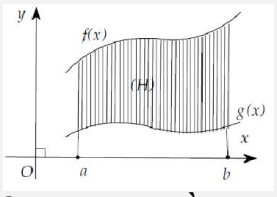
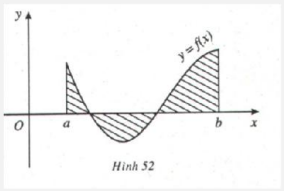
Vấn đề 15 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

A. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

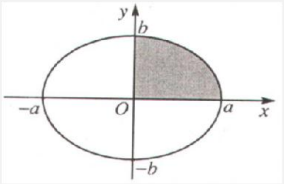
① *Hình phẳng* (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): y=g(x)\\x=a,\ x=b\ (a<b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x.}$

Hình phẳng (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): Ox: y=0\\x=a,\ x=b\ (a<b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S=\int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x.}$





Hình 52



$\boxed{S_{\text{elip}}=\pi ab.}$

$(E):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

② ***Hình thức đề thường hay cho***

Hình thức 1: *Không cho hình vẽ, cho dạng* $(H):\{y=f(x),\ y=g(x),\ x=a,\ x=b\ (a<b)\}$

$\xrightarrow{\text{casio}}\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=$ *kết quả, so sánh với bốn đáp án.*

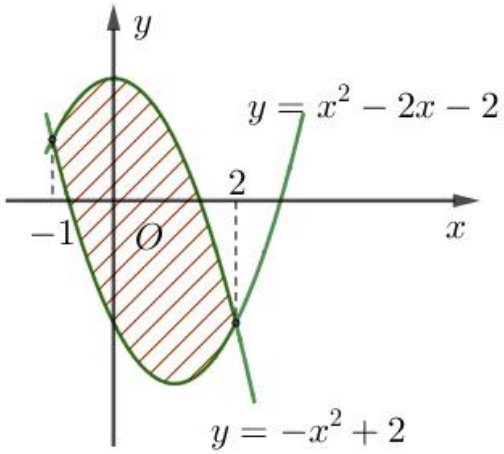
Hình thức 2: *Không cho hình vẽ, cho dạng* $(H):\{y=f(x),\ y=g(x)\}$

Giải $f(x)=g(x)$ *tìm nghiệm* $x_1,\ldots,x_i$, *với* x_1 *nhỏ nhất,* x_i *lớn nhất* $\xrightarrow{\text{casio}}\int_{x_1}^{x_i}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x.$

Hình thức 3: *Cho hình vẽ, sẽ giải phương trình tìm tọa độ giao điểm (nếu chưa cho trên hình), chia từng diện tích nhỏ, xổ hình từ trên xuống, ghi công thức và bấm máy tính.*

Hình thức 4: *Cho ba hàm trở lên, chẳng hạn* $y=f(x),\ y=g(x),\ y=h(x)$ *ta nên vẽ hình.*

Câu 1. Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$.

B. $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$.

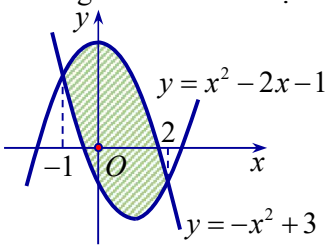
C. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x$.

D. $\int_{-1}^{2}\left(2x^2+2x-4\right)\mathrm{d}x$.

Câu 2. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2$, $y=-1$, $x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S=\pi\int_0^1\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_0^1\left(2x^2-1\right)\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int_0^1\left(2x^2+1\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_0^1\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Câu 3. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?

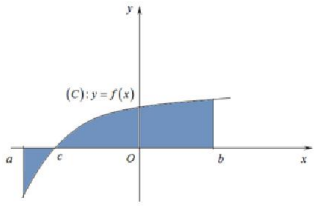


A. $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^{2}\left(-2x+2\right)\mathrm{d}x$. **C.** $\int_{-1}^{2}\left(2x-2\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$.

Câu 4. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\int_{0}^{2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_{0}^{2}\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\int_{0}^{2}\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_{0}^{2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Câu 5. Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $\left(a<b\right)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây ?

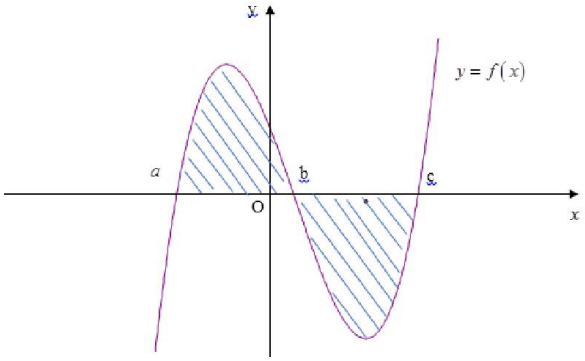


A. $S=-\int_{a}^{c}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{c}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\left|\int_{a}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|$.

C. $S=\int_{a}^{c}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{c}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_{a}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Nguyễn Bảo Vương

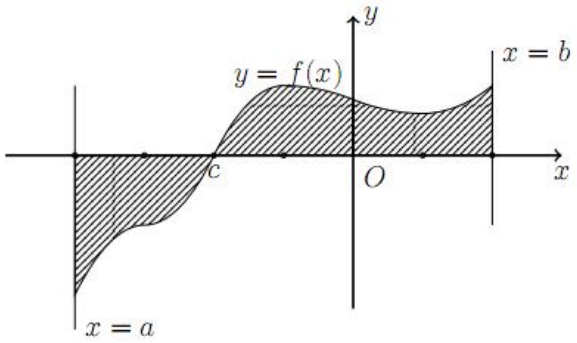
Câu 6. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thì như hình vẽ bên. Hình phẳng được đánh dấu trong hình vẽ bên có diện tích là



A. $\int_{a}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{b}^{c}f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{a}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_{c}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{a}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_{b}^{c}f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $-\int_{a}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{b}^{c}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 7. Diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức



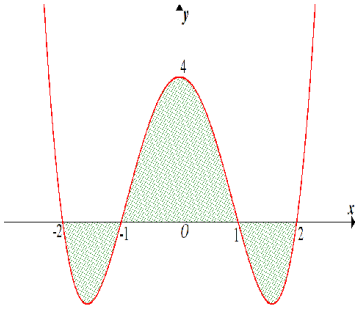
A. $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

B. $S=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_a^b f(x)dx$.

D. $S=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)=x^4-5x^2+4$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành (miền phẳng được tô đậm trên hình vẽ). Mệnh đề nào sau đây sai?



A. $S=\int_{-2}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x$.

B. $S=2\int_0^2|f(x)|\mathrm{d}x$.

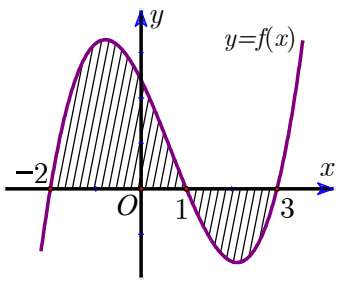
C. $S=2\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|+2\left|\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

D. $S=2\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Câu 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{12}$ **D.** 13

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi cá đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-2$ và $x=3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



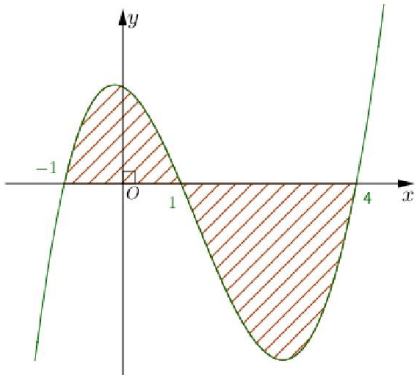
A. $S=\int_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=-\int_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=4$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



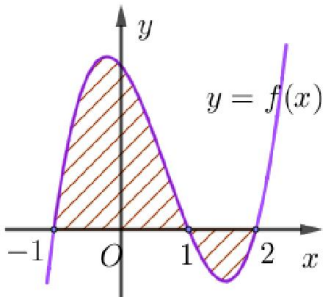
A. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1, x=2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



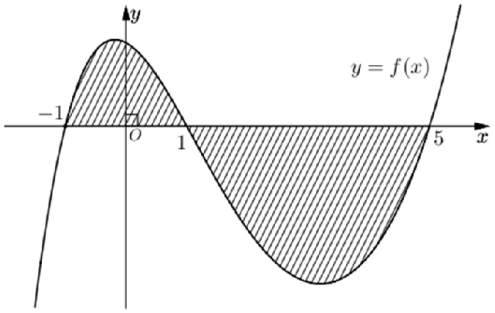
A. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=5$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 14. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $y=x$ là:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 15. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ là

A. 8. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 16. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $S=\ln 2+1$. **B.** $S=2\ln 2-1$. **C.** $S=2\ln 2+1$. **D.** $S=\ln 2-1$.

Câu 17. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-3x^2+x+4$. Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích phần hình (H) nằm bên trái và bên phải trục tung. Tính tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{208}{343}$. **B.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{54}{343}$. **C.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{135}{343}$. **D.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{135}{208}$.

Câu 18. Cho S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y=x\sqrt{1+x^2}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=1$. Biết $S=a\sqrt{2}+b\left(a,b\in\mathbb{Q}\right)$. Tính $a+b$.

A. $a+b=\frac{1}{6}$. **B.** $a+b=\frac{1}{2}$. **C.** $a+b=\frac{1}{3}$. **D.** $a+b=0$.

Câu 19. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1, x=2$ biết rằng mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là 2 cm.

A. $\frac{15}{4}\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $\frac{17}{4}\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $17\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $15\left(\text{cm}^2\right)$.

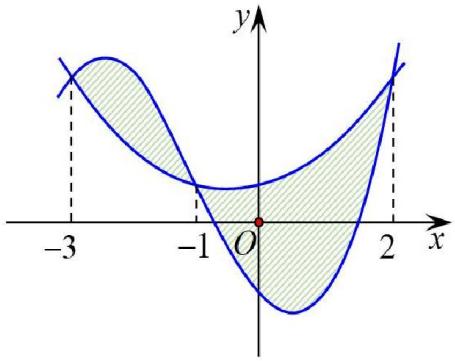
Câu 20. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}7-4x^3 & khi\ \ 0\le x\le 1\\ 4-x^2 & khi\ \ x>1\end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x=0, x=3, y=0$.

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** 10. **D.** 9.

Câu 21. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x\ln x$, trục Ox và đường thẳng $x=e$.

A. $S=\frac{e^2+3}{4}$. **B.** $S=\frac{e^2-1}{2}$. **C.** $S=\frac{e^2+1}{2}$. **D.** $S=\frac{e^2+1}{4}$.

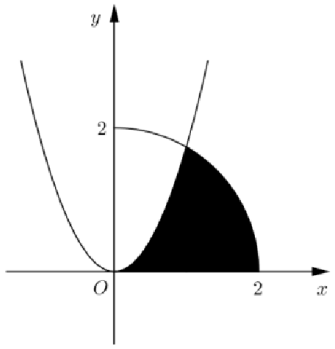
Câu 22. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\frac{1}{2}\left(a,b,c,d,e\in\mathbb{R}\right)$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

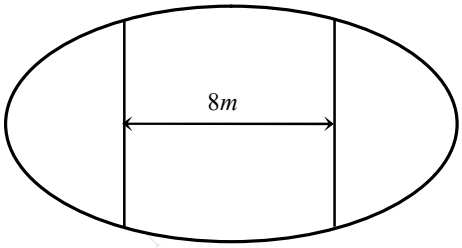
A. $\frac{253}{12}$ **B.** $\frac{125}{12}$ **C.** $\frac{253}{48}$ **D.** $\frac{125}{48}$

Câu 23. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



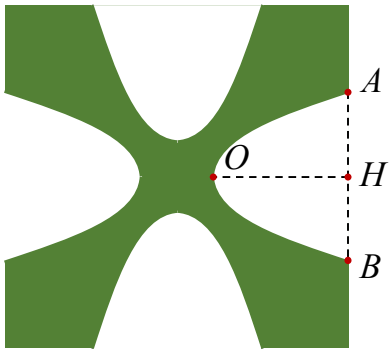
A. $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$ **D.** $\frac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$

Câu 24. Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/$1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)



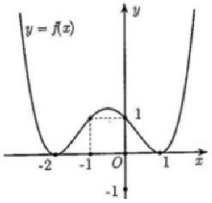
A. 7.862.000 đồng **B.** 7.653.000 đồng **C.** 7.128.000 đồng **D.** 7.826.000 đồng

Câu 25. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB=5\text{cm}$, $OH=4\text{cm}$. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $\frac{160}{3}\text{cm}^2$. **B.** $\frac{140}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{14}{3}\text{cm}^2$. **D.** $50\ \text{cm}^2$.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ



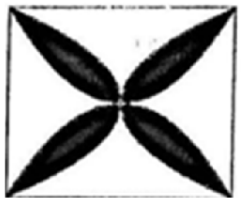
Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ có diện tích là

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{127}{10}$. **C.** $\frac{107}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Câu 27. Cho parabol (P) có phương trình $y=x^2$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(1;3)$. Giả sử khi đường thẳng d có hệ số góc k thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng d nhỏ nhất. Giá trị thực của k thuộc khoảng nào sau đây?

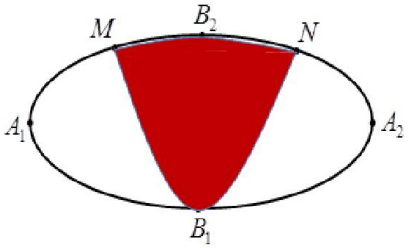
A. $(-\infty;-3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-3;0)$. **D.** $(0;3)$.

Câu 28. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh $80cm$. Người thiết kế đã sử dụng 4 đường parabol có chung đỉnh tại tâm của viên gạch để tạo ra 4 cánh hoa (được tô màu sẫm như hình vẽ bên). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng



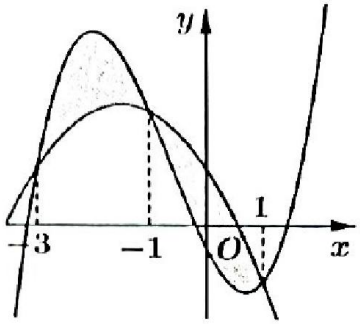
A. $\frac{800}{3}(cm^2)$. **B.** $\frac{1600}{3}(cm^2)$. **C.** $\frac{400}{3}(cm^2)$. **D.** $250(cm^2)$.

Câu 29. Một biển quảng cáo có dạng Elip với bốn đỉnh A_1,A_2,B_1,B_2. như hình vẽ. Người ta chia Elip bởi parapol có đỉnh B_1,trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M,N.Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/m^2 và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/m^2.Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết $A_1A_2=4m$, $B_1B_2=2m$, $MN=2m$.



A. 2.341.000 đồng. **B.** 2.057.000 đồng. **C.** 2.760.000 đồng. **D.** 1.664.000 đồng.

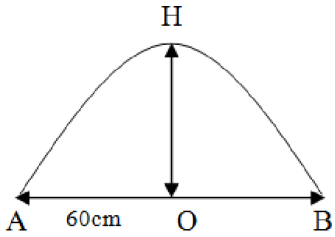
Câu 30. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;1$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho (miền tô đậm) có diện tích bằng

A. 8 **B.** 5 **C.** 4 **D.** $\frac{9}{2}$

Câu 31. Bạn An cần mua một chiếc gương có đường viền là đường Parabol bậc 2 (xem hình vẽ). Biết rằng khoảng cách đoạn $AB=60\,\text{cm}$, $OH=30\,\text{cm}$. Diện tích của chiếc gương bạn An mua là

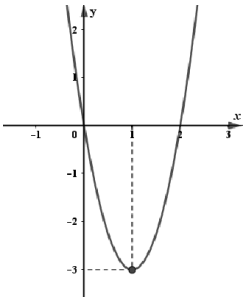


A. $900\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $1000\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $1200\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $1400\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 32. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=x^2$, tiếp tuyến với (P) tại điểm $M(2;4)$ và trục hoành. Tính diện tích của hình phẳng (H)?

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

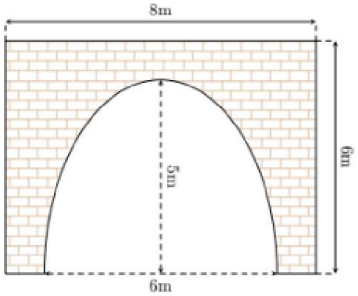
Câu 33. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị (C). Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho bởi hình vẽ dưới đây



Biết rằng đường thẳng $d: y=x$ cắt (C) tạo thành hai phần hình phẳng có diện tích bằng nhau. Tổng $a+b+c+d$ bằng

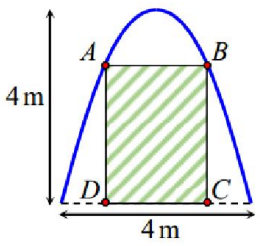
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 34. Một cái cổng có dạng như hình vẽ, với chiều cao 6m và chiều rộng 8m. Mái vòm của cổng có hình bán elip với chiều rộng là 6m, điểm cao nhất của mái vòm là 5m (tham khảo hình vẽ). Người ta muốn lát gạch hoa để trang trí cho cổng với chi phí là 250 000 đồng/m^2. Hỏi số tiền cần chi trả gần nhất với số nào sau đây?



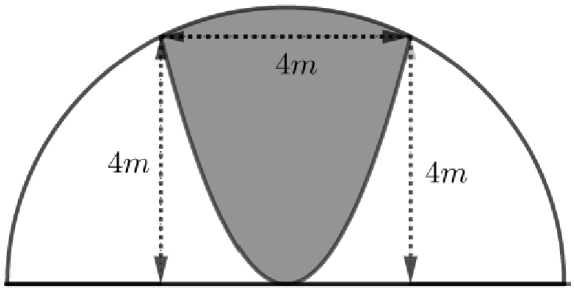
A. 6.210.000. **B.** 6.110.000. **C.** 6.100.000. **D.** 6.145.000.

Câu 35. Đợt thi đua 26/3 Đoàn trường THPT Nho Quan A có thực hiện một dự án trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 150.000đ trên $1m^2$ bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu(kết quả làm tròn lấy phần nguyên)?



A. 575.034 đồng. **B.** 676.239 đồng. **C.** 536.272 đồng. **D.** 423.215 đồng.

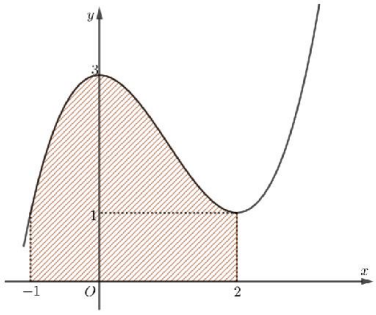
Câu 36. Một khuôn viên có dạng là nửa hình tròn đường kính bằng $4\sqrt{5}$ m. Trên đó, người ta thiết kế một phần để trồng hoa có dạng của một cách hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô đậm) và cách nhau một khoảng bằng 4 m. Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô đậm) dành để trồng cỏ.



Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ là 100.000 đồng / m^2 Số tiền cần có để trồng cỏ là bao nhiêu (số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 2 388 000 đồng. **B.** 3 895 000 đồng. **C.** 1 194 000 đồng. **D.** 1 948 000 đồng.

Câu 37. Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=-1$, $x=2$ và trục hoành (miền gạch chéo cho trong hình vẽ).

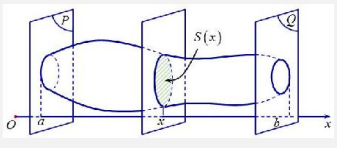


A. $S=\frac{51}{8}$. **B.** $S=\frac{53}{8}$. **C.** $S=\frac{52}{8}$. **D.** $S=\frac{50}{8}$.

B. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH

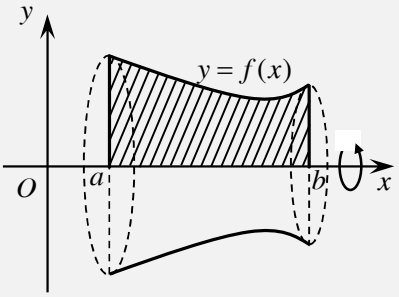
① ***Thể tích vật thể***

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a\le x\le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x}$.



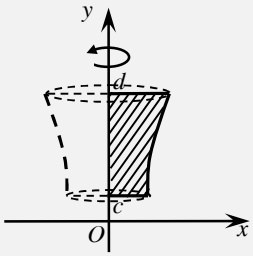
② ***Thể tích khối tròn xoay***

a) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox :*



$\begin{cases}(C): y=f(x)\\(Ox): y=0\\x=a\\x=b\end{cases}$ $\boxed{V_x=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx}$

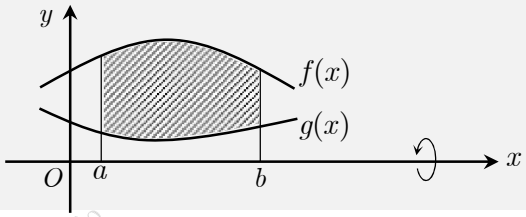
b) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường* $x=g(y)$, *trục hoành và hai đường thẳng* $y=c,\ y=d$ *quanh trục* Oy :



$\begin{cases}(C): x=g(y)\\(Oy): x=0\\y=c\\y=d\end{cases}$ $\boxed{V_y=\pi\int_c^d\left[g(y)\right]^2dy}$

c) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường* $y=f(x),\ y=g(x)$ *(cùng nằm một phía so với* Ox*) và hai đường thẳng* $x=a,\ x=b$ *quanh trục* Ox :

$\boxed{V=\pi\int_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|\mathrm{d}x.}$



Câu 38. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3,\ y=0,\ x=0,\ x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$ **B.** $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)dx$ **C.** $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$ **D.** $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)dx$

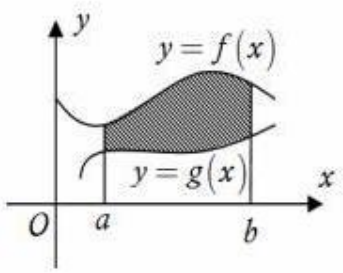
Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b(a<b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

A. $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ **B.** $V=2\pi\int_a^b f^2(x)dx$ **C.** $V=\pi^2\int_a^b f^2(x)dx$ **D.** $V=\pi^2\int_a^b f(x)dx$

Câu 40. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2, y=0, x=1, x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$.

Câu 41. Cho hình phẳng trong hình (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào?



A. $V=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]^2dx$. **B.** $V=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx$.

C. $V=\pi\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]^2dx$. **D.** $V=\pi\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vật thể (H) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=a$ và $x=b$. Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của (H) bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x, với $a\le x\le b$. Giả sử hàm số $y=S(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, thể tích của vật thể (H) được cho bởi công thức :

A. $V=\pi\int_a^b S(x)\,dx$. **B.** $V=\pi\int_a^b\left[S(x)\right]^2dx$. **C.** $V=\int_a^b\left[S(x)\right]^2dx$. **D.** $V=\int_a^b S(x)\,dx$.

Câu 43. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $V=32+2\sqrt{15}$ **B.** $V=\dfrac{124\pi}{3}$ **C.** $V=\dfrac{124}{3}$ **D.** $V=(32+2\sqrt{15})\pi$

Câu 44. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=(\pi+1)\pi$ **B.** $V=\pi-1$ **C.** $V=\pi+1$ **D.** $V=(\pi-1)\pi$

Câu 45. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2\pi^2$ **B.** $V=2\pi(\pi+1)$ **C.** $V=2\pi$ **D.** $V=2(\pi+1)$

Câu 46. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\pi(e^2-1)}{2}$ **B.** $V=\dfrac{e^2-1}{2}$ **C.** $V=\dfrac{\pi e^2}{3}$ **D.** $V=\dfrac{\pi(e^2+1)}{2}$

Câu 47. Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{4\pi}{3}$ **B.** $V=2\pi$ **C.** $V=\dfrac{4}{3}$ **D.** $V=2$

Câu 48. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=\dfrac{5\pi}{6}$. **B.** $V=\dfrac{11\pi}{6}$. **C.** $V=\dfrac{7\pi}{11}$. **D.** $V=\dfrac{7}{6}$.

Câu 49. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3x-x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

A. $\frac{85\pi}{10}$ (đvtt). **B.** $\frac{41\pi}{7}$ (đvtt). **C.** $\frac{81\pi}{10}$ (đvtt). **D.** $\frac{8\pi}{7}$ (đvtt).

Câu 50. Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và trục hoành.

A. $\frac{31\pi}{3}$. **B.** $\frac{32\pi}{3}$. **C.** $\frac{34\pi}{3}$. **D.** $\frac{35\pi}{3}$.

C. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN VÀO BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Câu 51. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2m **B.** 2m **C.** 10m **D.** 20m

Câu 52. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\,(\text{m/s})$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a\,(\text{m/s}^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15\,(\text{m/s})$ **B.** $9\,(\text{m/s})$ **C.** $42\,(\text{m/s})$ **D.** $25\,(\text{m/s})$

Câu 53. Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian t (s) là $a(t)=2t-7$ (m/s^2). Biết vận tốc đầu bằng 10 (m/s), hỏi sau bao lâu thì chất điểm đạt vận tốc 18 (m/s)?

A. 5 (s). **B.** 7 (s). **C.** 6 (s). **D.** 8 (s).

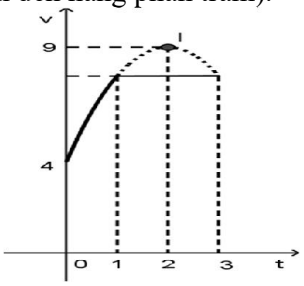
Câu 54. Một ôtô đang chạy với vận tốc 19 m/s thì người lái hãm phanh, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-38t+19\ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 5 m. **B.** 4,5 m. **C.** 4,25 m. **D.** 4,75 m.

Câu 55. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t)=10t-t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là:

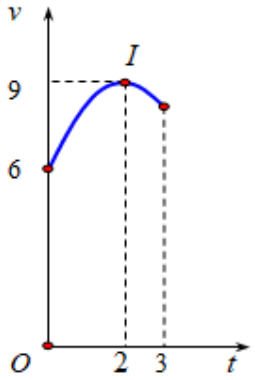
A. $v=9(m/p)$. **B.** $v=5(m/p)$. **C.** $v=7(m/p)$. **D.** $v=3(m/p)$.

Câu 56. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s=15,50(km)$ **B.** $s=23,25(km)$ **C.** $s=13,83(km)$ **D.** $s=21,58(km)$

Câu 57. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v\left(\text{km/h}\right)$ phụ thuộc thời gian $t\left(\text{h}\right)$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I\left(2;9\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.

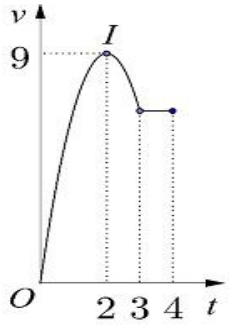


A. $s=26,75\left(\text{km}\right)$ **B.** $s=25,25\left(\text{km}\right)$ **C.** $s=24,25\left(\text{km}\right)$ **D.** $s=24,75\left(\text{km}\right)$

Câu 58. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s\left(\text{m}\right)$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

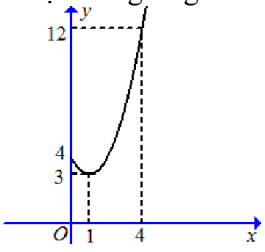
A. $64\left(\text{m/s}\right)$ **B.** $24\left(\text{m/s}\right)$ **C.** $18\left(\text{m/s}\right)$ **D.** $108\left(\text{m/s}\right)$

Câu 59. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I\left(2;9\right)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



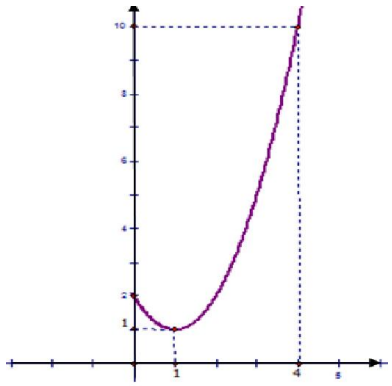
A. $s=26,5$ (km) **B.** $s=24$ (km) **C.** $s=28,5$ (km) **D.** $s=27$ (km)

Câu 60. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/ h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;3)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s=\frac{50}{3}$ (km). **B.** $s=10$(km). **C.** $s=20$(km). **D.** $s=\frac{64}{3}$ (km).

Câu 61. Một chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật đi được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s=\dfrac{40}{3}$(km). **B.** $s=8$(km). **C.** $s=\dfrac{46}{3}$(km). **D.** $s=6$(km).

---------- HẾT ----------

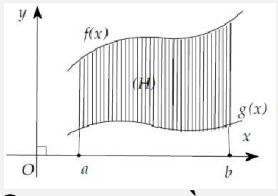
Nguyễn Bảo Vương

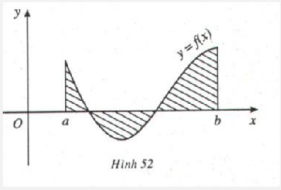
Vấn đề 15 ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

A. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

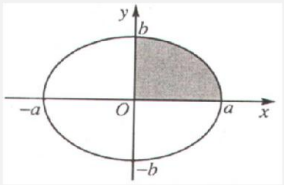
① *Hình phẳng* (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): y=g(x)\\x=a,\ x=b\ (a<b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x.}$

Hình phẳng (H) *giới hạn bởi* $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): Ox: y=0\\x=a,\ x=b\ (a<b)\end{cases}$ *thì diện tích là* $\boxed{S=\int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x.}$





Hình 52



↓

$\boxed{S_{\text{elip}}=\pi ab.}$

$(E):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

② ***Hình thức đề thường hay cho***

Hình thức 1: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H):\{y=f(x),\ y=g(x),\ x=a,\ x=b\ (a<b)\}$

$\xrightarrow{\text{casio}}\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=$ *kết quả, so sánh với bốn đáp án.*

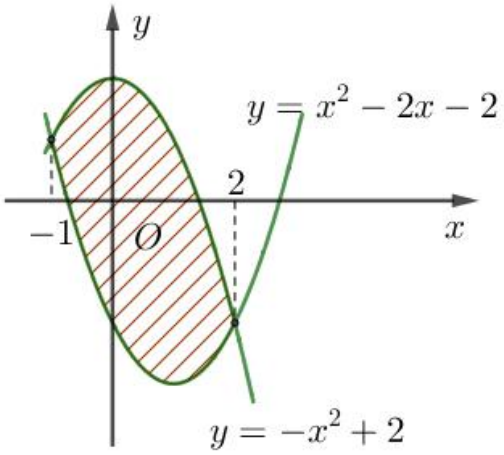
Hình thức 2: Không cho hình vẽ, cho dạng $(H):\{y=f(x),\ y=g(x)\}$

Giải $f(x)=g(x)$ *tìm nghiệm* $x_1,\ldots,x_i$, *với* x_1 *nhỏ nhất,* x_i *lớn nhất* $\xrightarrow{\text{casio}}\int_{x_1}^{x_i} \left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x.$

Hình thức 3: Cho hình vẽ, sẽ giải phương trình tìm tọa độ giao điểm (nếu chưa cho trên hình), chia từng diện tích nhỏ, xổ hình từ trên xuống, ghi công thức và bấm máy tính.

Hình thức 4: Cho ba hàm trở lên, chẳng hạn $y=f(x),\ y=g(x),\ y=h(x)$ *ta nên vẽ hình.*

Câu 1. Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2+2x-4\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Dựa và hình vẽ ta có diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên là:

$\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+2\right)-\left(x^2-2x-2\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x.$

Câu 2. Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2$, $y=-1$, $x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S=\pi\int_0^1\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_0^1\left(2x^2-1\right)\mathrm{d}x$.

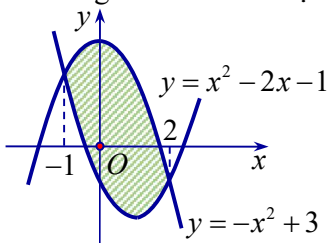
C. $S=\int_0^1\left(2x^2+1\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_0^1\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S=\int_0^1\left|2x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$ do $2x^2+1>0\ \forall x\in[0;1]$.

Câu 3. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^{2}\left(-2x+2\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{2}\left(2x-2\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D.

Ta thấy: $\forall x\in[-1;2]$: $-x^2+3\ge x^2-2x-1$ nên

$$S=\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+3\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x.$$

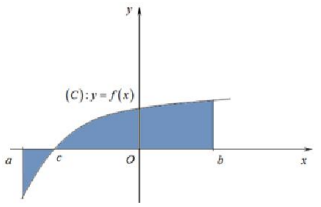
Câu 4. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\int_0^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_0^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. **C.** $S=\pi\int_0^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_0^2\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\mathrm{e}^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ được tính theo công thức $S=\int_0^2\left|\mathrm{e}^x\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Câu 5. Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $S=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

C. $S=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

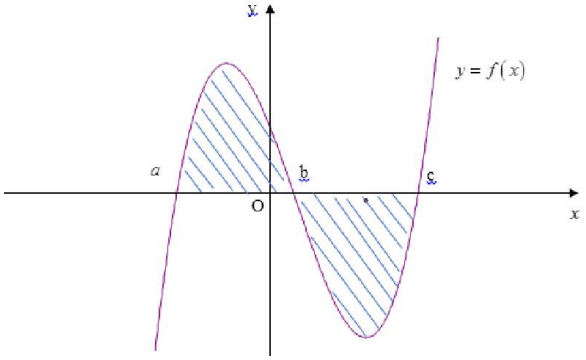
D. $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $S=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^c |f(x)|\mathrm{d}x+\int_c^b |f(x)|\mathrm{d}x=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hình phẳng được đánh dấu trong hình vẽ bên có diện tích là



A. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.

B. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.

D. $-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.

Nguyễn Bảo Vương

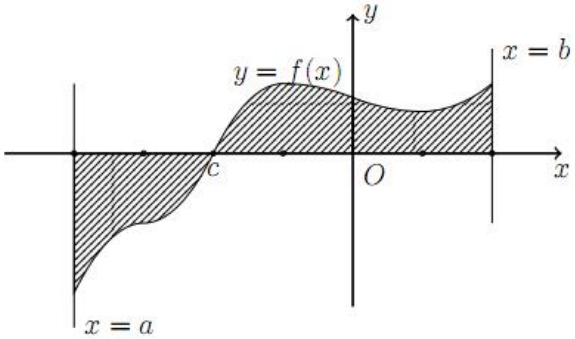
Lời giải

Chọn C

Diện tích hình phẳng:

$S=\int_a^c |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x+\int_b^c |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 7. Diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ $(a<b)$ (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức



A. $S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

B. $S=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_a^b f(x)dx$.

D. $S=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

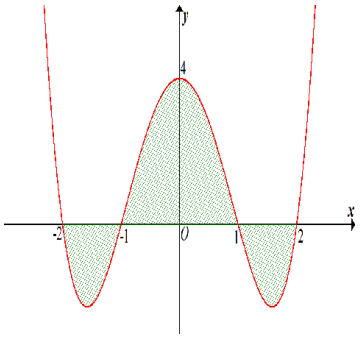
Chọn D

Ta có: $S=\int_a^b|f(x)\mathrm{d}x|=\int_a^c|f(x)\mathrm{d}x|+\int_c^b|f(x)\mathrm{d}x|$.

Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $[a;c]$ có $f(x)<0$; trên $[c;b]$ có $f(x)>0$.

Suy ra $S=-\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)=x^4-5x^2+4$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành (miền phẳng được tô đậm trên hình vẽ). Mệnh đề nào sau đây sai?



A. $S=\int_{-2}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x$. **B.** $S=2\int_0^2|f(x)|\mathrm{d}x$.

C. $S=2\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|+2\left|\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $S=2\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Lời giải

Chọn D

Hình phẳng cần tính diện tích nhận trục tung làm trục đối xứng.

Xét PTHĐ giao điểm: $x^4-5x^2+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_{-2}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x=2\int_0^2|f(x)|\mathrm{d}x=2\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|+2\left|\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$$

Câu 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{12}$ **D.** 13

Lời giải

Chọn A

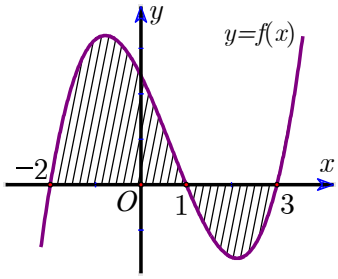
Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-x=x-x^2\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$ là:

$$S=\int_{-2}^{1}\left|x^3-x-\left(x-x^2\right)\right|dx=\int_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)dx-\int_0^1\left(x^3+x^2-2x\right)dx$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-2}^{0}-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{0}^{1}=-\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{3}-4\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)=\frac{37}{12}.$$

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi cá đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-2$ và $x=3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=\int_{-2}^{1}f(x)\,dx-\int_{1}^{3}f(x)\,dx.$ **B.** $S=-\int_{-2}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{3}f(x)\,dx.$

C. $S=\int_{-2}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{3}f(x)\,dx.$ **D.** $S=-\int_{-2}^{1}f(x)\,dx-\int_{1}^{3}f(x)\,dx.$

Lời giải

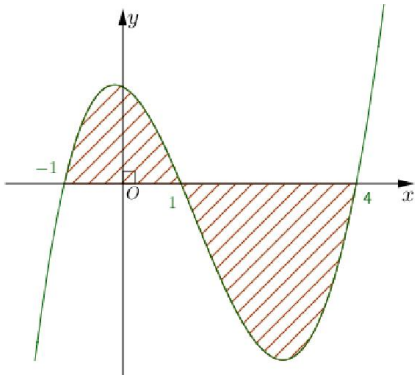
Chọn A

Ta có $S=\int_{-2}^{3}|f(x)|\,dx=S=\int_{-2}^{1}|f(x)|\,dx+\int_{1}^{3}|f(x)|\,dx.$

Do $f(x)\ge 0$ với $\forall x\in[-2;1]$ và $f(x)\le 0$ với $\forall x\in[1;3]$ nên $S=\int_{-2}^{1}f(x)\,dx-\int_{1}^{3}f(x)\,dx.$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=4$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{4}f(x)\,dx.$ **B.** $S=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx-\int_{1}^{4}f(x)\,dx.$

C. $S=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{4}f(x)\,dx.$ **D.** $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\,dx-\int_{1}^{4}f(x)\,dx.$

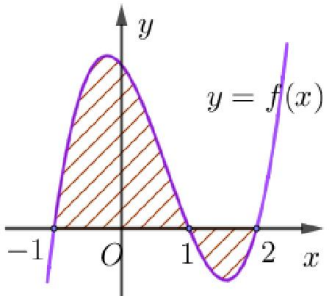
Lời giải

Chọn B

Ta có: hàm số $f(x)\ge 0\,\forall x\in[-1;1]; f(x)\le 0\,\forall x\in[1;4]$, nên:

$S=\int_{-1}^{4}|f(x)|\,dx=\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx+\int_{1}^{4}|f(x)|\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx-\int_{1}^{4}f(x)\,dx.$ Chọn đáp án **B.**

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1, x=2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

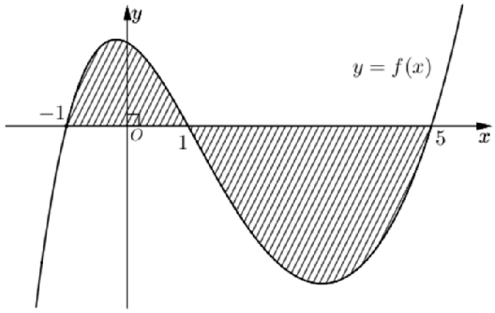
$S=\int_{-1}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x$

Nhìn hình ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[-1;1]$ nên $\int_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$; hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn $[1;2]$ nên $\int_{1}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x=-\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$

Vậy $S=\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$

Nguyễn Bảo Vương

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=5$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S=\int_{-1}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{1}^{5}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5}f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 14. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $y=x$ là:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $y=x$ có hoành độ là nghiệm của phương trình : $x^2=x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Suy ra diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $y=x$ là

$$\int_0^1\left|x^2-x\right|dx=\left|\int_0^1\left(x^2-x\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1\Bigg|=\frac{1}{6}.$$

Câu 15. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ là

A. 8. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm là $-x^2+2x+1=2x^2-4x+1\Leftrightarrow 3x^2-6x=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng là $S=\left|\int_0^2\left[\left(2x^2-4x+1\right)-\left(-x^2+2x+1\right)\right]dx\right|$

$=\left|\int_0^2\left(3x^2-6x\right)dx\right|=\left|\left(x^3-3x^2\right)\Big|_0^2\right|=4$.

Nguyễn Bảo Vương

Câu 16. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

A. $S=\ln 2+1$. **B.** $S=2\ln 2-1$. **C.** $S=2\ln 2+1$. **D.** $S=\ln 2-1$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục tung là $\frac{x-1}{x+1}=0\Leftrightarrow x=1$.

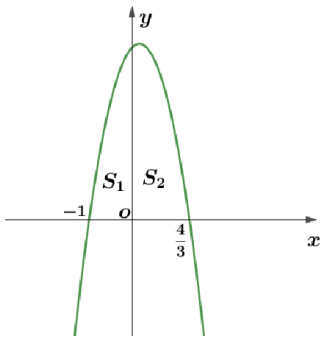
Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Nên ta có $S=\int_0^1\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\left|\int_0^1\frac{x-1}{x+1}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^1\left(1-\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(x-2\ln|x+1|\right)\Big|_0^1\right|=2\ln 2-1$.

Câu 17. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-3x^2+x+4$. Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích phần hình (H) nằm bên trái và bên phải trục tung. Tính tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{208}{343}$. **B.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{54}{343}$. **C.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{135}{343}$. **D.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{135}{208}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $S_1=\int\limits_{-1}^{0}(-3x^2+x+4)\mathrm{d}x=\left(-x^3+\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{5}{2}$.

$S_2=\int\limits_{0}^{\frac{4}{3}}(-3x^2+x+4)\mathrm{d}x=\left(-x^3+\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_{0}^{\frac{4}{4}}=\frac{104}{27}$.

$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2}=\frac{135}{208}$.

Câu 18. Cho S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y=x\sqrt{1+x^2}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=1$. Biết $S=a\sqrt{2}+b\left(a,b\in\mathbb{Q}\right)$. Tính $a+b$.

A. $a+b=\frac{1}{6}$. **B.** $a+b=\frac{1}{2}$. **C.** $a+b=\frac{1}{3}$. **D.** $a+b=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có trục tung có phương trình là: $x=0$.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số $y=x\sqrt{1+x^2}$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=1$ là $S=\int\limits_{0}^{1}x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Mặt khác

$$S=\int\limits_{0}^{1}x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}\left(1+x^2\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{3}\cdot\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}\Big|_{0}^{1}=\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}\cdot$$

Biết $S=a\sqrt{2}+b\left(a,b\in\mathbb{Q}\right)$ nên $a=\frac{2}{3}$ và $b=-\frac{1}{3}\cdot$

Vậy $a+b=\frac{1}{3}\cdot$

Câu 19. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1, x=2$ biết rằng mỗi đơn vị dài trên các trục tọa độ là 2 cm.

A. $\frac{15}{4}\left(\mathrm{cm}^2\right)$. **B.** $\frac{17}{4}\left(\mathrm{cm}^2\right)$. **C.** $17\left(\mathrm{cm}^2\right)$. **D.** $15\left(\mathrm{cm}^2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Mỗi đơn vị diện tích trên mặt phẳng tọa độ là $2.2=4\left(\mathrm{cm}^2\right)$.

Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là $4.\int_{-1}^{2}\left|x^3\right|\mathrm{d}x=4.\left(-\int_{-1}^{0}x^3\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}x^3\mathrm{d}x\right)=4.\left(\frac{1}{4}+4\right)=17\left(\mathrm{cm}^2\right)$.

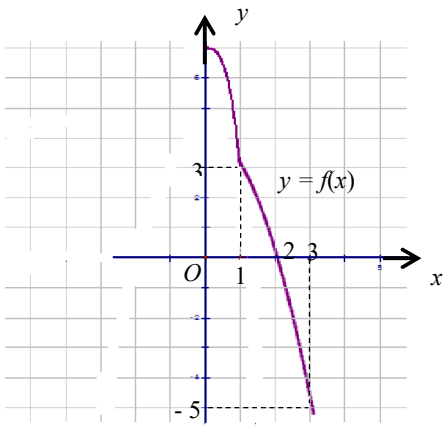
Câu 20. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}7-4x^3 & khi\ \ 0\le x\le 1\\ 4-x^2 & khi\ \ x>1\end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ và các đường thẳng $x=0,x=3,y=0$.

A. $\frac{16}{3}$. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

-Vẽ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.



-Khi đó, diện tích hình phẳng cần tìm là

$S=\int_{0}^{1}\left(7-4x^3\right)dx+\int_{1}^{2}\left(4-x^2\right)dx-\int_{2}^{3}\left(4-x^2\right)dx=\left(7x-x^4\right)\Big|_0^1+\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2-\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^3=10$.

Câu 21. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x\ln x$, trục Ox và đường thẳng $x=e$.

A. $S=\frac{e^2+3}{4}$. **B.** $S=\frac{e^2-1}{2}$. **C.** $S=\frac{e^2+1}{2}$. **D.** $S=\frac{e^2+1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

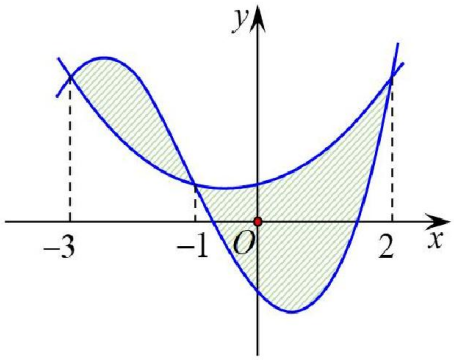
Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y=x\ln x$ và trục Ox: $x\ln x=0\Leftrightarrow x=1$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\int_{1}^{e}\left|x\ln x\right|dx=\int_{1}^{e}x\ln x dx$.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

$\Rightarrow S=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^2+1}{4}$.

Câu 22. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\frac{1}{2}\,(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{253}{12}$ **B.** $\frac{125}{12}$ **C.** $\frac{253}{48}$ **D.** $\frac{125}{48}$

Lời giải

Chọn C

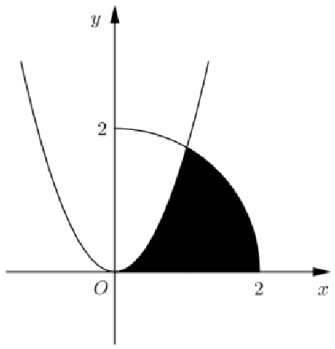
Vì phương trình $f(x)-g(x)=0$ có 3 nghiệm $-3;-1;2$ nên

$f(x)-g(x)=a(x+3)(x-2)(x+1).$

So sánh hệ số tự do ta được $-6a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$. Do đó

$S=\int_{-3}^{2}\left|\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2)\right|\mathrm{d}x=\frac{253}{48}.$

Câu 23. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$ **D.** $\frac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B

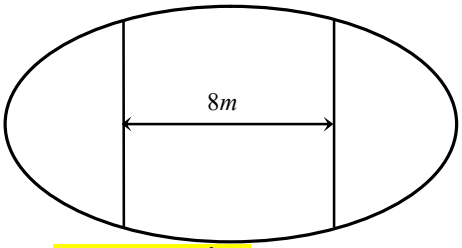
Phương trình hoành độ giao điểm giữa parabol và cung tròn ta được $\sqrt{3}x^2=\sqrt{4-x^2}\Leftrightarrow x=1$ với $0\le x\le 2$

Ta có diện tích $S=\int_0^1\sqrt{3}x^2dx+\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}x^3\Big|_0^1+\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}+\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx$

Đặt: $x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos t dt; x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}; x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow S=\frac{\sqrt{3}}{3}+2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$$

Câu 24. Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/$1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)

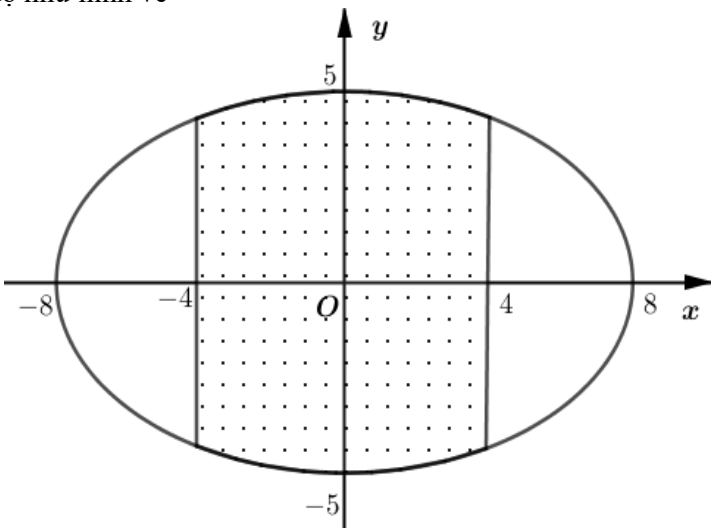


A. 7.862.000 đồng **B.** 7.653.000 đồng **C.** 7.128.000 đồng **D.** 7.826.000 đồng

Lời giải

Chọn B

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Từ giả thiết ta có $2a=16\Rightarrow a=8$ và $2b=10\Rightarrow b=5$

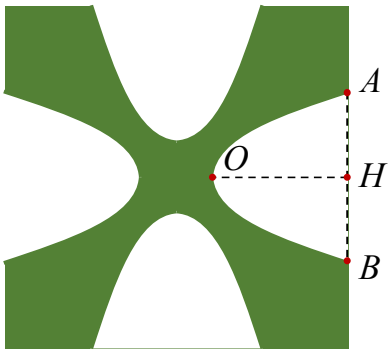
Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y=\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\quad (E_1)\\ y=-\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\quad (E_2)\end{array}\right.$

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1); (E_2); $x=-4$; $x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\int_{-4}^{4}\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,dx=\frac{5}{2}\int_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\,dx$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x=8\sin t$, ta được $S=\frac{40\pi}{3}+20\sqrt{3}$

Khi đó số tiền là $T=\left(\frac{40\pi}{3}+20\sqrt{3}\right).100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

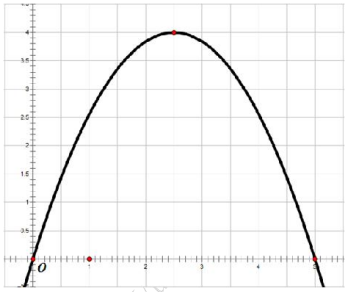
Câu 25. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB=5\text{cm}$, $OH=4\text{cm}$. Tính diện tích bề mặt hoa văn đó.



A. $\frac{160}{3}\text{cm}^2$. **B.** $\frac{140}{3}\text{cm}^2$. **C.** $\frac{14}{3}\text{cm}^2$. **D.** $50\ \text{cm}^2$.

Lời giải

Chọn B



Đưa parabol $(P): y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ vào hệ trục Oxy.

Parabol đi qua gốc tọa độ và các điểm $\left(\frac{5}{2};4\right)$, $(5;0)$(do $AB=5\text{cm}$, $OH=4\text{cm}$).

Suy ra $\begin{cases} c=0 \\ \frac{25}{4}a+\frac{5}{2}b+c=4 \\ 25a+5b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{16}{25} \\ c=0 \\ b=\frac{16}{5} \end{cases} \Rightarrow (P): y=-\frac{16}{25}x^2+\frac{16}{5}x$.

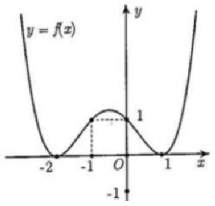
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y=-\frac{16}{25}x^2+\frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=5$ là $S=\int_0^5\left(-\frac{16}{25}x^2+\frac{16}{5}x\right)\text{d}x=\frac{40}{3}$.

Tổng diện tích phần bị khoét đi là $S_1=4S=\frac{160}{3}\text{cm}^2$.

Diện tích của hình vuông là $S_{hv}=100\text{cm}^2$.

Vậy diện tích bề mặt hoa văn là $S_2=S_{hv}-S_1=100-\frac{160}{3}=\frac{140}{3}\text{cm}^2$.

Câu 26. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ



Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ có diện tích là

A. $\frac{127}{40}$. **B.** $\frac{127}{10}$. **C.** $\frac{107}{5}$. **D.** $\frac{13}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Vì hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ nên hàm số có dạng:

$f(x)=a(x+2)^2(x-1)^2,\ a>0$.

Mà $f(1)=1\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$. Vậy $f(x)=\frac{1}{4}(x+2)^2(x-1)^2$.

$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4}\left[2(x+2)(x-1)^2+2(x-1).(x+2)^2\right]=\frac{1}{2}(x+2)(x-1)(2x+1)$.

Xét phương trình $f(x)=f'(x)\Leftrightarrow(x+2)(x-1)\left(x^2-3x-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\\x=-2\\x=4\end{array}\right.$.

$f(x)-f'(x)=\frac{1}{4}(x+2)(x-1)\left(x^2-3x-4\right)$.

Vậy diện tích cần tìm là:

$S=\int_{-2}^{4}\left|f(x)-f'(x)\right|\mathrm{d}x$

$=\left|\int_{-2}^{-1}\left(f(x)-f'(x)\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{-1}^{1}\left(f(x)-f'(x)\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{1}^{4}\left(f(x)-f'(x)\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{107}{5}$.

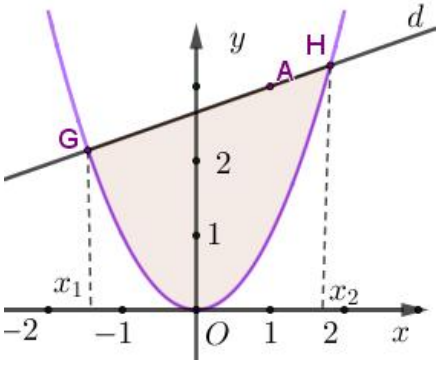
Nguyễn Bảo Vương

Câu 27. Cho parabol (P) có phương trình $y=x^2$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(1;3)$. Giả sử khi đường thẳng d có hệ số góc k thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng d nhỏ nhất. Giá trị thực của k thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;-3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-3;0)$. **D.** $(0;3)$.

Lời giải

Chọn D



Phương trình của d là: $y=k(x-1)+3$.

Hoành độ giao điểm của d và (P) là nghiệm của phương trình: $x^2-kx+k-3=0\ (1)$.

Do $k^2-4(k-3)=(k-2)^2+8>0,\forall k\in\mathbb{R}$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$.

Theo định lý Vi-ét ta có: $x_1+x_2=k, x_1.x_2=k-3$.

Diện tích miền phẳng D giới hạn bởi d và (P) là:

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left(-x^2+kx-k+3\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+k\frac{x^2}{2}-kx+3x\right)\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$=\left(-\frac{x_2^3}{3}+k\frac{x_2^2}{2}-kx_2+3x_2\right)-\left(-\frac{x_1^3}{3}+k\frac{x_1^2}{2}-kx_1+3x_1\right)$$

$$=\frac{x_1^3-x_2^3}{3}-\frac{k}{2}\left(x_1^2-x_2^2\right)+k\left(x_1-x_2\right)-3\left(x_1-x_2\right)$$

$$=\left(x_1-x_2\right)\left[\frac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}{3}-\frac{k}{2}\left(x_1+x_2\right)+k-3\right]$$

$$=\left(x_1-x_2\right)\left[\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-x_1x_2}{3}-\frac{k^2}{2}+k-3\right]$$

$$=\left(x_1-x_2\right)\left[\frac{k^2-(k-3)}{3}-\frac{k^2}{2}+k-3\right]$$

$$=\frac{1}{6}\left(x_2-x_1\right)\left(k^2-4k+12\right)$$

Nguyễn Bảo Vương

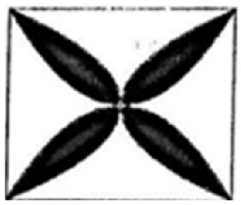
Suy ra

$$S^2=\frac{1}{36}\left[\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2\right].\left(k^2-4k+12\right)^2=\frac{1}{36}\left[(k-2)^2+8\right]^3\ge\frac{128}{9}.$$

$$\Rightarrow S\ge\frac{8\sqrt{2}}{3}\ (\text{do } S>0\ )$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $k=2$.

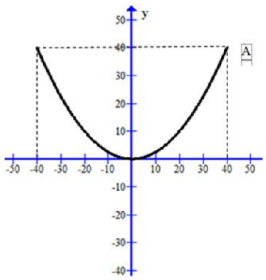
Câu 28. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh $80cm$. Người thiết kế đã sử dụng 4 đường parabol có chung đỉnh tại tâm của viên gạch để tạo ra 4 cánh hoa (được tô màu sẫm như hình vẽ bên). Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng



A. $\frac{800}{3}\left(cm^2\right)$. **B.** $\frac{1600}{3}\left(cm^2\right)$. **C.** $\frac{400}{3}\left(cm^2\right)$. **D.** $250\left(cm^2\right)$.

Lời giải

Chọn B



Ký hiệu diện tích một cánh hoa, diện tích một hình parabol,diện tích hình vuông lần lượt là S_H, S_P, S_{hv}. Ta có: $S_H = \dfrac{4S_P - S_{hv}}{4}$.

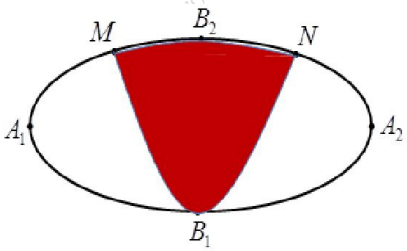
Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, sao cho parabol có đỉnh $O(0;0)$ và đi qua điểm $A(40;40)$

Khi đó $(P): y = \dfrac{1}{40}x^2$.

Diện tích parabol chính là diện tích miền hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P), y = 40, x = -40, x = 40$.

$\Rightarrow S_P = \int_{-40}^{40}\left[40 - \dfrac{1}{40}x^2\right]dx = \dfrac{6400}{3}(cm^2)$. Do đó: $S_H = \dfrac{4.\dfrac{6400}{3} - 80.80}{4} = \dfrac{1600}{3}(cm^2)$.

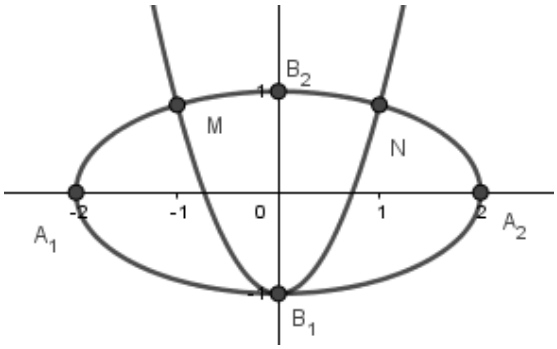
Câu 29. Một biển quảng cáo có dạng Elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2. như hình vẽ. Người ta chia Elip bởi parapol có đỉnh B_1,trục đối xứng B_1B_2 và đi qua các điểm M, N .Sau đó sơn phần tô đậm với giá 200.000 đồng/m^2 và trang trí đèn led phần còn lại với giá 500.000 đồng/m^2 .Hỏi kinh phí sử dụng gần nhất với giá trị nào dưới đây? Biết $A_1A_2 = 4m$, $B_1B_2 = 2m$, $MN = 2m$.



A. 2.341.000 đồng. **B.** 2.057.000 đồng. **C.** 2.760.000 đồng. **D.** 1.664.000 đồng.

Lời giải

Chọn A



Phương trình (E)có dạng: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$.

Diện tích (E) là: $S_E = \pi ab = 2\pi$.

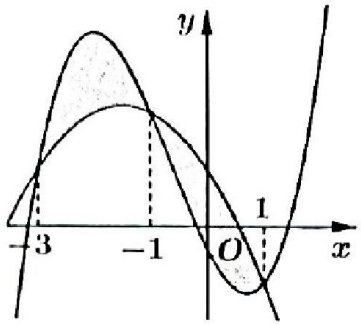
Vì $MN = 2m$ nên $M\left(1; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Vì Parabol có đỉnh $B(0;-1)$ và đi qua $M\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ nên (P) có phương trình: $y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2-1$.

Diện tích phần tô đậm giới hạn bởi $y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2-1$ và $y=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ là: $S_1=\int_{-1}^{1}\left|\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x^2+1\right|\mathrm{d}x$

Vậy kinh phí cần sử dụng là: $P=S_1.200000+(S_E-S_1).500000\approx 2340000$ đồng.

Câu 30. Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\frac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;1$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho (miền tô đậm) có diện tích bằng

A. 8 **B.** 5 **C.** 4 **D.** $\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn C

$f(x)-g(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}$

Do $y=f(x)\,\&\,y=g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3;-1;1$ nên ta có:

$$\begin{cases}-27a+9(b-d)-3(c-e)-\frac{3}{2}=0\\ -a+(b-d)-(c-e)-\frac{3}{2}=0\\ a+(b-d)+(c-e)-\frac{3}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b-d=\frac{3}{2}\\ c-e=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

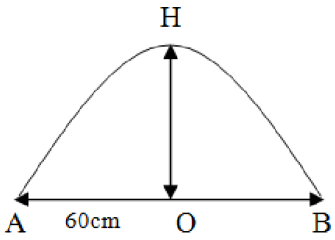
$\Rightarrow f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

Khi đó:

$S=\left|\int_{-3}^{-1}[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{-1}^{1}[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x\right|$

$=\left|\int_{-3}^{-1}\frac{1}{2}\left(x^3+3x^2-x-3\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left(x^3+3x^2-x-3\right)\mathrm{d}x\right|=4$

Câu 31. Bạn An cần mua một chiếc gương có đường viền là đường Parabol bậc 2 (xem hình vẽ). Biết rằng khoảng cách đoạn $AB = 60\,\text{cm}$, $OH = 30\,\text{cm}$. Diện tích của chiếc gương bạn An mua là

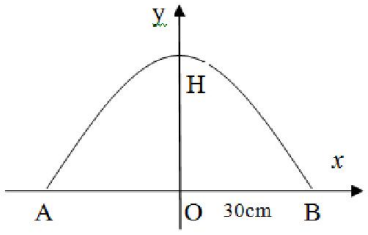


A. $900\left(\text{cm}^2\right)$. **B.** $1000\left(\text{cm}^2\right)$. **C.** $1200\left(\text{cm}^2\right)$. **D.** $1400\left(\text{cm}^2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Đường viền chiếc gương là đường Parabol $y = ax^2 + bx + c\left(a \neq 0\right)$ có đỉnh $H\left(0;30\right)$ và đi qua điểm $B\left(30;0\right)$.



Ta có: $\begin{cases} c = 30 \\ -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ 900a + 30b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 30 \\ b = 0 \\ a = -\dfrac{1}{30} \end{cases}$.

Nguyễn Bảo Vương

Diện tích chiếc gương là diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol $y = -\dfrac{1}{30}x^2 + 30$ và trục hoành. Diện tích chiếc gương là:

$$S = \int_{-30}^{30} \left| -\frac{1}{30}x^2 + 30 \right| \mathrm{d}x = 2\left| \int_0^{30} \left(-\frac{1}{30}x^2 + 30 \right) \mathrm{d}x \right| = 2\left| \left(-\frac{1}{90}x^3 + 30x \right) \Big|_0^{30} \right| = 1200\left(\text{cm}^2\right).$$

Câu 32. Cho $\left(H\right)$ là hình phẳng giới hạn bởi parabol $\left(P\right): y = x^2$, tiếp tuyến với $\left(P\right)$ tại điểm $M\left(2;4\right)$ và trục hoành. Tính diện tích của hình phẳng $\left(H\right)$?

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

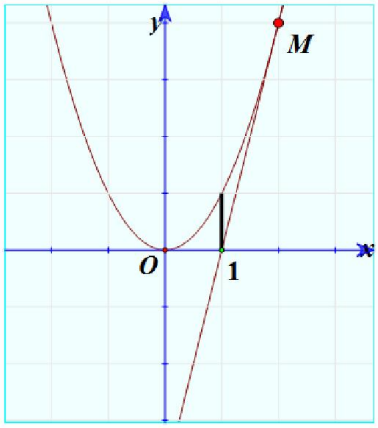
Chọn A

Ta có $y' = \left(x^2\right)' = 2x$.

Tiếp tuyến d với $\left(P\right)$ tại điểm $M\left(2;4\right)$ có phương trình là:

$y = f'\left(2\right)\left(x-2\right)+4 \Leftrightarrow y = 4\left(x-2\right)+4 \Leftrightarrow y = 4x-4.$

Giao điểm của d và Ox là $A\left(1;\ 0\right)$

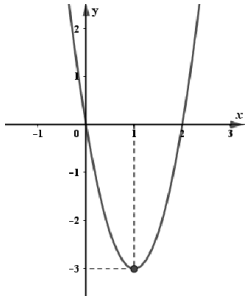


Trên đoạn $[0;\ 1]$ hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và trục hoành.

Trên đoạn $[1;\ 2]$ hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và tiếp tuyến d.

Vậy diện tích của hình phẳng (H) được xác định là: $S=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2\left(x^2-4x+4\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị (C). Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ được cho bởi hình vẽ dưới đây



Biết rằng đường thẳng $d: y=x$ cắt (C) tạo thành hai phần hình phẳng có diện tích bằng nhau. Tổng $a+b+c+d$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $f'(x)=mx^2+nx+p\ (m\neq 0)$ và có đồ thị (P) như hình vẽ đề bài.

$I(1;-3)$ là đỉnh của $(P)\Rightarrow\begin{cases}\frac{-n}{2m}=1\\ m+n+p=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m+n=0\\ m+n+p=-3\end{cases}(1).$

$O(0;0)\in(P)\Rightarrow p=0.\quad(2)$

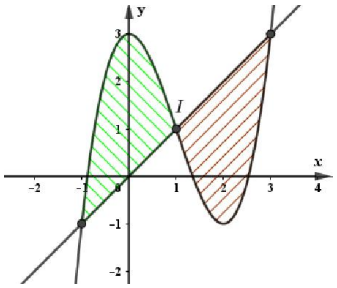
Từ (1) và (2), suy ra $m=3, n=-6\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x.$

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(3x^2-6x\right)\mathrm{d}x=x^3-3x^2+C.$

$f''(x)=6x-6\Rightarrow$ điểm uốn $I(1;C-2).$

$I\in d\Rightarrow C=3.$

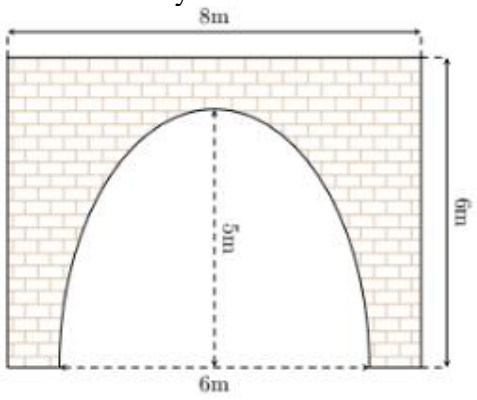
Thử lại: $x^3-3x^2+3=x$ có 3 nghiệm.



Suy ra $f(x)=x^3-3x^2+3$.

Vậy $a+b+c+d=1$.

Câu 34. Một cái cổng có dạng như hình vẽ, với chiều cao 6m và chiều rộng 8m. Mái vòm của cổng có hình bán elip với chiều rộng là 6m, điểm cao nhất của mái vòm là 5m (tham khảo hình vẽ). Người ta muốn lát gạch hoa để trang trí cho cổng với chi phí là 250 000 đồng/m^2. Hỏi số tiền cần chi trả gần nhất với số nào sau đây?

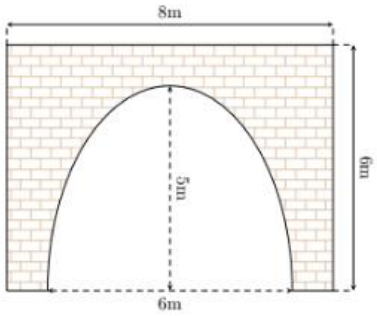


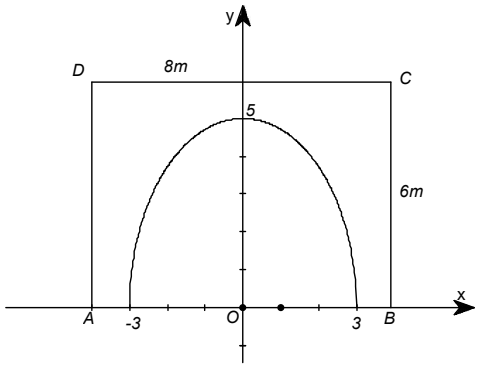
A. 6.210.000. **B.** 6.110.000. **C.** 6.100.000. **D.** 6.145.000.

Lời giải

Chọn B

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ:





• Diện tích hình chữ nhật $ABCD$: $S_1=6.8=48\,\text{m}^2$.

• Bán đường elip có phương trình: $y=\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$

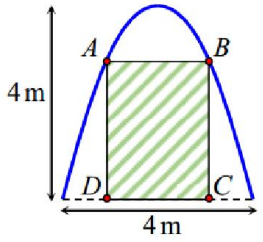
$\Rightarrow$ Diện tích cổng là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$ và trục hoành:

$S_2=\frac{5}{3}\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx\approx 23,562\,\text{m}^2$

• Diện tích phần cần lát gạch hoa: $S=S_1-S_2=48-23,562=24,438$.

$\Rightarrow$ Số tiền cần chi trả để lát gạch hoa: $T=(24,438).250\,000=6.109.500$ đồng.

Câu 35. Đợt thi đua 26/3 Đoàn trường THPT Nho Quan A có thực hiện một dự án trưng bày trên một pano có dạng parabol như hình vẽ. Biết rằng Đoàn trường sẽ yêu cầu các lớp gửi hình dự thi và dán lên khu vực hình chữ nhật $ABCD$, phần còn lại sẽ được trang trí hoa văn cho phù hợp. Chi phí dán hoa văn là 150.000đ trên $1m^2$ bảng. Hỏi chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là bao nhiêu(kết quả làm tròn lấy phần nguyên)?

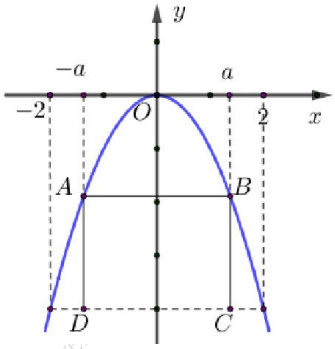


A. 575.034 đồng. **B.** 676.239 đồng. **C.** 536.272 đồng. **D.** 423.215 đồng.

Lời giải

Chọn B

Gắn hình Parabol đã cho vào hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, dễ thấy phương trình của Parabol đã cho là $y=-x^2$.



Đặt tọa độ $A\left(-a;-a^2\right)$ với $0<a<2$, ta có $B\left(a;-a^2\right), C\left(a;-4\right), D\left(-a;-4\right)$.

Dễ thấy diện tích phần Parabol phải trang trí nhỏ nhất khi diện tích hình chữ nhật $ABCD$ lớn nhất với $S_{ABCD}=AB.AD=2a.\left(4-a^2\right)\ m^2$.

Xét $f\left(a\right)=2a\left(4-a^2\right)\Rightarrow f'\left(a\right)=8-6a^2$.

$f'\left(a\right)=0\Leftrightarrow a=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, với điều kiện $0<a<2$ nên $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ta có bảng biến thiên

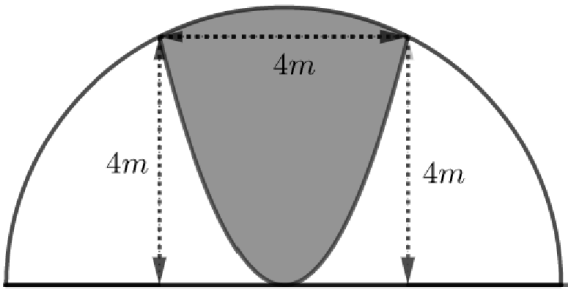
a	0		$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$		2
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$	0	↗	$\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$	↘	0

Diên tích phần Parabol trưng bày là: $S_{(P)}=4.4-\int\limits_{-2}^{2}\left|-x^2\right|dx=\dfrac{32}{3}$.

Vậy diện tích cần trang trí ít nhất là: $\dfrac{32}{3}-\dfrac{32\sqrt{3}}{9}$.

Chi phí thấp nhất cho việc hoàn tất hoa văn trên pano sẽ là: $\left(\dfrac{32}{3}-\dfrac{32\sqrt{3}}{9}\right).150000\approx 676239$.

Câu 36. Một khuôn viên có dạng là nửa hình tròn đường kính bằng $4\sqrt{5}$ m. Trên đó, người ta thiết kế một phần để trồng hoa có dạng của một cách hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần tô đậm) và cách nhau một khoảng bằng 4 m. Phần còn lại của khuôn viên (phần không tô đậm) dành để trồng cỏ.



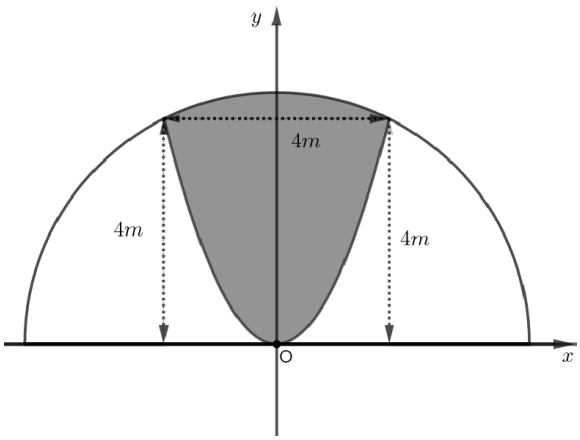
Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí để trồng cỏ là 100.000 đồng/m^2 Số tiền cần có để trồng cỏ là bao nhiêu (số tiền được làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 2 388 000 đồng. **B.** 3 895 000 đồng. **C.** 1 194 000 đồng. **D.** 1 948 000 đồng.

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình nửa đường tròn trên là $y=\sqrt{20-x^2}$

Phương trình parabol có đỉnh là gốc tọa độ có dạng $y=ax^2$

Parabol đi qua điểm $(2;4)$ suy ra. Vậy phương trình parabol là: $y=x^2$.

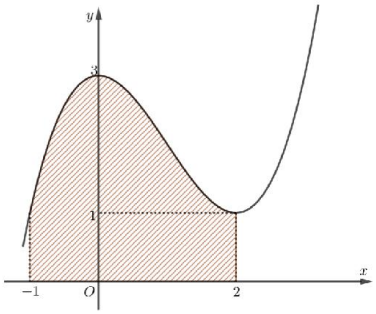
Diện tích phần tô đậm: $S_1=\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{20-x^2}-x^2\right)dx$

Diện tích nửa đường tròn: $S=\frac{1}{2}\pi\left(2\sqrt{5}\right)^2=10\pi\ (\text{m}^2)$

Diện tích phần trồng cỏ là: $S_2=S-S_1$.

Khi đó số tiền để trồng cỏ là: $100000.\ S_2\approx 1948000$ đồng.

Câu 37. Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+c$, các đường thẳng $x=-1,\ x=2$ và trục hoành (miền gạch chéo cho trong hình vẽ).



A. $S=\frac{51}{8}$. **B.** $S=\frac{53}{8}$. **C.** $S=\frac{52}{8}$. **D.** $S=\frac{50}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=3ax^2+2bx$

$y'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\frac{2b}{3a}\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $(0;3)$ và $(2;1)$.

Khi đó ta có: $\begin{cases}c=3\\-\frac{2b}{3a}=2\\8a+4b+3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=3\\3a+b=0\\8a+4b=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-\frac{3}{2}\\c=3\end{cases}$

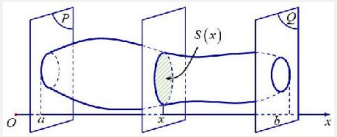
Vậy $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3$.

Khi đó diện tích phần gạch chéo là: $S=\int_{-1}^{2}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+3\right)dx=\frac{51}{8}$.

B. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH

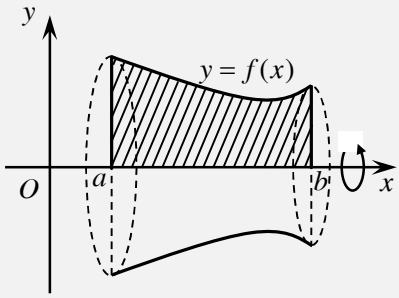
① *Thể tích vật thể*

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a\le x\le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x}$.



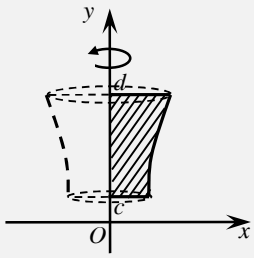
② *Thể tích khối tròn xoay*

a) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục Ox :*



$\begin{cases}(C): y=f(x)\\(Ox): y=0\\x=a\\x=b\end{cases}$ $\boxed{V_x=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx}$

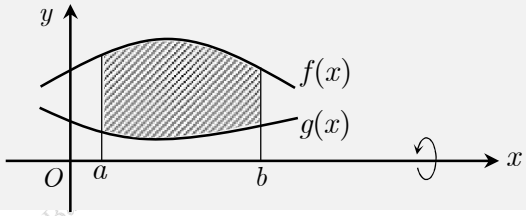
b) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường* $x=g(y)$, *trục hoành và hai đường thẳng* $y=c$, $y=d$ *quanh trục* Oy :



$\begin{cases}(C): x=g(y)\\(Oy): x=0\\y=c\\y=d\end{cases}$ $\boxed{V_y=\pi\int_c^d\left[g(y)\right]^2dy}$

c) *Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường* $y=f(x)$, $y=g(x)$ *(cùng nằm một phía so với* Ox*) và hai đường thẳng* $x=a$, $x=b$ *quanh trục* Ox :

$\boxed{V=\pi\int_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|\mathrm{d}x.}$



Câu 38. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$ **B.** $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)dx$ **C.** $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)^2dx$ **D.** $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)dx$

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là:

$V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2dx.$

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b(a<b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

A. $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ **B.** $V=2\pi\int_a^b f^2(x)dx$ **C.** $V=\pi^2\int_a^b f^2(x)dx$ **D.** $V=\pi^2\int_a^b f(x)dx$

Lời giải

Chọn A

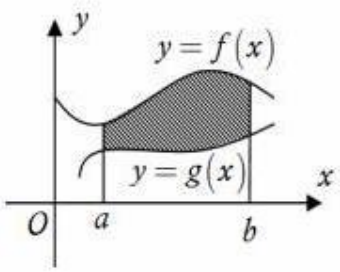
Câu 40. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2, y=0, x=1, x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có: $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$.

Câu 41. Cho hình phẳng trong hình (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào?



A. $V=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]^2dx$. **B.** $V=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx$.

C. $V=\pi\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]^2dx$. **D.** $V=\pi\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$.

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn B

Gọi V_1 là thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a; x=b$ khi quay quanh trục hoành. Ta có $V_1=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Gọi V_2 là thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=g(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a; x=b$ khi quay quanh trục hoành. Ta có $V_2=\pi\int_a^b g^2(x)dx$.

Do $f(x)>g(x)$, $\forall x\in[a;b]$ nên thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (phần tô đậm) quanh trục hoành $V=V_1-V_2=\pi\int_a^b\left[f^2(x)-g^2(x)\right]dx$.

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vật thể (H) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=a$ và $x=b$. Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của (H) bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x, với $a\le x\le b$. Giả sử hàm số $y=S(x)$ liện tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, thể tích của vật thể (H) được cho bởi công thức :

A. $V=\pi\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int_a^b\left[S(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

C. $V=\int_a^b\left[S(x)\right]^2\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

Do $S(x)$ là diện tích thiết diện của (H) bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x, với $a \le x \le b$.

Khi đó, thể tích của vật thể (H) được tính bởi công thức $V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x$.

Câu 43. Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1 \le x \le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $V = 32 + 2\sqrt{15}$ **B.** $V = \dfrac{124\pi}{3}$

C. $V = \dfrac{124}{3}$ **D.** $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$

Lời giải

Chọn C

Diện tích thiết diện là: $S(x) = 3x.\sqrt{3x^2-2}$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V = \int_1^3 3x.\sqrt{3x^2-2}dx = \dfrac{124}{3}$

Câu 44. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = (\pi+1)\pi$ **B.** $V = \pi - 1$ **C.** $V = \pi + 1$ **D.** $V = (\pi-1)\pi$

Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Chọn A

$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2+\cos x}\right)^2 dx = \pi\left(2x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(\pi+1).$$

Câu 45. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2\pi^2$ **B.** $V = 2\pi(\pi+1)$ **C.** $V = 2\pi$ **D.** $V = 2(\pi+1)$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình $\sqrt{2+\sin x} = 0$ vô nghiệm nên:

$$V = \pi\int_0^{\pi} \left(\sqrt{2+\sin x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi} (2+\sin x)\mathrm{d}x = \pi\left(2x-\cos x\right)\Big|_0^{\pi} = 2\pi(\pi+1).$$

Câu 46. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \dfrac{\pi(e^2-1)}{2}$ **B.** $V = \dfrac{e^2-1}{2}$ **C.** $V = \dfrac{\pi e^2}{3}$ **D.** $V = \dfrac{\pi(e^2+1)}{2}$

Lời giải

Chọn A

$$V=\pi\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\pi\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$$

Câu 47. Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\frac{4\pi}{3}$ **B.** $V=2\pi$ **C.** $V=\frac{4}{3}$ **D.** $V=2$

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1=\frac{4\pi}{3}$$

Câu 48. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}-2$, $y=0$ và $x=9$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V=\frac{5\pi}{6}$. **B.** $V=\frac{11\pi}{6}$. **C.** $V=\frac{7\pi}{11}$. **D.** $V=\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}-2$ và $y=0$ là:

$$\sqrt{x}-2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ \sqrt{x}=2\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$$

Khi đó: $V=\pi\int_4^9\left(\sqrt{x}-2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{11\pi}{6}$.(Dùng MTCT).

Câu 49. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3x-x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành.

A. $\frac{85\pi}{10}$(đvtt). **B.** $\frac{41\pi}{7}$(đvtt). **C.** $\frac{81\pi}{10}$(đvtt). **D.** $\frac{8\pi}{7}$(đvtt).

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $3x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=3\end{array}\right.$.

Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=3x-x^2$ và trục hoành, quanh trục hoành là

$$V=\pi\int_0^3\left(3x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^3\left(9x^2-6x^3+x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(3x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^3=\frac{81\pi}{10}\text{(đvtt)}.$$

Câu 50. Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và trục hoành.

A. $\frac{31\pi}{3}$. **B.** $\frac{32\pi}{3}$. **C.** $\frac{34\pi}{3}$. **D.** $\frac{35\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{4x-x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình (H) quanh Ox là: $V=\pi\int_0^4\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{32\pi}{3}$.

C. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN VÀO BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Câu 51. Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-5t+10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2m **B.** 2m **C.** 10m **D.** 20m

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $-5t+10=0\Leftrightarrow t=2$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là

$$s=\int_0^2(-5t+10)\,dt=\left(-\frac{5}{2}t^2+10t\right)\Big|_0^2=10m.$$

Câu 52. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\dfrac{1}{100}t^2+\dfrac{13}{30}t\,(\mathrm{m/s})$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a\,(\mathrm{m/s^2})$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15\,(\mathrm{m/s})$ **B.** $9\,(\mathrm{m/s})$ **C.** $42\,(\mathrm{m/s})$ **D.** $25\,(\mathrm{m/s})$

Lời giải

Chọn D

Ta có $v_B(t)=\int a.\mathrm{dt}=at+C$, $v_B(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow v_B(t)=at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A=\int_0^{25}\left(\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\right)\mathrm{dt}=\left(\frac{1}{300}t^3+\frac{13}{60}t^2\right)\Big|_0^{25}=\frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$$S_B=\int_0^{15}at.\mathrm{dt}=\frac{at^2}{2}\Big|_0^{15}=\frac{225a}{2}.$$

Ta có $\dfrac{375}{2}=\dfrac{225a}{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{5}{3}$.

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15)=\dfrac{5}{3}.15=25\,(\mathrm{m/s})$.

Câu 53. Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang với gia tốc phụ thuộc thời gian t (s) là $a(t)=2t-7$ (m/s^2). Biết vận tốc đầu bằng 10 (m/s), hỏi sau bao lâu thì chất điểm đạt vận tốc 18 (m/s)?

A. 5 (s). **B.** 7 (s). **C.** 6 (s). **D.** 8 (s).

Lời giải

Chọn D

Ta có $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int(2t-7)\mathrm{d}t=t^2-7t+C$, mặt khác $v(0)=10$ nên $C=v(0)=10$.

$\Rightarrow v(t)=t^2-7t+10$.

Để chất điểm đạt vận tốc 18 (m/s) thì $v(t)=18 \Leftrightarrow t^2-7t-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=8 \ (\text{nhận}) \\ t=-1 \ (\text{loại}) \end{array}\right.$.

Vậy tại thời điểm $t=8$ (s) thì chất điểm đạt vận tốc 18 (m/s).

Câu 54. Một ôtô đang chạy với vận tốc 19 m/s thì người lái hãm phanh, ôtô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-38t+19 \ (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu hãm phanh. Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 5 m. **B.** 4,5 m. **C.** 4,25 m. **D.** 4,75 m.

Lời giải

Chọn D

Thời điểm người lái hãm phanh: $t=0$.

Thời điểm ôtô dừng hẳn: $v(t)=0 \Rightarrow -38t+19=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

Ta có: $s(t)=\int v(t)\,\mathrm{d}t$.

Từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ôtô còn di chuyển được:

$$s=\int_0^{\frac{1}{2}} v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{2}}(-38t+19)\,\mathrm{d}t=\frac{19}{4}=4,75 \ (m).$$

Câu 55. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t)=10t-t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là:

A. $v=9(m/p)$. **B.** $v=5(m/p)$. **C.** $v=7(m/p)$. **D.** $v=3(m/p)$.

Lời giải

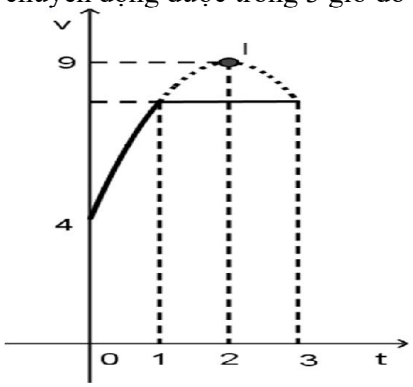
Chọn A

Gọi b (phút) là thời gian khí cầu từ độ cao 162 (mét) chuyển động cho đến khi tiếp đất.

Ta có $s=\int_0^b v(t)dt \Rightarrow 162=\int_0^b (10t-t^2)dt \Rightarrow 162=5b^2-\frac{1}{3}b^3 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}b^3+5b^2-162=0 \Leftrightarrow b=9$.

Vậy vận tốc của khí cầu tại thời điểm tiếp đất là $v=10.9-9^2=9(m/p)$.

Câu 56. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s=15,50(km)$ **B.** $s=23,25(km)$

C. $s=13,83(km)$ **D.** $s=21,58(km)$

Lời giải

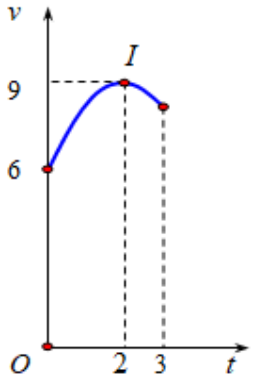
Chọn D

Gọi phương trình của parabol $v=at^2+bt+c$ ta có hệ như sau: $\begin{cases} c=4 \\ 4a+2b+c=9 \\ -\dfrac{b}{2a}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5 \\ c=4 \\ a=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$

Với $t=1$ ta có $v=\dfrac{31}{4}$.

Vậy quãng đường vật chuyển động được là $s=\int_0^1\left(-\dfrac{5}{4}t^2+5t+4\right)dt+\int_1^3\dfrac{31}{4}dt=\dfrac{259}{12}\approx 21,583$

Câu 57. Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



Nguyễn Bảo Vương

A. $s=26,75(\text{km})$ **B.** $s=25,25(\text{km})$

C. $s=24,25(\text{km})$ **D.** $s=24,75(\text{km})$

Lời giải

Chọn D

Tìm được phương trình của vận tốc là $v(t)=-\dfrac{3}{4}t^2+3t+6$

Vậy $S=\int_0^3\left(-\dfrac{3}{4}t^2+3t+6\right)dt=24,75$

Câu 58. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s(\text{m})$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $64(\text{m/s})$ **B.** $24(\text{m/s})$ **C.** $18(\text{m/s})$ **D.** $108(\text{m/s})$

Lời giải

Chọn B

Vận tốc của vật chuyển động là $v=s'=-\dfrac{3}{2}t^2+12t=f(t)$

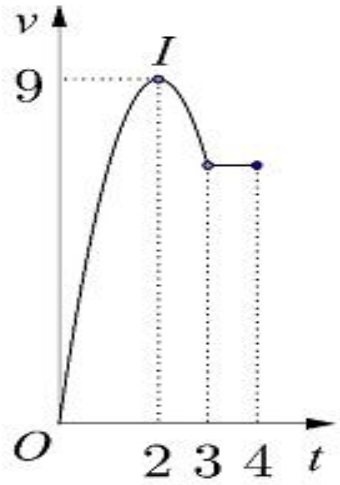
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0;6]$

Ta có $f'(t)=-3t+12 \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow t=4 \in [0;6]$

$f(0)=0; f(4)=24; f(6)=18$

Vậy vận tốc lớn nhất là $24(\text{m/s})$.

Câu 59. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



A. $s=26,5$ (km) **B.** $s=24$ (km) **C.** $s=28,5$ (km) **D.** $s=27$ (km)

Lời giải

Chọn C

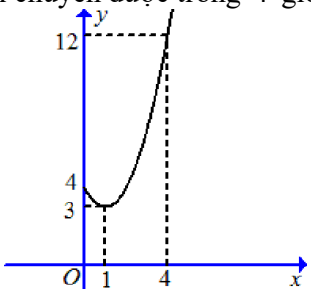
Gọi $(P): y=ax^2+bx+c$.

Vì (P) qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên dễ tìm được phương trình là $y=\frac{-9}{4}x^2+9x$.

Ngoài ra tại $x=3$ ta có $y=\frac{27}{4}$

Vậy quãng đường cần tìm là: $S=\int_0^3\left(\frac{-9}{4}x^2+9x\right)\mathrm{d}x+\int_3^4\frac{27}{4}\mathrm{d}x=27$ (km).

Câu 60. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/ h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;3)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s=\dfrac{50}{3}$ (km). **B.** $s=10$ (km). **C.** $s=20$ (km). **D.** $s=\dfrac{64}{3}$ (km).

Lời giải

Chọn D

Ta có $v(t)=at^2+bt+c$ có dạng parabol đỉnh $I(1;3)$, đi qua điểm $A(0;4)$ và $B(4;12)$.

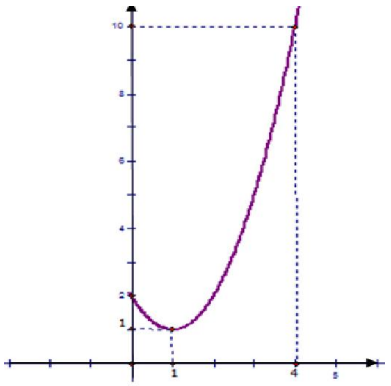
$$\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=1\\ a+b+c=3\\ v(0)=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=1\\ a+b+c=3\\ 0+0+c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2a\\ a+b=-1\\ c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2a\\ a+(-2a)=-1\\ c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-2\\ a=1\\ c=4\end{cases}$$

Do đó $v(t)=t^2-2t+4$.

Quãng đường vật di chuyển được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát được tính như sau

$$s=\int_0^4 v(t)dt=\int_0^4(t^2-2t+4)dt=\left(\frac{t^3}{3}-t^2+4t\right)\Big|_0^4=\left(\frac{4^3}{3}-4^2+4.4\right)-0=\frac{64}{3}\text{ (km).}$$

Câu 61. Một chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(1;1)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật đi được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát.



A. $s=\dfrac{40}{3}$(km). **B.** $s=8$(km). **C.** $s=\dfrac{46}{3}$(km). **D.** $s=6$(km).

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình vận tốc $v(t)=at^2+bt+c$ (P)

(P) qua điểm $(0;2)$ nên $c=2$.

Mặt khác (P) có đỉnh $(1;1)$ nên

$$\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=1\\ a+b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=0\\ a+b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-2\end{cases}$$

Nên phương trình vận tốc $v(t)=t^2-2t+2$

Quãng đường mà vật đi được trong 4 giờ kể từ lúc xuất phát là:

$$\int_0^4\left(t^2-2t+2\right)dt=\frac{40}{3}\ (\text{km}).$$

---------- HẾT ----------