

B. Chỉ (I).

C. Chỉ (I) và (II).

D. Chỉ (I) và (III).

Lời giải:

Chọn C

Hàm số $f(x)$ xác định trên nửa khoảng $[-2; +\infty)$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{\sqrt{2x+8}-2}{\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2x+8-4}{\sqrt{x+2}(\sqrt{2x+8}+4)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x+8}+4} = 0$$

Khẳng định (I) đúng.

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = f(-2) = 0$, theo định nghĩa hàm số liên tục trên một đoạn thì hàm số liên tục tại $x = -2$. Khẳng định (II) đúng, khẳng định (III) sai.

Câu 4: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Tính giới hạn:

$$\lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right].$$

- A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét dãy số (u_n) , với $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Ta có:

$$u_2 = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2};$$

$$u_3 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{6} = \frac{3+1}{2 \cdot 3};$$

$$u_4 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} = \frac{5}{8} = \frac{4+1}{2 \cdot 4}$$

.....

$$u_n = \frac{n+1}{2n}.$$

Dễ dàng chứng minh bằng phương pháp qui nạp để khẳng định $u_n = \frac{n+1}{2n}, \forall n \geq 2$

$$\text{Khi đó } \lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right] = \lim \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Câu 5: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-đề 2-năm 2017-2018) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+8}-2}{\sqrt{x+2}} & \text{khi } x > -2 \\ 0 & \text{khi } x = -2 \end{cases}. \text{ Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:}$$

$$(I) \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 0.$$

(II) $f(x)$ liên tục tại $x = -2$.

(III) $f(x)$ gián đoạn tại $x = -2$.

- A.** Chỉ (III). **B.** Chỉ (I). **C.** Chỉ (I) và (II). **D.** Chỉ (I) và (III).

Lời giải:

Chọn C

Hàm số $f(x)$ xác định trên nửa khoảng $[-2; +\infty)$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{\sqrt{2x+8}-2}{\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2x+8-4}{\sqrt{x+2}(\sqrt{2x+8}+4)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x+8}+4} = 0$

Khẳng định (I) đúng.

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = f(-2) = 0$, theo định nghĩa hàm số liên tục trên một đoạn thì hàm số liên tục tại $x = -2$. Khẳng định (II) đúng, khẳng định (III) sai.

Câu 6: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-đề 2-năm 2017-2018) Tính giới hạn:

$$\lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right].$$

A. 1.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Xét dãy số (u_n) , với $u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.

Ta có:

$$u_2 = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2.2};$$

$$u_3 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{4}{6} = \frac{3+1}{2.3};$$

$$u_4 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} = \frac{5}{8} = \frac{4+1}{2.4}$$

.....

$$u_n = \frac{n+1}{2n}.$$

Dễ dàng chứng minh bằng phương pháp qui nạp để khẳng định $u_n = \frac{n+1}{2n}, \forall n \geq 2$

$$\text{Khi đó } \lim \left[\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right] = \lim \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Cách 2:

$$u_2 = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{2^2 - 1^2}{2^2} = \frac{1.3}{2.2}$$

$$u_3 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} = \frac{(1.2)(3.4)}{(2.3)(2.3)}$$

$$u_4 = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{13}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} = \frac{(1.2.3)(3.4.5)}{(2.3.4)(2.3.4)}$$

.....

$$u_n = \frac{(1.2.3.4 \dots (n-1))(3.4 \dots (n+1))}{(2.3.4 \dots n)(2.3.4 \dots n)} = \frac{n+1}{2n}. \text{ Vậy } \lim u_n = \lim \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Câu 7: (THPT Hai Bà Trưng-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Tính $I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1}$?

A. $I = \frac{7}{8}$.

B. $I = \frac{3}{2}$.

C. $I = \frac{3}{8}$.

D. $I = \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - \sqrt{x+3})(2x + \sqrt{x+3})}{(x-1)(x+1)(2x + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - x - 3}{(x-1)(x+1)(2x + \sqrt{x+3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x+3)}{(x-1)(x+1)(2x + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x+3}{(x+1)(2x + \sqrt{x+3})} = \frac{7}{8}$$

Câu 8: (THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018) Dãy số (u_n) nào sau đây có giới hạn khác số 1 khi n dần đến vô cùng?

A. $u_n = \frac{(2017-n)^{2018}}{n(2018-n)^{2017}}$.

B. $u_n = n(\sqrt{n^2 + 2018} - \sqrt{n^2 + 2016})$.

C. $\begin{cases} u_1 = 2017 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

D. $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Lời giải

Chọn A

Ta tính giới hạn của các dãy số trong từng đáp án:

+) Đáp án A: $\lim u_n = \lim \frac{(2017-n)^{2018}}{n(2018-n)^{2017}} = \lim \left[\frac{2017-n}{n} \cdot \left(\frac{2017-n}{2018-n} \right)^{2017} \right]$

$$= \lim \left[\left(\frac{2017}{n} - 1 \right) \left(\frac{\frac{2017}{n} - 1}{\frac{2018}{n} - 1} \right)^{2017} \right] = -1.$$

+) Đáp án B: $\lim u_n = \lim n(\sqrt{n^2 + 2018} - \sqrt{n^2 + 2016}) = \lim \frac{n(n^2 + 2018 - n^2 - 2016)}{\sqrt{n^2 + 2018} + \sqrt{n^2 + 2016}}$

$$= \lim \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2018} + \sqrt{n^2 + 2016}} = \lim \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2018}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2016}{n^2}}} = 1.$$

+) Đáp án C:

Cách 1: Ta có $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 1) \Rightarrow u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_{n-1} - 1) = \dots = \frac{1}{2^{n-1}}(u_1 - 1)$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2016}{2^{n-1}} + 1 \Leftrightarrow u_n = 4032 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n + 1 \Rightarrow \lim u_n = 1.$$

Cách 2:

Bước 1: Ta chứng minh (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi 1.

Thật vậy bằng quy nạp ta có $u_1 = 2017 > 1$.

Giả sử $u_n > 1 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + 1) > \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$

Vậy $u_n > 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Hơn nữa $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(1 - u_n) < 0$ nên (u_n) là dãy giảm

Suy ra (u_n) có giới hạn $\lim u_n = a$

Bước 2: Ta có $a = \lim u_n = \lim u_{n+1} = \lim \frac{1}{2}(u_n + 1) = \frac{1}{2} \lim u_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a = 1$.

+) Đáp án D:

Ta có $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

$\Rightarrow \lim u_n = \lim \frac{n}{n+1} = 1$.

Câu 9: (THTT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018) Xác định giá trị thực k để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{2016} + x - 2}{\sqrt{2018x+1} - \sqrt{x+2018}} & \text{khi } x \neq 1 \\ k & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ liên tục tại } x = 1.$$

A. $k = 1$. **B.** $k = 2\sqrt{2019}$. **C.** $k = \frac{2017 \cdot \sqrt{2018}}{2}$. **D.** $k = \frac{20016}{2017} \sqrt{2019}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2016} + x - 2}{\sqrt{2018x+1} - \sqrt{x+2018}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{2016} + x - 2)(\sqrt{2018x+1} + \sqrt{x+2018})}{2018x+1 - x - 2018} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{2015} + x^{2014} + \dots + x + 2)(\sqrt{2018x+1} + \sqrt{x+2018})}{2017(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{2015} + x^{2014} + \dots + x + 2)(\sqrt{2018x+1} + \sqrt{x+2018})}{2017} = 2\sqrt{2019} \end{aligned}$$

Mà $f(1) = k$

Suy ra hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow k = 2\sqrt{2019}$.

Câu 10: (THPT Ngô Sĩ Liên-Bắc Giang-lần 1-năm 2017-2018) Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 1} = \frac{-1}{2}$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Tổng $S = a^2 + b^2$ bằng

A. $S = 13$. **B.** $S = 9$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 1$.

Lời giải

Chọn D

Vì hàm số có giới hạn hữu hạn tại $x = 1$ nên biểu thức tử nhận $x = 1$ làm nghiệm, hay $1 + a + b = 0$.

Áp dụng vào giả thiết, được $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - 1 - a}{x^2 - 1} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1+a)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1+a}{x+1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2+a}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -3$. Suy ra $b = 2$.

Vậy $a^2 + b^2 = 13$.

Câu 11: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x-5 & \text{ khi } x \leq -2 \\ ax-1 & \text{ khi } x > -2 \end{cases}$.

Với giá trị nào của a thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = -2$?

A. $a = -5$.

B. $a = 0$.

C. $a = 5$.

D. $a = 6$.

Lời giải:

Chọn C

Ta có: $f(-2) = -11$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (3x-5) = -11$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (ax-1) = -2a-1$.

Để hàm số liên tục tại $x = -2$ thì $f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

$\Leftrightarrow -2a-1 = -11 \Leftrightarrow a = 5$.

Vậy hàm số liên tục tại $x = -2$ khi $a = 5$.

Câu 12: (THPT Chuyên Lam-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018) Cho $f(x)$ là đa thức thỏa mãn

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-20}{x-2} = 10$. Tính $T = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6}$

A. $T = \frac{12}{25}$.

B. $T = \frac{4}{25}$.

C. $T = \frac{4}{15}$.

D. $T = \frac{6}{25}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1(Đặc biệt hóa)

Chọn $f(x) = 10x$, ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-20}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{10x-20}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{10(x-2)}{x-2} = 10$.

Lúc đó $T = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{60x+5}-5}{x^2+x-6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{60x+5}-5}{(x-2)(x+3)}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{60x+5-5^3}{(x-2)(x+3)\left(\sqrt[3]{60x+5}^2 + 5\sqrt[3]{60x+5} + 25\right)}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{60(x-2)}{(x-2)(x+3)\left(\sqrt[3]{60x+5}^2 + 5\sqrt[3]{60x+5} + 25\right)}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{60}{(x+3)\left(\sqrt[3]{60x+5}^2 + 5\sqrt[3]{60x+5} + 25\right)} = \frac{4}{25}$

Cách 2:

Chọn $f(x) = 10x$, ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-20}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{10x-20}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{10(x-2)}{x-2} = 10$.

Sử dụng CASIO, nhập hàm cần tính giới hạn

ans60Q)+5\$P5RQ) d+Q) p6

Màn hình hiển thị

$$\frac{\sqrt[3]{60x+5}-5}{x^2+x-6}$$

Thay giá trị $x = 1,9999999$ vào

r1.9999999=

Màn hình hiển thị

$$\frac{4}{25}$$

Thay tiếp giá trị $x = 2,0000001$ vào

r2.0000001=

Màn hình hiển thị

$$\frac{4}{25}$$

Cách 3:

Theo giả thiết có $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - 20) = 0$ hay $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 20$ (*)

$$\text{Khi đó } T = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{6f(x)+5}-5}{x^2+x-6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6f(x)+5-125}{(x^2+x-6) \left[\left(\sqrt[3]{6f(x)+5} \right)^2 + 5 \left(\sqrt[3]{6f(x)+5} \right) + 25 \right]}$$

$$T = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6[f(x)-20]}{(x-2)(x+3) \left[\left(\sqrt[3]{6f(x)+5} \right)^2 + 5 \left(\sqrt[3]{6f(x)+5} \right) + 25 \right]}$$

$$T = \frac{10.6}{5.75} = \frac{4}{25}.$$

Câu 1: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-MĐ 903 lần 1-năm 2017-2018) Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + x) = 5$ thì

giá trị của a là một nghiệm của phương trình nào trong các phương trình sau?

- A.** $x^2 - 11x + 10 = 0$. **B.** $x^2 - 5x + 6 = 0$. **C.** $x^2 - 8x + 15 = 0$. **D.** $x^2 + 9x - 10 = 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + x) = 5 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + ax + 5 - x^2}{\sqrt{x^2 + ax + 5} - x} \right) = 5 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{ax + 5}{\sqrt{x^2 + ax + 5} - x} \right) = 5 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{a + \frac{5}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{5}{x^2}} - 1} \right) = 5 \Leftrightarrow \frac{a}{-2} = 5 \Leftrightarrow a = -10. \end{aligned}$$

Vì vậy giá trị của a là một nghiệm của phương trình $x^2 + 9x - 10 = 0$.

Câu 2: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 1 MĐ 904 năm 2017-2018) Tìm giới hạn

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - \sqrt{x^2 - x + 2}).$$

- A.** $I = 1/2$. **B.** $I = 46/31$. **C.** $I = 17/11$. **D.** $I = 3/2$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - \sqrt{x^2 - x + 2}) &\Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + x - 2}{x + \sqrt{x^2 - x + 2}} + 1 \right) \\ &\Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 2}{x + \sqrt{x^2 - x + 2}} + 1 \right) \Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{2}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}} + 1 \right) \Leftrightarrow I = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Câu 3: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } (x > 1) \\ m^2 + m + \frac{1}{4} & \text{khi } (x \leq 1) \end{cases}. \text{ Tìm tất cả các giá trị của tham số thực } m \text{ để hàm số}$$

$f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

- A.** $m \in \{0; 1\}$. **B.** $m \in \{0; -1\}$. **C.** $m \in \{1\}$. **D.** $m \in \{0\}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}; \quad f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = m^2 + m + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Để hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } x = 1 \text{ thì } m^2 + m + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 0 \end{cases}.$$

Câu 4: (THPT Triệu Thị Trinh-lần 1 năm 2017-2018) Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)} = \frac{a\sqrt{2}}{b} + c$ với a ,

$b, c \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a + b + c$ bằng:

- A.** 5. **B.** 37. **C.** 13. **D.** 51.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt[3]{7x + 1}}{\sqrt{2}(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2 + 2 - \sqrt[3]{7x + 1}}{\sqrt{2}(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{\sqrt{2}(x - 1)} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{7x + 1}}{\sqrt{2}(x - 1)} = I + J.$$

$$\begin{aligned} \text{Tính } I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{\sqrt{2}(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 2 - 4}{\sqrt{2}(x - 1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{\sqrt{2}(x - 1)(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{\sqrt{2}(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)} = \frac{3}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{và } J &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{7x + 1}}{\sqrt{2}(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8 - 7x - 1}{\sqrt{2}(x - 1)\left[4 + 2\sqrt[3]{7x + 1} + (\sqrt[3]{7x + 1})^2\right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-7}{\sqrt{2}\left[4 + 2\sqrt[3]{7x + 1} + (\sqrt[3]{7x + 1})^2\right]} = \frac{-7}{12\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt[3]{7x + 1}}{\sqrt{2}(x - 1)} = I + J = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

Suy ra $a = 1$, $b = 12$, $c = 0$. Vậy $a + b + c = 13$.

Câu 5: (THTT Số 4-487 tháng 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x > 0 \\ mx + m + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$, m là

tham số. Tìm giá trị của m để hàm số có giới hạn tại $x = 0$.

A. $m = 1$.

B. $m = 0$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = \frac{-1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(mx + m + \frac{1}{4}\right) = m + \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

Để hàm số có giới hạn tại $x = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow m + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 6: (THTT Số 4-487 tháng 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+6}{3x^2-27} & \text{khi } x \neq \pm 3 \\ -\frac{1}{9} & \text{khi } x = \pm 3 \end{cases}$. Mệnh

đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc khoảng $(-3; 3)$.

B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = -3$.

C. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 3$.

D. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+6}{3x^2-27}$, vì $\lim_{x \rightarrow 3} (2x+6) = 12 \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow 3} (3x^2-27) = 0$ nên hàm số

không có giới hạn tại $x = 3$. Ta loại hai phương án A và **D**.

Ta tiếp tục tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x+6}{3x^2-27} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)}{3(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2}{3(x-3)} = \frac{-1}{9}.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3) = -\frac{1}{9}$ nên hàm số liên tục tại $x = -3$.

Câu 7: (SGD Ninh Bình năm 2017-2018) Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = 0$.

B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - 2x) = +\infty$.

C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \frac{1}{2}$.

D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - 2x) = -\infty$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = +\infty$ nên phương án A sai.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} - 2 \right) = -\infty$ nên phương án B sai.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} \right) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} \right) = \frac{1}{2}$ nên đáp án C đúng.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 2 \right) = +\infty$ nên đáp án D sai.

Câu 8: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc - lần 3 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$.

Tính $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

A. $\frac{1}{12}$.

B. $\frac{13}{12}$.

C. $+\infty$.

D. $\frac{10}{11}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} &= \frac{(2\sqrt{1+x} - 2) + (2 - \sqrt[3]{8-x})}{x} = \frac{2(\sqrt{1+x} - 1)}{x} + \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+x} + 1} + \frac{1}{4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{(8-x)^2}}. \text{ Do vậy:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}} \\ &= 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

Câu 9: (THPT Hồng Quang-Hải Dương năm 2017-2018) Tính $\lim \sqrt{\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}}$

- A.** $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Khi đó: $\lim \sqrt{\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}} = \lim \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n(n+7)(6n+5)}} = \lim \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12\left(1+\frac{7}{n}\right)\left(6+\frac{5}{n}\right)}} = \frac{1}{6}$.

Câu 10: (THPT Ninh Giang-Hải Dương năm 2017-2018) Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{x+4}}$ có giá trị bằng:

- A.** $-\frac{9}{4}$. **B.** -3 . **C.** -18 . **D.** $-\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{3x+1}-4}{3-\sqrt{x+4}} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{[(3x+1)-16](3+\sqrt{x+4})}{[9-(x+4)](\sqrt{3x+1}+4)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-3(3+\sqrt{x+4})}{\sqrt{3x+1}+4} = \frac{-18}{8} = -\frac{9}{4}$.

Câu 11: (THPT Lương Văn ChasnhPhus Yên năm 2017-2018) Tìm

$$L = \lim \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n} \right)$$

- A.** $L = \frac{5}{2}$. **B.** $L = +\infty$. **C.** $L = 2$. **D.** $L = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $1+2+3+\dots+k$ là tổng của cấp số cộng có $u_1=1$, $d=1$ nên $1+2+3+\dots+k = \frac{(1+k)k}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2+\dots+k} = \frac{2}{k(k+1)} = \frac{2}{k} - \frac{2}{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

$$L = \lim \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \right) = \lim \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{n+1} \right) = 2.$$

Câu 12: (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 8 + a^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}.$$

Có tất cả bao nhiêu giá trị của a để hàm số liên tục tại $x = 1$?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = [-3; +\infty)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(ax+2)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (ax+2)(\sqrt{x+3}+2) = 4(a+2). \end{aligned}$$

$$f(1) = 8 + a^2.$$

Hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 4(a+2) = 8 + a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases}.$

Vậy có 2 giá trị của a để hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$.

Câu 13: (THPT Yên Định-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018) Cho $f(x)$ là một đa thức thỏa mãn

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} = 24. \text{ Tính } I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{(x-1)(\sqrt{2f(x)+4}+6)}$$

A. 24.

B. $I = +\infty$.

C. $I = 2$.

D. $I = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Vì $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} = 24 \Rightarrow f(1) = 16$ vì nếu $f(1) \neq 16$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{x - 1} = \infty$.

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{(x-1)(\sqrt{2f(x)+4}+6)} = \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 16}{(x-1)} = 2.$$

Câu 1: (THPT Lê Quý Đôn-Quảng Trị-lần 1 năm 2017-2018) Tính $\lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)$.

A. $+\infty$.

B. 1.

C. $-\infty$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right) &= \lim n\left[\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)+\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)\right] \\ &= \lim \left[n\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right)+n\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right)\right].\end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-2n\right) = \lim \frac{3n}{\left(\sqrt{4n^2+3}+2n\right)} = \lim \frac{3}{\left(\sqrt{4+\frac{3}{n^2}}+2\right)} = \frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \lim n\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+n}\right) &= \lim \frac{-n^2}{\left(4n^2+2n\sqrt[3]{8n^3+n}+\sqrt[3]{\left(8n^3+n\right)^2}\right)} \\ &= \lim \frac{-1}{\left(4+2\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{\left(8+\frac{1}{n^2}\right)^2}\right)} = -\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \lim n\left(\sqrt{4n^2+3}-\sqrt[3]{8n^3+n}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}.$$

Câu 1: (THPT Nghèn – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b) \right) = 0$.

Tính $a - 4b$ ta được

A. 3.

B. 5.

C. -1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - (ax + b) \right) = 0 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - ax \right) - b \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 3x + 1 - a^2x^2}{\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + ax} - b \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(4 - a^2)x^2 - 3x + 1}{\sqrt{4x^2 - 3x + 1} + ax} - b \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - a^2 = 0 \\ a > 0 \\ \frac{-3}{2 + a} - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy $a - 4b = 5$.

Câu 2: (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình - năm 2017-2018) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c^2 + a = 18$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx} - cx \right) = -2$. Tính $P = a + b + 5c$.

A. $P = 18$.

B. $P = 12$.

C. $P = 9$.

D. $P = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx} - cx \right) = -2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a - c^2)x^2 + bx}{\sqrt{ax^2 + bx} + cx} = -2.$$

$$\text{Điều này xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a - c^2 = 0 \quad (a, c > 0) \\ \frac{b}{\sqrt{a} + c} = -2 \end{cases}. \quad (\text{Vì nếu } c \leq 0 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx} - cx \right) = +\infty).$$

Mặt khác, ta cũng có $c^2 + a = 18$.

$$\text{Do đó, } \begin{cases} a = c^2 = 9 \\ b = -2(\sqrt{a} + c) \end{cases} \Leftrightarrow a = 9, b = -12, c = 3. \text{ Vậy } P = a + b + 5c = 12.$$

Câu 3: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+5}}{x-3}$ bằng

A. 0.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{6}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } \cos x \geq 0 \\ 1 + \cos x & \text{khi } \cos x < 0 \end{cases}$. Hỏi hàm số f có tất cả bao nhiêu điểm gián đoạn trên khoảng $(0; 2018)$?

A. 2018.

B. 1009.

C. 542.

D. 321.

Câu 5: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+5}}{x-3}$ bằng

A. 0.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+5}}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1} - 2) - (\sqrt[3]{x+5} - 2)}{x-3} \\&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+5-8}{(x-3)\left((\sqrt[3]{x+5})^2 + 2\sqrt[3]{x+5} + 4\right)} \\&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} - \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+5})^2 + 2\sqrt[3]{x+5} + 4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } \cos x \geq 0 \\ 1 + \cos x & \text{nếu } \cos x < 0 \end{cases}$. Hỏi hàm số f có tất cả bao nhiêu điểm gián đoạn trên khoảng $(0; 2018)$?

A. 2018.

B. 1009.

C. 542.

D. 321.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2\pi]$, khi đó:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \\ 1 + \cos x & \text{nếu } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$; $\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f(x) = 0 = f(2\pi)$.

Hàm số rõ ràng liên tục trên các khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Ta xét tại $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\square \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} (1 + \cos x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sin x = 1;$$

$$\square f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

$\square$ Như vậy $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$.

Ta xét tại $x = \frac{3\pi}{2}$:

$$\square \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^+} \sin x = -1; \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} (1 + \cos x) = 1;$$

$$\square \text{ Vì } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^+} f(x) \text{ nên hàm số } f(x) \text{ gián đoạn tại điểm } x = \frac{3\pi}{2}.$$

Do đó, trên đoạn $[0; 2\pi]$ hàm số chỉ gián đoạn tại điểm $x = \frac{3\pi}{2}$.

Do tính chất tuần hoàn của hàm số $y = \cos x$ và $y = \sin x$ suy ra hàm số gián đoạn tại các điểm $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ta có } x \in (0; 2018) \Leftrightarrow 0 < \frac{3\pi}{2} + k2\pi < 2018 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < k < \frac{1009}{\pi} - \frac{3}{4} \approx 320,42.$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0, 1, 2, \dots, 320\}$.

Vậy, hàm số f có 321 điểm gián đoạn trên khoảng $(0; 2018)$.

Câu 7: Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$, $w = (4 - 3i)z + 1 - 2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là :

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $5\sqrt{5}$. **D.** $6\sqrt{5}$.

Câu 8: Cho các số phức z, w thỏa mãn $|z| = \sqrt{5}$, $w = (4 - 3i)z + 1 - 2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là :

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $4\sqrt{5}$. **C.** $5\sqrt{5}$. **D.** $6\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Theo giả thiết ta có } w = (4 - 3i)z + 1 - 2i \Rightarrow z = \frac{w - 1 + 2i}{4 - 3i}.$$

$$\text{Mặt khác } |z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left| \frac{w - 1 + 2i}{4 - 3i} \right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |w - 1 + 2i| = 5\sqrt{5}.$$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm $I(1; -2)$ và bán kính $5\sqrt{5}$.

$$\text{Do đó } \min |w| = R - OI = 4\sqrt{5}.$$

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2018}$. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

A. $L = 2017 \cdot 2^{2018} + 1$. **B.** $L = 2019 \cdot 2^{2017} + 1$. **C.** $L = 2017 \cdot 2^{2018} - 1$. **D.** $L = 2018 \cdot 2^{2017} + 1$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2018}$. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

A. $L = 2017 \cdot 2^{2018} + 1$. **B.** $L = 2019 \cdot 2^{2017} + 1$. **C.** $L = 2017 \cdot 2^{2018} - 1$. **D.** $L = 2018 \cdot 2^{2017} + 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + 2018x^{2017} \Leftrightarrow x \cdot f'(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + 2018x^{2018}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot f'(x) = (2x - x) + (3x^2 - x^2) + (4x^3 - x^3) + \dots + (2018x^{2017} - x^{2017}) + 2018x^{2018}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot f'(x) = (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 2018x^{2018}) - (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2017}) + 2018x^{2018}$$

$$\Leftrightarrow xf'(x) = f'(x) - \frac{1-x^{2018}}{1-x} + 2018x^{2018} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2018x^{2018}}{(x-1)} + \frac{1-x^{2018}}{(x-1)^2}.$$

Do đó $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 2018 \cdot 2^{2018} + 1 - 2^{2018} = 2017 \cdot 2^{2018} + 1.$

Câu 1: (THTT Số 1-484 tháng 10 năm 2017-2018) Đặt $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$.

Xét dãy số (u_n) sao cho $u_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \dots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \dots f(2n)}$. Tính $\lim n\sqrt{u_n}$.

- A.** $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{2}$. **B.** $\lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{3}$. **D.** $\lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } g(n) = \frac{f(2n-1)}{f(2n)} \Rightarrow g(n) = \frac{(4n^2 - 2n + 1)^2 + 1}{(4n^2 + 2n + 1)^2 + 1}.$$

$$g(n) = \frac{(4n^2 + 1)^2 - 4n(4n^2 + 1) + (4n^2 + 1)}{(4n^2 + 1)^2 + 4n(4n^2 + 1) + (4n^2 + 1)} = \frac{4n^2 + 1 - 4n + 1}{4n^2 + 1 + 4n + 1} = \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{10} \cdot \frac{10}{26} \cdot \frac{26}{50} \dots \frac{(2n-3)^2 + 1}{(2n-1)^2 + 1} \cdot \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1} = \frac{2}{(2n+1)^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \lim n\sqrt{u_n} = \lim \sqrt{\frac{2n^2}{4n^2 + 4n + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 2: (THPT Việt Trì-Phú Thọ-lần 1-năm 2017-2018) Đặt $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$, xét dãy số (u_n) sao

cho $u_n = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdot f(5) \dots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdot f(6) \dots f(2n)}$. Tìm $\lim n\sqrt{u_n}$.

- A.** $\lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{3}$. **C.** $\lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\lim n\sqrt{u_n} = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1 = (n^2 + 1)[(n+1)^2 + 1].$$

$$\text{Do đó } u_n = \frac{(1^2 + 1)(2^2 + 1)(3^2 + 1)(4^2 + 1) \dots [(2n-1)^2 + 1][4n^2 + 1]}{(2^2 + 1)(3^2 + 1)(4^2 + 1)(5^2 + 1) \dots [4n^2 + 1][(2n+1)^2 + 1]}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{2}{(2n+1)^2 + 1} \Rightarrow n\sqrt{u(n)} = \sqrt{\frac{2n^2}{(2n+1)^2 + 1}}.$$

$$\lim n\sqrt{u(n)} = \lim \sqrt{\frac{2n^2}{(2n+1)^2 + 1}} = \lim \sqrt{\frac{2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 3: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2-năm 2017-2018) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $x^3 - 3x^2 + (2m-2)x + m-3 = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.

- A.** $m > -5$. **B.** $m < -5$. **C.** $m \leq -5$. **D.** $m < -6$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = x^3 - 3x^2 + (2m - 2)x + m - 3$. Ta thấy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Điều kiện cần: $af(-1) > 0 \Leftrightarrow -m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < -5$.

Điều kiện đủ: với $m < -5$ ta có

*) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại $a < -1$ sao cho $f(a) < 0$

Mặt khác $f(-1) = -m - 5 > 0$. Suy ra $f(a) \cdot f(-1) < 0$.

Do đó tồn tại $x_1 \in (a; -1)$ sao cho $f(x_1) = 0$.

*) $f(0) = m - 3 < 0$, $f(-1) > 0$. Suy ra $f(0) \cdot f(-1) < 0$.

Do đó tồn tại $x_2 \in (-1; 0)$ sao cho $f(x_2) = 0$.

*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại $b > 0$ sao cho $f(b) > 0$

Mặt khác $f(0) < 0$. Suy ra $f(0) \cdot f(b) < 0$.

Do đó tồn tại $x_3 \in (0; b)$ sao cho $f(x_3) = 0$.

Vậy $m < -5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: (THPT Triệu Sơn 3-Thành Hóa năm 2017-2018) Cho $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{x+4} - 2} \right) = \frac{a}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính tổng $L = a + b$.

A. $L = 43$.

B. $L = 23$.

C. $L = 13$.

D. $L = 53$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{x+4} - 2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{x+4} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+4} - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt{x+4} \cdot (\sqrt[3]{x+1} - 1) + \sqrt{x+4} - 2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x(\sqrt{x+4} + 2)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{\sqrt{x+4} \cdot (x+1-1)(\sqrt{x+4} + 2) + (x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x+4-2^2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\sqrt{x+4} + 2)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{\sqrt{x+4}(\sqrt{x+4} + 2) + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} \right) = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 4$, $b = 9$, $L = a + b = 13$.

Trình bày lại:

Chọn A

$$\text{Đặt } L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{x+4} - 2} \right) = \frac{a}{b} \text{ thì } \frac{1}{L} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{x+4} - 2}{x} \right) = \frac{b}{a}.$$

Ta có

$$\frac{b}{a} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{x+4} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+4} - 2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt{x+4} - \sqrt{x+4}}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \right)$$

$$\text{Xét } L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4}(\sqrt[3]{x+1} - 1)}{x} \right). \text{ Đặt } t = \sqrt[3]{x+1}. \text{ Khi đó: } \begin{cases} x = t^3 - 1 \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$L_1 = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t^7+3}(t-1)}{t^7-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t^7+3}}{(t^6+t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)} = \frac{2}{7}$$

$$\text{Xét } L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Vậy } \frac{b}{a} = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} = \frac{15}{28} \Rightarrow a=28, b=15 \Rightarrow a+b=43 \Rightarrow a+b=43.$$

-----HẾT-----

Câu 1: (THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = u_n + 4n + 3$,

$\forall n \geq 1$. Biết

$$\lim \frac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{4n}} + \sqrt{u_{4^2n}} + \dots + \sqrt{u_{4^{2018}n}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{2n}} + \sqrt{u_{2^2n}} + \dots + \sqrt{u_{2^{2018}n}}} = \frac{a^{2019} + b}{c}$$

với a, b, c là các số nguyên dương và $b < 2019$. Tính giá trị $S = a + b - c$.

A. $S = -1$.

B. $S = 0$.

C. $S = 2017$.

D. $S = 2018$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$u_2 = u_1 + 4 \cdot 1 + 3$$

$$u_3 = u_2 + 4 \cdot 2 + 3$$

...

$$u_n = u_{n-1} + 4 \cdot (n-1) + 3$$

Cộng vế theo vế và rút gọn ta được

$$u_n = u_1 + 4 \cdot (1 + 2 + \dots + n-1) + 3(n-1) = 4 \frac{n(n-1)}{2} + 3(n-1) = 2n^2 + n - 3, \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Suy ra

$$u_{2n} = 2(2n)^2 + 2n - 3$$

$$u_{2^2n} = 2(2^2n)^2 + 2^2n - 3$$

...

$$u_{2^{2018}n} = 2(2^{2018}n)^2 + 2^{2018}n - 3$$

Và

$$u_{4n} = 2(4n)^2 + 4n - 3$$

$$u_{4^2n} = 2(4^2n)^2 + 4^2n - 3$$

...

$$u_{4^{2018}n} = 2(4^{2018}n)^2 + 4^{2018}n - 3$$

$$\text{Do đó } \lim \frac{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{4n}} + \sqrt{u_{4^2n}} + \dots + \sqrt{u_{4^{2018}n}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{2n}} + \sqrt{u_{2^2n}} + \dots + \sqrt{u_{2^{2018}n}}}$$

$$= \lim \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} + \sqrt{2 \cdot 4^2 + \frac{4}{n} - \frac{3}{n^2}} + \dots + \sqrt{2(4^{2018})^2 + \frac{4^{2018}}{n} - \frac{3}{n^2}}}{\sqrt{2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} + \sqrt{2 \cdot 2^2 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}} + \dots + \sqrt{2(2^{2018})^2 + \frac{2^{2018}}{n} - \frac{3}{n^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{2018})}{\sqrt{2}(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2018})} = \frac{1 \cdot \frac{1-4^{2019}}{1-4}}{\frac{1-2^{2019}}{1-2}} = \frac{1}{3} \frac{4^{2019} - 1}{2^{2019} - 1} = \frac{2^{2019} + 1}{3}.$$

$$\text{Vì } 2^{2019} > 2019 \text{ cho nên sự xác định ở trên là duy nhất nên } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy $S = a + b - c = 0$.

-----HẾT-----

Câu 1: Với n là số nguyên dương, đặt $S_n = \frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$. Khi đó $\lim S_n$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ **C. 1.** D. $\frac{1}{\sqrt{2}+2}$.

Câu 2: Với n là số nguyên dương, đặt $S_n = \frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$. Khi đó $\lim S_n$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ B. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ **C. 1.** D. $\frac{1}{\sqrt{2}+2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \lim S_n = 1$$