

CHUYÊN ĐỀ

CÔ LẬP ĐƯỜNG THẲNG

TRONG BIỆN LUẬN ĐỒ THỊ HÀM SỐ CÓ CHỨA THAM SỐ

A. Cơ sở lý thuyết chung

I. Các phép biến đổi đồ thị hàm số

1. Phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{u} = (a; b)$

Bài toán: Cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ tìm đồ thị (C') của hàm số $y = F(x)$ thu được khi tịnh tiến (C) theo véc tơ $\vec{u} = (a; b)$.

Cách vẽ:

- Mỗi điểm $A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị $y = f(x)$ cho ta một điểm $A'(x'_0; y'_0)$ thuộc đồ thị $y = F(x)$.

Khi đó:

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_0 - x_0 = a \\ y'_0 - y_0 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x'_0 - a \\ y_0 = y'_0 - b \end{cases}$$

- Điểm $A'(x'_0; y'_0) \in (C')$ nên $y'_0 = F(x'_0)$

- Điểm $A(x_0; y_0) \in (C)$ nên $y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow y'_0 - b = f(x'_0 - a)$

Do đó:

$$\begin{cases} y'_0 = F(x'_0) \\ y'_0 - b = f(x'_0 - a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y'_0 = F(x'_0) \\ F(x'_0) - b = f(x'_0 - a) \end{cases}$$

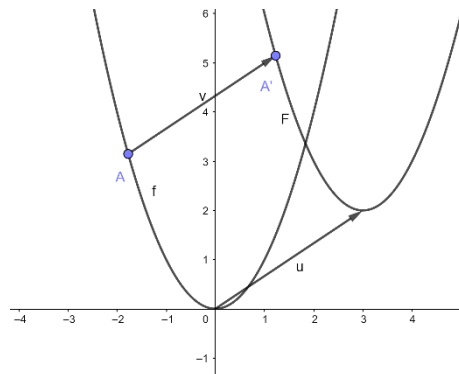
$$\Rightarrow y'_0 = f(x'_0 - a) + b$$

Vậy sau phép tịnh tiến ta thu được đồ thị (C') là $y = f(x - a) + b$

Bài toán nghịch: Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x + m) + n$ từ đồ thị $y = f(x)$

Cách vẽ: Đồng nhất $\begin{cases} y = F(x) = f(x - a) + b \\ y = f(x + m) + n \end{cases}$ ta có: $\begin{cases} a = -m \\ b = n \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (-m; n)$

Ghi nhớ:



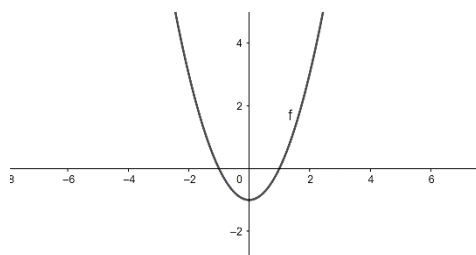
Để thu được $(C') : y = f(x+m) + n$ từ $(C) : y = f(x)$ ta dịch chuyển đồ thị (C) sang trái m đơn vị và lên trên n đơn vị.

Áp dụng:

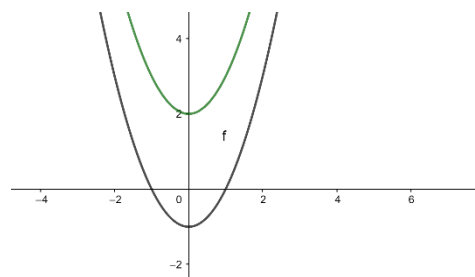
Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 1$, vẽ đồ thị các hàm số

- a) $y = f(x) + 3$
- b) $y = f(x - 2)$
- c) $y = f(x - 2) + 3$

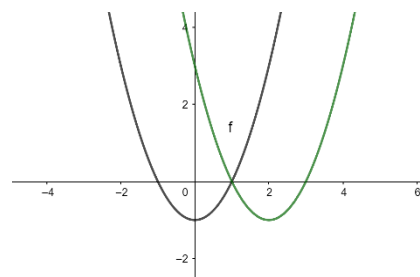
Giải: $y = f(x) = x^2 - 1$



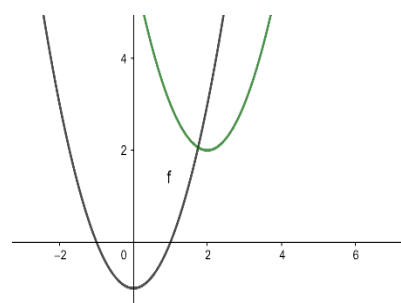
a) $y = f(x) + 3 \Rightarrow \vec{u} = (-m; n) = (0; 3)$ ta dịch chuyển lên trên 3 đơn vị



b) $y = f(x - 2) \Rightarrow \vec{u} = (-m; n) = (2; 0)$ ta dịch chuyển sang phải 2 đơn vị



c) $y = f(x - 2) + 3 \Rightarrow \vec{u} = (-m; n) = (2; 3)$ ta dịch chuyển sang phải 2 đơn vị và lên trên 3 đơn vị



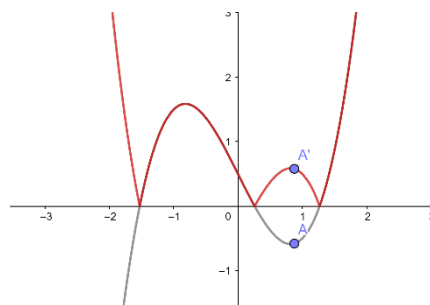
2. Phép đối xứng qua trục Ox

Bài toán: Cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$, vẽ đồ thị (C') của hàm số $y = |f(x)|$.

Cách vẽ: Tại những điểm $A(x_0; y_0)$ trên (C) qua phép đối xứng qua trục Ox cho điểm $A'(x_0; -y_0)$ thuộc đồ thị (C') . Ta luôn có:

$$\begin{cases} y'_0 = y_0, \forall y_0 \geq 0 \\ y'_0 = -y_0, \forall y_0 < 0 \end{cases}$$

Do đó ta có đồ thị (C') bao gồm phần đồ thị (C) có tung độ không âm và tập hợp những điểm đối xứng với (C) khi (C) có tung độ âm.



Ghi nhớ:

Để thu được đồ thị (C') của hàm số $y = |f(x)|$ từ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$, ta giữ nguyên phần đồ thị (C) ở nửa trên trục Ox và lấy đối xứng với đồ thị (C) ở nửa dưới trục Ox .

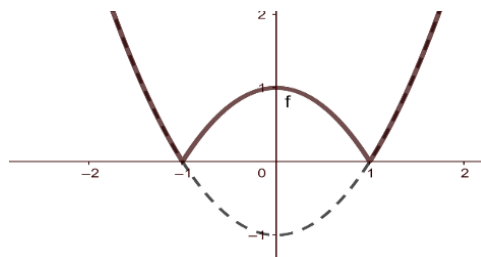
Áp dụng

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 1$, vẽ đồ thị các hàm số

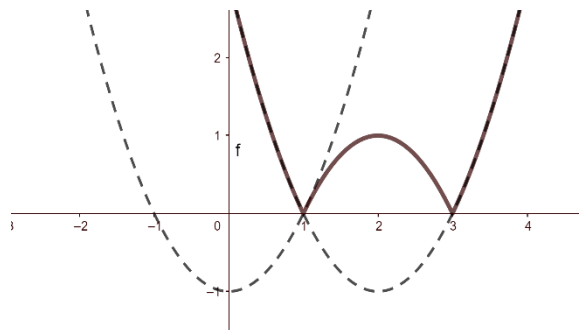
- a) $y = |f(x)|$
- b) $y = |f(x - 2)|$
- c) $y = |f(x) - 3|$
- d) $y = |f(x - 2) - 3|$
- e) $y = |f(x - 2) - 3| + 4$

Giải:

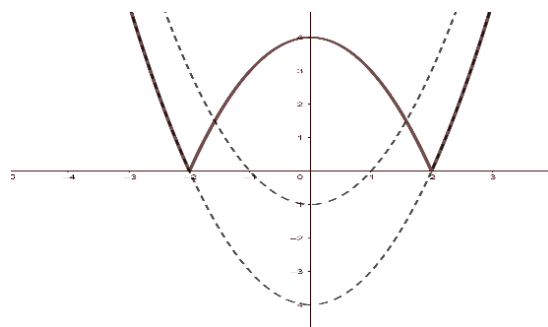
- a) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ rồi lấy đối xứng phần bên dưới trục Ox



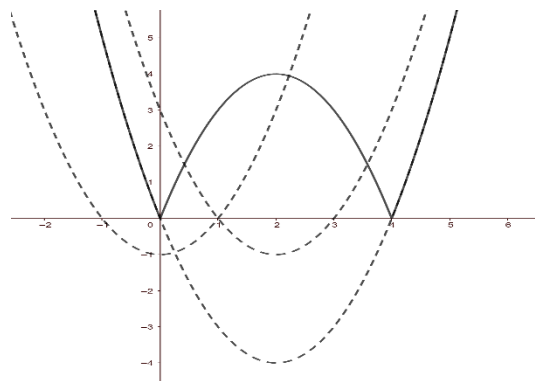
b) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x-2)$ rồi lấy đối xứng đồ thị thu được



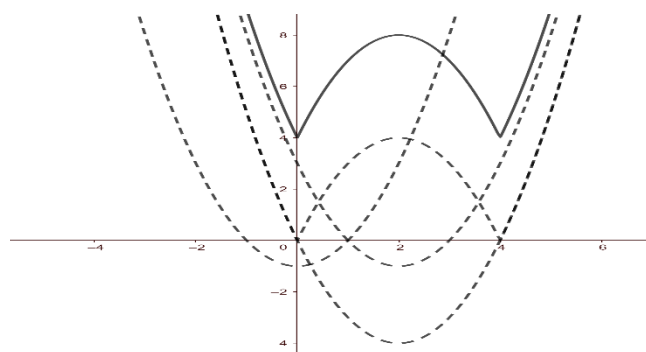
c) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) - 3$ rồi lấy đối xứng đồ thị thu được



d) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x-2) - 3$ rồi lấy đối xứng đồ thị thu được



e) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x-2) - 3$, lấy đối xứng đồ thị thu được rồi dịch chuyển lên trên 4 đơn vị



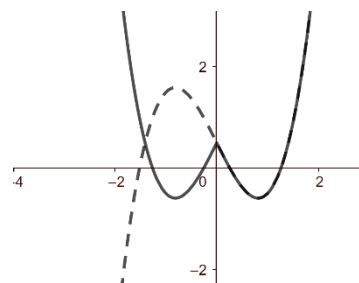
3. Phép đối xứng qua trục Oy

Bài toán: Cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$, vẽ đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$.

Cách vẽ:

Tại những điểm $A(x_0; y_0)$ trên (C) qua phép đối xứng qua trục Oy cho điểm $A'(-x_0; y_0)$ thuộc đồ thị

(C') . Ta luôn có:
$$\begin{cases} y'_0 = f(x_0), \forall y_0 \geq 0 \\ y'_0 = f(-x_0), \forall y_0 < 0 \end{cases}$$



Do đó ta có đồ thị (C') bao gồm phần đồ thị (C) có hoành độ không âm và tập hợp những điểm đối xứng với (C) khi (C) có hoành độ âm.

Ghi nhớ:

Để thu được đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$ từ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$, giữ nguyên phần đồ thị (C) ở nửa bên phải trục Oy và lấy đối xứng qua trục Oy sang bên trái.

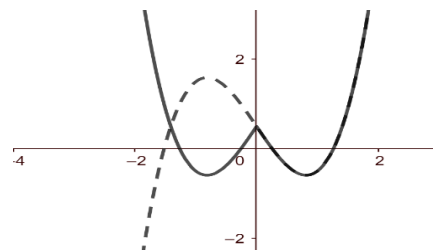
Áp dụng

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x - 1$, vẽ đồ thị các hàm số

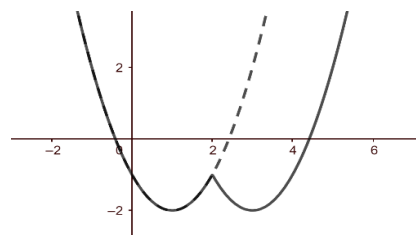
- a) $y = f(|x|)$
- b) $y = f(|x - 2|)$
- c) $y = f(|x| + 3)$
- d) $y = f(|x - 2| + 3)$
- e) $y = f(|x - 2| + 3) + 4$

Giải:

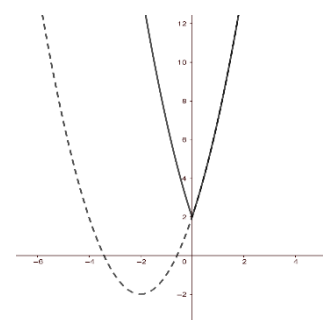
a) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$, giữ nguyên phần đồ thị (C) ở nửa bên phải trục Ox và lấy đối xứng qua trục Oy



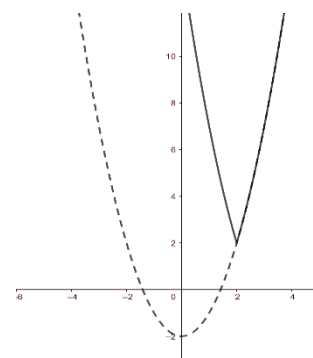
b) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x-2)$, giữ nguyên phần đồ thị (C) ở nửa bên phải đường thẳng $x=2$ và lấy đối xứng qua đường thẳng $x=2$



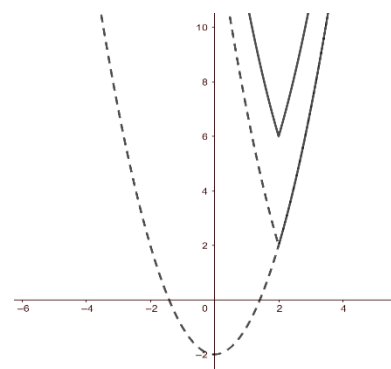
c) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x+3)$, giữ nguyên phần đồ thị (C) ở nửa bên phải trục Ox và lấy đối xứng qua trục Oy



d) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x+1)$, giữ nguyên phần đồ thị (C) ở nửa bên phải đường thẳng $x=2$ và lấy đối xứng qua đường thẳng $x=2$



e) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x+1)$, giữ nguyên phần đồ thị (C) ở nửa bên phải đường thẳng $x=2$, lấy đối xứng qua đường thẳng $x=2$ rồi tịnh tiến lên trên 4 đơn vị



II. Các hàm số chứa tham số m áp dụng được phương pháp cô lập đường thẳng

Phương pháp này chỉ áp dụng được với tham số m xuất hiện một lần trong hàm số. Với các hàm số có nhiều lần xuất hiện tham số m , ta sẽ rút gọn về dạng $M = u(m)$ là một biểu thức duy nhất chứa m .

Ví dụ 4: Rút gọn các hàm số để thu được phương trình chỉ chứa 1 hạng tử có biểu thức chứa m

Giải:

a) $y = f(x) = x + m, M = m$

b) $y = f(x) = x^2 + 2m - m^3$, ta đặt $M = 2m - m^3$ sẽ có $y = f(x) = x^2 + M$

c) $y = f(x) = x^2 + 2mx - m$, ta biến đổi như sau:

$$y = f(x) = x^2 + 2mx - m = x^2 + m(2x - 1)$$

$$\text{Đặt } t = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{t+1}{2} \text{ nên } x^2 + m(2x - 1) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 + mt$$

$$\text{Vậy } y = g(t) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 + mt$$

d) $\begin{cases} y = x^2 - f(m)x + f(m) \\ f(x) = x + 3 \end{cases}$ ta biến đổi như sau

$$y = f(x) = x^2 - f(m)x + f(m) = x^2 - f(m)(x - 1) = (t + 1)^2 - Mt = g(t)$$

$$\text{Do đó } y = g(t) = (t + 1)^2 - Mt$$

$$\text{Với } \begin{cases} M = -f(m) = -m - 3 \\ t = x - 1 \end{cases}$$

Ghi nhớ:

Những hàm số có tham số m tự do (không đi cùng biến) hoặc tham số m xuất hiện ở duy nhất một hạng tử chứa biến hoặc tham số m xuất hiện ở nhiều hạng tử nhưng đồng bậc, ta có thể đưa về một biểu thức M duy nhất chứa tham m .

Kể từ đây, mọi hàm số chứa duy nhất một tham số m xuất hiện hoặc có thể đưa về dạng hàm số chứa duy nhất một biểu thức $M = u(m)$ chứa tham số m xuất hiện, ta đều coi M là m .

III. Cô lập đường thẳng

Mọi hàm số $y = f(x)$ đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của một hàm số $y = g(x)$ có đồ thị (C) và một hàm số của đường thẳng $\Delta: y = h(x) = kx$: $y = f(x) = g(x) + kx$.

Khi $g(x)$ có nghiệm x_0 , $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow g(x_0) + h(x_0) = h(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) = h(x_0)$

Nên phương trình $f(x) = h(x)$ cũng có nghiệm x_0

Do đó, ta luôn vẽ được đường thẳng Δ và đồ thị (C) giao nhau tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $g(x) = 0$

Vì $y = f(x) = g(x) + h(x)$ chỉ chứa một tham số m nên sẽ xảy ra 2 trường hợp sau:

+ m nằm trong $g(x)$, ta cố định được Δ

+ m nằm trong $h(x)$, ta cố định được (C)

Bước còn lại là vẽ 2 đồ thị trên cùng hệ trục Oxy rồi biện luận tương giao giữa 2 đồ thị để tìm giá trị m . Nếu chứa M ta giải tiếp phương trình $M = u(m)$ để tìm m .

Ghi nhớ:

Cô lập đường thẳng

- Biểu diễn hàm $y = f(x) = g(x) + kx$
- Giải $g(x) = 0$ có các nghiệm x_i
- $y = f(x)$ cắt $y = kx$ tại các điểm có hoành độ x_i
- $g(x) > 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ nằm trên $y = kx$
- $g(x) < 0 \Leftrightarrow y = f(x)$ nằm dưới $y = kx$
- Xác định các yếu tố cố định khác
- Tìm trường hợp tương giao thỏa mãn đề bài
- Giải hệ điều kiện tìm tham số

B. Các dạng toán điển hình

I. Biện luận về số điểm cực trị của biểu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối theo m

1. Hàm số $y = f(x) = |ax^2 + bx + c| + dx + e$

Xét hàm số $y = f(x) = |ax^2 + bx + c| + dx$ có đồ thị (C) và hệ số $a > 0$ (nếu $a < 0$, ta có $|ax^2 + bx + c| = |-ax^2 - bx - c|$ có $-a > 0$ và hàm số $y = |ax^2 + bx + c| + dx + e$ hoàn toàn giống hàm số $y = |ax^2 + bx + c| + dx$ về hình dạng cũng như số điểm cực trị).

Đặt $y = g(x) = ax^2 + bx + c$, đường thẳng $\Delta: y = h(x) = dx$,

$k(x) = -g(x) + h(x) = -ax^2 + (d - b)x - c$ có điểm cực trị $A(x_0; k(x_0))$, $x_0 = \frac{d - b}{2a}$

$\Delta_{g(x)}$	A	Đồ thị minh họa	Điều kiện	Số cực trị
≤ 0			$b^2 \leq 4ac$ (1)	1 cực tiểu
> 0	Nửa trên mặt phẳng không chứa Δ		$\begin{cases} b^2 > 4ac \\ x_0 \in (x_1; x_2) \end{cases}$ (2)	1 cực đại, 2 cực tiểu
	Nửa dưới mặt phẳng bờ Δ		$\begin{cases} b^2 > 4ac \\ x_0 \notin (x_1; x_2) \end{cases}$ (3)	1 cực tiểu

Xét (1) đúng cả cho trường hợp $a < 0$ vì $(-b)^2 - 4(-a)(-c) = b^2 - 4ac$

Xét (2):

$$\begin{cases} b^2 > 4ac \\ x_0 \in (x_1; x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 > 4ac \\ \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < \frac{d-b}{2a} < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 4ac > d^2$$

Kết quả này cũng đúng cho $a < 0$

Xét (3):

$$\begin{cases} b^2 > 4ac \\ x_0 \in (x_1; x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 > 4ac \\ \frac{d-b}{2a} \leq \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \frac{d-b}{2a} \geq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases} \Leftrightarrow d^2 \geq b^2 - 4ac > 0$$

Kết quả này cũng đúng cho $a < 0$

Ghi nhớ:

Tìm m để đồ thị hàm số $y = f(x) = |ax^2 + bx + c| + dx + e$ có:

- 1 điểm cực trị (cực tiểu): $d^2 \geq b^2 - 4ac$
- 3 điểm cực trị (có cực đại): $d^2 < b^2 - 4ac$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x) = |x^2 - 4x + 3| + mx$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị?

Giải:

Xét hàm số $y = f(x) = |x^2 - 4x + 3| + mx$ có đồ thị (C), hàm số $y = g(x) = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng Δ có phương trình $y = h(x) = mx$, $f(x) = |g(x)| + h(x)$.

Nhận thấy $g(x) = 0$ có 2 nghiệm $x = 1, x = 3$ nên (C) cắt Δ tại 2 điểm phân biệt $B(1; m)$ và $C(3; 3m)$.

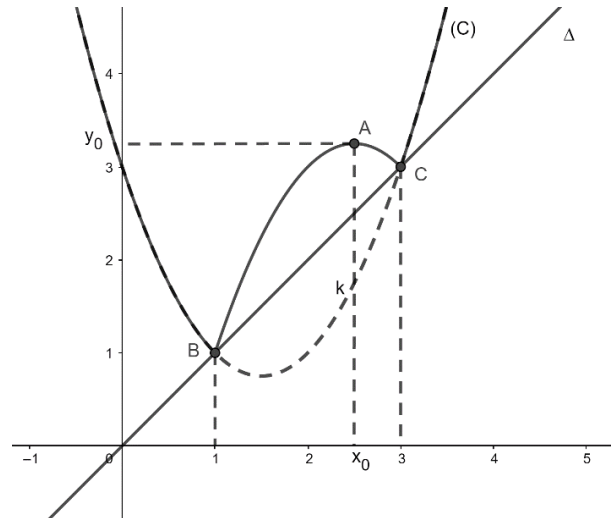
Trong khoảng $[1;3]$,
 $f(x) = -g(x) + h(x) = -x^2 + (m+4)x - 3$
 nên đồ thị hàm số $y = f(x)$ có điểm cực
 trị $A(x_0; y_0)$ tại $x_0 = \frac{m+4}{2}$. Để $y = f(x)$
 có 3 điểm cực trị thì cực trị $A(x_0; y_0)$
 thuộc nửa trên mặt phẳng bờ Δ và không
 chứa Δ , tương đương $1 < x_0 < 3$, nên

$$1 < \frac{m+4}{2} < 3 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Giải nhanh

$$d^2 < b^2 - 4ac \Leftrightarrow m^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < m < 2$$



Ví dụ 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc $[-2020; 2020]$ để hàm số
 $y = x + |x^2 - 2x + m|$ có cực đại.

Giải:

Xét hàm số $y = f(x) = x + |x^2 - 2x + m|$ có đồ
 thị (C), hàm số $y = g(x) = x^2 - 2x + m$ có đồ thị
 (C_g) và đường thẳng Δ có phương trình
 $y = h(x) = x$. $f(x) = |g(x)| + h(x)$

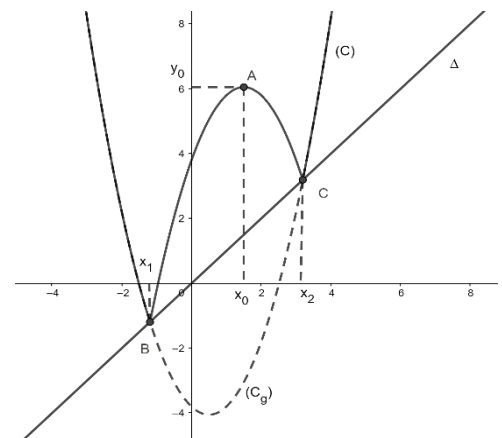
Để $y = f(x)$ có cực đại thì phải thỏa mãn đồng
 thời cả 2 điều kiện:

+ (C) cắt Δ tại 2 điểm phân biệt $B(x_1; d(x_1))$
 và $C(x_2; d(x_2))$ hay $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân
 biệt x_1, x_2 (1).

+ Điểm cực trị $A(x_0; y_0)$ của hàm số $y = -g(x) + d(x) = -x^2 + 3x - m$ thuộc nửa
 trên mặt phẳng bờ Δ và không chứa Δ hay $x_1 < \frac{3}{2} < x_2$ (2).

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} \Delta'_{g(x)=0} = 1 - m > 0 \\ x_1 < \frac{3}{2} < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{3}{4}$$



Vậy có 2021 giá trị m thỏa mãn bài toán.

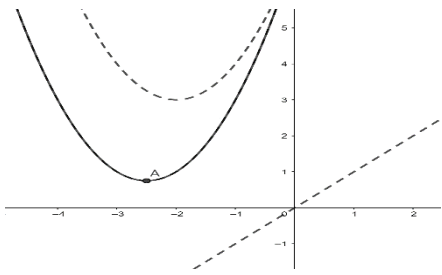
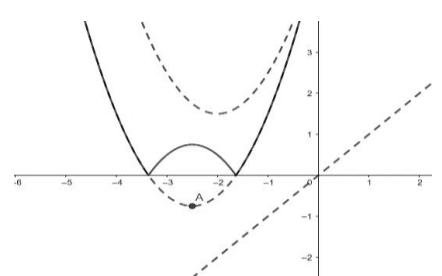
Giải nhanh:

$$d^2 < b^2 - 4ac \Leftrightarrow 1 < 4 - 4m \Leftrightarrow m < \frac{3}{4}$$

2. Hàm số $y = f(x) = |ax^2 + bx + c| + dx$

Đặt $g(x) = ax^2 + bx + c$, $h(x) = |g(x)| + dx$, tương tự ta chỉ xét trong phạm vi $a > 0$ và $d \neq 0$.

a) Trường hợp 1: $g(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$\Delta_{g(x)}$	A	Đồ thị minh họa	Số cực trị
≤ 0	Không thấp hơn Ox		1 cực tiểu
	Thấp hơn Ox		1 cực đại, 2 cực tiểu

- Hàm số có 1 cực tiểu khi:

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \leq 0 \\ h(x) = ax^2 + (b+d)x + c \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac \leq 0 \\ (b+d)^2 - 4ac \leq 0 \end{cases} \\ \Delta_{h(x)} \leq 0 \end{cases}$$

- Hàm số có 2 cực tiểu, 1 cực đại khi:

$$\begin{cases} b^2 - 4ac \leq 0 \\ h(x) = ax^2 + (b+d)x + c \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac \leq 0 \\ (b+d)^2 - 4ac > 0 \end{cases} \\ \Delta_{h(x)} > 0 \end{cases}$$

b) Trường hợp 2: $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Đường thẳng $y = dx$ tiếp xúc dưới với đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 2 điểm $B(x_1; d(x_1)); C(x_2; d(x_2))$

Đặt $k(x) = -g(x) + d(x) = -ax^2 + (d - b)x - c$, cực trị $A(x_0; k(x_0))$ có

$$x_0 = \frac{b-d}{2a} \Rightarrow A\left(\frac{b-d}{2a}; \frac{(b-d)^2 - 4ac}{4a}\right)$$

- Nếu B, C đều không nằm dưới trục Ox, ta có

$$d.x_1 \geq 0, d.x_2 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} d.(x_1 + x_2) > 0 \\ d.x_1.d.x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bd < 0 \\ c \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó $f(x) = |ax^2 + bx + c| + dx$. Theo kết quả mục B.I.1.:

+ Đồ thị hàm số có 2 điểm cực tiểu, 1 điểm cực đại khi

$$\begin{cases} bd < 0 \\ c \geq 0 \\ d^2 < b^2 - 4ac \end{cases}$$

+ Đồ thị hàm số có 1 cực tiểu khi

$$\begin{cases} bd < 0 \\ c \geq 0 \\ d^2 \geq b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$$

- Nếu 1 trong 2 điểm B, C nằm dưới trục Oy, suy ra $c < 0$ hoặc $\begin{cases} c = 0 \\ bd > 0 \end{cases}$, theo

kết quả từ mục B.I.1. thì:

+ Đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu khi

$$\begin{cases} \begin{cases} c = 0 \\ bd > 0 \end{cases} \\ c < 0 \\ d^2 \geq b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$$

+ Đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu khi

$$\begin{cases} \begin{cases} c = 0 \\ bd > 0 \end{cases} \\ c < 0 \\ d^2 < b^2 - 4ac \end{cases}$$

- Nếu cả 2 điểm B, C đều nằm dưới trục Oy , suy ra $bd > 0$ và $c > 0$, khi đó:
 - + A không cao hơn B hoặc C . Đồ thị hàm số có 1 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu:

$$\begin{cases} c > 0 \\ bd > 0 \\ d^2 \geq b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$$

- + A cao hơn cả B và C nhưng không cao hơn Ox . Đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu khi đó

$$\begin{cases} c > 0 \\ bd > 0 \\ d^2 < b^2 - 4ac \\ \frac{(b-d)^2 - 4ac}{4a} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c > 0 \\ bd > 0 \\ d^2 < b^2 - 4ac \\ (b-d)^2 - 4ac \leq 0 \end{cases}$$

- + A cao hơn Ox . Đồ thị hàm số có 3 điểm cực đại, 4 điểm cực tiểu khi đó

$$\begin{cases} c > 0 \\ bd > 0 \\ d^2 < b^2 - 4ac \\ \frac{(b-d)^2 - 4ac}{4a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c > 0 \\ bd > 0 \\ d^2 < b^2 - 4ac \\ (b-d)^2 - 4ac > 0 \end{cases}$$

Tổng hợp lại kết quả:

Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x) = \|ax^2 + bx + c\| + dx$ với $d \neq 0, a \neq 0$

- Một điểm cực trị: $\begin{cases} b^2 - 4ac \leq 0 \\ (b+d)^2 - 4ac \leq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} abd < 0 \\ ac \geq 0 \\ d^2 \geq b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$
- Ba điểm cực trị: $\begin{cases} b^2 - 4ac \leq 0 \\ (b+d)^2 - 4ac > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} abd < 0 \\ ac \geq 0 \\ d^2 < b^2 - 4ac \end{cases}$ hoặc
- $\begin{cases} \begin{cases} c = 0 \\ abd > 0 \end{cases} \\ ac < 0 \\ d^2 \geq b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} ac > 0 \\ abd > 0 \\ d^2 \geq b^2 - 4ac > 0 \end{cases}$
- Năm điểm cực trị: $\begin{cases} \begin{cases} c = 0 \\ abd > 0 \end{cases} \\ ac < 0 \\ d^2 < b^2 - 4ac \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} ac > 0 \\ abd > 0 \\ d^2 < b^2 - 4ac \\ (b-d)^2 - 4ac \leq 0 \end{cases}$
- Bảy điểm cực trị: $\begin{cases} ac > 0 \\ abd > 0 \\ d^2 < b^2 - 4ac \\ (b-d)^2 - 4ac > 0 \end{cases}$

Ví dụ 7: (TTLT Thanh Chương – Nghệ An lần 5 năm 2020): Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 10x + 16| + mx$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = |f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Giải:

Đặt $h(x) = x^2 - 10x + 16$, $u(x) = mx$.

Đồ thị $y = f(x)$ và $y = u(x)$ như hình

Nhận thấy nếu $m \geq 0$ thì $y = g(x) = f(x)$ như hình trên nên có tối đa 3 cực trị.

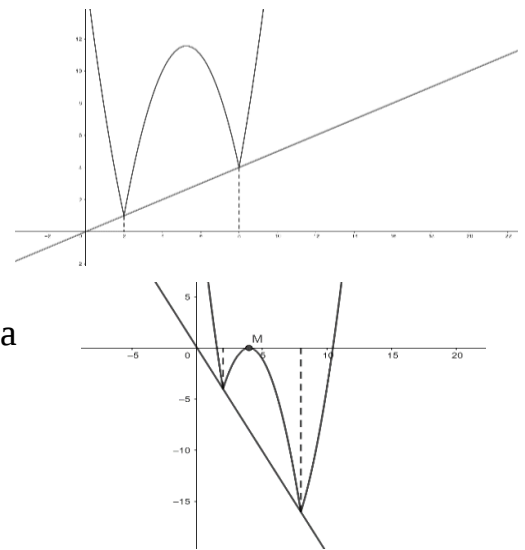
Vậy $m < 0$, khảo sát qua các trường hợp của đường thẳng $y = d(x)$ và đồ thị hàm số $y = h(x)$ ta có kết luận để đồ thị hàm số $g(x) = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị thì điểm cực trị $M(x_M; y_M)$ của hàm số $y = -h(x) + u(x) = -x^2 + (10 + m)x - 16$ phải thỏa mãn đồng thời

$$\begin{cases} 2 < x_M < 8 \\ y_M \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < m \leq -2$$

Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Giải nhanh:

$$\begin{cases} ac > 0 \\ abd > 0 \\ d^2 < b^2 - 4ac \\ (b - d)^2 - 4ac \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10m < 0 \\ m^2 < 36 \\ (-10 - m)^2 - 64 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -6 < m \leq 2$$



II. Biện luận về nghiệm của phương trình

Ví dụ 8: Tìm tập hợp tất cả các số thực m để phương trình $2^{x-1} = \log_4(x + 2m) + m$ có nghiệm?

Giải:

$$2^{x-1} = \log_4(x + 2m) + m \Leftrightarrow 2^x = \log_2(x + 2m) + 2m$$

$$\Leftrightarrow 2^x + x = (x + 2m) + \log_2(x + 2m)$$

$$\Leftrightarrow 2^x + x = 2^{\log_2(x + 2m)} + \log_2(x + 2m)$$

Đặt $f(t) = 2^t + t$, $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 + 1 > 0$ do đó $y = f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, phương trình đã cho tương đương: $f(x) = f(\log_2(x + 2m)) \Leftrightarrow x = \log_2(x + 2m)$.

Xét hàm số $y = g(x) = \log_2 x$ có tiếp tuyến (Δ) tại x_0 song song với đường thẳng (d) $y = x$ thì phương trình tiếp tuyến là

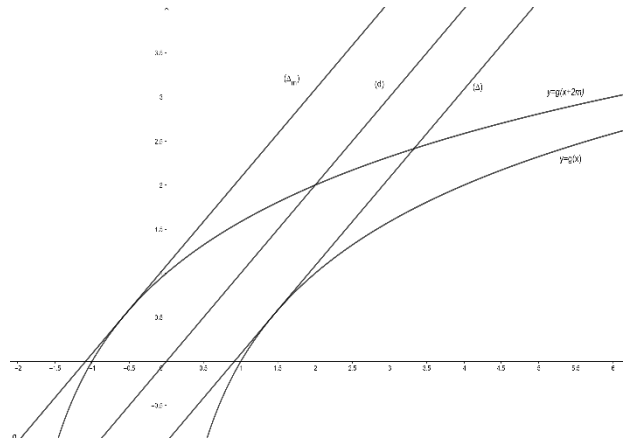
$$\begin{cases} y - y_0 = g'(x_0)(x - x_0) \\ g'(x_0) = \frac{1}{x_0 \ln 2} = 1 \end{cases} \Rightarrow (\Delta): y = x - \frac{1}{\ln 2} + \log_2 \frac{1}{\ln 2}$$

Do đó tiếp tuyến (Δ_m) của hàm số $y = g(x + 2m)$ song song với (d) là

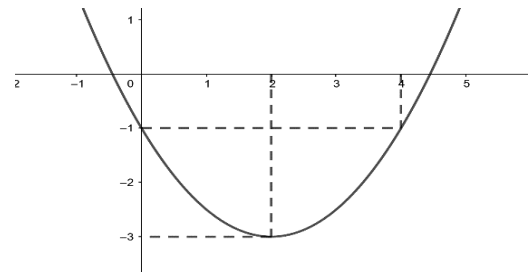
$$(\Delta): y = x + 2m - \frac{1}{\ln 2} + \log_2 \frac{1}{\ln 2}$$

Nhận thấy nghiệm của phương trình $x = \log_2(x + 2m)$ là hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và đồ thị hàm số $y = g(x + 2m)$, 2 đồ thị này có giao điểm khi tiếp tuyến (Δ_m) trùng với (d) hoặc lệch về bên trái so với (d) , do đó giao điểm (Δ_m) với trục Ox có hoành độ không dương, hay:

$$-(2m - \frac{1}{\ln 2} + \log_2 \frac{1}{\ln 2}) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{2}\log_2 \ln 2$$



Ví dụ 9: Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc hai có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $5f(|x|) = mx - m - 10$ có 4 nghiệm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S là?



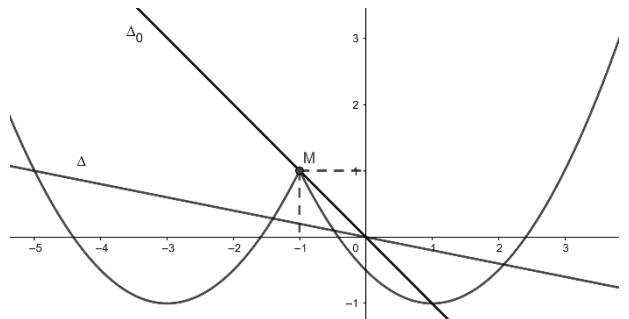
Giải:

Hàm số đã cho là hàm bậc 2 nên có dạng $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $(0; -1), (2; -3), (4; -1)$ nên có phương trình là $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$.

Đặt $t = x - 1$,

$$5f(|x|) = mx - m - 10 \Leftrightarrow f(|t+1|) + 2 = \frac{m}{5}t$$

Trên cùng hệ trục tọa độ Oxy , xét đồ thị (C) của hàm số $y = g(t) = f(|t+1|) + 2$ và đường thẳng $\Delta: y = \frac{m}{5}t$.



Để đường thẳng Δ và (C) cắt nhau tại 4 điểm, và vì Δ có hệ số góc âm nên Δ bị giới hạn khoảng giữa trục Ox và đường thẳng Δ_0 . Để tìm được tọa độ $M(1; 1)$ nên đường thẳng Δ_0 qua $M(1; 1)$ và $O(0; 0)$ là $y = -t$.

Dựa vào hệ số góc của Δ và Δ_0 , ta có: $-1 < \frac{m}{5} < 0 \Leftrightarrow -5 < m < 0$.

Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

III. Biện luận về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

1. Tìm điều kiện để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |ax^2 + bx + c| + dx + e$ đạt giá trị lớn nhất

Xét hàm số $y = f(x) = |ax^2 + bx + c| + dx$ có đồ thị (C) với $a > 0$,

$g(x) = ax^2 + bx + c$ và đường thẳng $\Delta: y = h(x) = dx$.

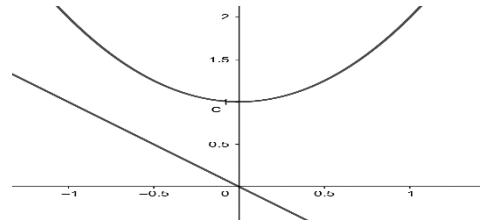
a) Trường hợp $c \geq 0$, đồ thị hàm số $y = f(x)$

luôn đi qua $(0; c)$ nên $\text{Min}[f(x)] \leq c$ do đó

$\text{Min}[f(x)]$ đạt $\text{Max} = c$ tại $x = 0$, khi đó

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow b + d = 0$$

b) Trường hợp $c < 0 \Leftrightarrow ac < 0$, $g(x) = 0$ có 2 nghiệm trái dấu x_1, x_2 thì (C) tiếp xúc trên với Δ tại $B(x_1; h(x_1)), C(x_2; h(x_2))$. Nếu $d \neq 0$, luôn có hoặc B hoặc C nằm dưới trục Oy nên $\text{Min}[f(x)] \leq 0 \Leftrightarrow d = 0$



Ghi nhớ

Tìm điều kiện để giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y = f(x) = |ax^2 + bx + c| + dx + e$ ($a > 0$) đạt giá trị lớn nhất

- Nếu $c \geq 0$, $\text{Min}[f(x)] = c \Leftrightarrow b + d = 0$

- Nếu $c < 0$, $\text{Min}[f(x)] = 0 \Leftrightarrow d = 0$

Ví dụ 10: Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = |x^2 - 4x + 3| + mx$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải:

Xét hàm số $y = g(x) = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $y = h(x) = mx$ như hình vẽ

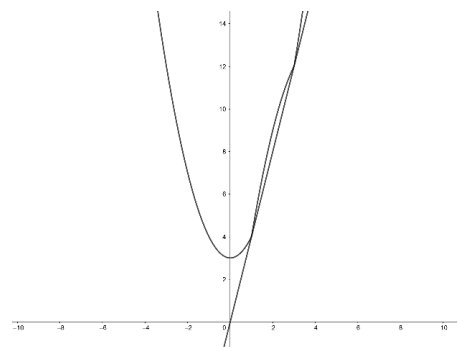
Nhận thấy hàm số $f(x)$ luôn qua điểm $(0; 3)$ với mọi m nên $\text{Min}[f(x)] \leq 3$. Để $\text{Min}[f(x)] = 3$ thì tại lân cận 0, $g(x) > 0$ nên

$$f(x) = |g(x)| + h(x) = g(x) + h(x) = x^2 + (m - 4)x + 3$$

đạt cực tiểu tại $x = 0$. Hay: $\frac{m - 4}{2} = 0 \Rightarrow m = 4$

Giải nhanh

$$b + d = 0 \Leftrightarrow m = 4$$



Ví dụ 11: Cho hàm số $f(x) = |x^2 + mx + 1| - 2x$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ đạt lớn nhất thì m bằng bao nhiêu?

Giải:

Tương tự câu trên. Đặt $g(x) = x^2 + mx + 1$, $g(0) = 1 > 0$ nên tại $x \approx 0$,

$$f(x) = x^2 + mx + 1 - 2x, f'(x) = 2x + m - 2, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{m-2}{2}$$

Vì $f(x)$ luôn qua điểm $(0;1)$ nên để $\text{Min}[f(x)]$ đạt $\text{Max}=1$ thì

$$-\frac{m-2}{2} = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Giải nhanh

$$b + d = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x) = |x^2 + mx + 3| + 2x$. Khi giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất thì m bằng bao nhiêu?

Giải:

Hoàn toàn tương tự: $m = -2$

Giải nhanh

$$b + d = 0 \Leftrightarrow m = -2$$

2. Một số dạng toán tương tự

Ví dụ 13: Cho hàm số $f(x) = |2x^2 - mx - 1| + 2x$. Biết giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng -2. Tìm giá trị của m ?

Giải:

Đặt $y = g(x) = 2x^2 - mx - 1$ và $y = h(x) = 2x$

Nhận thấy đồ thị hàm số $g(x)$ luôn qua điểm $(0;-1)$ nên $g(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ $x_1 < 0 < x_2$.

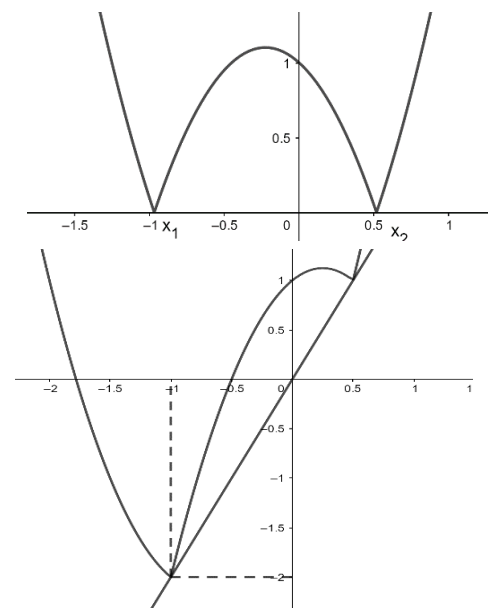
$|g(x)| \geq 0$, dấu bằng xảy ra tại x_1, x_2

$\Rightarrow f(x) = |g(x)| + h(x) \geq h(x)$, dấu bằng xảy ra tại x_1, x_2

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng $h(x_1)$

Do đó $2x_1 = -2 \Leftrightarrow x_1 = -1$

x_1, x_2 là 2 nghiệm của $g(x) = 0$ nên



$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 + x_2 = \frac{m}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = -x_2 = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow m = -1$$

Ví dụ 14: Với mỗi k , gọi m_k là giá trị nhỏ nhất của hàm số

$f(x) = |x^3 - 3x + 2| - x^2 - kx + k$ (k là tham số thực, biết m_k đạt giá trị lớn nhất, tìm k ?

Giải:

Đặt $t = x - 1$

$$f(x) = |t^2(t+3)| - (t+1)^2 - kt$$

$$f(x) = |x^3 - 3x + 2| - x^2 - kx + k = |(x-1)^2(x+2)| - x^2 - k(x-1)$$

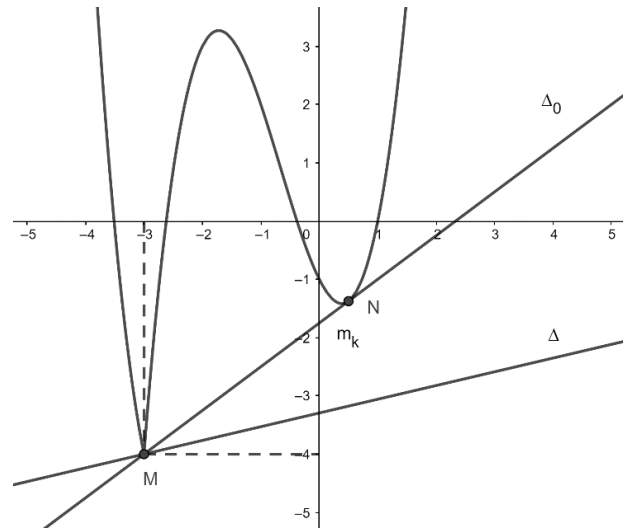
Theo giả thiết $f(x) \geq m_k, \forall x \Leftrightarrow |t^2(t+3)| - (t+1)^2 \geq kt + m_k, \forall t$

Xét đồ thị (C) của hàm số

$$y = g(t) = |t^2(t+3)| - (t+1)^2 \text{ hay}$$

$$g(t) = \begin{cases} t^3 + 2t^2 - 2t - 1, \forall t \geq -3 \\ -t^3 + 4t^2 - 2t - 1, \forall t < -3 \end{cases} \text{ và}$$

đường thẳng $\Delta: y = h(t) = kt + m_k$ trên cùng hệ trục tọa độ Oty như hình vẽ. Vì $g(t) \geq d(t), \forall t$ và dấu bằng có xảy ra nên Δ luôn tiếp xúc dưới với (C) . Trong các trường hợp của Δ thì trường hợp Δ_0 cho m_k lớn nhất. Δ là tiếp tuyến của (C) tại



N và đi qua $M(-3; -4)$ nên ta có phương trình $\Delta: y = \frac{3}{4}t - \frac{7}{4}$. Vậy $k = \frac{3}{4}$

Mọi thắc mắc, góp ý xin liên lạc:

- Nhóm Facebook:
<https://www.fb.com/groups/traloinhanhmontoan/>
- Page: Toán dành cho nhóm 9+ và giáo viên
- Tác giả: Trung Trục 0919469889

Đặt hàng giáo án, tài liệu hoặc soạn thảo đề Toán xin liên hệ:

Trung Trục 0919469889

Đóng góp giúp đỡ tác giả qua Số tài khoản:

- Techcombank:
 - TRAN TRUNG TRUC
 - STK: 19035284071017
 - Chi nhánh: Phú Thọ – Hồ Chí Minh
- MB Bank:
 - TRAN TRUNG TRUC
 - STK: 9704229212401678
 - Chi nhánh: Hội sở chính – Hà Nội
- Momo, Viettel Pay: 0919469889

Tác giả xin chân thành cảm ơn!