

CHỦ ĐỀ 2 – CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1) Khái niệm cực đại và cực tiểu

▪ **Định nghĩa:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$)

và điểm $x_0 \in (a; b)$

a) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .

b) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

Chú ý:

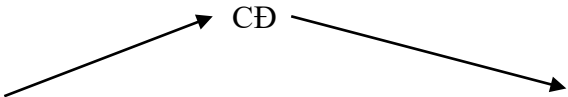
- Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại điểm x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại (giá trị cực tiểu)** của hàm số, ký hiệu là $f_{CD} (f_{CT})$, còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại (điểm cực tiểu)** của đồ thị hàm số.

- Các điểm cực đại cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.

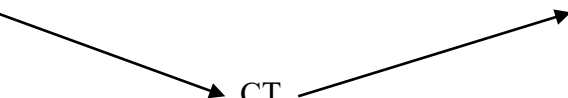
- Dễ dàng chứng minh được rằng, nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại hoặc cực tiểu tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

▪ **Định lý 1:** Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $K = (x_0 - h; x_0 + h)$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, với $h > 0$.

- Nếu $f'(x_0) > 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x_0) < 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

- Nếu $f'(x_0) < 0$ trên khoảng $(x_0 - h; x_0)$ và $f'(x_0) > 0$ trên khoảng $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

Nhận xét: Xét hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực trị của hàm số.
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực đại của hàm số.
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm x_0 thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số.

Chú ý: Hàm số $y = \sqrt{x^2} = |x|$ có đạo hàm là $y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}}$ không có đạo hàm tại điểm $x = 0$ tuy nhiên y'

vẫn đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x = 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

▪ **Định lý 2:** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$ với $h > 0$. Khi đó:

- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực tiểu.

- Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0$ là điểm cực đại.

Chú ý: Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) = 0$ thì chưa thể khẳng định được x_0 là điểm cực đại hay điểm cực tiểu hay cực trị của hàm số.

Ví dụ: Hàm số $y = x^3$ có $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) = 0 \end{cases}$ tuy nhiên hàm số này không đạt cực trị tại điểm $x = 0$.

Hàm số $y = x^4$ có $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) = 0 \end{cases}$ tuy nhiên hàm số này đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

Do vậy ta chú ý **định lý 2** chỉ đúng theo **một chiều** (không có chiều ngược lại).

II. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

DẠNG 1. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHÔNG CÓ THAM SỐ

Phương pháp giải:

▪ **Quy tắc 1:** Áp dụng **định lý 1**.

- **Bước 1:** Tìm miền xác định D của hàm số đã cho.
- **Bước 2:** Tính $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.
- **Bước 3:** Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ hoặc bảng biến thiên để kết luận.

▪ **Quy tắc 2:** Áp dụng **định lý 2**.

- **Bước 1:** Tìm miền xác định D của hàm số đã cho.
- **Bước 2:** Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và ký hiệu $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ là các nghiệm của nó.
- **Bước 3:** Tính $f''(x)$ từ đó tính được $f''(x_i)$.
- **Bước 4:** Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i .

Ví dụ 1: Tìm các điểm cực trị của hàm số: $y = x^4 - 8x^2 + 2$

Lời giải

TXĐ: $\mathbb{R}$. Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Bảng xét dấu của y' .

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$

Ta thấy y' đổi dấu khi qua các điểm $x = 0, x = \pm 2 \Rightarrow x = 0, x = \pm 2$ là các điểm cực trị của hàm số. y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua các điểm $x = \pm 2 \Rightarrow x = \pm 2$ là điểm cực tiểu, y' đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua các điểm $x = 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại của hàm số.

Ví dụ 2: Tìm các điểm cực trị của hàm số:

a) $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 6$.

b) $g(x) = \sin 2x$.

Lời giải

a) TXĐ: $\mathbb{R}$. Ta có: $f'(x) = x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}, f''(x) = 3x^2 - 4$.

Khi đó $f''(\pm 2) = 8 > 0 \Rightarrow x = \pm 2$ là các điểm cực tiểu, $f''(0) = -4 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại của hàm số.

b) TXĐ: $\mathbb{R}$. Ta có: $g'(x) = 2 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

$$f''(x) = -4 \sin 2x \Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) = -4 \text{ khi } k = 2\ell \\ f''\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right) = 4 \text{ khi } k = 2\ell + 1 \end{cases}.$$

Vậy hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ và đạt cực tiểu tại các điểm

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. Nếu $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đó đạt cực trị tại điểm $x = x_0$.

B. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) = 0$ thì hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = x_0$.

C. Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm $x = x_0$.

D. Nếu $f'(x)$ không xác định tại điểm x_0 thì hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = x_0$.

Lời giải

Nếu $f(x) = x^3$ thì $f'(0) = 0$ nhưng hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 0$ nên **A sai**.

Nếu $f(x) = x^4$ thì $f'(0) = 0$ và $f''(0) = 0$ nhưng hàm số vẫn đạt cực trị tại điểm $x = 0$. **B sai**.

Nếu $y = \sqrt{x^2} = |x|$, hàm số này không có đạo hàm tại điểm $x = 0$ nhưng vẫn có cực trị tại điểm $x = 0$. **D sai. Chọn C.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2; 3]$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng về hàm số đã cho?

x	-2	0	1	3	
$f'(x)$	+		-	0	+

A. Đạt cực tiểu tại $x = -2$.

B. Đạt cực đại tại $x = 1$.

C. Đạt cực tiểu tại $x = 3$.

D. Đạt cực đại tại $x = 0$.

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x = 0$ nên hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 0$. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = x - 2\sqrt{x^2 + 4}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng $-2\sqrt{3}$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng $-\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 1 - \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 4 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Bảng xét dấu cho y' .

x	$-\infty$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
y'	+	0	-

Suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ và có giá trị cực đại bằng $y\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -2\sqrt{3}$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$. Giả sử hàm số đạt cực đại tại điểm $x = a$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = b$ thì giá trị của biểu thức $2a - 5b$ là:

- A. 1. B. 12. C. -1. D. -8.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu y' .

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+

Do y' đổi dấu từ dương sang âm khi qua điểm $x = 1 \Rightarrow x = 1$ là điểm cực đại của hàm số.

y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua điểm $x = 2 \Rightarrow x = 2$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Hoặc ta có: $y'' = 2x - 3 \Rightarrow y''(1) = -1 < 0, y''(2) = 1 > 0 \Rightarrow x_{CD} = 1, x_{CT} = 2$.

Vậy $\begin{cases} x_{CD} = 1 = a \\ x_{CT} = 2 = b \end{cases} \Rightarrow 2a - 5b = -8$. **Chọn D.**

Ví dụ 7: [Đề thi minh họa Bộ GD&ĐT 2017] Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

- A. $y_{CD} = 4$. B. $y_{CD} = 1$. C. $y_{CD} = 0$. D. $y_{CD} = -1$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Mặt khác $y'' = 6x \Rightarrow y''(-1) < 0 \Rightarrow x_{CD} = -1 \Rightarrow y_{CD} = y(-1) = 4$.

Vậy giá trị cực đại của hàm số là $y_{CD} = 4$. **Chọn A.**

Chú ý: Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có hai điểm cực trị khi $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Khi đó $y_{CD} > y_{CT}$ và:

- Nếu $a > 0$ thì $x_{CD} < x_{CT}$.
- Nếu $a < 0$ thì $x_{CD} > x_{CT}$.

Ví dụ 8: Giá trị cực đại của hàm số $y = x + \sin 2x$ trên $(0; \pi)$ là

- A. $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Ta có: $y' = (x + \sin 2x)' = 1 + \cos 2x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 1 + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -1$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}), \text{ với } x \in (0; \pi) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

Mặt khác $y'' = -4 \sin 2x \Rightarrow \begin{cases} y''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3} < 0 \text{ (CD)} \\ y''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} > 0 \text{ (CT)} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Giá trị cực đại của hàm số bằng $y''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. **Chọn D.**

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = x^3 - x^2 - x + 1$. Giả sử hàm số đạt cực đại tại $x = a$ và cực tiểu tại $x = b$ thì giá trị của biểu thức $2a^2 + b^2$ là

A. $\frac{11}{9}$.

B. $\frac{19}{9}$.

C. $\frac{10}{9}$.

D. $\frac{-8}{9}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1}{3} \end{cases}; y'' = 6x - 2 \Rightarrow y''(1) = 4 > 0, y''\left(\frac{-1}{3}\right) = -4 < 0.$

Từ đó suy ra: $\begin{cases} x_{CD} = -\frac{1}{3} = a \\ x_{CT} = 1 = b \end{cases} \Rightarrow 2a^2 + b^2 = \frac{11}{9}$. **Chọn A.**

Ví dụ 10: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 2$ là:

A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{58}{27}\right)$.

B. $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

C. $(2; 1)$.

D. $(1; 2)$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}; y'' = 6x - 4 \Rightarrow y''(1) = 2 > 0, y''\left(\frac{1}{3}\right) = -2 < 0.$

Từ đó suy ra $x_{CT} = 1 \Rightarrow y_{CT} = 2$. **Chọn D.**

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$. Hàm số:

A. Đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$.

B. Đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

C. Đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

D. Đạt cực đại tại điểm $x = 3$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$. Dễ dàng $\Rightarrow \begin{cases} x_{CT} = -1 \\ x_{CD} = 3 \end{cases}$. **Chọn D.**

Ví dụ 12: Giả sử hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ đạt cực đại, cực tiểu lần lượt tại các điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thì giá trị của biểu thức $T = \frac{x_1 + y_2}{x_2 + y_1}$ là:

- A. $-\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. 3. D. -3.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y = -26 \\ x = -1 \Rightarrow y = 6 \end{cases}$. Do hàm số bậc ba có $y_{CD} > y_{CT}$ nên điểm cực đại của đồ thị hàm số là $A(-1; 6)$, điểm cực tiểu $B(3; -26) \Rightarrow T = \frac{-1 - 26}{3 + 6} = -3$. **Chọn D.**

Chú ý: Với hàm số bậc 3 thì giá trị của cực đại luôn lớn hơn giá trị cực tiểu.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$, biết rằng

$f'(x) = (x-1)^2 \cdot (x-2)^3 (x-3)^4 (2x-1)$. Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Lời giải

Do hàm số có $f'(x) = (x-1)^2 \cdot (x-2)^3 (x-3)^4$ đổi dấu qua các điểm $x = 2, x = \frac{1}{2}$ nên hàm số đã cho có 2 điểm cực trị. **Chọn B.**

Ví dụ 14: [Đề thi minh họa THPTQG năm 2019] Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm

$f'(x) = x(x-1)(x+2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

- A. 3. B. 2. C. 5. D. 1.

Lời giải

Do $f'(x)$ đổi dấu qua cả 3 điểm $x = 0, x = 1, x = -2$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = 0, x = 1, x = -2$. **Chọn A.**

Ví dụ 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 3x)$, số điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$ là:

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

Ta có $f'(x) = (x+1)x(x-1)(x-3) \Rightarrow$ bảng xét dấu của $f'(x)$:

x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$
-----	-----------	------	-----	-----	-----	-----------

y'	+	0	-	0	+	0	-	+
------	---	---	---	---	---	---	---	---

Do y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua các điểm $x=0, x=3$ nên hàm số đã cho có 2 điểm cực tiểu.

Chọn B.

Ví dụ 16: [Đề thi thử nghiệm THPTQG 2017]: Cho hàm số $y = \frac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 .
 B. Cực tiểu của hàm số bằng 1 .
 C. Cực tiểu của hàm số bằng -6 .
 D. Cực tiểu của hàm số bằng 2 .

Lời giải

Xét hàm số $y = \frac{x^2+3}{x+1}$ với $x \neq -1$, ta có $f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

Bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0

Suy ra $x=1$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy cực tiểu của hàm số bằng $y_{CT} = f(1) = 2$. **Chọn D.**

Ví dụ 17: Cho hàm số $y = \frac{x^2+3}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.
 B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.
 C. Giá trị cực tiểu bằng -2 .
 D. Hàm số có hai cực trị và $y_{CD} < y_{CT}$.

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và $y' = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Mặt khác $y'' = \frac{8}{(x-1)^3} \Rightarrow \begin{cases} y''(-1) = -1 < 0 \\ y''(3) = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{CD} = y(-1) = -2 \\ y_{CT} = y(3) = 3 \end{cases} \Rightarrow y_{CD} < y_{CT}$. **Chọn D.**

Ví dụ 18: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Gọi A và B là các điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho. Độ dài AB bằng.

- A. $AB = 5\sqrt{2}$.
 B. $AB = 2\sqrt{2}$.
 C. $AB = 20$.
 D. $AB = 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$.

Do vậy $A(0;1); B(2;-3) \Rightarrow AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. **Chọn D.**

Ví dụ 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	0

y	$+\infty$ $\searrow$ $\nearrow$ 1 $\nearrow$ 5 $\searrow$ $\searrow$ ∞
-----	---

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 5.

Lời giải

Giá trị cực đại của hàm số đã cho là 5. **Chọn D.**

Ví dụ 20: [Đề thi THPTQG 2017]: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Hàm số có ba điểm cực trị. B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.
C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0. D. Hàm số có hai điểm cực tiểu.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		0	3	0		$+\infty$	

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy rằng:

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị và $x = -1, x = 1$ là hai điểm cực tiểu.

Hàm số đã cho có giá trị cực tiểu bằng 0, có giá trị cực đại bằng 3. **Chọn C.**

DẠNG 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ BẬC 3

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Khi đó:

- Hàm số có hai điểm cực trị (có cực đại cực tiểu) khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} > 0$.
- Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0$.

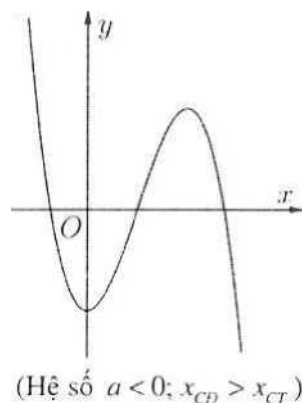
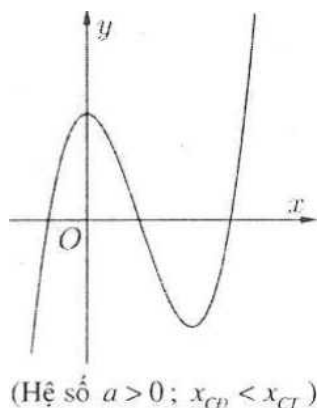
Chú ý:

- Trong trường hợp hệ số a chứa tham số ta cần xét $a = 0$.

- Đối với hàm số bậc 3 ta luôn có $y_{CD} > y_{CT}$ và:

+) Nếu $a > 0$ thì $x_{CD} < x_{CT}$.

+) Nếu $a < 0$ thì $x_{CD} > x_{CT}$.



Khi $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt ta gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là tọa độ hai điểm cực

trị thì theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$

Thực hiện phép chia đa thức y cho y' ta được $y = y'.g(x) + h(x)$.

Khi đó $y_1 = y'(x_1).g(x_1) + h(x_1) = h(x_1)$ và $y_2 = y'(x_2).g(x_2) + h(x_2) = h(x_2)$

Do đó
$$\begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số có dạng $y = h(x)$.

Loại 1: Tìm điều kiện để hàm số bậc ba có cực trị hoặc không có cực trị

Phương pháp giải:

Hàm số có hai điểm cực trị (có cực đại cực tiểu) khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} > 0$.

Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0$.

Ví dụ 1: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 12x + 1$ không có cực trị là

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 6.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4 = 0 (*)$.

Để hàm số không có cực trị thì $\Delta'_{(*)} = m^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 5 giá trị của m . **Chọn B.**

Ví dụ 2: Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - (1 - 2m)x + m + 2$ có cực đại và cực tiểu là

A. 20.**B. 21.****C. 10.****D. 9.****Lời giải**Ta có: $y' = x^2 + 2mx - (1 - 2m)$.Để hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} = m^2 + (1 - 2m) = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.Kết hợp $\begin{cases} m \in [-10; 10] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ có 20 giá trị của m . **Chọn A.****Ví dụ 3:** Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(1 - m^2)x + 1$ có 2 điểm cực trị khi và chỉ khi.**A. $m \neq 1$.****B. $m \in \mathbb{R}$.****C. $m \neq 0$.****D. Không tồn tại m .****Lời giải**Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 3(1 - m^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - m^2 = 0$ (1).Để hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} = 1 - (1 - m^2) = m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. **Chọn C.****Ví dụ 4:** Cho hàm số $y = -x^3 + (2m - 1)x^2 - 2(2 - m)x - 2$. Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số có cực trị là**A. 39.****B. 3.****C. 38.****D. 2.****Lời giải**Ta có: $y' = -3x^2 + 2(2m - 1)x + m - 2$. Để hàm số có cực trị thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'_{y'} = (2m - 1)^2 + 3(m - 2) > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - m - 5 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{5}{4} \\ m < -1 \end{cases}.$$

Kết hợp $\begin{cases} m \in [-20; 20] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ có 38 giá trị của tham số m . **Chọn C.****Ví dụ 5:** Số giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 5$ có cực trị là:**A. 3.****B. 4.****C. 2.****D. Vô số.****Lời giải**Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + m$. Hàm số đã cho có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta'_{y'} = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow m = \{1; 2\}$. **Chọn C.****Ví dụ 6:** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + mx - 1$ có cực trị.

A. $\begin{cases} m > \frac{3}{4} \\ m < 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} m \geq \frac{3}{4} \\ m \leq 0 \end{cases}$

C. $m < 0$.

D. $0 < m < \frac{3}{4}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 4mx + m$. Hàm số đã cho có cực trị $\Leftrightarrow y' = 3x^2 + 4mx + m$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - 3m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3}{4} \\ m < 0 \end{cases} \text{ . Chọn A.}$$

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = -2x^3 + (2m-1)x^2 - (m^2-1)x + 2$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Ta có: $y' = -6x^2 + 2(2m-1)x - (m^2-1)$.

Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị khi $\Delta' = (2m-1)^2 - 6(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow -2m^2 - 4m + 7 > 0$ (xét $m \in \mathbb{Z}$)

$$\Leftrightarrow \frac{-2-3\sqrt{2}}{2} \leq m \leq \frac{-2+3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -3,1 < m < 1,12 \Rightarrow m = -3; -2; -1; 0; 1. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = \frac{(m-1)x^3}{3} + (m-1)x^2 + 4x - 1$. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại x_1 , đạt cực đại tại x_2 đồng thời $x_1 < x_2$ khi và chỉ khi:

A. $m < 1$.

B. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 5 \end{cases}$.

C. $m > 5$.

D. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \end{cases}$.

Lời giải

Với $m = 1$ ta có $y = 4x - 1$ hàm số đã cho không có cực trị.

Với $m \neq 1$ ta có: $y' = (m-1)x^2 + 2(m-1)x + 4$

Để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại x_1 , đạt cực đại tại x_2 đồng thời

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = m-1 < 0 \\ \Delta'_{y'} = y' = (m-1)^2 - 4(m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ (m-1)(m-5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1. \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = \frac{mx^3}{3} - (m+1)x^2 + 3(m+1)x + 1$. Tìm m để hàm số đạt cực đại tại x_1 và cực tiểu tại x_2 sao cho $x_1 > x_2$.

A. $-1 < m < 0$.

B. $-1 < m < \frac{1}{2}$.

C. $-1 \leq m < 0$.

D. $-1 \leq m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Với $m = 0 \Rightarrow y = -x^2 + 3x + 1$ không thỏa mãn có 2 điểm cực trị.

Với $m \neq 0$. Ta có: $y' = mx^2 - 2(m+1)x + 3(m+1)$. Để hàm số đạt cực đại tại x_1 và cực tiểu tại x_2 sao

$$\text{cho } x_1 > x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{m}{3} < 0 \\ \Delta'_{y'} = (m+1)^2 - 3m(m+1) = (m+1)(1-2m) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0. \text{ Chọn A.}$$

Loại 2: Tìm điều kiện để hàm số bậc ba đạt cực trị (hoặc đạt cực tiểu hoặc đạt cực đại) tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp giải:

▪ Bài toán 1: Tìm m để hàm số đạt cực trị tại điểm $x = x_0$.

$$\text{Điều kiện để hàm số đạt cực trị tại điểm } x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

▪ Bài toán 2: Tìm m để hàm số đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại điểm $x = x_0$.

Hàm số đạt cực trị tại điểm x_0 ta suy ra $y'(x_0) = 0$, giải phương trình tìm giá trị của tham số m .

Với giá trị của tham số m tìm được ta tính $y''(x_0)$ để tìm tính chất của điểm cực trị và kết luận.

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + mx - 2$. Giá trị của m để hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 2$ là

A. $m = -4$. B. $m = 4$. C. $m = 2$. D. Không tồn tại m .

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 4x + m$.

$$\text{Hàm số đạt cực trị tại điểm } x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} = 4 - 3m > 0 \\ y'(2) = 4 + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -4. \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + mx + 2$. Giá trị của m để hàm số đạt cực trị tại điểm $x = -1$ là

A. $m = -2$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. Không tồn tại m .

Lời giải

Ta có: $y' = x^2 + 2x + m$.

$$\text{Hàm số đạt cực trị tại điểm } x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} = 1 - m > 0 \\ y'(-1) = m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \emptyset. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + (m+9)x - 1$. Biết hàm số có một cực trị tại $x = 2$. Khi đó điểm cực trị còn lại của hàm số là

A. 1. B. 3. C. -1. D. -3.

Lời giải

Ta có: $y' = 6x^2 - 6mx + m + 9$. Cho $y'(2) = 24 - 12m + m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Với $m = 3 \Rightarrow y' = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$. **Chọn A.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 + nx + 1 (C)$. Giá trị của $2m + n$ biết đồ thị hàm số đạt cực trị tại điểm $A(2; 7)$ là:

- A. 21. B. 22. C. 23. D. 20.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx + n \Rightarrow y'(2) = -4m + n + 12 = 0 \Leftrightarrow 4m - n = 12$

Mặt khác $A(2; 7) \in (C)$ nên $x = 2 \Rightarrow y = 7$ nên ta có $8 - 4m + 2n + 1 = 7 \Leftrightarrow 4m - 2n = 2$

Khi đó $m = \frac{11}{2}; n = 10 \Rightarrow y' = 3x^2 - 11x + 10 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số có hai điểm cực trị.

Vậy $m = \frac{11}{2}; n = 10 \Rightarrow 2m + n = 21$. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + nx - 2$. Giá trị của $3m + n$ biết đồ thị hàm số đạt cực trị tại điểm $A(-1; 4)$ là:

- A. -15. B. 15. C. $-\frac{37}{3}$. D. Không tồn tại m .

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 6mx + n$. Cho $y'(-1) = 3 - 6m + n = 0 \Leftrightarrow 6m - n = 3$.

Mặt khác đồ thị hàm số qua $A(-1; 4)$ nên $4 = -1 + 3m - n - 2 \Leftrightarrow 3m - n = 7$

Do đó $\begin{cases} 6m - n = 3 \\ 3m - n = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-4}{3} \\ n = -11 \end{cases} \Rightarrow y' = 3x^2 - 8x - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{11}{3} \end{cases}$ (thỏa mãn có 2 điểm cực trị).

Chọn A.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2m - 4)x^2 + (m^2 + 4m + 3)x + 1$ (m là tham số). Tìm m để hàm số đạt cực đại tại $x_0 = 2$.

- A. $m = 1$. B. $m = -2$. C. $m = -1$. D. $m = 2$.

Lời giải

$y' = x^2 - (2m + 4)x + m^2 + 4m + 3$

Để hàm số đạt cực đại tại $x_0 = 2$ thì $2^2 - (2m + 4).2 + m^2 + 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Với $m = 1$ thì $y' = x^2 - 6x + 8 \Rightarrow y'' = 2x - 6 \Rightarrow y''(2) = -2 < 0 \Rightarrow x_0 = 2$ là điểm cực đại.

Với $m = -1$ thì $y' = x^2 - 2x \Rightarrow y'' = 2x - 2 \Rightarrow y''(2) = 2 > 0 \Rightarrow x_0 = 2$ là điểm cực tiểu.

Vậy $m = 1$ là điểm cần tìm. **Chọn A.**

Ví dụ 7: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

A. $m = -1$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = -2$.

Lời giải

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$; $y'' = 2x - 2m$

Để hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ thì $y'(1) = m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$.

Với $m = 1 \Rightarrow y''(1) = 0 \Rightarrow x = 1$ không phải điểm cực đại.

Với $m = 2 \Rightarrow y''(1) = -2 < 0 \Rightarrow x = 1$ là điểm cực đại của hàm số. **Chọn C.**

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = -18x^3 + 9(m^2 + 1)x^2 + 6(2 - 3m)x + 2019$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{3}$.

A. $m = 2$.

B. $m = -1$.

C. $m = 1$.

D. $m = -2$.

Lời giải

Ta có $y' = -54x^2 + 18(m^2 + 1)x + 6(2 - 3m)$, $y'' = -108x + 18(m^2 + 1)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{3}$ khi đó $y'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow -6 + 6(m^2 + 1) + 6(2 - 3m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$.

TH1: Với $m = -1 \Rightarrow y'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ không phải điểm cực tiểu của hàm số.

TH2: Với $m = 2 \Rightarrow y'\left(\frac{1}{3}\right) = 54 > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Suy ra với $m = 2$ thỏa mãn đề bài. **Chọn A.**

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = -x^3 + mx^2 + m^2x + 2$. Giá trị của m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ là:

A. $m = -1$.

B. $m = 3$.

C. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có $y' = -3x^2 + 2mx + m^2$. Cho $y'(-1) = -3 - 2m + m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$.

Với $m = 3 \Rightarrow y'' = -6x + 2m = -6x + 6 \Rightarrow y''(-1) = 12 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Với $m = -1 \Rightarrow y'' = -6x + 2m = -6x - 2 \Rightarrow y''(-1) = 4 > 0$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Chọn C.

Ví dụ 10: Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$. Giá trị của $a + b$ để hàm số đạt cực trị tại các điểm $x = 1$ và $x = -2$ là:

A. $-\frac{9}{2}$.

B. $\frac{9}{2}$.

C. $\frac{15}{2}$.

D. $-\frac{15}{2}$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 2ax + b$. Cho $\begin{cases} y'(1) = 3 + 2a + b = 0 \\ y'(-2) = 12 - 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -6 \end{cases} \Rightarrow a + b = -\frac{9}{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 11: Cho biết hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$, $f(1) = -3$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

A. $f(-2) = 16$.

B. $f(-2) = 24$.

C. $f(-2) = 2$.

D. $f(-2) = 4$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

Theo đề bài ta có $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = -3 \\ f(0) = 2 \\ f''(1) = 6 + 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2a + b = 0 \\ 1 + a + b + c = -3 \\ c = 2 \\ a > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -9 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$

$\Rightarrow f(-2) = 24$. **Chọn B.**

Ví dụ 12: [Đề thi thử nghiệm 2017] Biết $M(0;2), N(-2;2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị tại điểm $x = -2$.

A. $y(-2) = 2$.

B. $y(-2) = 22$.

C. $y(-2) = 6$.

D. $y(-2) = -18$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 2bx + c$.

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 0; x = 2 \Rightarrow \begin{cases} y'(0) = c = 0 \\ y'(2) = 12a + 4b = 0 \end{cases} \quad (1)$

Lại có $M, N \in (C) \Rightarrow \begin{cases} y(0) = d = 2 \\ y(2) = 8a + 4b + c + d \end{cases} \quad (2).$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} c = 0, d = 2 \\ a = 1, b = -3 \end{cases} \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 2$. Do đó $y(-2) = -18$. **Chọn D.**

Ví dụ 13: Biết đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có các điểm cực trị $E(0; -4)$ và $F(-1; -3)$. Tính giá trị hàm số tại điểm $x = -2$.

- A. $y(-2) = -8$. B. $y(-2) = -6$. C. $y(-2) = -4$. D. $y(-2) = -2$.

Lời giải

Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Điểm $E(0; -4)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số $\Rightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = -4 \end{cases} (1).$

Điểm $F(-1; -3)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số $\Rightarrow \begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y(-1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ -a + b - 4 = -3 \end{cases} (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $a = 2, b = 3, c = 0, d = -4 \Leftrightarrow y = 2x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow y(-2) = -8$. **Chọn A.**

Loại 3: Tìm m để đồ thị hàm số đạt cực trị tại các điểm A, B thỏa mãn điều kiện K.

Phương pháp giải: Xét hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Khi $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt ta gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là tọa độ hai điểm cực

trị thì theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}.$$

Thực hiện phép chia đa thức y cho y' ta được $y = y'.g(x) + h(x)$.

Khi đó $y_1 = y'(x_1).g(x_1) + h(x_1) = h(x_1)$ và $y_2 = y'(x_2).g(x_2) + h(x_2) = h(x_2)$

Chú ý:

- Độ dài đoạn thẳng $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.
- $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (x_1; y_1)(x_2; y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$.
- Tam giác CAB vuông tại C thì $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$.
- Công thức diện tích $\Delta CAB: S_{CAB} = \frac{1}{2} d(C; AB) \cdot AB$.

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 + (m-1)x^2 - 4m(3m-1)x + 7$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 8$

Lời giải

Ta có: $y' = 2x^2 + 2(m-1)x - 4m(3m-1); \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $f(x) = x^2 + (m-1)x - 2m(3m-1)$.

Để hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta_{f(x)} > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + 8m(3m-1) > 0 \Leftrightarrow 25m^2 - 10m + 1 > 0 \Leftrightarrow (5m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{5}$$

Khi đó gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ lần lượt là tọa độ của hai điểm cực trị, áp dụng định lý Viet cho phương

$$\text{trình } f(x) = 0 \text{ suy ra } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 x_2 = 2m(1 - 3m) \end{cases} \quad (*)$$

Từ giả thiết, ta có $x_1^2 + x_2^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 8$, kết hợp với (*) ta được

$$(1-m)^2 - 4m(1-3m) = 8 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + 12m^2 - 4m = 8 \Leftrightarrow 13m^2 - 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-7}{13} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện $m \neq \frac{1}{5}$ nên $m = 1; m = \frac{-7}{13}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}(4m+1)x^2 - 3(5m^2+m)x - m - 1$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu và hoành độ các điểm cực trị lớn hơn -4 .

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 3(4m+1)x - 3(5m^2+m); \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $f(x) = x^2 - (4m+1)x - 5m^2 - m$.

Để hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta_{f(x)} > 0 \Leftrightarrow (4m+1)^2 + 4(5m^2+m) = 36m^2 + 12m + 1 = (6m+1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{-1}{6}$$

Khi đó gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ lần lượt là tọa độ của hai điểm cực trị, áp dụng định lý Viet cho phương

$$\text{trình } f(x) = 0 \text{ suy ra } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4m + 1 \\ x_1 x_2 = -5m^2 - m \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Từ giả thiết, ta có } \begin{cases} x_1 > -4 \\ x_2 > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4 > 0 \\ x_2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + 4) + (x_2 + 4) > 0 \\ (x_1 + 4)(x_2 + 4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > -8 \\ x_1 x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 > 0 \end{cases}$$

Kết hợp với (*) ta được

$$\begin{cases} 4m + 1 > -8 \\ -5m^2 - m + 4(4m + 1) + 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m > -9 \\ 5m^2 - 15m - 20 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m > -9 \\ -1 < m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 4$$

Đối chiếu với điều kiện $m \neq \frac{-1}{6}$ nên suy ra $m \in \left(-1; \frac{-1}{6}\right) \cup \left(\frac{-1}{6}; 4\right)$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^3 + (m-3)\frac{x^2}{2} - 2(m^2-m)x + 1$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu sao cho $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = \frac{-16}{9}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 + (m-3)x - 2(m^2-m)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $f(x) = 3x^2 + (m-3)x - 2(m^2-m)$.

Để hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta_{f(x)} > 0 \Leftrightarrow (m-3)^2 + 24(m^2-m) = 25m^2 - 30m + 9 = (5m-3)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{5}{3}$$

Khi đó gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ lần lượt là tọa độ của hai điểm cực trị, áp dụng định lý Viet cho phương

trình $f(x) = 0$ suy ra $x_1 + x_2 = \frac{3-m}{3}$; $x_1 x_2 = \frac{2m-2m^2}{3}$ (*)

Từ giả thiết, ta có $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = \frac{-16}{9} \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2) + \frac{16}{9} = 0$. Kết hợp với (*) ta được

$$\frac{2m-2m^2}{3} \cdot \frac{3-m}{3} + \frac{16}{9} = 0 \Leftrightarrow (2m-2m^2)(3-m) + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6m - 2m^2 - 6m^2 + 2m^3 + 16 = 0 \Leftrightarrow 2m^3 - 8m^2 + 6m + 16 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Đối chiếu với điều kiện $m \neq \frac{5}{3}$ nên suy ra $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (2m+3)\frac{x^2}{2} + (m^2+3m)x - m + 1$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu sao cho $x_{CD}^3 - 2x_{CT} = -10$.

Lời giải

Ta có: $y' = x^2 - (2m+3)x + m^2 + 3m$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $f(x) = x^2 - (2m+3)x + m^2 + 3m$.

Để hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{f(x)} > 0 \Leftrightarrow (2m+3)^2 - 4(m^2+3m) = 9 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$

Khi đó gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ lần lượt là tọa độ của hai điểm cực trị, ta có

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2m+3+3}{2} = m+3 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2m+3-3}{2} = m \end{cases} \Rightarrow x_1 > x_2 \quad (3 > 0 \Rightarrow m+3 > m)$$

Mặt khác, vì hệ số của hàm số bậc ba $a = \frac{1}{3} > 0$ do đó suy ra

$$x_1 = x_{CT} = m+3; x_2 = x_{CD} = m \quad (*)$$

Từ giả thiết, ta có $x_{CD}^3 - 2x_{CT} = -10$. Kết hợp với (*) ta được

$$m^3 - 2(m+3) = -10 \Leftrightarrow m^3 - 2m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -2$$

Đối chiếu với điều kiện $m \in \mathbb{R}$ nên suy ra $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \frac{-1}{3}x^3 - (2m-1)\frac{x^2}{2} + (m-m^2)x$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu sao cho $3x_{CT}^2 + x_{CD}^2 < 1$.

Lời giải

Ta có: $y' = -x^2 + (2m-1)x + m - m^2; \forall x \in \mathbb{R}$

Đặt $f(x) = x^2 - (2m-1)x + m^2 - m$.

Để hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{f(x)} > 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 - 4(m^2 - m) = 1 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$

Khi đó gọi $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ lần lượt là tọa độ của hai điểm cực trị, ta có

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2m-1+1}{2} = m \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2m-1-1}{2} = m-1 \end{cases} \Rightarrow x_1 > x_2 \quad (0 > -1 \Rightarrow m > m-1)$$

Mặt khác, vì hệ số của hàm số bậc ba $a = \frac{-1}{3} < 0$ do đó suy ra

$$x_1 = x_{CT} = m-1; x_2 = x_{CD} = m \quad (*)$$

Từ giả thiết, ta có $3x_{CT}^2 + x_{CD}^2 < 1$. Kết hợp với (*) ta được

$$3(m-1)^2 + m^2 < 1 \Leftrightarrow 4m^2 - 6m + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1$$

Đối chiếu với điều kiện $m \in \mathbb{R}$ nên suy ra $\frac{1}{2} < m < 1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + mx + 2(C)$. Tìm m để hàm số có 2 cực trị tại x_1 và x_2 thỏa

$$\text{mãn } A = 4x_1x_2 + 3(x_1^2 + x_2^2) = 2$$

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(2m+1)x + m = 0$ (1).

Để hàm số đã cho 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow PT(1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = (2m+1)^2 - 3m > 0 \Leftrightarrow 4m^2 + m + 1 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$$

Khi đó gọi $x_1; x_2$ là hoành độ các điểm cực trị. Theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(2m+1)}{3} \\ x_1x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$$

Do vậy $A = 4x_1x_2 + 3[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] = 3(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{4(2m+1)^2}{3} - \frac{2m}{3}$

$$A = \frac{16m^2 + 14m + 4}{3} = 2 \Leftrightarrow 16m^2 + 14m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{1}{8} \end{cases}.$$

Vậy $m = -1; m = \frac{1}{8}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + 2(C)$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số có 2 điểm cực trị tại x_1 và x_2 sao cho $2x_1 + x_2 = 5$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 3m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0$ (1)

Để hàm số đã cho 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow PT(1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$

Khi đó gọi $x_1; x_2$ là hoành độ các điểm cực trị. Theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = m \end{cases}$$

Kết hợp:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1x_2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \\ m = x_1x_2 = -3 \quad (tm) \end{cases}$$

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx + 2(C)$. Tìm giá trị của tham số m để hàm số có 2 điểm cực trị tại x_1 và x_2 đều dương và thỏa mãn $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{10}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 6m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 2m = 0$ (1).

Để hàm số đã cho 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow PT(1)$ có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - 2m = m^2 + 1 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Khi đó gọi $x_1; x_2$ là hoành độ các điểm cực trị. Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 x_2 = 2m \end{cases}$

Theo giả thiết, ta có $x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 2m + 2 + 2\sqrt{2m} = 10 \Leftrightarrow 2m + 2\sqrt{2m} - 8 = 0$.

Đặt $t = \sqrt{2m}$ ($t \geq 0$) ta có: $t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow \sqrt{2m} = 2 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (tm)} \\ t = -4 \text{ (loại)} \end{cases}$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m+1)x + 1$ (C). Tìm giá trị của tham số m để hàm số có 2 điểm cực trị tại x_1 và x_2 đều dương và thỏa mãn $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -6$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(2m+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m + 1 = 0$ (1)

Để hàm số đã cho 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow PT(1)$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m - 1 > 0$ (*)

Khi đó gọi $x_1; x_2$ là hoành độ các điểm cực trị. Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 2m + 1 \end{cases}$

Theo giả thiết, ta có $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = \frac{4m^2 - 2(2m+1)}{2m+1} = -6$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ 4m^2 + 8m + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \text{ (tm)}. \text{ Vậy } m = -1 \text{ là giá trị cần tìm.}$

Ví dụ 10: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2m-1)x^2 + mx + 1$ có đồ thị là (C). Tìm m để hàm số có 2 điểm cực trị tại hai điểm có hoành độ x_1 và x_2 sao cho $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 2$

Lời giải

Ta có: $y' = x^2 - (2m-1)x - m$ (*)

Để hàm số đạt cực trị tại hai điểm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 + 4m > 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 1 > 0, \forall m$

Gọi $x_1; x_2$ là hoành độ của hai điểm cực trị $\Rightarrow x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình

(*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 1 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$

Ta có $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 2 \Leftrightarrow x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 2 \Leftrightarrow -m + 2m - 1 + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 2$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m-1)x^2 + x + 2$, có đồ thị là (C) . Tìm m để hàm số đạt cực trị tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 18$

Lời giải

Ta có: $y' = x^2 - (m-1)x + 1$ (*)

Để hàm số đạt cực trị tại hai điểm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -1 \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là hoành độ của hai điểm cực trị $\Rightarrow x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = m-1 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

Ta có $x_1^3 + x_2^3 = 18 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 18$

$$\Leftrightarrow (m-1)^3 - 3(m-1) = 18 \Leftrightarrow m^3 - 3m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (m-4)(m^2 + m + 4) = 0 \Leftrightarrow m = 4$$

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 12: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x + 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 sao cho $(x_1 + x_2 + 1)^2 = 25x_1 x_2$.

Lời giải

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3 = 3(x^2 - 2mx + 1); y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 = 0.$$

Hàm số đã cho đạt cực trị tại $x_1, x_2 \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \quad (*)$$

Theo định lý Viet có $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = 1$

$$\text{Theo đề bài } (x_1 + x_2 + 1)^2 = 25x_1 x_2 \text{ nên } (2m+1)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1=5 \\ 2m+1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-3 \end{cases} \quad (TM(*))$$

Đ/s: $m = 2$ hoặc $m = -3$.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx + 1$ (C). Tìm m để hàm số đạt cực trị tại các điểm x_1, x_2 thỏa mãn $4x_1^2 + x_1 + x_2^2 = 19$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 6x^2 - 6(m+1)x + 6m = 0 \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - mx + m = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)-m(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-m)(x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=m \end{cases} \quad (1)$$

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì (1) phải có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 1$.

Khi đó ta xét 2 trường hợp:

• **TH1:** Cho $x_1 = 1; x_2 = m$ ta có: $4 + 1 + m^2 = 19 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{19} \quad (tm)$

• **TH2:** Cho $x_1 = m; x_2 = 1$ ta có: $4m^2 + m + 1 = 19 \Leftrightarrow 4m^2 + m - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=\frac{9}{4} \end{cases} \quad (tm)$

Vậy $m = \pm\sqrt{19}; m = 2; m = \frac{9}{4}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 14: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 12mx + 3 \quad (C)$. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại các điểm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 = 7$.

Lời giải

Ta có: $y' = 6x^2 - 6(m+2)x + 12m = 0 \Leftrightarrow x^2 - (m+2)x + 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2mx + 2m = 0$

$$\Leftrightarrow x(x-2)-m(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-m)(x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=m \end{cases} \quad (1)$$

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì (1) phải có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 2$.

Khi đó ta xét 2 trường hợp:

• **TH1:** Cho $x_1 = 2; x_2 = m$ ta có: $4 + m^2 + 4 = 7 \Leftrightarrow m = -1 \quad (loại)$

• **TH2:** Cho $x_1 = m; x_2 = 2$ ta có: $m^2 + 2m + 4 = 7 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-3 \end{cases} \quad (tm)$

Vậy $m = 1; m = -3$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 15: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(1-m^2)x + 1 \quad (C)$. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại các điểm $x_1; x_2$ thỏa mãn: $3x_1^2 + x_2 + x_1x_2 = 5$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 3(1-m^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = m^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=m \\ x-1=-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+m \\ x=1-m \end{cases}$$

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì (1) phải có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 1+m \neq 1-m \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó ta xét 2 trường hợp:

• **TH1:** Cho $x_1 = 1+m; x_2 = 1-m$ ta có: $3(1+m)^2 + 1-m + (1-m)(1+m) = 5$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 5m + 5 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

• **TH2:** Cho $x_1 = 1 - m; x_2 = 1 + m$ ta có: $3(1 - m)^2 + 1 + m + (1 - m)(1 + m) = 5$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 5m + 5 = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy $m = \pm \frac{5}{2}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 16: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m^3$ (C). Tìm m để hàm số đạt cực trị tại các điểm

$$x_1; x_2 \text{ thỏa mãn: } \frac{3}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2.$$

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 = 1^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - m = 1 \\ x - m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{cases}$$

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì (1) phải có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m + 1 \neq m - 1 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.

Khi đó ta xét 2 trường hợp:

• **TH1:** Cho $x_1 = m + 1; x_2 = m - 1$ ta có: $\frac{3}{m+1} + \frac{1}{m-1} = 2 \Leftrightarrow 4m - 2 = 2(m^2 - 1)(m \neq \pm 1)$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

• **TH2:** Cho $x_1 = m - 1; x_2 = m + 1$ ta có: $\frac{3}{m-1} + \frac{1}{m+1} = 2 \Leftrightarrow 4m + 2 = 2(m^2 - 1)$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{3}$$

Vậy $m = 0; m = 1; m = 1 \pm \sqrt{3}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 17: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 3(m^2 - 3)x - 4$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 sao cho $x_2 = -5x_1$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 12x - 3(m^2 - 3); y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - m^2 + 3 = 0$

Hàm số đã cho đạt cực trị $x_1; x_2 \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = 4 + m^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Khi đó theo Viet có $x_1 + x_2 = 4; x_1 x_2 = 3 - m^2$. Bài ra $x_2 = -5x_1 \Rightarrow x_1 - 5x_1 = 4 \Leftrightarrow x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 5$
 $\Rightarrow 3 - m^2 = -1.5 \Leftrightarrow m^2 = 8 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$. Thỏa mãn (*).

Ví dụ 18: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(m^2 - 3m)x + 7$. Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu tại x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m-1)x + 3(m^2 - 3m); y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0$

Hàm số đã cho có cực trị $x_1; x_2 \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = (m-1)^2 - (m^2 - 3m) > 0 \Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1 \quad (*)$$

Khi đó theo Viet có $x_1 + x_2 = 2(m-1); x_1 x_2 = m^2 - 3m$.

Bài ra có $x_1^2 + x_2^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 8 \Rightarrow 4(m-1)^2 - 2(m^2 - 3m) = 8$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ (Ko TM (*))} \\ m = 2 \text{ (TM (*))} \end{cases}.$$

Ví dụ 19: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + m^3$ đạt cực trị tại $x_1; x_2$ sao cho $x_1 + 2x_2 = 3$.

Lời giải

TXĐ: $\mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$

Hàm số đã cho đạt cực trị $x_1; x_2 \Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \quad (*)$

• **TH1:** $x_1 = 0; x_2 = 2m$ khi đó: $x_1 + 2x_2 = 3 \Leftrightarrow 0 + 2.2m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$. Đã thỏa mãn (*).

• **TH2:** $x_1 = 2m; x_2 = 0$ khi đó: $x_1 + 2x_2 = 3 \Leftrightarrow 2m + 2.0 = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$. Đã thỏa mãn (*).

Ví dụ 20: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + (6m+3)x + 5$, có đồ thị là (C) . Tìm m để hàm số đạt cực trị tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 + 5x_2 = 2$

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 6m+3 = 3[x^2 - 2(m+1)x + 2m+1]$

Hàm số đã có cực đại, cực tiểu khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (2m+1) > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$$

Khi đó $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2m+1 \\ x = 1 \end{cases}$

• **TH1:** $x_1 = 2m+1; x_2 = 1 \Rightarrow 2m+1+5 = 2 \Rightarrow m = -2$

• **TH2:** $x_1 = 1; x_2 = 2m + 1 \Rightarrow 1 + 5(2m + 1) = 2 \Rightarrow m = -\frac{2}{5}$

Vậy $m = -2; m = -\frac{2}{5}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 21: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + 1$, có đồ thị là (C) . Tìm m để hàm số đạt cực trị tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 > x_2$ và $x_1^3 + 2x_2^3 = 8$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 3[x^2 - 2mx + (m^2 - 1)]$

Hàm số đã có cực đại, cực tiểu khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - (m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow 1 > 0, \forall m$$

Khi $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{cases}$. Ta có $m + 1 > m - 1 \Rightarrow x_1 = m + 1, x_2 = m - 1$

Theo bài thì $x_1^3 + 2x_2^3 = 8 \Leftrightarrow (m + 1)^3 + 2(m - 1)^3 = 8 \Leftrightarrow 3m^3 - 3m^2 + 9m - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow (m - 1)(3m^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow m = 1. \text{ Vậy } m = 1 \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Ví dụ 22: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 2m + \frac{1}{3}$ (C). Tìm m để hàm số 2 điểm cực trị tại A và B sao cho tam giác OAB nhận điểm $G\left(0; \frac{2}{3}\right)$ làm trọng tâm.

Lời giải

Ta có: $y' = x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 4$

Khi đó hàm số luôn có 2 điểm cực trị tại $A\left(-2; 2m + \frac{17}{3}\right)$ và $B(2; 2m - 5)$

Do đó trọng tâm tam giác OAB có tọa độ $G\left(0; \frac{4m + \frac{2}{3}}{3}\right)$

Từ giả thiết bài toán ta cho: $4m + \frac{2}{3} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$

Vậy $m = \frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 23: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2m^3$ (C). Tìm m để hàm số 2 điểm cực trị tại A và B sao cho $AB = OA\sqrt{5}$ trong đó điểm A là điểm cực trị thuộc trục tung và O là gốc tọa độ.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases} \quad (1)$

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì (1) phải có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó với $x = 0 \Rightarrow y = 2m^3 \Rightarrow A(0; 2m^3)$ (vì A thuộc trục tung)

Với $x = 2m \Rightarrow y = -2m^3 \Rightarrow B(2m; -2m^3)$

Theo bài ra ta sẽ có: $AB^2 = 5.OA^2 \Leftrightarrow 4m^2 + 16m^6 = 5.4m^6 \Leftrightarrow 4m^2 = 4m^6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0(\text{loại}) \\ m^4 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1 \end{cases}$

Vậy $m = \pm 1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 24: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4$ (C). Tìm m để hàm số 2 điểm cực trị tại A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases} \quad (1)$

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì (1) phải có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó với $x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(0; 4)$.

Với $x = 2m \Rightarrow y = -4m^3 + 4 \Rightarrow B(2m; -4m^3 + 4)$

Ta có: $OA = 4$ và O và A đều thuộc trục Oy nên $S_{AOB} = \frac{1}{2}.OA.d(B; Oy) = 2.|2m| = 4 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Vậy $m = \pm 1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 25: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$, có đồ thị là (C). Tìm m để hàm số đạt cực trị tại hai điểm phân biệt A và B sao cho tam giác $S_{OAB} = 4$

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m)$, hàm số có hai điểm cực trị khi $m \neq 0$.

Khi $y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4m^3 \\ x = 2m \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

Giả sử $A(0; 4m^3), B(2m; 0)$ là các điểm cực trị của hàm số

Ta có $S_{AOB} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.OA.OB = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.|4m^3|.|2m| = 4 \Leftrightarrow |m^4| = 1 \Leftrightarrow m^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$

Vậy $m = 1, m = -1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 26: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ (với m là tham số thực).

Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị cắt các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải

Ta có: $y = x^3 - 3mx^2 + 2$, $y' = 3x^2 - 6mx$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Để hàm số có cả cực đại và cực tiểu thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tức là $m \neq 0$.

Ta có $y = \frac{1}{3}(x-m) \cdot y' + 2m^2x + 2 \Rightarrow$ phương trình qua cực trị là $y = 2m^2x + 2$.

Tại $x = 0 \Rightarrow y = 2$, $y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{m^2}$.

Nên diện tích tam giác tạo bởi các trục là $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{m^2} = 4 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$.

Vậy $m = \pm \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 27: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(m-3)x^2 + (m-2)x + 1$. Giá trị của m để hàm số có 2 điểm cực trị trái dấu là:

- A. $m > 2$. B. $m > 3$. C. $m < 3$. D. $m < 2$.

Lời giải

$y' = x^2 - (m-3)x + m-2$. Để hàm số có 2 điểm cực trị trái dấu thì $x^2 - (m-3)x + m-2 = 0$ có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac > 0 \\ ac < 0 \end{cases} \Leftrightarrow ac = (m-2) < 0 \Leftrightarrow m < 2$. **Chọn D.**

Ví dụ 29: Tìm m để hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có 2 điểm cực trị x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

- A. $m = \frac{2}{3}$. B. $m = \pm \frac{3}{2}$. C. $m = \pm 2$. D. $m = \frac{3}{2}$.

Lời giải

$y' = 3x^2 - 6x + m$. ĐK có 2 cực trị là $\Delta' = 9 + 3m > 0$

Khi đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$. Theo giả thiết $x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow 4 - 2 \cdot \frac{m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ (t/m). **Chọn D.**

Ví dụ 30: Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}(C)$. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại $x_1; x_2$ sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

- A. $m = 0; m = \frac{2}{3}$. B. $m = 0$. C. $m = \frac{2}{3}$. D. $m = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx - (3m^2 - 1) = 0$.

ĐK có 2 cực trị là $\Delta = 4m^2 - 1 > 0$.

Khi đó
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$$

GT $\Leftrightarrow -3m^2 + 1 + 2m = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 (\text{loại}) \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$. **Chọn C.**

Ví dụ 31: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m+1)x + 1$. Tìm m để hàm số đạt cực trị tại các điểm $x_1; x_2$ thỏa mãn: $3(x_1 + x_2) + 4x_1 x_2 + 16 = 0$.

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = -3$.

D. $m = 3$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m+1) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 1 = 0$.

ĐK có 2 cực trị $\Delta' = m^2 - m - 1 > 0$. Khi đó
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m + 1 \end{cases}$$

Do đó $3 \cdot 2m + 4 \cdot (m+1) + 16 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn). **Chọn A.**

Ví dụ 32: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+3)x^2 + 4(m+3)x + m^2 - m$ có các điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $-1 < x_1 < x_2$

A. $(-\infty; -2)$.

B. $\left(-\frac{7}{2}; -2\right)$.

C. $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

D. $\left(-\frac{7}{2}; -3\right)$.

Lời giải

Ta có $y' = \left[\frac{1}{3}x^3 + (m+3)x^2 + 4(m+3)x + m^2 - m \right]' = x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3)$.

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi $\Delta(y' = 0) > 0 \Leftrightarrow (m+3)^2 - 4(m+3) > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3 > 4 \\ m+3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -3 \end{cases} (*)$$

Khi đó gọi hai cực trị là x_1, x_2 , suy ra
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+3) \\ x_1 x_2 = 4(m+3) \end{cases}$$

Mặt khác $-1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(m+3) - 2(m+3) + 1 > 0 \\ -2(m+3) > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 > -\frac{1}{2} \\ m+3 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{7}{2} \\ m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{7}{2}; -2\right).$$

Kết hợp (*) $\Rightarrow m \in \left(-\frac{7}{2}; -2\right)$. **Chọn D.**

Ví dụ 33: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2m + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m giá trị cực đại của hàm số bằng 4

- A. $m = 2$. B. $m = \frac{5}{2}$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = 5$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$. Hàm số có $a = 1 > 0$ nên $x_{CT} > x_{CD} \Rightarrow x_{CD} = -1$

Khi đó $y_{CD} = y(-1) = 3 + 2m = 4 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. **Chọn C.**

Ví dụ 34: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + m$. Tìm m để đồ thị hàm số đạt cực trị tại các điểm A và B sao cho $OA^2 + OB^2 = 12$ (với O là gốc tọa độ).

- A. $m = \pm 1$. B. $m = \pm\sqrt{2}$. C. $m = \pm\sqrt{3}$. D. $m = \pm 2$.

Lời giải

$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = m - 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = m + 2 \end{cases}$. Khi đó $A(1; m - 2), B(-1; m + 2)$

Ta có: $OA^2 + OB^2 = 1 + (m - 2)^2 + 1 + (m + 2)^2 = 2m^2 + 10 = 12 \Leftrightarrow m = \pm 1$. **Chọn A.**

Ví dụ 35: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m + 1$. Số các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm khác phía so với trục hoành.

- A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.

Lời giải

$y' = -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = m + 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = m - 3 \end{cases}$. Để hai điểm cực trị nằm khác phía so với trục hoành thì

$y_{CD} \cdot y_{CT} < 0 \Leftrightarrow (m + 1)(m - 3) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 3$. **Chọn C.**

Ví dụ 36: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 3mx + 2 - m$ đạt cực trị $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$

thỏa mãn: $\frac{y_1 - y_2}{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - 2)} < 0$.

- A. $m > 2$. B. $m \geq 2$. C. $m < 2$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m = 0$

Hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - m > 0 \Leftrightarrow m^2 + m + 1 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.

Do hàm số có $a = 1 > 0$ nên $x_{CD} < x_{CT}$, mặt khác $y_{CD} > y_{CT}$ nên trong trường hợp này ta luôn có

$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} < 0$. Do đó ta có $x_1 x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 = m > 2 \Leftrightarrow m > 2$. **Chọn A.**

Ví dụ 37: Gọi d là đường thẳng đi qua cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 + 9x - 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để d đi qua điểm $A\left(-\frac{9}{2}; 8\right)$.

A. $m = -4$.

B. $m = -3$.

C. $m = 4$.

D. $m = 4$ hoặc $m = -3$.

Lời giải

Ta có: $y' = x^2 + 2mx + 9 = 0$.

ĐK để hàm số có cực trị là $\Delta'_{y'} = m^2 - 9 > 0$

Khi đó ta có: $y = y' \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{m}{3}\right) + \left(6 - \frac{2}{3}m^2\right)x - 1 - 3m \Rightarrow$ đường thẳng (d) đi qua cực đại và cực tiểu của

đồ thị hàm số là: $d: y = \left(6 - \frac{2}{3}m^2\right)x - 1 - 3m$

Để d đi qua điểm $A\left(-\frac{9}{2}; 8\right)$ thì $\left(6 - \frac{2}{3}m^2\right) \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) - 1 - 3m = 8$

$\Leftrightarrow m^2 - m - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -3 \end{cases}$. **Chọn C.**

Ví dụ 38: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 1 (O là gốc tọa độ).

A. $m = \pm 3$.

B. $m = \pm 1$.

C. $m = \pm 5$.

D. $m = \pm 2$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 1$, ta có $y' = 3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow x(x - 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Để hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$. Khi đó gọi $A(0; 1)$ và $B(2m; 1 - 4m^3)$.

Phương trình đường thẳng OA là $x = 0 \Rightarrow d(B; (OA)) = 2|m|$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot d(B(OA)) \cdot OA = |m| = 1 \Rightarrow m = \pm 1$. **Chọn B.**

DẠNG 3. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG

☑ Xét hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ với hệ số $a \neq 0$.

Ta có: $y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-b}{2a} \end{cases}$. Khi đó:

- Hàm số có một cực trị $\Leftrightarrow \frac{-b}{2a} \geq 0 \Leftrightarrow ab \geq 0$.
- Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow \frac{-b}{2a} < 0 \Leftrightarrow ab < 0$.
- Hàm số có một cực trị và cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$.
- Hàm số có một cực trị và cực trị là cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$.
- Hàm số có hai cực tiểu và một cực đại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.
- Hàm số có hai cực đại và một cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

☒ Bài toán hàm trùng phương có ba cực trị tạo tam giác ABC (rất hay gặp)

- Tìm điều kiện tồn tại ba điểm cực trị: $\frac{-b}{2a} > 0 (*)$

▪ Với điều kiện (*) ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 = x_A \longrightarrow y_A \\ x_2 = \sqrt{\frac{-b}{2a}} = x_B \longrightarrow y_B \\ x_3 = -\sqrt{\frac{-b}{2a}} = x_C \longrightarrow y_C \end{cases}$, từ đó

$$A(0; y_A); B\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; y_B\right); C\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}; y_C\right)$$

Do hàm chẵn với x nên các điểm B, C có $y_B = y_C$.

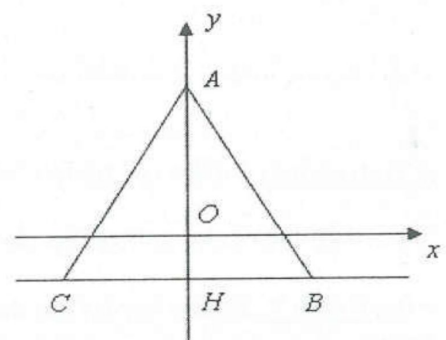
Nhận xét: $A \in Oy, B; C$ đối xứng nhau qua Oy nên tam giác ABC luôn là tam giác cân tại A .

Ta xét một số tính chất cơ bản thường gặp của hàm số:

▪ Tính chất 1: 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

Do tam giác ABC đã cân tại A nên chỉ có thể vuông cân tại đỉnh A . Khi đó ta có điều kiện $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, (1)$ với

$$\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; y_B - y_A\right); \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}; y_C - y_A\right)$$



$$\text{Từ đó (1)} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} + (y_B - y_A)^2 = 0$$

Giá trị m tìm được kết hợp với điều kiện tồn tại ở (*) cho ta kết quả cuối cùng của bài toán.

Ngoài ra ta cũng có thể dùng điều kiện Pitago cho tam giác cân ABC : $AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = BC^2$

▪ **Tính chất 2: 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác đều.**

Tam giác ABC đều khi $AB = BC \Leftrightarrow AB^2 = BC^2, (2)$

$$\text{với } \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; y_B - y_A \right); \overrightarrow{BC} = \left(-2\sqrt{\frac{-b}{2a}}; 0 \right)$$

$$\text{Từ đó (2)} \Leftrightarrow \frac{-b}{2a} + (y_B - y_A)^2 = \frac{-2b}{a}$$

Giá trị m tìm được kết hợp với điều kiện tồn tại ở (*) cho ta kết quả cuối cùng của bài toán.

▪ **Tính chất 3: 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có một góc bằng 120° .**

Tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow H(0; y_B)$.

$$\text{Ta có } \cos \widehat{HAB} = \frac{AH}{AB} \Leftrightarrow \cos 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Leftrightarrow AB = 2AH \Leftrightarrow AB^2 = 4AH^2, (3)$$

$$\text{với } \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; y_B - y_A \right); \overrightarrow{AH} = (0; y_B - y_A), \text{ từ đó (3)} \Leftrightarrow \frac{-b}{2a} + (y_B - y_A)^2 = 4(y_B - y_A)^2$$

Giá trị m tìm được kết hợp với điều kiện tồn tại ở (*) cho ta kết quả cuối cùng của bài toán.

▪ **Tính chất 4: 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích $S = S_o$ cho trước.**

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow H(0; y_B)$. Khi đó

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Leftrightarrow 2S_o = AH \cdot BC \Leftrightarrow 4S_o^2 = AH^2 \cdot BC^2, (4)$$

$$\text{với } \overrightarrow{BC} = \left(-2\sqrt{\frac{-b}{2a}}; 0 \right); \overrightarrow{AH} = (0; y_B - y_A), \text{ từ đó (4)} \Leftrightarrow 4S_o^2 = (y_B - y_A)^2 \cdot 4 \left(\frac{-b}{2a} \right)$$

Giá trị m tìm được kết hợp với điều kiện tồn tại ở (*) cho ta kết quả cuối cùng của bài toán.

▪ **Tính chất 5: 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp R cho trước.**

$$\text{Sử dụng công thức diện tích tam giác } S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} \Leftrightarrow R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC} \Leftrightarrow R = \frac{AB^2}{2AH}$$

Giải phương trình trên ta được giá trị của m , đối chiếu với (*) cho ta kết luận cuối cùng.

▪ **Tính chất 6: 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có trọng tâm $G(0; \alpha)$ cho trước.**

$$\text{Ta có điều kiện trong trường hợp này là } \alpha = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Leftrightarrow y_A + 2y_B = 3\alpha$$

▪ **Tính chất 7: 3 điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp r cho trước.**

Sử dụng công thức diện tích tam giác $S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}AH.BC}{\frac{AB+AC+BC}{2}} = \frac{AH.BC}{2AB+BC}$

Giải phương trình trên ta được giá trị của m , đối chiếu với (*) cho ta kết luận cuối cùng.

☑ Một số công thức tính nhanh liên quan đến cực trị của hàm trùng phương (tham khảo)

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a \neq 0$ và hàm số có ba điểm cực trị.

Khi đó gọi $A(0;c); B\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right); C\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ lần lượt là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số

$$\Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}; BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Xét $\triangle ABC$ cân, đặt $\widehat{BAC} = \alpha$ ta có $\tan^2 \frac{\alpha}{2} = -\frac{8a}{b^3}$.

Và diện tích $S = \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2}{|a|} \cdot \sqrt{\frac{-b}{2a}} \Rightarrow S^2 = \frac{-b^5}{32a^3}$, phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B, C là

$$x^2 + y^2 - (c+n)x + c.n = 0 \text{ với } n = \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}.$$

Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($ab < 0$) có ba điểm cực trị $A \in Oy, B, C$ tạo thành

DỮ KIẾN GIẢ THIẾT	CÔNG THỨC TÍNH NHANH
Tam giác ABC vuông cân tại A	$\alpha = 90^0$
Tam giác ABC đều	$\alpha = 60^0$
$\widehat{BAC} = \alpha$	$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = -\frac{8a}{b^3}$
$S_{\triangle ABC} = S_o$	$(S_o)^2 = \frac{-b^5}{32a^3}$
$r_{\triangle ABC} = r_o$ (bán kính đường tròn nội tiếp)	$r_o = \frac{b^2}{ a \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^2}{a}}\right)}$
$BC = m_0$	$a.m_0^2 + 2b = 0$
$Ab = AC = n_0$	$16a^2.n_0^2 - b^4 + 8b = 0$
$B, C \in Ox$ (ba điểm cực trị nằm trên cùng một trục tọa độ)	$b^2 - 4ac = 0$
Tam giác có trọng tâm $O(0;0)$ (gốc tọa độ)	$b^2 - 6ac = 0$
Tam giác có trực tâm $O(0;0)$ (gốc tọa độ)	$b^3 + 8a - 4ac = 0$
$R_{\triangle ABC} = R_0$ (bán kính đường tròn ngoại tiếp)	$R_0 = \frac{b^3 - 8a}{8 a b}$

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$, với m là tham số.

Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$, với O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x[x^2 - (m+1)] \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m+1 \end{cases}$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1. (*)$$

$$\text{Với } m > -1 \text{ thì } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = m \\ x_2 = \sqrt{m+1} \Rightarrow y_2 = -(m+1)^2 + m \\ x_3 = -\sqrt{m+1} \Rightarrow y_3 = -(m+1)^2 + m \end{cases}$$

Theo bài ta có tọa độ các điểm cực trị là $A(0; m), B(\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1), C(-\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1)$

$$\text{Từ đó } OA = BC \Leftrightarrow OA^2 = BC^2 \Leftrightarrow m^2 = 4(m+1) \Leftrightarrow m^2 - 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 + 2\sqrt{2} \\ m = 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $m = 2 \pm 2\sqrt{2}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$, với m là tham số.

Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x[x^2 - m^2] \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{cases}$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0. (*)$

$$\text{Với } m \neq 0 \text{ thì } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 1 \\ x_2 = m \Rightarrow y_2 = 1 - m^4 \\ x_3 = -m \Rightarrow y_3 = 1 - m^4 \end{cases} \longrightarrow A(0; 1), B(m; 1 - m^4), C(-m; 1 - m^4)$$

Ta nhận thấy tam giác $\triangle ABC$ luôn cân tại A . Để $\triangle ABC$ vuông cân thì phải vuông cân tại A .

Từ đó suy ra

$$AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (m; -m^4) \cdot (-m; -m^4) = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow m^2(m^6 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $m = \pm 1$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - m - 1$, với m là tham số.

Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị đồng thời các điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác

- a) Có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.
- b) Đều.
- c) Có một góc bằng 120^0 .

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 + 4mx = 4x(x^2 + m) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases}$

Hàm số có ba điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt, tức là $m < 0$. (*)

Với $m < 0$ thì

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -m - 1 \\ x = \sqrt{-m} \Rightarrow y = -m^2 - m - 1 \\ x = -\sqrt{-m} \Rightarrow y = -m^2 - m - 1 \end{cases} \longrightarrow A(0; -m - 1), B(\sqrt{-m}; -m^2 - m - 1), C(-\sqrt{-m}; -m^2 - m - 1)$$

Ta nhận thấy A thuộc Oy , B ; C đối xứng qua Oy nên tam giác ABC cân tại A .

a) Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow H(0; -m^2 - m - 1)$

Khi đó, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow AH \cdot BC = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow AH^2 \cdot BC^2 = 128$. (1)

Ta có $\overrightarrow{BC} = (-2\sqrt{-m}; 0)$; $\overrightarrow{AH} = (0; -m^2)$, từ đó (1) $\Leftrightarrow -4m \cdot m^4 = 128 \Leftrightarrow m^5 = -32 \Rightarrow m = -2$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta thấy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

b) Tam giác ABC đều khi $AB = BC \Leftrightarrow AB^2 = BC^2$, (2)

Ta có $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{-m}; -m^2)$; $\overrightarrow{BC} = (-2\sqrt{-m}; 0)$, từ đó

$$(2) \Leftrightarrow -m + m^4 = -4m \Leftrightarrow m^4 = -3m \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\sqrt[3]{3} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta được $m = -\sqrt[3]{3}$ là giá trị cần tìm.

c) Tam giác ABC cân tại A nên để có một góc bằng 120^0 thì $\widehat{BAC} = 120^0$

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow H(0; -m^2 - m - 1)$

Trong tam giác vuông HAB có

$$\sin \widehat{HAB} = \sin 60^0 = \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{3}AB = 2BH = BC \Leftrightarrow 3AB^2 = BC^2, \quad (3)$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{-m}; -m^2)$; $\overrightarrow{BC} = (-2\sqrt{-m}; 0)$, khi đó (3) $\Leftrightarrow 3(-m + m^4) = -4m \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{cases}$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta được $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$, với m là tham số.

Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị đồng thời các điểm cực trị của đồ thị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt, tức là $m > 0$. (*)

Với $m > 0$ thì

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = m - 1 \\ x = \sqrt{m} \Rightarrow y = -m^2 + m - 1 \\ x = -\sqrt{m} \Rightarrow y = -m^2 + m - 1 \end{cases} \longrightarrow A(0; m - 1), B(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1), C(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$$

Ta nhận thấy A thuộc Oy , B ; C đối xứng qua Oy nên tam giác ABC cân tại A .

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow H(0; -m^2 + m - 1)$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là } S_{\triangle ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB^2}{2AH}, \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \overline{AB} = (\sqrt{m}; -m^2); \overline{AH} = (0; -m^2) \Rightarrow \begin{cases} AB^2 = m + m^4 \\ AH = m^2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó, } (1) \Leftrightarrow 2 = \frac{m + m^4}{m^2} \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m^2 + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta được $m = 1; m = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ là các giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m^2$ (1), với m là tham số.

Tìm m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4(m + 1)x = 4x[x^2 - (m + 1)] \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m + 1 \end{cases}$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1. (*)$$

Với $m \neq 0$ thì

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = m^2 \\ x_2 = \sqrt{m + 1} \Rightarrow y_2 = -2m - 1 \\ x_3 = -\sqrt{m + 1} \Rightarrow y_3 = -2m - 1 \end{cases} \longrightarrow A(0; m^2), B(\sqrt{m + 1}; -2m - 1), C(-\sqrt{m + 1}; -2m - 1)$$

Ta nhận thấy tam giác ABC luôn cân tại A . Để ΔABC vuông cân thì phải vuông cân tại A .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} = (\sqrt{m+1}; -(m+1)^2); \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{m+1}; -(m+1)^2)$$

$$\text{Từ đó suy ra } AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -(m+1) + (m+1)^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1=0 \\ m+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ m=0 \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta được $m=0$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2(C)$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị tại A, B, C sao cho $BC = 4OA$ trong đó A là điểm cực trị thuộc trục tung.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow A(0;2) \\ x^2=m+1 \end{cases} \quad (1).$$

Để hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

$$\text{Khi đó ta có: } x = \pm\sqrt{m+1} \Rightarrow y = -(m+1)^2 + 2 = -m^2 - 2m + 1.$$

$$\Rightarrow B(\sqrt{m+1}; -m^2 - 2m + 1); C(-\sqrt{m+1}; -m^2 - 2m + 1).$$

$$\text{Theo giả thiết ta có: } BC = 4OA \Leftrightarrow 2\sqrt{m+1} = 4.2 \Leftrightarrow \sqrt{m+1} = 4 \Leftrightarrow m = 15(tm).$$

Vậy $m=15$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + 1(C)$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị tại A, B, C sao cho tam giác ABC vuông cân.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=2m^2+1 \Rightarrow A(0;2m^2+1) \\ x^2=m \end{cases} \quad (1).$$

Để hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow (1)$ có ba nghiệm phân biệt $m > 0$.

$$\text{Khi đó ta có: } x = \pm\sqrt{m} \Rightarrow y = m^2 + 1 \Rightarrow B(\sqrt{m}; m^2 + 1); C(-\sqrt{m}; m^2 + 1).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (\sqrt{m}; -m^2); \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{m}; -m^2). \text{ Khi đó } AB^2 = AC^2 = m + m^4 \text{ do vậy tam giác } ABC \text{ cân tại } A$$

$$\text{suy ra tam giác } ABC \text{ vuông cân } \Leftrightarrow \text{vuông cân tại } A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow -m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m(m^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0(loại) \\ m=1 \end{cases}.$$

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + 1(C)$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị tại A, B, C có tung độ là $y_1; y_2; y_3$ thỏa mãn đẳng thức: $y_1 + y_2 + y_3 = 3$.

Lời giải

+) Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

+) Để hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó, 3 điểm cực trị của hàm số là $A(0; 2m+1), B(-\sqrt{m}; 2m+1-m^2), C(\sqrt{m}; 2m+1-m^2)$

Ta có: $y_1 + y_2 + y_3 = y_A + y_B + y_C = -2m^2 + 6m + 3 = 3 \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m^2 + m(C)$. Tìm m để hàm số có ba điểm cực trị tại A, B, C sao cho $2OA + OB^2 + OC^2 = 8$ với O là gốc tọa độ và A là điểm cực trị thuộc trục tung.

Lời giải

+) Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

+) Để hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó, 3 điểm cực trị của hàm số là $A(0; m^2 + m), B(-\sqrt{m}; m), C(\sqrt{m}; m)$

+) Để $2OA + OB^2 + OC^2 = 8 \Leftrightarrow 2(m^2 + m) + 2(m + m^2) = 8$

$\Leftrightarrow m^2 + m = 2 \Leftrightarrow m = 1$ (do $m > 0$). Kết hợp điều kiện ta được $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 10: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 + 1(C)$ và điểm $E(0; -1)$. Tìm m để hàm số có cực đại tại A hai điểm cực tiểu tại B và C sao cho $\triangle BCE$ là tam giác đều.

Lời giải

+) Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x[x^2 - (m+1)]$

+) Để hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

+) Khi đó, 3 điểm cực trị của hàm số là $A(0; m^2 + 1), B(\sqrt{m+1}; -2m), C(-\sqrt{m+1}; -2m)$

$BC^2 = 4(m+1); BE^2 = m+1 + (2m-1)^2 = CE^2$

Do $BE = CE$ nên tam giác BCE đều $\Leftrightarrow BE = BC \Leftrightarrow 4(m+1) = m+1 + (2m-1)^2$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 7m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{1}{4} \end{cases}$. Vậy $m = 2; m = -\frac{1}{4}$ là các giá trị cần tìm.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = x^4 - (m+1)x^2 + 1$. Giá trị của m để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị là:

A. $m > -1$.

B. $m < -1$.

C. $m \geq -1$.

D. $m \leq -1$.

Lời giải

Hàm số có 3 điểm cực trị $ab = 1 \cdot [-(m+1)] < 0 \Leftrightarrow m > -1$. **Chọn A.**

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = x^4 + (m^2 - 4m + 3)x^2 + 2m - 1$. Giá trị của m để hàm số đã cho có một điểm cực

trị là:

A. $1 < m < 3$.

B. $1 \leq m \leq 3$.

C. $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 1 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 + 2(m^2 - 4m + 2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{-(m^2 - 4m + 3)}{2} \end{cases}$.

Hàm số có 1 điểm cực trị $ab = m^2 - 4m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 1 \end{cases}$. **Chọn D.**

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = (m-1)x^4 + (2m-1)x^2 + 3$. Giá trị của m để hàm số đã cho có một điểm cực trị là:

A. $\frac{1}{2} < m < 1$.

B. $\frac{1}{2} \leq m < 1$.

C. $\begin{cases} m > 1 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases}$.

D. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Lời giải

Với $m = 1 \Rightarrow y = x^2 + 3$ nên hàm số đã cho có một điểm cực trị

Với $m \neq 1$ để hàm số có 1 điểm cực trị $\Leftrightarrow ab = (m-1)(2m-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases}$.

Kết hợp cả 2 trường hợp ta được $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ là giá trị cần tìm. **Chọn D.**

Ví dụ 14: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^4 + (2m-1)x^2 + m-2$ chỉ có một cực đại và không có cực tiểu.

A. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases}$.

B. $m \leq 0$

C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$.

D. $m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải

TH1: Với $m = 0$, ta có $y = -x^2 - 2 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại của hàm số.

TH2: Với $m \neq 0$, ta có $y' = 4mx^3 + (2m-1)x = x(4mx^2 + 2m-1); \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x(4mx^2 + 2m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4mx^2 = 1-2m \end{cases}$.

Để hàm số có một cực đại và không có cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 1 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0$. Vậy $m \leq 0$. **Chọn B.**

Ví dụ 15: Cho hàm số $y = (m^2 - 2m)x^4 + (m - 1)x^2 + 1$. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100; 100]$ để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị là:

- A. 103. B. 100. C. 101. D. 102.

Lời giải

Với $m^2 - 2m = 0$ thì hàm số đã cho không thể có 3 điểm cực trị

Với $m^2 - 2m \neq 0$ để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị thì $ab = f'(x) = (m^2 - 2m)(m - 1) < 0$.

Lập bảng xét dấu cho $f'(m)$ ta được $f'(m) < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$.

Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-100; 100] \end{cases} \Rightarrow$ có 100 giá trị nguyên của m . **Chọn B.**

Ví dụ 16: Cho hàm số $y = (m^2 - 1)x^4 + (2m - 1)x^2 + 2m + 1$. Giá trị của m để hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu là

- A. $\frac{1}{2} < m < 1$. B. $-1 < m < 1$. C. $\begin{cases} m < -1 \\ \frac{1}{2} < m < 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} -1 < m < \frac{1}{2} \\ m > 1 \end{cases}$.

Lời giải

Hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a = m^2 - 1 < 0 \\ ab = (m^2 - 1)(2m - 1) < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1$. **Chọn A.**

Ví dụ 17: Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 1)x^2 + m - 1$. Giá trị của m để hàm số có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại là:

- A. $-1 < m < 1$. B. $-1 < m < 0$. C. $0 < m < 1$. D. $m < -1$.

Lời giải

Hàm số đã cho có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại khi

$\begin{cases} m > 0 \\ ab = m(m^2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1$. **Chọn C.**

Ví dụ 18: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + 2 (a \neq 0)$. Giá trị của a và b để đồ thị hàm số đạt cực trị tại điểm $A(1; -2)$ là:

- A. $a = 4; b = -8$. B. $a = 2; b = -6$. C. $a = -4; b = 8$. D. $a = 2; b = -4$.

Lời giải

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = c \\ x^2 = \frac{-b}{2a} \end{cases}$.

Hàm số đạt cực trị tại điểm $A(1; -2)$ nên $\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 1 \\ a + b + 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -8 \end{cases}$. **Chọn A.**

Ví dụ 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

A. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

B. $m = -1$.

C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases}$

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó ta có tọa độ 3 điểm cực trị là $A(0; 1), B(\sqrt{-m}; -m^2 + 1), C(-\sqrt{-m}; -m^2 + 1)$

Do $AB^2 = AC^2 = -m + m^4$ nên tam giác ABC luôn cân tại A .

Do ABC luôn cân suy ra nó vuông cân tại A . Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (loại)} \\ m = -1 \end{cases}$.

Cách 2: Sử dụng công thức tính nhanh với $\widehat{BAC} = 90^\circ$ ta có: $\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{-8a}{b^3} \Leftrightarrow \frac{-8}{8m^3} = 1 \Leftrightarrow m = -1$.

Chọn B.

Ví dụ 20: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác vuông cân.

A. $m = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

B. $m = \pm \frac{1}{2}$.

C. $m = \pm 1$.

D. $m = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 4m^2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{cases}$

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó ta có tọa độ 3 điểm cực trị là $A(0; 1), B(m; 1 - m^4), C(m; 1 - m^4)$

Do $AB^2 = AC^2 = -m + m^8$ nên tam giác ABC luôn cân tại A .

Do ABC luôn cân suy ra nó vuông cân tại A .

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -m + m^6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 (l) \\ m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1 \end{cases}$. **Chọn C.**

Ví dụ 21: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ (C). Tìm m để hàm số có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác vuông.

- A. $m = -1$. B. $m = 0$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x(x^2 - m - 1)$

+) Để hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Khi đó, 3 điểm cực trị của hàm số là $A(0; m^2), B(-\sqrt{m+1}; -2m-1), C(\sqrt{m+1}; -2m-1)$

$$\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{m+1}; -(m+1)^2); \overrightarrow{AC} = (\sqrt{m+1}; -(m+1)^2)$$

+) Do $AB = AC$ nên tam giác ABC vuông $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (m+1)^4 - (m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 (loại) \\ m = 0 (t/m) \end{cases}$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Ví dụ 22: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4$. Điều kiện để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác đều là:

- A. $m = 1$. B. $m = \pm\sqrt[3]{3}$. C. $m = \sqrt[3]{3}$. D. $m = \pm 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là $m > 0$.

Khi đó ta có tọa độ 3 điểm cực trị là: $A(0; 2m + m^4), B(\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m), C(-\sqrt{m}; m^4 - m^2 + 2m)$

Do $AB^2 = AC^2 = m + m^4$ nên tam giác ABC luôn cân tại A .

$$\text{Tam giác } ABC \text{ đều} \Leftrightarrow AB = BC \Leftrightarrow m + m^4 = 4m \Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt[3]{3} \\ m = 0 (loại) \end{cases}$$

Cách 2: Sử dụng công thức nhanh với $\widehat{BAC} = 60^\circ$ ta có: $\tan^2 \frac{A}{2} = \frac{-8a}{b^3} \Leftrightarrow \frac{-8}{-8m^3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}$.

Chọn C.

Ví dụ 23: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 - 4$. Giá trị của m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích bằng $S = 1$ là:

- A. $m = 1$. B. $m = \pm\sqrt[3]{3}$. C. $m = \sqrt[3]{3}$. D. $m = \pm 1$.

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$

Điều kiện để hàm số có 3 điểm cực trị là: $m > 0$.

Khi đó ta có tọa độ 3 điểm cực trị là: $A(0; 2m^2 - 4), B(\sqrt{m}; m^2 - 4), C(-\sqrt{m}; m^2 - 4)$

Trung điểm của BC là $H(0; m^2 - 4)$. Do đó $S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} |y_A - y_H| \cdot |x_B - x_C|$.

$$= \frac{1}{2} \cdot |m^2| \cdot 2\sqrt{m} = 1 \Leftrightarrow m^2 \sqrt{m} = 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

Cách 2: Sử dụng công thức nhanh với $S^2 = \frac{-b^5}{32a^3} = m^5 = 1 \Leftrightarrow m = 1$. **Chọn A.**

Ví dụ 24: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 - 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tạo thành tam giác có diện tích S thỏa mãn $1 < S < 2018$.

A. 19.

B. 20.

C. 2018.

D. 2017.

Lời giải

Ta có: $S^2 = \frac{-b^5}{32a^3} = m^5 \Rightarrow S = m^2 \sqrt{m}$.

Khi đó: $1 < S < 2018 \Leftrightarrow 1 < m^2 \sqrt{m} < 2018 \Leftrightarrow 1 < m^5 < 2018^2 \Leftrightarrow 1 < m < 20,98$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 19 giá trị nguyên của tham số m . **Chọn A.**

Ví dụ 25: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m(C)$. Giá trị m_0 của tham số m để đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị tại A, B, C sao cho tam giác ABC có một góc bằng 120° thỏa mãn:

A. $m_0 \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

B. $m_0 \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

C. $m_0 \in (1; 2)$.

D. $m_0 \in (2; 3)$.

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$

Để hàm số có CĐ, CT $\Leftrightarrow m > 0$. Khi đó gọi $A(0; 2m) B(\sqrt{m}; 2m - m^2), C(-\sqrt{m}; 2m - m^2)$

Gọi H là trung điểm của BC ta có $H(0; 2m - m^2)$. Dễ thấy tam giác ABC cân tại A .

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ$ có đường trung tuyến AH do đó: $\widehat{BAH} = 60^\circ$.

Khi đó ta có: $\tan \widehat{BAH} = \frac{BH}{AH} = \frac{|\sqrt{m}|}{m^2} = \frac{1}{m\sqrt{m}} = \sqrt{3} \Rightarrow m^3 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Vậy $m = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ là giá trị cần tìm. **Chọn B.**

Ví dụ 26: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1 - m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trực tâm.

- A. $m = 0$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. Không tồn tại m .

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$. Để hàm số có ba điểm cực trị thì $m > 0$ (1)

Khi đó, tọa độ các điểm cực trị là: $A(0; 1 - m), B(\sqrt{m}; -m^2 - m + 1), C(-\sqrt{m}; -m^2 - m + 1)$

Ta có: $\overrightarrow{OA}(0; 1 - m), \overrightarrow{OB}(\sqrt{m}; -m^2 - m + 1), \overrightarrow{BC}(-2\sqrt{m}; 0), \overrightarrow{AC}(-\sqrt{m}; -m^2)$

Vì O là trực tâm nên $\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \sqrt{m} \cdot (-\sqrt{m}) + (-m^2 - m + 1)(-m^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0; m = \pm 1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow m = 1$. **Chọn C.**

Ví dụ 27: Đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có 3 điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm cực trị này có bán kính bằng 1 thì giá trị của m là

- A. $m = 1; m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. B. $m = -1; m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. C. $m = 1; m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. D. $m = 1; m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow a = 1; b = -2m; c = m$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$. Để hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$

Sử dụng công thức giải nhanh $R_{\Delta ABC} = R_0$ với $R_0 = \frac{b^3 - 8a}{8|a|b} \Rightarrow 1 = \frac{-8m^3 - 8}{-16m} \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0$.

Cách 2: $A(0; m), B(-\sqrt{m}; m - m^2), C(\sqrt{m}; m - m^2) \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{(m^4 + m) \cdot 2\sqrt{m}}{4 \cdot m \sqrt{m}} = 1 \Leftrightarrow m^2 + 1 = 2m$.

Kết hợp với điều kiện $m > 0 \Rightarrow m = 1; m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

DẠNG 4. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ HỢP

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (3 - x)(x^2 - 1) + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) - x^2 - 1$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?

- A. $x = -1$. B. $x = 1$. C. $x = 3$. D. $x = 0$.

Lời giải

HD: Ta có $g'(x) = f'(x) - 2x = (3 - x)(x^2 - 1); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Lập bảng xét dấu $\longrightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$. **Chọn B.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+3)(9-x^2)-3x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x)=f(x)+x^3-1$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x=3$. B. $x=-3$. C. $x=0$. D. $x=-1$.

Lời giải

HD: Ta có $g'(x)=f'(x)+3x^2=(x+3)(9-x^2)=(x+3)^2(3-x); g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=3 \end{cases}$

Và $g'(x)$ không đổi dấu khi qua điểm $x=-3 \Rightarrow x=3$ là điểm cực đại. **Chọn A.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-3x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) \geq 10$. Giá trị cực tiểu của hàm số $g(x)=f(x)+3$ có thể bằng

- A. 13. B. 12. C. 16. D. 14.

Lời giải

HD: Ta có $g'(x)=f'(x)=x^2-3x; g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$

Suy ra $x=3$ là điểm cực tiểu của hàm số $\Rightarrow g(3) < g(0)=f(0)+3 < 13$. **Chọn B.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x)=f(1-x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- A. $x=1$. B. $x=-1$. C. $x=0$. D. $x=2$.

Lời giải

HD: Ta có $g'(x)=-f'(1-x)=-(1-x)(-1-x)=(1-x)(x+1)$

Phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \longrightarrow x=1$ là điểm cực đại. **Chọn A.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x)=(x^2-3x)(1-x)$ trên $\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^2-x+1)$ là

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=(x^2-3x)(1-x)$

Khi đó: $g'(x)=\left[f(x^2-x+1)\right]'=(2x-1)f'(x^2-x+1)=(2x-1)(x^2-x+1)(x^2-x-2)(x-x^2)$
 $= (2x-1)(x^2-x+1)(x+1)(x-2)x(1-x)$

Do $g'(x)$ đổi dấu qua 5 điểm suy ra hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4x + 3)$ trên $\mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x)$ là

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 5.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = (x-1)^2(x+1)(x-3)$

Khi đó: $g'(x) = (2x+2)f'(x^2+2x) = (2x+2)(x^2+2x-1)^2(x^2+2x+1)(x^2+2x-3)$

$= (2x+2)(x^2+2x-1)^2(x+1)^2(x-1)(x+3)$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$

Do $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua 1 điểm nên hàm số $g(x)$ có 1 điểm cực đại. **Chọn A.**

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 2x)$ trên $\mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x^2 + 3x)$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = (x^2 - 2)(x+2)x$

Khi đó: $g'(x) = (2x+3)f'(x^2+3x) = (2x+3)(x^2+3x-2)^2(x^2+3x+2)(x^2+3x)$

$= (2x+3)(x^2+3x-2)^2(x+1)(x+2)x(x+3)$.

x	$-\infty$	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Do $g'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi qua 3 điểm nên hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực tiểu. **Chọn C.**

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 3x + 2)(x-1)$ và $g(x) = -2f(2-x) + x^2$. Hàm số đạt cực trị tại điểm x bằng

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = -3$. D. $x = 3$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = (x-1)^2(x-2) \longrightarrow f'(2-x) = -x(1-x)^2$

Lại có $g'(x) = 2f'(2-x) + 2x = -2x(1-x)^2 + 2x = 2x^2(2-x)$.

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2(2-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$. **Chọn A.**

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = (\sqrt{x^2 + x + 2})$ có mấy điểm cực trị?

A. 9. **B. 7.** **C. 6.** **D. 5.**

Lời giải

Ta có $y = (\sqrt{x^2 + x + 2}) \rightarrow y' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x + 2}} \cdot f'(\sqrt{x^2 + x + 2})$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow (2x+1) \cdot f'(\sqrt{x^2 + x + 2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ f'(\sqrt{x^2 + x + 2}) = 0 \end{cases} (*)$

Lại có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$ suy ra $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 2} = \pm 1 \\ \sqrt{x^2 + x + 2} = 2 \\ \sqrt{x^2 + x + 2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 + x = 2 \\ x^2 + x = 14 \end{cases}$ (có 4 nghiệm).

Suy ra hàm số đã cho có 5 điểm cực trị. **Chọn D.**

Ví dụ 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		1	10		$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(2x-1)|$ là:

A. 3. **B. 4.** **C. 5.** **D. 6.**

Lời giải

Ta có: $y = |f(x)|$ thì $y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|}$

Ta có: $y = |f(2x-1)| \Rightarrow y' = \frac{[f(2x-1)]' \cdot f(2x-1)}{|f(2x-1)|} = \frac{2f'(2x-1) \cdot f(2x-1)}{|f(2x-1)|} (*)$

Dựa vào BBT suy ra phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm $x = a > 2$ nên phương trình

$f(2x-1) = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = a(1)$ có 1 nghiệm.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow f(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = -3 \\ 2x-1 = 2 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y = |f(2x-1)|$ có 3 điểm cực trị. **Chọn A.**

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			-1		-4		$+\infty$
	$-\infty$						

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x^2 + 2)|$ là:

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$

Ta có: $y = (|f(x^2 + 2)|)' = \frac{f(x^2 + 2)[f(x^2 + 2)]'}{|f(x^2 + 2)|} = \frac{f(x^2 + 2) \cdot 2x \cdot f'(x^2 + 2)}{|f(x^2 + 2)|} \quad (*)$

Dựa vào BBT ta có thể giả sử $f(x) = 0$ có 1 nghiệm duy nhất là $x = a > 3$

Khi đó $f(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 = a(1)$

Mặt khác $2x \cdot f'(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2 = -2(2) \\ x^2 + 2 = 3 \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra (*) có 5 nghiệm phân biệt suy ra hàm số $y = |f(x^2 + 2)|$ có 5 điểm cực trị.

Chọn C.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2 - 3x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - 4x - m)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Ta có $g'(x) = (2x-4)f'(x^2 - 4x - m) = 2(x-2)(t+1)^2(t^2 - 3t)$ (với $t = x^2 - 4x - m$)

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là số nghiệm bội lẻ của phương trình $(x-2)(t^2 - 3t) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 4x - m)(x^2 - 4x - m - 3) = 0$

Hàm số có 5 điểm cực trị khi các phương trình $u(x) = x^2 - 4m - m = 0$ và $v(x) = x^2 - 4m - m - 3 = 0$

$$\text{Có 2 nghiệm phân biệt khác nhau và khác 2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_u = 4 + m > 0 \\ \Delta'_v = 4 + m + 3 > 0 \\ u(2) = -4 - m \neq 0 \\ v(2) = -7 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -4$$

Vậy 3 giá trị nguyên âm của m thỏa mãn yêu cầu. **Chọn A.**

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^4(x^3-x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 0]$ để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 7 điểm cực trị?

A. 9. B. 7. C. 8. D. 10.

Lời giải

Ta có $g'(x) = [f(x^2 + m)]' = 2x \cdot f'(x^2 + m) = 2x(t-2)^4(t^3-t)$ (với $t = x^2 + m$)

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là số nghiệm bội lẻ của phương trình $xt(t^2-1)$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + m)(x^2 + m - 1)(x^2 + m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 = 1 - m \\ x^2 = -1 - m \end{cases} (*)$$

$$\text{PT (*) có 7 nghiệm phân biệt khi} \Leftrightarrow \begin{cases} -m > 0 \\ 1 - m > 0 \\ -1 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

Vậy có 8 giá trị nguyên âm của $m \in [-10; 0]$ thỏa mãn. **Chọn C.**

Ví dụ 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = [f(x) + m]^2$ có 5 điểm cực trị là:

A. 11. B. 10. C. 9. D. 12.

Lời giải

$$\text{Ta có: } g'(x) = 2 \cdot f'(x) \cdot [f(x) + m] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -m \end{cases}$$

Do hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị nên phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Để hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $f(x) = -m$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m < 0 \\ m \leq -3 \end{cases}$$

Chú ý: Với $m = -2, m = -3$ thì $f'(x) = -m$ có nghiệm kép tại $x = -2$.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-10; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$. **Chọn B.**

Ví dụ 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x)$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = |f(1 - 2018x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 9. B. 2018. C. 2022. D. 11.

Lời giải

Ta có $f'(x) = (x^3 - 2x^2)(x^3 - 2x) = x^3(x - 2)(x^2 - 2); \forall x \in \mathbb{R}$.

Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = |f(1 - 2018x)|$ là tổng số nghiệm của phương trình

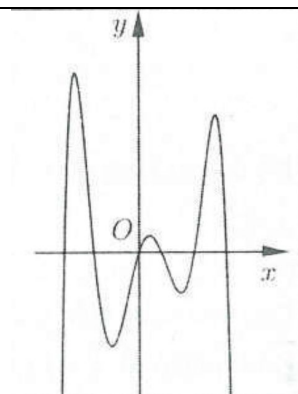
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2018 \cdot f'(1 - 2018x) = 0 \longrightarrow \text{có 4 điểm.}$$

Số nghiệm của phương trình $(1 - 2018x) = 0 \longrightarrow$ có tối đa 5 nghiệm vì đạo hàm có 4 nghiệm.

Vậy hàm số đã cho có tối đa 9 điểm cực trị. **Chọn A.**

Ví dụ 16: Hàm số đa thức bậc sáu $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên cạnh. Hàm số $g(x) = f(3 - \sqrt{3}x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3.
B. 4.
C. 5.
D. 6.



Lời giải

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(ax + b)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

Dựa vào hình vẽ, ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 5 điểm cực trị.

Chọn C.

Ví dụ 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	2	4	$+\infty$				
$f'(x)$		+	0	-		+	0	-	0	+

Gọi m, n lần lượt là số điểm cực đại, số điểm cực tiểu của hàm số. Tính $m^2 - 2n$.

- A. 3. B. 6. C. -1. D. 0.

Lời giải

Ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$ và $f'(x)$ không xác định tại $x = 0$.

Mà $f'(x)$ đổi dấu từ $+\rightarrow -$ khi đi qua $x = -1; x = 2 \Rightarrow$ Hàm số có 2 điểm cực đại.

Và $f'(x)$ đổi dấu từ $-\rightarrow +$ khi đi qua $x = 0; x = 4 \Rightarrow$ Hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Vậy $m = n = 2 \rightarrow m^2 - 2n = 2^2 - 2.2 = 0$. **Chọn D.**

DẠNG 5. CỰC TRỊ CỦA HÀM TRỊ TUYỆT ĐỐI

Loại 1: Cực trị hàm số $y = |f(x)|$.

Phương pháp giải:

Ta có: $y = |f(x)| \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|}$ do đó

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là số nghiệm bội lẻ của phương trình $f'(x) \cdot f(x) = 0$.

Như vậy: Nếu gọi m là số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ và n là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành thì $m + n$ là số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ (chú ý ta cần bỏ đi các nghiệm bội chẵn).

Ví dụ 1: [Đề thi THPT QG năm 2017] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành $y = 0$ tại 1 điểm nên $m = 1$.

Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nên $n = 2 \Rightarrow$ Hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-3	2	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		0	3		-2		$+\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là:

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị suy ra $m = 3$.

Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm (tuy nhiên $x = -1$ là nghiệm kép) suy ra $n = 2$.

Do đó hàm số $y = |f(x)|$ có $m + n = 5$ điểm cực trị. **Chọn C.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			0		4			
	$-\infty$			-3				$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là:

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị suy ra $m = 3$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt (tuy nhiên $x = -1$ là nghiệm kép) nên $n = 2$.

Do đó hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị. **Chọn C.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			-2		0			
	$-\infty$			-3				$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) + 2|$ là:

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Đặt $g(x) = f(x) + 2 \Rightarrow g'(x) = f'(x)$

Phương trình $g'(x) = f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên $m = 3$.

Phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -2$ có 3 nghiệm trong đó có 1 nghiệm kép $n = 2$.

Do đó hàm số $y = |f(x) + 2|$ có 5 điểm cực trị. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Số điểm cực trị của hàm số $y = \left| (x-1)^3 (x-3)(x+2) \right|$ là:

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Ta có: $y = f(x)$ thì $y' = \frac{f'(x)f(x)}{|f(x)|}$

Xét $f(x) = (x-1)^3 (x-3)(x+2)$

Ta có: $f(x) = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ $x = 1, x = 3, x = -2$.

Lại có: $f(x) = (x-1)^3 (x^2 - x - 6) \Rightarrow f'(x) = 3(x-1)^2 (x^2 - x - 6) + (x-1)^3 (2x-1)$

$= (x-1)^2 [3x^2 - 3x - 18 + (x-1)(2x-1)] = (x-1)^2 (5x^2 - 6x - 17) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm bội lẻ. Do

đó hàm số đã cho có 5 điểm cực trị. **Chọn B.**

Ví dụ 6: Số điểm cực trị của hàm số $y = |x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x|$ là:

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x^3(x+2) - x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1)(x+2) = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ.

Phương trình $f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(2x^2 - 1)(x+1) = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ.

Do đó hàm số đã cho có $4 + 3 = 7$ điểm cực trị. **Chọn D.**

Ví dụ 7: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị là:

A. 0.

B. 9.

C. 8.

D. vô số.

Lời giải

Xét $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m$

Phương trình $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ có 3 nghiệm bội lẻ.

Để hàm số $y = |x^4 - 4x^3 + 4x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 = -m(*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt.

Lập BBT cho hàm số $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x$ ta được:

x	$-\infty$	0		1	2		$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	0	+		
y	$+\infty$	$\searrow$		0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt khi $0 < -m < 1$.

Vậy không có giá trị nguyên của m nào thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

Ví dụ 8: Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^4 - 4x^3 - 8x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị là:

A. 129.

B. 2.

C. 127.

D. 3.

Lời giải

Phương trình $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 4 \end{cases}$ có 3 nghiệm bội lẻ.

Để hàm số $y = |x^4 - 4x^3 - 8x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 - 8x^2 = -m(*)$ có 4 nghiệm phân biệt. Lập BBT cho hàm số $g(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2$ ta được:

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		-3	0	-128	$+\infty$

Phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt khi $-3 < -m < 0$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn B.**

Ví dụ 9: [Đề thi tham khảo Bộ GD&ĐT năm 2018] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Đặt $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \longrightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x; \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Để hàm số đã cho có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Mà $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow f(x) = -m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Dựa vào BBT hàm số $f(x)$, để (*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -5 < -m < 0 \Leftrightarrow m \in (0; 5)$.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$ suy ra có tất cả 4 giá trị nguyên cần tìm. **Chọn D.**

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x) = |2x^3 - 3x^2 - 12x + m + 2|$. Số giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số đã cho có 5 điểm cực trị là:

A. 26.

B. 25.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Để thấy hàm số $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + m + 2$ có $y' = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Suy ra hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Để hàm số $f(x) = |2x^3 - 3x^2 - 12x + m + 2|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + m + 2 \Leftrightarrow h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2 = -m \text{ có 3 nghiệm phân biệt}$$

Để thấy $\begin{cases} h(-1) = 9 \\ h(2) = -18 \end{cases} \Rightarrow h(x) = -m \text{ có 3 nghiệm phân biệt khi } -18 < -m < 9 \Leftrightarrow 18 > m > -9$

Vậy có 8 giá trị nguyên cần tìm. **Chọn C.**

Ví dụ 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = |2x^4 - 4(m+8)x^2 + m - 1|$ có 5 điểm cực trị?

A. 9.

B. 10.

C. 8.

D. vô số.

Lời giải

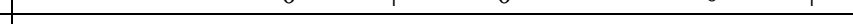
Xét hàm số $f(x) = |2x^4 - 4(m+8)x^2 + m - 1|$

TH1: Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất 2 điểm nên hàm số $y = |f(x)|$ không thể có 5 điểm cực trị.

TH2: Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị khi $ab < 0 \Leftrightarrow 2 \cdot [-4(m+8)] < 0 \Leftrightarrow m > -8$.

Để hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt.

Vì hàm số $y = f(x)$ có $a = 2 > 0$ nên có BTT như hình vẽ.

x	$-\infty$	$-x_0$	0	x_0	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$							

Đồ thị hàm số cắt trục hoành (đường thẳng $y = 0$) tại 2 điểm phân biệt khi $0 \geq m - 1 \Leftrightarrow m \leq 1$.

(Trong trường hợp xảy ra $m = 1 \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm đơn và một nghiệm kép $x = 0$ nên chỉ có điểm cực trị).

Vậy $-8 < m \leq 1$. Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 9 giá trị nguyên của tham số m . **Chọn A.**

Ví dụ 12: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = |x^4 - 2(m+4)x^2 + 9|$ có 7 điểm cực trị?

A. 9.

B. 11.

C. 10.

D. 4

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 2x^4 - 2(m+4)x^2 + 4$

TH1: Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất 2 điểm nên hàm số $y = |f(x)|$ không thể có 7 điểm cực trị.

TH2: Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị khi $ab < 0 \Leftrightarrow 1 \cdot [-2(m+4)] < 0 \Leftrightarrow m > -4$.

Để hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 4(m+4)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m+4 = x_0^2 \end{cases}$

Hàm số có BTT như hình vẽ

x	$-\infty$	$-x_0$	0	x_0	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$								$+\infty$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành (đường thẳng $y = 0$) tại 4 điểm phân biệt khi

$$f(\pm x_0) = f(\sqrt{m+4}) < 0$$

$$\Leftrightarrow (m+4)^2 - 2(m+4)^2 + 9 < 0 \Leftrightarrow (m+4)^2 > 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < -7 \end{cases}$$

Với $m > -1$. Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10; 10] \end{cases} \Rightarrow m = \{0; 1; \dots; 10\} \Rightarrow$ có 11 giá trị của m . **Chọn B.**

Ví dụ 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = |x^4 - 2(m+1)x^2 + 8|$ có 7 điểm cực trị?

A. 9.

B. 11.

C. 12.

D. 7.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2(m+1)x^2 + 8$

TH1: Hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại nhiều nhất 2 điểm nên hàm số $y = |f(x)|$ không thể có 7 điểm cực trị.

TH2: Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị khi $ab < 0 \Leftrightarrow 1 \cdot [-2(m+1)] < 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Để hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 4(m+1)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m+1 = x_0^2 \end{cases}$

Hàm số có BTT như hình vẽ

x	$-\infty$	$-x_0$	0	x_0	$+\infty$
-----	-----------	--------	-----	-------	-----------

y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			8			$+\infty$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành (đường thẳng $y = 0$) tại 4 điểm phân biệt khi

$$f(\pm x_0) = f(\sqrt{m+1}) < 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 2(m+1)^2 + 8 < 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 > 8 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 + 2\sqrt{2} \\ m < -1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Với $m > -1 - 2\sqrt{2}$. Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-20; 20] \end{cases} \Rightarrow m = \{2; 3; \dots; 10\} \Rightarrow$ có 9 giá trị của m . **Chọn A.**

Loại 2: Cực trị hàm số $y = f(|x|)$.

Phương pháp giải:

Ta có: $y = f(|x|) \Rightarrow y' = \frac{x}{|x|} \cdot f'(|x|)$ từ đó ta có nhận xét sau:

- Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 0$.

- Số điểm cực trị dương của hàm số $y = f(x)$ là m thì số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là $2m + 1$.

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = 6x^5 - 15x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 1$, số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là:

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 30x^4 - 60x^3 - 30x^2 + 60x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x^3 - 2x^2 - x - 2) = x(x-1)(x+1)(x-2)$$

Lại có: $y = f(|x|) \Rightarrow y' = \frac{x}{|x|} \cdot |x|(|x|-1)(|x|+1)(|x|-2)$ đổi dấu qua 5 điểm $x = 0; x = \pm 1; x = \pm 2$ nên hàm

số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị. **Chọn B.**

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-2	2	5	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	-2	-1	0	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là:

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị có hoành độ dương là $(2; -1)$ và $(5; 0)$

Do đó hàm số $y = f(|x|)$ có $2 \cdot 2 + 1 = 5$ điểm cực trị. **Chọn D.**

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			4		5			
	$-\infty$			3				$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x| + 1)$ là

A. 4.

B. 6.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Ta có: $y' = (|x| + 1)' \cdot f'(|x| + 1) = \frac{x}{|x|} \cdot f'(|x| + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(|x| + 1) = 0 \end{cases} (*)$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Suy ra $f'(|x| + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + 1 = -1 \\ |x| + 1 = 0 \\ |x| + 1 = 2 \end{cases}$ hệ có 2 nghiệm.

Do đó (*) có 3 nghiệm phân biệt nên hàm số có 3 điểm cực trị. **Chọn D.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hình vẽ bên.

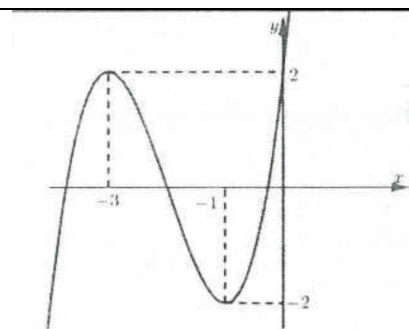
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m > -20$ để hàm số $y = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị

A. 15.

B. 19.

C. 16.

D. 18.



Lời giải

Ta có: $y' = (|x| + m)' \cdot f'(|x| + m) = \frac{x}{|x|} \cdot f'(|x| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(|x| + m) = 0 \end{cases}$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$

$$\text{Do đó } f'(|x| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + m = -3 \\ |x| + m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = -3 - m \\ |x| = -1 - m \end{cases} (*)$$

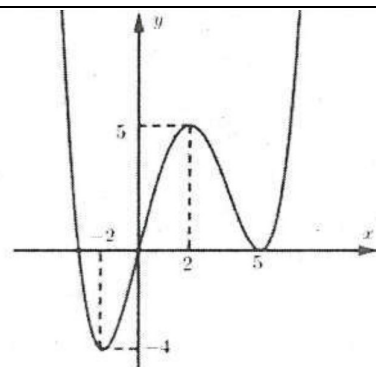
Hàm số có 5 điểm cực trị khi (*) có 4 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} -3 - m > 0 \\ -1 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$.

Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m > -20 \end{cases} \Rightarrow$ có 18 giá trị nguyên của m . **Chọn D.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hình vẽ bên.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = f(|x| + m)$ có 7 điểm cực trị

- A. 8.
- B. 9.
- C. 12.
- D. 13.



Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = (|x| + m)' \cdot f'(|x| + m) = \frac{x}{|x|} \cdot f'(|x| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(|x| + m) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f'(|x| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| + m = -2 \\ |x| + m = 2 \\ |x| + m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = -2 - m \\ |x| = 2 - m \\ |x| = 5 - m \end{cases} (*)$$

Hàm số có 7 điểm cực trị khi (*) có 6 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} -2 - m > 0 \\ 2 - m > 0 \\ 5 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$.

Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10; 10] \end{cases} \Rightarrow$ có 8 giá trị nguyên của m . **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m-1)x^2 + 6mx + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100; 100]$ để hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 100.

B. 99.

C. 97.

D. 96.

Lời giải

Để hàm số $f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $y = f(x)$ phải có 2 điểm cực trị có hoành độ dương.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6(m-1)x + 6m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + 2m = 0$ (*)

Giả thiết bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 - 2m > 0 \\ S = 2(m-1) > 0 \\ P = 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2 + \sqrt{3}.$

Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-100; 100] \end{cases} \Rightarrow$ có 97 giá trị nguyên của m . **Chọn C.**

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = f(x) = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6(m^2 - 9)x + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100; 100]$ để hàm số $f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 6.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Để hàm số $f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị thì hàm số $y = f(x)$ phải có đúng 1 điểm cực trị có hoành độ dương.

Ta có: $f'(x) = 6x^2 - 6(m+1)x + 6(m^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m^2 - 9 = 0$ (*)

Giả thiết bài toán thỏa mãn khi (*) có 2 nghiệm trái dấu hoặc (*) có 1 nghiệm bằng 0 và 1 nghiệm dương.

TH1: (*) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

TH2: (*) có 1 nghiệm bằng 0 và 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$.

Kết hợp hai trường hợp này và điều kiện $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-100; 100] \end{cases} \Rightarrow$ có 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn A.**

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm $f'(x) = x^3 - (m+3)x^2 + 2x + 4m$ trên $\mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100; 100]$ để hàm số $f(|x|)$ có 7 điểm cực trị là:

A. 100.

B. 101.

C. 198.

D. 197.

Lời giải

Để hàm số $f(|x|)$ có 7 điểm cực trị thì hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị có hoành độ dương.

$\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Ta có: $f'(x) = x^3 - (m+3)x^2 + 2x + 4m = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x + m(4 - x^2) = 0$

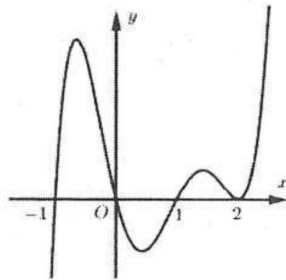
$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2) - m(x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ g(x) = x^2 - (m+1)x - 2m = 0 \end{cases}$$

Giả thiết bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow g(x)$ có 2 nghiệm dương phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S = m+1 > 0 \\ P = 2m > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 10m + 1 > 0 \\ m > 0 \\ 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-100; 100] \end{cases} \Rightarrow$ có 100 giá trị nguyên của m . **Chọn A.**

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hình vẽ dưới. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|+1)$ là:



A. 4.

B. 6.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Ta có: $y' = (|x|+1)' \cdot f'(|x|+1) = \frac{x}{|x|} \cdot f'(|x|+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(|x|+1) = 0 \end{cases} (*)$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-1; 0) \\ x = x_2 \in (0; 1) \\ x = x_3 \in (1; 2) \\ x = 2 \end{cases}$

Suy ra $f'(|x|+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x|+1 = x_1 \in (-1; 0) \\ |x|+1 = x_2 \in (0; 1) \\ |x|+1 = x_3 \in (1; 2) \\ |x|+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|+1 = x_3 \in (1; 2) \\ |x|+1 = 2 \end{cases} \Rightarrow$ hệ có 4 nghiệm.

Do đó (*) có 5 nghiệm phân biệt nên hàm số có 5 điểm cực trị. **Chọn C.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$

- A. $y_{CD} = 4$ B. $y_{CD} = 1$ C. $y_{CD} = 0$ D. $y_{CD} = -1$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 B. Cực tiểu của hàm số bằng -6
C. Cực tiểu của hàm số bằng 1 D. Cực tiểu của hàm số bằng 2

Câu 3: Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

- A. $P(1;0)$ B. $M(0;-1)$ C. $N(1;-10)$ D. $Q(-1;10)$

Câu 4: Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có hai điểm cực trị A và B . Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

- A. $S = 9$ B. $S = \frac{10}{3}$ C. $S = 5$ D. $S = 10$

Câu 5: Điểm cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là

- A. $x = 0$ B. $x = 2$ C. $y = 0$ D. $y = 2$

Câu 6: Điểm cực đại của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ là

- A. $x = 0$ B. $x = 2$ C. $y = 0$ D. $y = 2$

Câu 7: Điểm cực tiểu của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ là

- A. $x = -1$ B. $x = 1$ C. $x = 3$ D. $x = 0$

Câu 8: Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1 B. 4 C. 2 D. 3

Câu 9: Cực đại (giá trị cực đại) của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 2$ bằng

- A. 1 B. -1 C. -2 D. 0

Câu 10: Cực tiểu (giá trị cực tiểu) của hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + 8x^2 - 3$ bằng

- A. -4 B. 4 C. -3 D. 0

Câu 11: Số điểm cực trị của hàm số $y = x^3 + x^2 + 3x - 1$ là

- A. 1 B. 0 C. 2 D. 3

Câu 12: Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$?

- A. $(0;-2)$ B. $(0;1)$ C. $(5;-2)$ D. $(2;-5)$

Câu 13: Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$ là

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 14: Hàm số $y = \frac{x^2}{1 - x}$ đạt cực tiểu tại

- A. 0 B. -1 C. 2 D. -2

Câu 15: Giá trị cực tiểu (cực tiểu) của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ bằng

- A. 1 B. -1 C. 3 D. $\frac{1}{3}$

Câu 16: Số điểm cực trị của hàm số $y = x^5 + x^3 + 1$ là

- A. 1 B. 0 C. 2 D. 3

Câu 17: Số điểm cực trị của hàm số $y = x^5 - x^3 + 1$ là

- A. 3 B. 1 C. 2 D. 4

Câu 18: Hàm số nào sau đây **không** có điểm cực trị

- A. $y = x^2$ B. $y = x^3$ C. $y = x^4$ D. $y = -x^2$

Câu 19: Tổng các điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ bằng

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Câu 20: Tổng các điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$ bằng

- A. 4 B. 2 C. 5 D. 6

Câu 21: Tổng các điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 - 11x - 2016$ bằng

- A. 10 B. 2 C. 11 D. 5

Câu 22: Tích các điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 9x - 2026$ bằng

- A. -8 B. -9 C. 2 D. 10

Câu 23: Biết hàm số $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$ có hai điểm cực trị là x_1, x_2 . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $x_1 + x_2 = 2$ B. $x_1 + x_2 = 3$ C. $x_1 + x_2 = -3$ D. $x_1 + x_2 = 3$

Câu 24: Biết hàm số $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$ có hai điểm cực trị là x_1, x_2 . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $x_1 + x_2 = -2$ B. $x_1 + x_2 = -3$ C. $x_1 + x_2 = 3$ D. $x_1 + x_2 = 1$

Câu 25: Tính giá trị cực đại (y_{CD}) của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$

- A. $y_{CD} = -4$ B. $y_{CD} = 4$ C. $y_{CD} = -3$ D. $y_{CD} = 3$

Câu 26: Hàm số $y = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$ có các điểm cực đại và cực tiểu theo thứ tự là

A. $x = 1 + \sqrt{2}; x = 1 - \sqrt{2}$

B. $x = 1 - \sqrt{3}; x = 1 + \sqrt{3}$

C. $x = 1 - \sqrt{2}; x = 1 + \sqrt{2}$

D. $x = 1 + \sqrt{3}; x = 1 - \sqrt{3}$

Câu 27: Biết hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 1}$ có hai điểm cực trị là x_1, x_2 . Tính $P = x_1 + x_2$?

A. $P = 1$

B. $P = 2$

C. $P = -2$

D. $P = 4$

Câu 28: Biết hàm số $y = \frac{2x^2 - 2x + 6}{x + 1}$ có hai điểm cực trị là x_1, x_2 . Tính $P = x_1 \cdot x_2$?

A. $P = -4$

B. $P = 2$

C. $P = -2$

D. $P = -1$

Câu 29: Hàm số $y = \frac{-2x^2 + x - 2}{x + 1}$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = \frac{-2 + \sqrt{10}}{2}$

B. $x = \frac{-2 + \sqrt{5}}{2}$

C. $x = \frac{-2 - \sqrt{5}}{2}$

D. $x = \frac{-2 - \sqrt{10}}{2}$

Câu 30: Hàm số $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = -3$

B. $x = -2$

C. $x = 1$

D. $x = -1$

Câu 31: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $(C): y = \sqrt{8 - x^2}$ là

A. $(0; 2\sqrt{2})$

B. $(0; \sqrt{2})$

C. $(2; 2)$

D. $(-2; 2)$

Câu 32: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $(C): |x|(x + 2)$ là

A. $x = 0$

B. $x = 1$

C. $x = -2$

D. $x = 2$

Câu 33: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $(C): y = x\sqrt{4 - x^2}$ là

A. $(\sqrt{2}; 2)$

B. $(2; 0)$

C. $(-\sqrt{2}; 2)$

D. $(-2; 0)$

Câu 34: Một hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x + 1)(x - 1)^2 \cdot (x^2 - 4)$. Hỏi hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5

B. 3

C. 8

D. 4

Câu 35: Một hàm đa thức $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 2016)^{2016} (x - 2017)^{2017} \cdot (x^2 + 4)$. Hỏi hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3

B. 1

C. 0

D. 4

Câu 36: Một hàm đa thức $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x^2 - 2016)^3 (x - 2017)^5 \cdot (x^2 - 24)$. Hỏi hàm số này có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4

B. 5

C. 3

D. 6

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- A. $x = 1$ B. $x = -1$ C. $x = 0$ D. $x = 2$

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^{2019}(x^{2020} - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. Vô số

Câu 39: Hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+		-	0	+	
y	$-\infty$		0		-1		$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- A. Hàm số có đúng một cực trị
 B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1
 C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1
 D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$

Câu 40: Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0
y	$+\infty$		4		5		$-\infty$

- A. $y_{CD} = 5$ B. $y_{CT} = 0$ C. $\min_{\mathbb{R}} y = 4$ D. $\max_{\mathbb{R}} y = 5$

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$		0		3		0		$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. Hàm số có ba điểm cực trị B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3
 C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0 D. Hàm số có hai điểm cực tiểu

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		3		0		$+\infty$

Tìm giá trị cực đại y_{CD} , giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số

A. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = -2$

B. $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = 0$

C. $y_{CD} = -2$ và $y_{CT} = 2$

D. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0
y	$+\infty$		1		5		$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại

A. $x = 1$

B. $x = 0$

C. $x = 5$

D. $x = 2$

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0
y	$+\infty$		-2		0		$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Cực đại (giá trị cực đại) của hàm số bằng 2

B. Cực tiểu (giá trị cực tiểu) của hàm số bằng 0

C. Cực đại (giá trị cực đại) của hàm số bằng -2

D. Cực tiểu (giá trị cực tiểu) của hàm số bằng -2

Câu 45: Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
			-3		-2		-3		

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. Hàm số có ba điểm cực trị
- B. Hàm số có ba điểm cực tiểu
- C. Hàm số có hai cực tiểu (giá trị cực tiểu)
- D. Cực đại (giá trị cực đại) của hàm số bằng -2

Câu 46: Hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[2; 4]$ và có bảng biến thiên như sau

x		2		3		4	
y'			+	0	-		
y				2			
		$\sqrt{2}$	$\nearrow$		$\searrow$	$\sqrt{2}$	

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có ba điểm cực trị
- B. Hàm số có một điểm cực trị
- C. Cực đại của hàm số bằng 3
- D. Cực đại của hàm số bằng $\sqrt{2}$

Câu 47: Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
			1		2		1		

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có ba cực trị
- B. Hàm số có hai cực trị
- C. Hàm số có hai cực tiểu
- D. Cực đại của hàm số bằng 0

Câu 48: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-		+	0	-	

Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Câu 49: Hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	2	3	$+\infty$
y'	+	0	-	+	-	-

Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Câu 50: Hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+	0	-

Hàm số $y = f(-x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6

B. 4

C. 3

D. 5

Câu 51: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(2x+1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+

A. 3

B. 2

C. 1

D. 4

Câu 52: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-	+	0	-
y	$+\infty$	-1	3	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

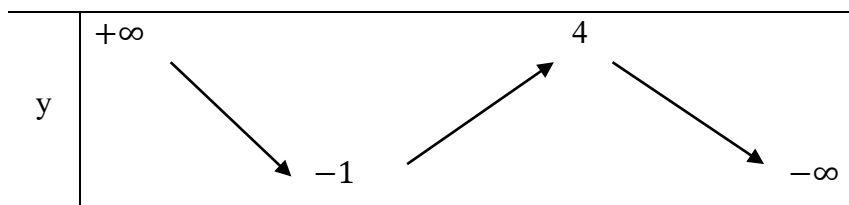
A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$

C. Giá trị cực đại của hàm số bằng 3

D. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1

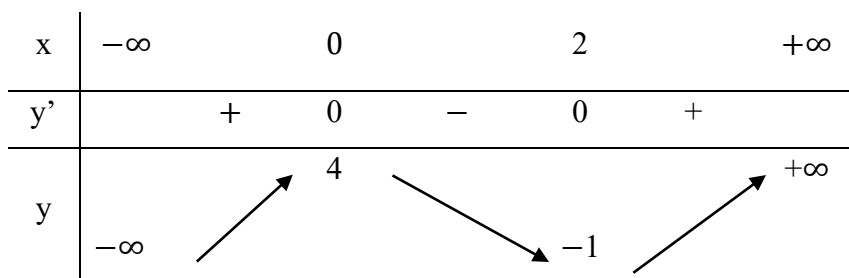
Câu 53: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Hàm số $y = f(-x+1)$ đạt cực đại tại điểm

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
y'	+	0	-	0



- A. $x = -2$ B. $x = 3$ C. $x = 2$ D. $x = 0$

Câu 54: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên.



Hàm số $g(x) = f(x-1)$ đạt cực tiểu tại điểm

- A. $x = 1$ B. $x = -1$ C. $x = 3$ D. $x = -2$

Câu 55: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(x^2 - 1)$ đạt cực tiểu tại điểm

- A. $x = 1$ B. $x = 0$ C. $x = -1$ D. $x = -2$

Câu 56: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$	0

Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 1)$?

- A. Hàm số có ba cực đại và hai điểm cực tiểu
 B. Hàm số có một cực đại và một điểm cực tiểu
 C. $x = -2$ là một điểm cực tiểu của hàm số
 D. Hàm số có bốn điểm cực trị

Câu 57: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	2	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f(1 - x^2)$ là

- A. 5 B. 0 C. 3 D. 1

Câu 58: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	3	4	$+\infty$
y'		+	0	-	+

Số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 2x + 3)$ là

- A. 4 B. 1 C. 3 D. 2

Câu 59: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	-1	5	$+\infty$
y'		-	0	-	+

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 4 B. 1 C. 3 D. 2

Câu 60: Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau đây

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$				5				$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- A. Hàm số đã cho có một cực đại
 B. Hàm số đã cho có hai cực tiểu
 C. Hàm số đã cho có ba cực trị
 D. Hàm số đã cho có một cực tiểu

Câu 61: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'		-	0	+	-	0	+

Hàm số $y = f(2019x + 2020)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A. 2 B. 1 C. 3 D. 0

Câu 62: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ.

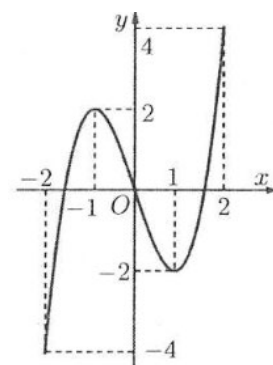
x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+

Hàm số $y = f(1-x)$ đạt cực đại tại điểm

- A. $x = 1$ B. $x = 0$ C. $x = -1$ D. $x = 2$

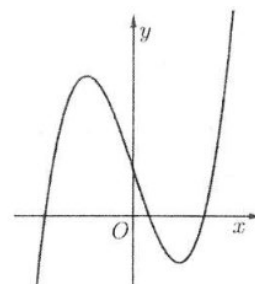
Câu 63: Hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- A. $x = -2$
- B. $x = -1$
- C. $x = 1$
- D. $x = 2$



Câu 64: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

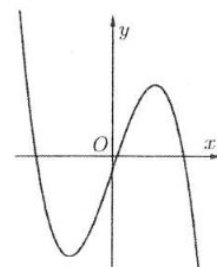
- A. 2
- B. 0
- C. 3
- D. 1



Câu 65: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

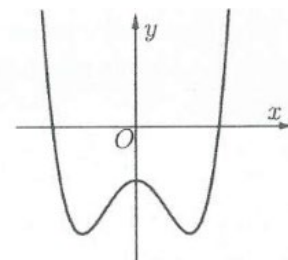
- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3



Câu 66: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + cx$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

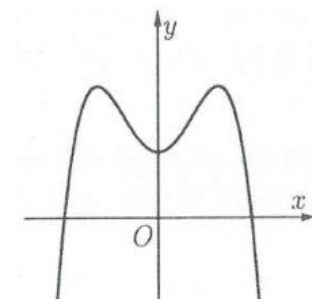
- A. 2
- B. 3
- C. 0
- D. 1



Câu 67: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + cx$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

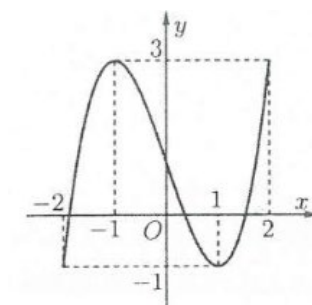
- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3



Câu 68: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ.

Hỏi hàm số đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = -1$

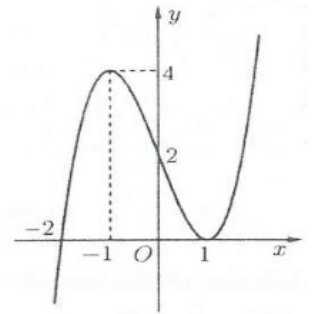


- B. $x = 1$
 C. $x = 3$
 D. $x = 0$

Câu 69: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ.

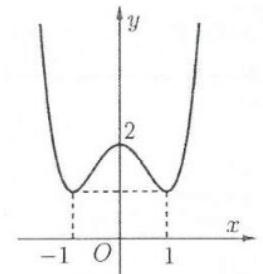
Hỏi hàm số đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = 4$
 B. $x = 1$
 C. $x = -1$
 D. $x = -2$



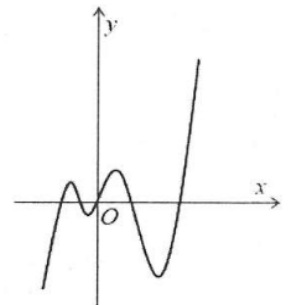
Câu 70: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + cx$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ. Số nào sau đây là giá trị cực đại của hàm số đã cho?

- A. 1
 B. -1
 C. 2
 D. 0



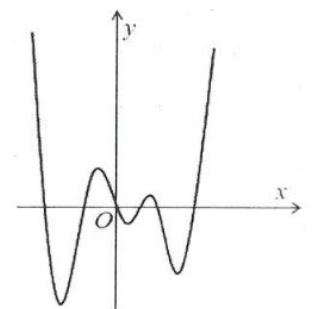
Câu 71: Hàm số $y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx + e$ với $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 4
 B. 3
 C. 5
 D. 2



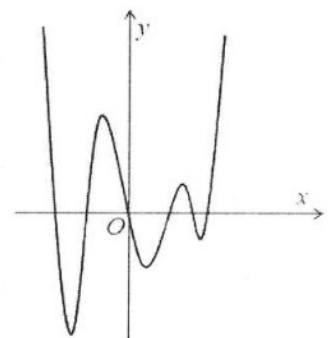
Câu 72: Hàm số $y = ax^6 + bx^5 + cx^4 + cx^3 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 4
 B. 3
 C. 5
 D. 2



Câu 73: Hàm số $y = f(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + cx^3 + dx + e$ với $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(2020x + 2019)$ là

- A. 4
 B. 3
 C. 5



D. 2

Câu 74: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ.

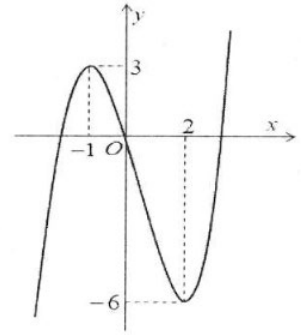
Hỏi hàm số $g(x) = f(x-2)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

A. $x = -1$

B. $x = 1$

C. $x = 3$

D. $x = 4$



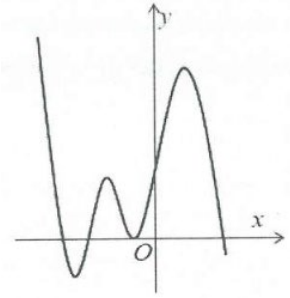
Câu 75: Hàm số $y = f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx + e$ với $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(1989 - 24x)$ có bao nhiêu điểm cực trị

A. 4

B. 3

C. 5

D. 2



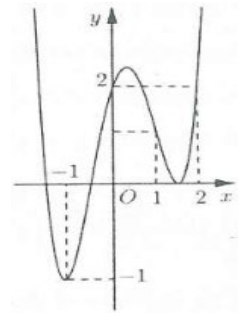
Câu 76: : Hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị nào sau đây là một cực tiểu của hàm số đã cho?

A. 2

B. 0

C. 1

D. -2



Câu 77: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.

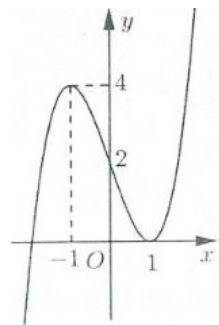
Mệnh đề nào sau đây đúng khi nói về cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2)$?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$

B. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$

C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$

D. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$



Câu 78: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.

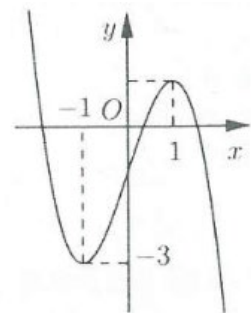
Mệnh đề nào sau đây **sai** khi nói về cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x)$

A. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$

B. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1 + \sqrt{2}$

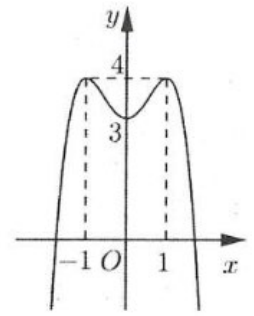
C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1 - \sqrt{2}$

D. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -1 - \sqrt{2}$



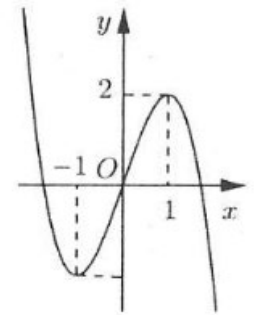
Câu 79: Hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên cạnh. Hàm số $g(x) = f(-x^2 - 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2
- B. 4
- C. 1
- D. 3



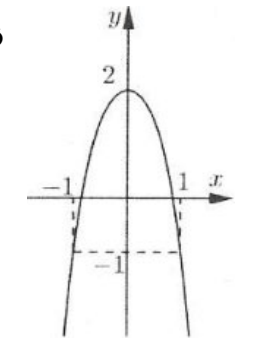
Câu 80: Hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên cạnh. Mệnh đề nào sau đây **đúng** khi nói về cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3)$?

- A. Hàm số $y = g(x)$ có ba điểm cực đại và hai điểm cực tiểu
- B. Hàm số $y = g(x)$ có hai điểm cực đại và hai điểm cực tiểu
- C. Hàm số $y = g(x)$ có ba điểm cực đại và ba điểm cực tiểu
- D. Hàm số $y = g(x)$ có ba điểm cực đại và một điểm cực tiểu



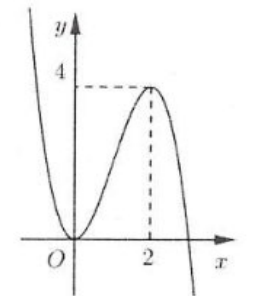
Câu 81: Hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên cạnh. Hàm số $g(x) = f(-2x^2 + 2)$ có tổng bình phương các điểm cực đại bằng

- A. 2
- B. 4
- C. 1
- D. 3



Câu 82: Hàm số đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên cạnh. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + 2)$ có tổng tất cả các điểm cực trị bằng

- A. 2
- B. 4
- C. 0
- D. 3



Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \cos x + \sin x$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x) + 2019$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. Vô số

Câu 84: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(2) = 3$. Giá trị cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x) + 3$ bằng

- A. 2
- B. $\frac{7}{2}$
- C. $\frac{3}{2}$
- D. $\frac{5}{2}$

Câu 85: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1)(x-3)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + x - 1) + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 86: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)(x-1)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 87: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 5 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 88: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-1), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 6x + m)$ có 3 điểm cực trị?

- A. 9 B. 10 C. 11 D. 8

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-3)^{2019}(x-4)(x-1)^{2020}, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + m)$ có 5 điểm cực trị?

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Câu 90: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^4 - 4x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - (m-1)x + 2$ có 4 điểm cực trị?

- A. 3 B. 4 C. 0 D. 2

Câu 91: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 - 3x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - mx + 2$ có 3 điểm cực trị?

- A. 2 B. 4 C. 3 D. 1

Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x - \sqrt{x-4}, \forall x \geq 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - mx + 2$ có 2 điểm cực trị?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 93: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - mx + 2$ có 2 điểm cực trị?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 94: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 2x^3 - 6x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - (m-1)x + 2$ có 3 điểm cực trị?

- A. 10 B. 9 C. 6 D. 7

Câu 95: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 2x^3 - 3x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10; 10)$ để hàm số $g(x) = f(x) - (m-1)x + 1$ có 1 điểm cực trị?

- A. 16 B. 17 C. 18 D. 19

Câu 96: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^4 - x^2 + 6, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - (m^2 - 3)x + 2$ có 3 điểm cực trị?

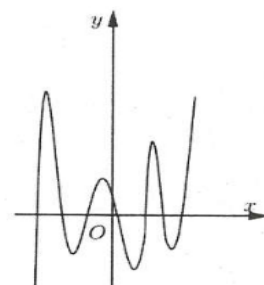
- A. 2 B. 3 C. 5 D. 4

Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 8x + m) + 2019$ có 5 điểm cực trị?

- A. 15 B. 16 C. 17 D. 18

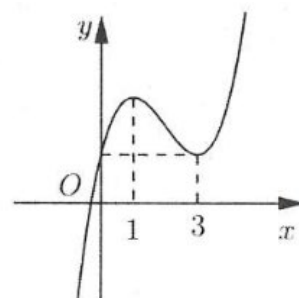
Câu 98: Hàm số đa thức bậc bảy $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên cạnh. Hàm số $g(x) = f(2020 - 2019x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3
B. 4
C. 5
D. 6



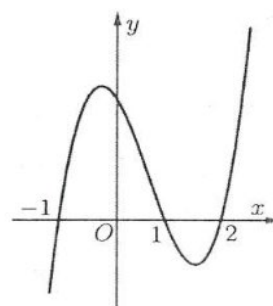
Câu 99: Hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên cạnh. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x + 6)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = 1$
B. $x = 2$
C. $x = 3$
D. $x = -1$



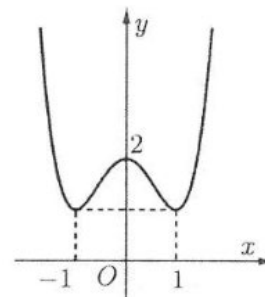
Câu 100: Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

- A. $x = -1$
B. $x = 1$
C. $x = 2$
D. $x = 0$



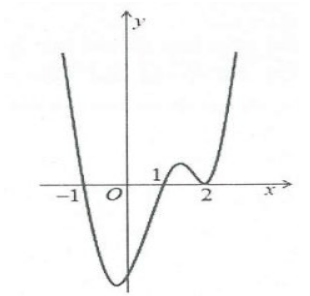
Câu 101: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1
B. 3
C. 2
D. 0



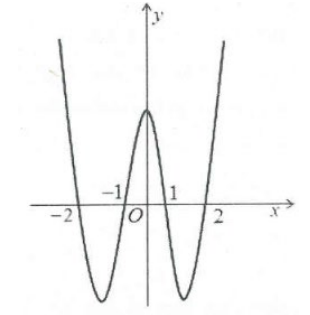
Câu 102: Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?

- A. $x = -1$
- B. $x = 1$
- C. $x = 2$
- D. $x = -2$



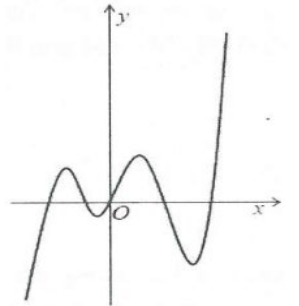
Câu 103: Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào sau đây?

- A. $x = -2, x = 2$
- B. $x = -1, x = 2$
- C. $x = -2, x = 1$
- D. $x = -1, x = 1$



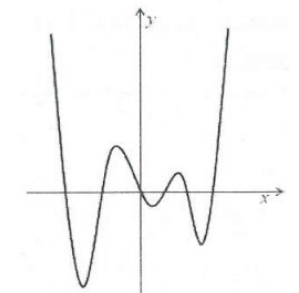
Câu 104: Cho hàm số bậc sáu $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1
- B. 3
- C. 4
- D. 5



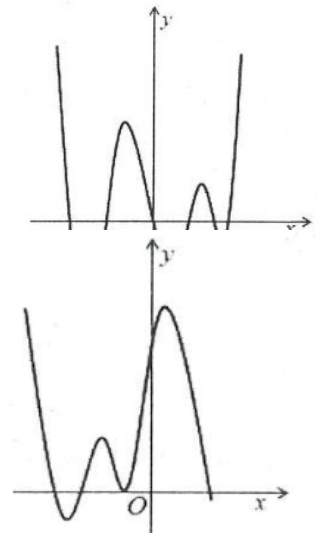
Câu 105: Cho hàm số bậc bảy $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 6
- B. 3
- C. 5
- D. 4



Câu 106: Cho hàm số bậc bảy $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 4
- B. 3
- C. 2
- D. 5



Câu 107: Cho hàm số bậc sáu $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(x-2)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 3
- B. 4
- C. 2
- D. 1

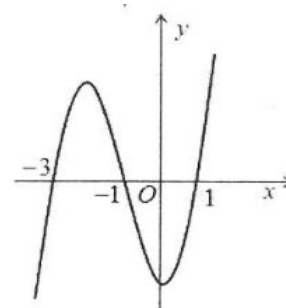
Câu 108: Cho hàm số bậc tám $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x) = f(1989-24x)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 4
- B. 6
- C. 5
- D. 7



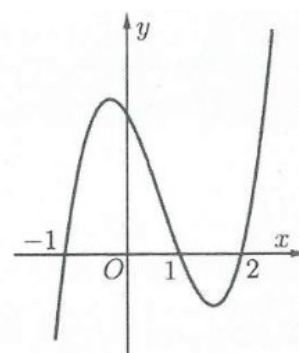
Câu 109: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tổng bình phương các điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2-2)$ bằng bao nhiêu ?

- A. 6
- B. 2
- C. 3
- D. 4



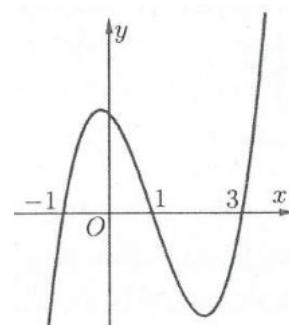
Câu 110: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số (C): $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên cạnh. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2-2x+4})$ là

- A. 3
- B. 4
- C. 2
- D. 1



Câu 111: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên cạnh. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2+2x+2})$ là

- A. 1
- B. 2



C. 3

D. 4

Câu 112: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

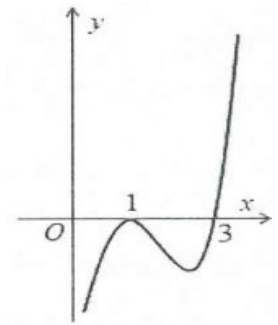
Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 6x + m + 3)$ có ba điểm cực trị?

A. 9

B. 7

C. 8

D. 6



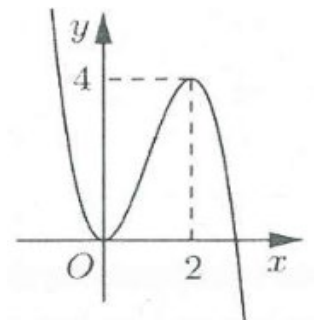
Câu 113: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tổng bình phương các điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ bằng

A. 10

B. 8

C. 11

D. 15



Câu 114: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

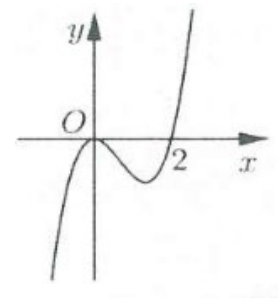
Hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 - 2})$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 2

B. 4

C. 3

D. 1



Câu 115: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

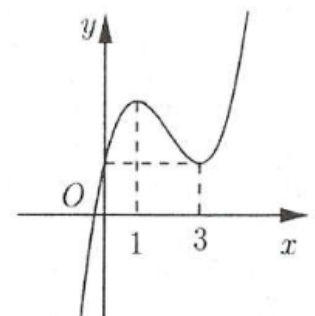
Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 1})$ là

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4



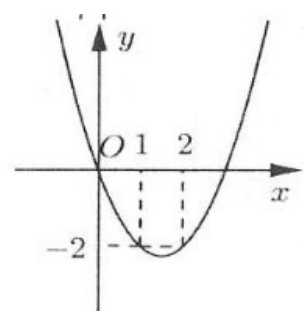
Câu 116: Cho hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x) + 2x + 3$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây ?

A. $x = 1$

B. $x = 2$

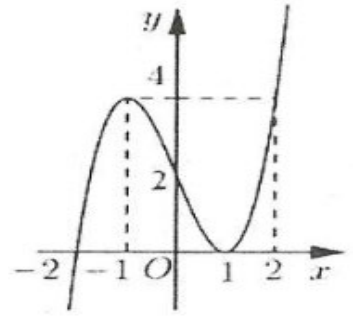
C. $x = 1,5$

D. $x = -2$



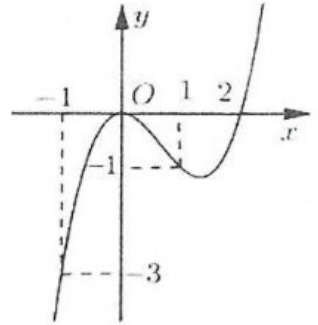
Câu 117: Cho hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 - 4x - 2$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây ?

- A. $x = 0$
- B. $x = -2$
- C. $x = 2$
- D. $x = -1$



Câu 118: Cho hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 + 4x - 2$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây ?

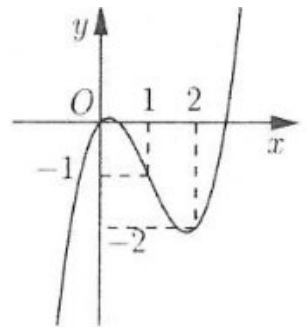
- A. $x = 0$
- B. $x = -3$
- C. $x = 2$
- D. $x = 1$



Câu 119: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

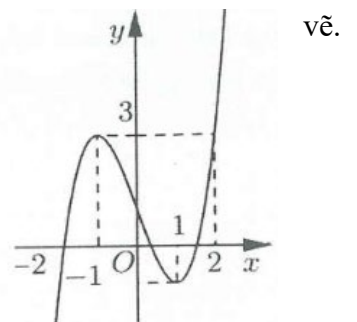
Tổng bình phương các điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{2}x^2 - 2$ bằng

- A. 3
- B. 2
- C. 5
- D. 4



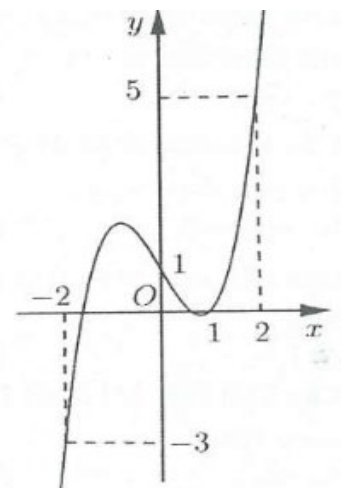
Câu 120: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về điểm cực trị của hàm số $h(x) = 2f(x) - x^2 - 2x - 1$ bằng

- A. Hàm số $h(x)$ có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu
- B. Hàm số $h(x)$ có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu
- C. Hàm số $h(x)$ có một điểm cực đại và một điểm cực tiểu
- D. Hàm số $h(x)$ có hai điểm cực đại và không có điểm cực tiểu



Câu 121: Cho hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x + 1) - x^2 - 3x - 2$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây ?

- A. $x = -2, x = 2$
- B. $x = -3, x = 1$
- C. $x = 0, x = 1$



D. $x = 3, x = -1$

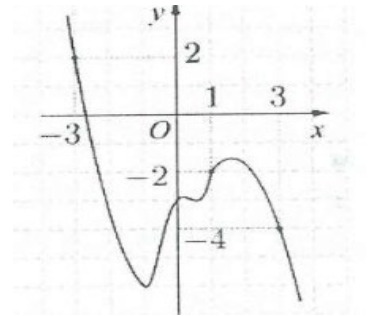
Câu 122: Cho hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x+1) + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây ?

A. $x = -3, x = 3$

B. $x = 1, x = -3$

C. $x = -3, x = 1$

D. $x = -4, x = 2$



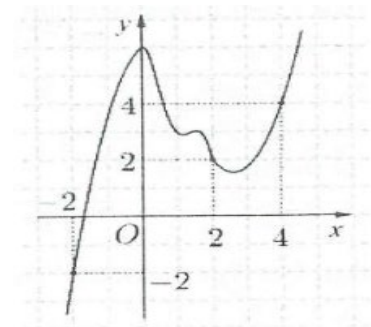
Câu 123: Cho hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ và hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2} + 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -2$

B. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 4$

C. Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$

D. Hàm số $g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 4$



Câu 124: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số

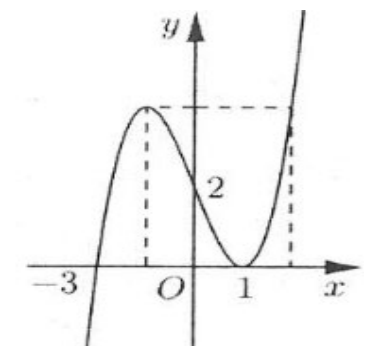
$$g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3 \text{ là}$$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0



Câu 125: Biết $M(0;2), N(2;-2)$ là các điểm cực trị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

A. $y(-2) = 2$

B. $y(-2) = 22$

C. $y(-2) = 6$

D. $y(-2) = -18$

Câu 126: Biết $M(0;4), N(2;0)$ là các điểm cực trị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = 1$.

A. $y(1) = 10$

B. $y(1) = 2$

C. $y(1) = -1$

D. $y(1) = -3$

Câu 127: Biết $M(1;3)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2ax^2 + a^2x + b$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Câu 128: Biết $M(2;-2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. -4

B. 2

C. 4

D. -2

Câu 129: Biết $M(0; -1), N(2; 3)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Giá trị của $a + b + c + d$ bằng

A. 1

B. 2

C. 4

D. 3

Câu 130: Biết $M(1; 0), N(0; 1)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Giá trị của $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ bằng

A. 13

B. 14

C. 17

D. 12

Câu 131: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 + (m^2 - m + 2)x^2 + (3m^2 + 1)x - m - 1$ đạt cực tiểu tại $x = -2$. Tập nào sau đây chứa tập S .

A. $\{1; -2; -7; 5\}$

B. $\{4; 0; -1; 3\}$

C. $\{3; -10; -6\}$

D. $\left\{\frac{3}{2}; \frac{-1}{2}; -4\right\}$

Câu 132: Tập hợp tất cả các tham số m thỏa mãn điều kiện hàm số

$y = x^3 - (m^2 + 1)x^2 + (m^2 - 1)x - 2$ đạt cực đại tại $x = 0$ thuộc tập nào sau đây.

A. $\{-1; 2; 3; 0\}$

B. $\{-2; 4; 1; 5\}$

C. $\{-2; 3; 2; 5\}$

D. $\{-1; -2; 1; -3\}$

Câu 133: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 22$ đạt cực đại tại $x_0 = 0$

A. $m = 0$

B. $m = 1$

C. $m = \frac{1}{2}$

D. $m = \frac{3}{2}$

Câu 134: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m + 1)x^2 + 3(m - 1)^2x$ đạt cực trị tại $x = 1$

A. $m = 1$

B. $m = 2$

C. $m = 0$ v $m = 1$

D. $m = 0$ v $m = 4$

Câu 135: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$

A. $m = 1$

B. $m = 2$

C. $m = -1$

D. $m = -2$

Câu 136: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3, (m \in \mathbb{R})$ đạt cực đại tại $x = 3$ khi $m = m_0$. Giá trị nào dưới đây gần với m_0 nhất?

A. -2

B. 1

C. 4

D. 8

Câu 137: Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m + 3, (m \in \mathbb{R})$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi $m = m_0$. Giá trị nào dưới đây gần với m_0 nhất?

A. 4,12

B. -0,9

C. 2,8

D. 0,7

Câu 138: Hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x + 3, (m \in \mathbb{R})$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi $m = m_0$. Giá trị nào dưới đây gần với m_0 nhất?

A. 1,01

B. -0,9

C. 1,8

D. -2,12

Câu 139: Hàm số $y = -x^3 + mx^2 + (m^2 + 2m - 3)x + 1, (m \in \mathbb{R})$ đạt cực đại tại $x = 0$ khi $m = m_0$. Giá trị nào dưới đây gần với m_0 nhất ?

- A. 3,01 B. -0,9 C. 1,8 D. -2,12

Câu 140: Biết $M(1;2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 - 5x + b$. Giá trị của $a + b$ bằng

- A. 0 B. 3 C. -3 D. 6

Câu 141: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (6m^2 - 3m)x$ đạt cực đại tại $x = 1$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Câu 142: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m + m^4 - 5$ đạt cực tiểu tại $x = -1$

- A. $m = 1$ B. $m = -1$ C. $m \neq 1$ D. $m \neq -1$

Câu 143: Hàm số $y = x^3 - x^2 + mx - 1, (m \in \mathbb{R})$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi $m = m_0$. Giá trị nào dưới đây gần với m_0 nhất ?

- A. 3,1 B. -2 C. -3,9 D. 1,1

Câu 144: Hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (3m^2 - 12)x + m^3, (m \in \mathbb{R})$ đạt cực tiểu tại $x = 0$ khi $m = m_0$. Giá trị nào dưới đây gần với m_0 nhất ?

- A. 4,1 B. -2 C. -3,9 D. 1,8

Câu 145: Hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 + 3x - 2, (m \in \mathbb{R})$ đạt cực tiểu tại $x = -1$ khi $m = m_0$. Giá trị nào dưới đây gần với m_0 nhất ?

- A. 1,1 B. -2,2 C. -3,9 D. -4,5

Câu 146: Hàm số $y = x^3 - mx^2 + 3x - 2, (m \in \mathbb{R})$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi $m = m_0$. Giá trị nào dưới đây gần với m_0 nhất ?

- A. 1,5 B. 4,1 C. 3,5 D. -3,1

Câu 147: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m - 1)x^4 - 5$ đạt cực đại tại $x = 0$.

- A. $m > 1$ B. $m \geq 1$ C. $m \neq 1$ D. $m < 1$

Câu 148: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 2)x^5 - (m^2 - 4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

- A. 2 B. Vô số C. 4 D. 3

Câu 149: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 1)x^5 + (m^2 - 1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$

- A. 3 B. 2 C. Vô số D. 1

Câu 150: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 4)x^5 + (m^2 - 16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A. 8

B. Vô số

C. 7

D. 9

Câu 151: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-3)x^5 + (m^2-9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$

A. 4

B. 7

C. 6

D. Vô số

Câu 152: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số

$$y = 2x^8 + (m^2+1)x^5 + (m+7)x^4 + 1 \text{ đạt cực tiểu tại } x = 0$$

A. 6

B. 5

C. 7

D. 8

Câu 153: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số

$$y = x^7 + (2m^2+1)x^4 - (m-10)x^2 \text{ đạt cực tiểu tại } x = 0$$

A. 10

B. 9

C. 8

D. 11

Câu 154: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số

$$y = x^9 + (m-2)x^7 - (m^2-5m+6)x^6 + 7 \text{ đạt cực tiểu tại } x = 0$$

A. 4

B. 5

C. 3

D. 0

Câu 155: Có bao nhiêu giá trị dương của tham số m để hàm số

$$y = \sqrt{3}x^{12} + (3-m)x^9 - (m-2020)x^8 + 1 \text{ đạt cực tiểu tại } x = 0$$

A. 2020

B. 2019

C. 2017

D. 2018

Câu 156: Giả sử phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm thực. Khi đó số điểm cực trị của hàm số

(C): $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ là

A. 3

B. 5

C. 4

D. 7

Câu 157: Hàm số $y = |x^2 - 5x + 6|$ có bao nhiêu cực trị?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 158: Số điểm cực trị của hàm số $y = |x^4 - 4x^2 + 3|$ là

A. 4

B. 3

C. 5

D. 7

Câu 159: Số điểm cực trị của hàm số $y = |x^4 - 2x^2 + 1|$ là

A. 1

B. 3

C. 5

D. 7

Câu 160: Tổng bình phương các giá trị cực đại của hàm số $y = |x^4 - 2x^2 - 2|$ bằng

A. 9

B. 3

C. 6

D. 0

Câu 161: Giả sử phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có một nghiệm thực. Khi đó số điểm cực trị tối đa của

hàm số $g(x) = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ là

A. 1

B. 2

C. 3

D. 0

Câu 162: Giả sử phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có hai nghiệm thực. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ là

- A. 2 B. 1 C. 3 D. 0

Câu 163: Biết $M(-1; 2), N(1; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ là

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 1

Câu 164: Biết $M(0; 2), N(1; 1)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ là

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 1

Câu 165: Biết đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía so với trục hoành. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ là

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 1

Câu 166: Biết đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị nằm về cùng một phía so với trục hoành. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ là

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 1

Câu 167: Biết phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ có bốn nghiệm thực. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |ax^4 + bx^2 + c|$ là

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 7

Câu 168: Biết phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ có ba nghiệm thực. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |ax^4 + bx^2 + c|$ là

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 7

Câu 169: Biết phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt. Khi đó số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |ax^2 + bx + c|$ là

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 7

Câu 170: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $a > 0, d > 2019, a + b + c + d - 2019 < 0$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2019|$ là

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 2

Câu 171: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ thỏa mãn $a > 0, c > 2019, a + b + c - 2019 < 0$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2019|$ là

- A. 7 B. 3 C. 5 D. 1

Câu 172: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x^2 - 1), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = |f(x) - x^2|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 4 B. 3 C. 5 D. 7

Câu 173: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ thỏa mãn $a < 0, c < 3, a + b + c > 3$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x - 2019) - 3|$ là

- A. 3 B. 7 C. 5 D. 1

Câu 174: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ thỏa mãn $a < 0, c > 2020, b + c < 2020$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(2x - 1) - 2020|$ là

- A. 3 B. 7 C. 5 D. 1

Câu 175: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(-2) > 2, f(2) < -2$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(1 - 2x) - 1|$ là :

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 2

Câu 176: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(4 - x^2), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = |f(2019 - x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 7 B. 3 C. 5 D. 4

Câu 177: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 1)(1 - x^2)x^{2019}, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = |f(2019 - x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 7 B. 3 C. 5 D. 4

Câu 178: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = |f(1 - x)|$ có nhiều nhất bao nhiêu giá trị cực trị ?

- A. 7 B. 3 C. 5 D. 4

Câu 179: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x + 1)(x^3 - x), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = |f(x^2)|$ có nhiều nhất bao nhiêu giá trị cực trị ?

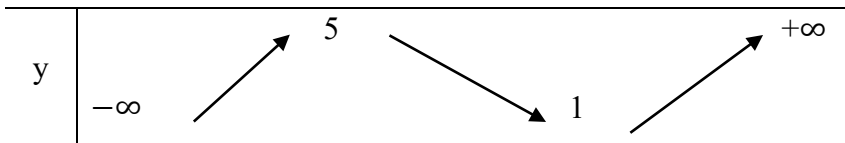
- A. 1 B. 0 C. 2 D. 3

Câu 180: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(-2) = f(2) = 0$ và có đạo hàm $f'(x) = x(4 - x^2), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(2 - x) - 3|$ là

- A. 1 B. 3 C. 5 D. 2

Câu 181: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

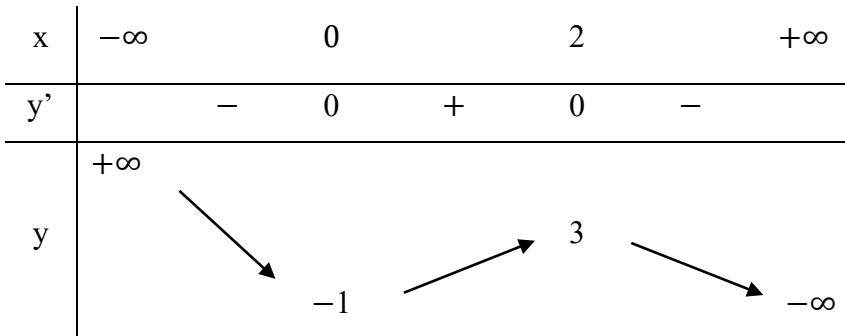
x	$-\infty$	-1		3		$+\infty$
y'	+	0	-	0	+	0



Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 4 B. 2 C. 3 D. 5

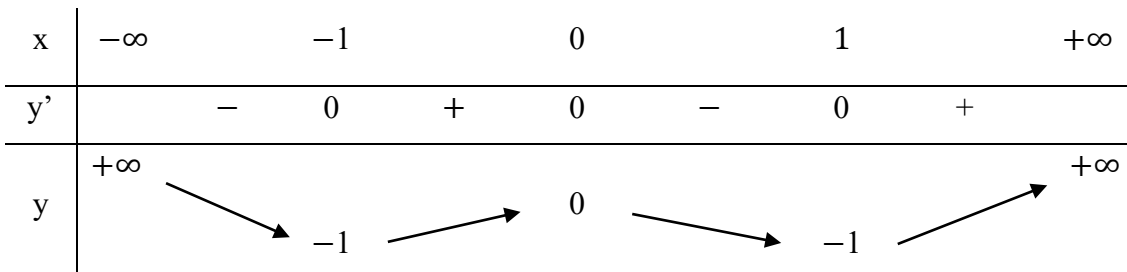
Câu 182: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2|$ là

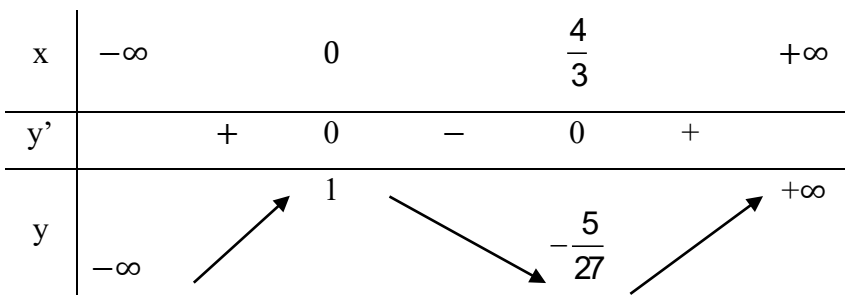
- A. 2 B. 5 C. 3 D. 7

Câu 183: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 2019| + 2020$ là



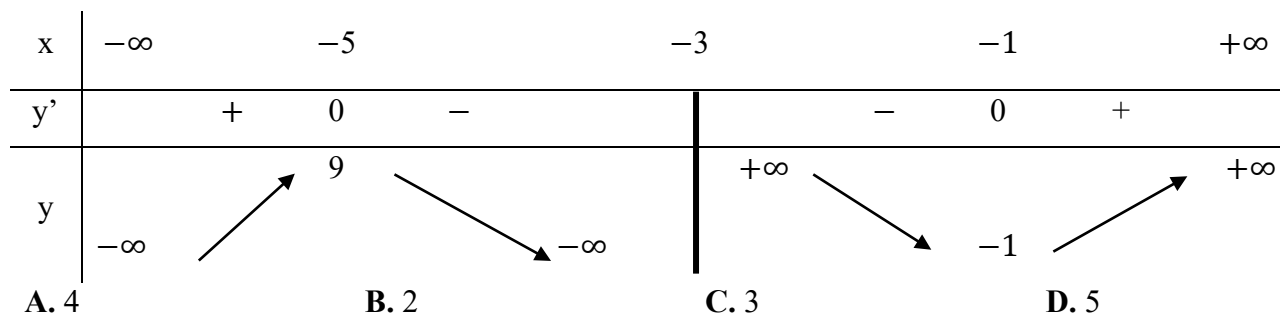
- A. 4 B. 7 C. 3 D. 5

Câu 184: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - 1| + 2$ là

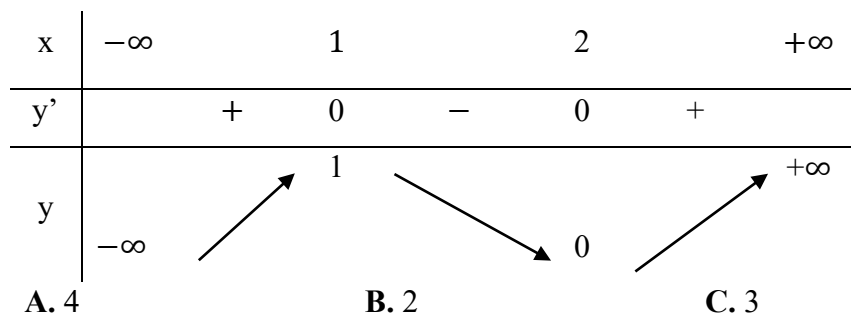


- A. 4 B. 5 C. 3 D. 2

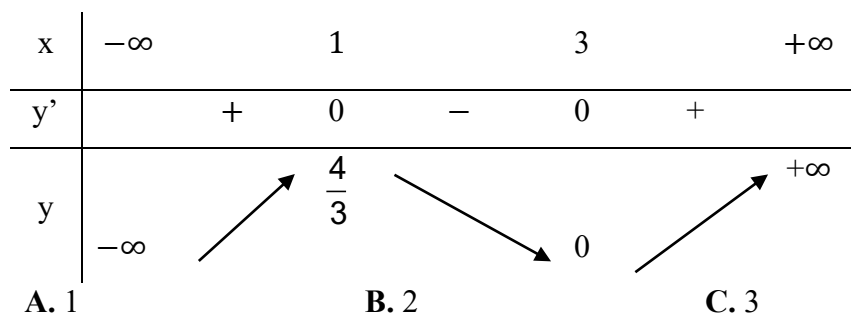
Câu 185: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x - 1)| + 2019$ là



Câu 186: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x-1)-1|+2$ là

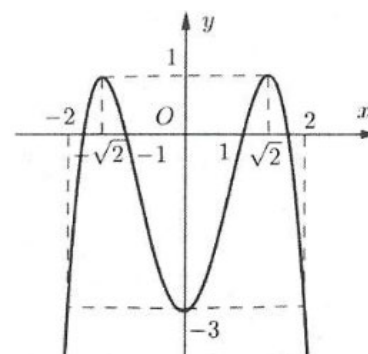


Câu 187: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số $y = |f(x-2019)+2020|+2$ là



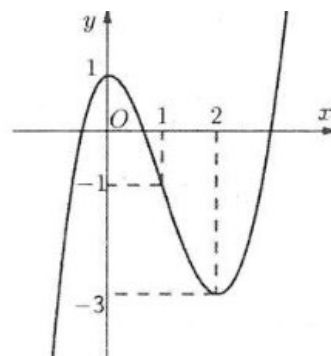
Câu 188: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là

- A. 6
- B. 7
- C. 3
- D. 5



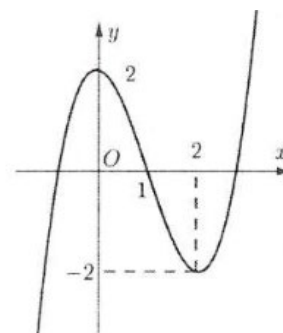
Câu 189: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x-1) + 4| - 2$ là

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 5



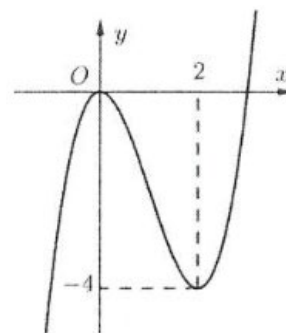
Câu 190: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tổng các giá trị cực đại của hàm số $g(x) = |f(x-1)| - 2$ bằng

- A. 0
- B. 2
- C. 4
- D. 3



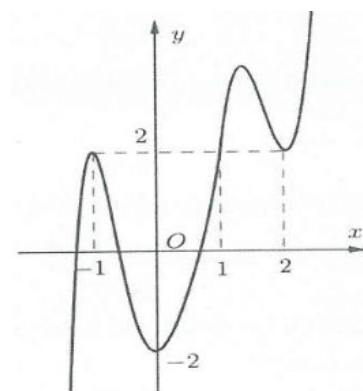
Câu 191: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |2f(x+1) + 3| + 1$ là

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 5



Câu 192: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |2f(x-2019) - 4| + 5$ là

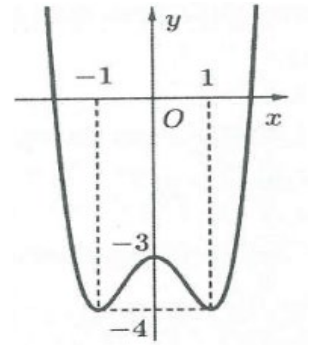
- A. 6
- B. 7
- C. 5



D. 8

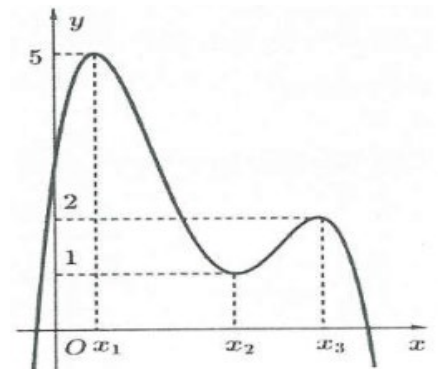
Câu 193: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^2) + 4| + 1$ là

- A. 3
- B. 7
- C. 5
- D. 4



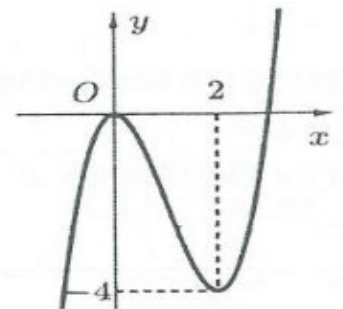
Câu 194: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x+1) + 3| + 2$ là

- A. 7
- B. 5
- C. 3
- D. 4



Câu 195: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^2 + 1) - 1|$ là

- A. 7
- B. 5
- C. 3
- D. 4



Câu 196: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

- A. 3
- B. 5
- C. 6
- D. 4

Câu 197: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |-x^3 + 3x^2 + m + 2|$ có 5 điểm cực trị?

- A. 3
- B. 5
- C. 6
- D. 4

Câu 198: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-5; 5]$ để hàm số $y = |x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị?

- A. 7
- B. 5
- C. 6
- D. 4

Câu 199: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-9; 9]$ để hàm số $y = |mx^3 - 3mx^2 + (3m-2)x + 2-m|$ có 5 điểm cực trị?

- A. 11
- B. 10
- C. 7
- D. 9

Câu 200: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 100]$ để hàm số $y = |2x^3 - 3mx^2 + m|$ có 5 điểm cực trị?

- A. 100 B. 99 C. 98 D. 97

Câu 201: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ có 5 điểm cực trị?

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 2

Câu 202: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 6x^2 + (m+6)x - m - 1|$ có 5 điểm cực trị?

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

Câu 203: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 - m + 2|$ có 5 điểm cực trị?

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 3

Câu 204: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = |x^4 - 2x^2 + m|$ có 3 điểm cực trị?

- A. 9 B. 8 C. 10 D. 7

Câu 205: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$			
y'		+	1	-	0	+	
y	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |f(x) - m| + 2019$ có 5 điểm cực trị?

- A. 4 B. 5 C. 6 D. 3

Câu 206: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

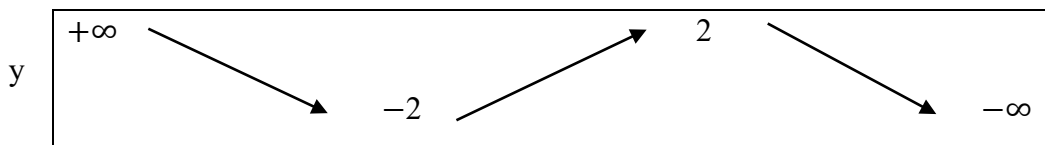
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	2	1	2	$-\infty$

Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |f(x) - m^2 + 3| + 2019$ có 5 điểm cực trị?

- A. 7 B. 5 C. 6 D. 3

Câu 207: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
y'	-	1	+	0	-

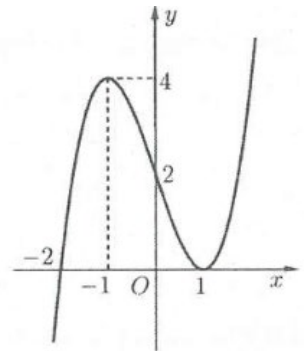


Đề hàm số $y = |f(x) - m|$ có 3 điểm cực trị thì tham số m có thể nhận giá trị nào dưới đây?

- A. 1 B. 0 C. -2 D. -1

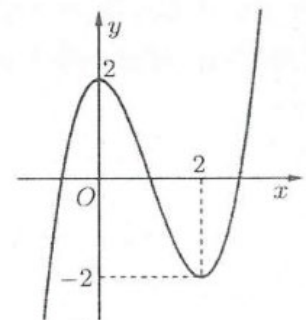
Câu 208: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |f(x) + m|$ có 5 điểm cực trị?

- A. 7
B. 3
C. 5
D. 6



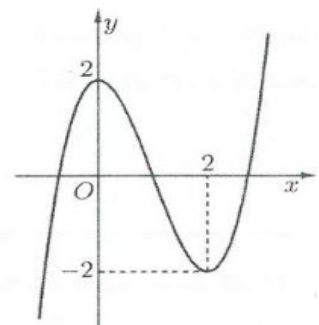
Câu 209: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |f(x + 2019) - m|$ có 5 điểm cực trị?

- A. 7
B. 3
C. 5
D. 6



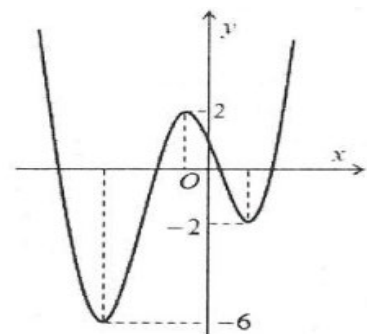
Câu 210: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |f(x^2 + 2) + m^2 + 2|$ có 1 điểm cực trị?

- A. 2
B. 4
C. Vô số
D. 5



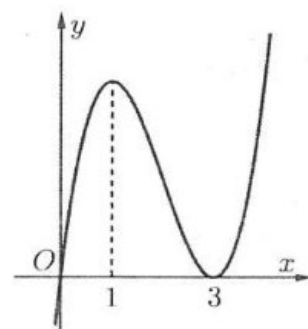
Câu 211: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |f(x - 2019) - m| + 1$ có 7 điểm cực trị?

- A. 7
B. 3
C. 5
D. 6



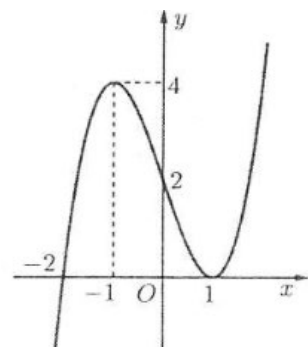
Câu 212: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 20)$ để hàm số $y = |f^2(x) + f(x) + m| + 2$ có 3 điểm cực trị?

- A. 19
- B. 18
- C. 20
- D. 21



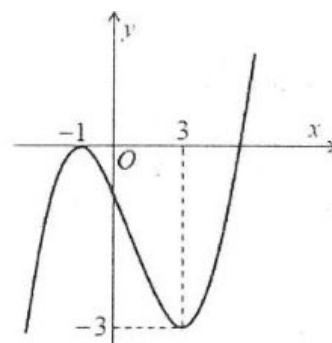
Câu 213: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 20)$ để hàm số $y = |f(x^2 - 1) - m|$ có 7 điểm cực trị?

- A. 2
- B. 1
- C. 0
- D. 3



Câu 214: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Để hàm số $y = |f(x) - m + 1| + 2$ có 5 điểm cực trị thì giá trị của tham số m có thể là

- A. -2
- B. 0
- C. -3
- D. 1



Câu 215: Số điểm cực trị của hàm số $y = |x|^3 - 3|x| + 2$ là

- A. 2
- B. 1
- C. 5
- D. 3

Câu 216: Số điểm cực trị của hàm số $y = x^2 + 3|x| + 1$ là

- A. 2
- B. 1
- C. 0
- D. 3

Câu 217: Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}|x|^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6|x| + 1$ là

- A. 2
- B. 1
- C. 5
- D. 3

Câu 218: Số điểm cực trị của hàm số $y = |x|^5 - 5|x| + 1$ là

- A. 3
- B. 4
- C. 1
- D. 2

Câu 219: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - x^2$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x+1|)$ là

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 5

Câu 220: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 2$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x-2|)$ là

A. 3**B. 4****C. 1****D. 5**

Câu 221: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x^2-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x-2019|) + 2$ là

A. 3**B. 4****C. 1****D. 5**

Câu 222: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-3)(x^2-4)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|x|+2) + 1$ là

A. 3**B. 7****C. 9****D. 5**

Câu 223: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(1-2x)(x+1)(4-x^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|2x+2|-5) + 2019$ là

A. 5**B. 7****C. 11****D. 9**

Câu 224: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|2020x+2019|-2) - 1$ là

A. 3**B. 7****C. 1****D. 5**

Câu 225: Hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+		-	0	+
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là

A. 3**B. 1****C. 2****D. 5**

Câu 226: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

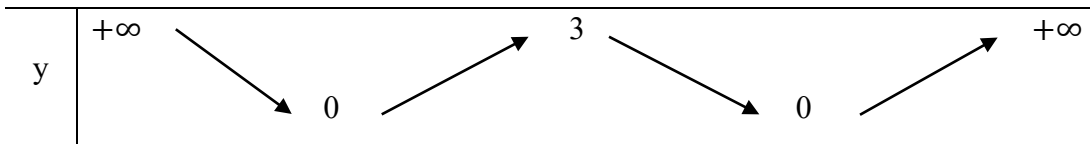
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$		4		5		$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|2x-1|) - 1$ là

A. 1**B. 3****C. 2****D. 5**

Câu 227: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

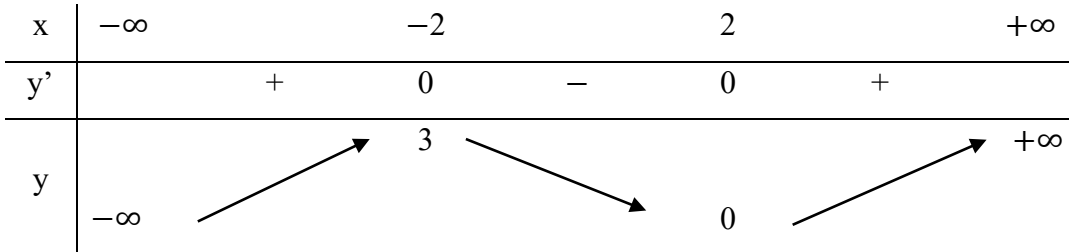
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	-	0	+	-	0	+



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x-1|-1) + 21$ là

- A. 1 B. 3 C. 7 D. 5

Câu 228: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|2-3x|+3) - 4$ là

- A. 1 B. 3 C. 2 D. 5

Câu 229: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	+	0	-

Hỏi hàm số $g(x) = f(|x-1|-2) + 2019$ có bao nhiêu cực trị?

- A. 3 B. 7 C. 2 D. 5

Câu 230: Hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$			
y'	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Hỏi hàm số $g(x) = f(|3-2x|+3) + 2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1 B. 7 C. 9 D. 5

Câu 231: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
y'	-	0	+	0	-	0	+

Hỏi hàm số $g(x) = f(|x-1|+1) + 5$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1 B. 7 C. 3 D. 5

Câu 232: Hàm số $(C): y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$	
y'	+	0	-	+	0	-

Hỏi hàm số $g(x) = f(|2x+1|-2) - 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 9 B. 7 C. 3 D. 5

Câu 233: Hàm số (C): $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	2	3	$+\infty$			
y'		+	0	+	0	-	0	+

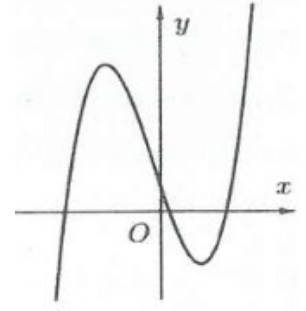
Hỏi hàm số $g(x) = f(|2x+1|-4)-1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 9 B. 7 C. 5 D. 3

Câu 234: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình

bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ là

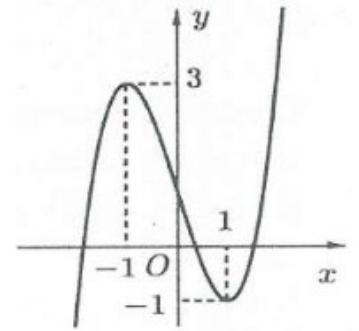
- A. 2
B. 4
C. 3
D. 1



Câu 235: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình

vẽ. Số điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(|x-1|+2)$ là

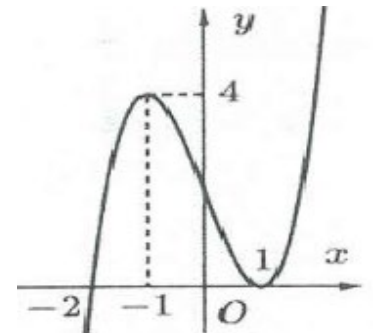
- A. 2
B. 4
C. 3
D. 1



Câu 236: Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số

$g(x) = f(|x-1|-2)+2$ đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

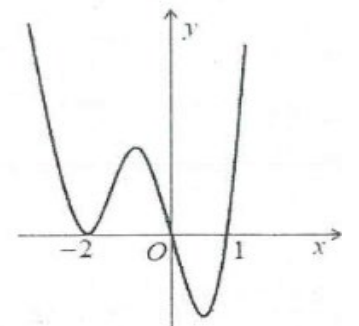
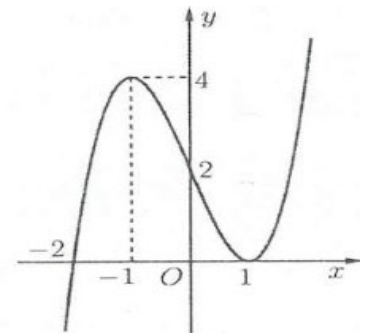
- A. $x = 0$
B. $x = -1$
C. $x = 4$
D. $x = 3$



Câu 237: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị

nguyên của tham số $m \in (-20; 20)$ để hàm số $g(x) = f(|x|+m)-3$ có 5

- điểm cực trị?
A. 20
B. 18
C. 16
D. 19

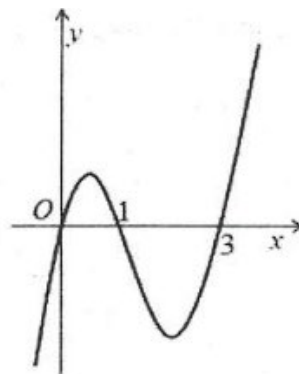


Câu 238: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|3x - 1| - m - 5) - 2019$ có 7 điểm cực trị?

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. Vô số

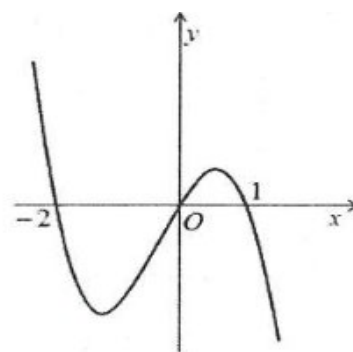
Câu 239: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|2x + 1| + m^2 - 5) - 2m - 1$ có 7 điểm cực trị?

- A. 5
- B. 6
- C. 4
- D. 7



Câu 240: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|2x + 1| + 2m - 2020) - 2m - 1$ có 7 điểm cực trị?

- A. 1009
- B. 1008
- C. 2018
- D. 2017



LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: $y' = 3x^2 - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y_{CT} = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y_{CD} = 4 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 2: $y' = \frac{2x(x+1) - x^2 - 3}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y_{CT} = 2 \\ x = -3 \Rightarrow y_{CD} = -6 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 3: $y' = 3x^2 - 6x - 9; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 6 \\ x = 3 \Rightarrow y = -26 \end{cases} \Rightarrow AB: y = -8x - 2$. **Chọn C.**

Câu 4: $y' = -3x^2 + 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 5 \\ x = 2 \Rightarrow y = 9 \end{cases} \Rightarrow A(0; 5), B(2; 9)$

Ta có $S_{OAB} = \frac{1}{2} d(B, Oy) \cdot OA = \frac{1}{2} \cdot 2.5 = 5$. **Chọn C.**

Câu 5: $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y_{CD} = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y_{CT} = -2 \end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 6: $y' = -3x^2 + 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y_{CT} = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y_{CD} = 6 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 7: $y' = x^2 - 4x + 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y_{CD} = \frac{7}{3} \\ x = 3 \Rightarrow y_{CT} = 1 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 8: $y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 9: $y' = -4x^3 + 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y_{CT} = -2 \\ x = \pm 1 \Rightarrow y_{CD} = -1 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 10: $y' = -x^3 + 16x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y_{CT} = -3 \\ x = \pm 4 \Rightarrow y_{CD} = 61 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 11: $y' = 3x^2 + 2x + 3 > 0 \Rightarrow$ không có cực trị. **Chọn B.**

Câu 12: $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y_{CD} = -1 \\ x = 2 \Rightarrow y_{CT} = -5 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 13: Ta có $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = x - 2 \Rightarrow$ hàm số không có cực trị. **Chọn A.**

Câu 14: $y' = \frac{2x - x^2}{(1 - x)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. **Chọn A.**

Câu 15: $y' = \frac{(2x+1)(x^2-x+1) - (2x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)^2} = \frac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y_{CD} = 3 \\ x = -1 \Rightarrow y_{CT} = \frac{1}{3} \end{cases}$

Chọn D.

Câu 16: $y' = 5x^4 + 3x^2 > 0 \Rightarrow$ hàm số không có cực trị. **Chọn B.**

Câu 17: $y' = 5x^4 - 3x^2 = x^2(5x^2 - 3) \Rightarrow$ hàm số có 2 cực trị. **Chọn C.**

Câu 18: Hàm số $y = x^3$ không có cực trị. Chọn B.

Câu 19: $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2$. **Chọn B.**

Câu 20: $y' = x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 5$. **Chọn C.**

Câu 21: $y' = x^2 - 10x - 11 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 10$. **Chọn A.**

Câu 22: $y' = x^2 + 8x - 9 \Rightarrow x_1 x_2 = -9$. **Chọn B.**

Câu 23: $y' = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$. **Chọn D.**

Câu 24: $y' = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$. **Chọn C.**

Câu 25: Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$-$	0
y	$+\infty$	-4	-3	-4	$+\infty$

Từ bảng trên $\Rightarrow y_{CD} = -3$. **Chọn C.**

Câu 26: Ta có $y = x + \frac{2}{x-1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$.

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y						

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 - \sqrt{2}$ và đạt cực tiểu tại $x = 1 + \sqrt{2}$. **Chọn C.**

Câu 27: $y = \frac{(x+1)(x+2)+4}{x+1} = x+2 + \frac{4}{x+1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow x_1+x_2=-2.$

Chọn C.

Câu 28: Ta có $y = \frac{(x+1)(2x-4)+10}{x+1} = 2x-4 + \frac{10}{x+1}$

$$\Rightarrow y' = 2 - \frac{10}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{5} \Rightarrow x_1 x_2 = -4. \text{ Chọn A.}$$

Câu 29: Ta có $y = \frac{(x+1)(-2x+3)-5}{x+1} = -2x+3 - \frac{5}{x+1} \Rightarrow y' = -2 + \frac{5}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$.

x	$-\infty$	x_1	-1	x_2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$					

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_1 = -1 - \sqrt{\frac{5}{2}}$. **Chọn D.**

Câu 30: $y = x + \frac{4}{x+1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$

x	$-\infty$	-3	-2	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y			0			

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$. **Chọn C.**

Câu 31: $y' = -\frac{2x}{2\sqrt{8-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2\sqrt{2} \Rightarrow A_{CT}(0; 2\sqrt{2})$. **Chọn A.**

Câu 32: Với $x > 0 \Rightarrow y = x^2 + 2x \Rightarrow y' = 2x + 2 > 0$.

Với $x < 0 \Rightarrow y = -x^2 - 2x \Rightarrow y' = -2x - 2 > 0$.

Với $x = 0 \Rightarrow y = 0$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$. **Chọn A.**

Câu 33: $y' = \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Dùng máy tính kiểm tra $y''(\sqrt{2}) = -4 < 0; y''(-\sqrt{2}) = 4 > 0 \Rightarrow y_{CD} = y(\sqrt{2}) = 2$. **Chọn A.**

Câu 34: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Chỉ có $x = -2; x = -1; x = 2$ là nghiệm bội lẻ nên hàm số đạt cực trị tại $x = -2; x = -1; x = 2$. **Chọn B.**

Câu 35: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2016 \\ x = 2017 \end{cases}$

Chỉ có $x = 2017$ là nghiệm bội lẻ nên hàm số đạt cực trị tại $x = 2017$. **Chọn B.**

Câu 36: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2016} \\ x = 2017 \\ x = \pm\sqrt{24} \end{cases}$ (đều là nghiệm bội lẻ)

Hàm số đạt cực trị tại $x = 0; x = \pm\sqrt{2016}; x = 2017; x = \pm\sqrt{24}$. **Chọn D.**

Câu 37: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Chỉ có $x = \pm 1$ là nghiệm bội lẻ nên hàm số đạt cực trị tại $x = \pm 1$. **Chọn D.**

Câu 38: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$ (đều là nghiệm bội lẻ)

Hàm số đạt cực trị tại $x = 0; x = \pm 1$. **Chọn C.**

Câu 39: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$. **Chọn D.**

Câu 40: Giá trị cực đại của hàm số là 5. **Chọn A.**

Câu 41: Hàm số có giá trị cực đại bằng 3 nên đáp án C sai. **Chọn C.**

Câu 42: Ta có $y_{CB} = 3$ và $y_{CT} = 0$. **Chọn D.**

Câu 43: Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$. **Chọn D.**

Câu 44: Cực tiểu (giá trị cực tiểu) của hàm số bằng -2 . **Chọn D.**

Câu 45: Hàm số có hai điểm cực tiểu nên đáp án B sai. **Chọn B.**

Câu 46: Hàm số có một điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 47: Hàm số có ba cực trị. **Chọn A.**

Câu 48: Đạo hàm đổi dấu 3 lần nên hàm số có 3 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 49: Đạo hàm đổi dấu 3 lần nên hàm số có 3 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 50: $y = f(-x) \Rightarrow y' = -f'(-x)$ nên số cực trị của hàm $y = f(-x)$ cũng chính là số cực trị của hàm số $y = f(x)$ (vì số lần đổi dấu của đạo hàm là như nhau)

Quan sát bảng xét dấu của hàm $y = f(x)$ ta thấy đạo hàm đổi dấu 5 lần.

Vậy hàm số $y = f(-x)$ có 5 điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 51: Chọn $f'(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f'(2x+1) = 2x.(2x-2).(2x-3)$

Ta có $y' = 2f'(2x+1) = 4x.(2x-2).(2x-3); y' = 0 \Leftrightarrow x = \left\{0; 1; \frac{3}{2}\right\}$

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 52: Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và giá trị cực đại $y = 3$. **Chọn C.**

Câu 53: Chọn $f'(x) = (x+1)(x-3) \Rightarrow f'(-x+1) = (-x+2)(-x-2) = (x-2)(x+2)$

Ta có $y' = -f'(-x+1) = -(-x-2)(x+2); y' = 0 \Leftrightarrow x = \{-2; 2\}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta được $x = 2$ là điểm cực đại của hàm số. **Chọn C.**

Câu 54: Chọn $f'(x) = x(x-2) \Rightarrow f'(x-1) = (x-1)(x-3)$

Ta có: $y' = f'(x-1) = (x-1)(x-3)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \{1; 3\}$

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu, ta được $x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số. **Chọn A.**

Câu 55: Chọn $f'(x) = -x \Rightarrow f'(x^2 - 1) = -(x^2 - 1) = -(x-1)(x+1)$

Ta có $y' = 2xf'(x^2 - 1) = -2x(x-1)(x+1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \{-1; 0; 1\}$

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta được $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số. **Chọn B.**

Câu 56: Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị là $x = -1; x = 2; x = 5$

Chọn $f'(x) = -(x+1)(x-2)(x-5) \Rightarrow f'(x^2 + 1) = -(x^2 + 2)(x^2 - 1)(x^2 - 4)$

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 + 1) = -2x(x^2 + 2)(x^2 - 1)(x^2 - 4)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \{0; \pm 1; \pm 2\}$

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x) \Rightarrow$ Hàm số có 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu. **Chọn A.**

Câu 57: Chọn $f'(x) = (x+2)^2(x-2)(x-3) \Rightarrow f'(1-x^2) = (3-x^2)^2(-1-x^2)(-2-x^2)$

Do đó $y' = -2xf'(1-x^2) = -2x(3-x^2)^2(x^2+1)(x^2+2)$

Phương trình $y' = 0$ có duy nhất 1 nghiệm $x = 0$ là nghiệm đơn

Vậy hàm số đã cho có duy nhất 1 điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 58: Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $x = -1; x = 3$

Chọn $f'(x) = (x+1)(x-3) \Rightarrow f'(x^2 + 2x + 3) = (x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x)$

Ta có $y' = (2x+2)f'(x^2 + 2x + 3) = (2x+2) \cdot (x^2 + 2x + 4) \cdot (x^2 + 2x)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \{-2; -1; 0\}$

Bảng xét dấu y'

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta được $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 59: Dựa vào hình vẽ, ta thấy y' đổi dấu khi qua các điểm $x = -1; x = 5$

Vậy hàm số đã cho có 2 điểm trị. **Chọn D.**

Câu 60: Hàm số đã cho có một cực tiểu (giá trị cực tiểu) là $y = -2$. **Chọn B.**

Câu 61: Hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực đại $\Rightarrow$ Hàm số $y = f(2019x + 2020)$ có 2 điểm cực đại.

Chọn A.

Câu 62: Chọn $f'(x) = x(x+1)(x-2)^2 \Rightarrow f'(1-x) = (1-x)(2-x)(x+1)^2$

Do đó $y' = -f'(1-x) = (x-1)(2-x)(x+1)^2$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \{-1; 1; 2\}$

Dựa vào bảng xét dấu, ta được $x = 2$ là điểm cực đại của hàm số. **Chọn D.**

Câu 63: Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$ và $y_{CB} = 2$. **Chọn B**

Câu 64: Hàm số có hai điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 65: Hàm số có hai điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 66: Hàm số có ba điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 67: Hàm số có ba điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 68: Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$ và $y_{CB} = 3$. **Chọn A.**

Câu 69: Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$ và $y_{CB} = 4$. **Chọn C.**

Câu 70: Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$ và giá trị cực đại là $y_{CB} = 2$. **Chọn C.**

Câu 71: Dựa vào hình vẽ suy ra hàm số có 4 điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 72: Dựa vào đồ thị hàm số suy ra hàm số có 5 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 73: Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy: Hàm số $y = f(x)$ có 5 điểm cực trị do đó $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua 5 điểm phân biệt.

Mặt khác $g'(x) = [f(2020x + 2019)]' = 2020 \cdot f'(2020x + 2019)$ cũng đổi dấu khi đi qua 5 điểm.

Do đó hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 74: Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Lại có: $g(x) = f(x-2) \Rightarrow g'(x) = [f(x-2)]' = f'(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = -1 \\ x-2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

Suy ra hàm số $g(x) = f(x-2)$ đạt cực đại tại điểm $x = 1$.

Hoặc ta có thể suy luận, đồ thị hàm số $y = g(x) = f(x-2)$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ khi dịch chuyển sang phải 2 đơn vị. **Chọn B.**

Câu 75: Ta có $g(x) = f(1989 - 24x) \Rightarrow g'(x) = -24f'(1989 - 24)$

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có 4 điểm cực trị nên $f'(x)$ đổi dấu qua 4 điểm nên $g'(x) = -24f'(1989 - 24)$ cũng đổi dấu qua 4 điểm.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 76: Hàm số có hai giá trị cực tiểu là $y_{CT} = 0, y_{CT} = -1$.

Vậy 0 là một giá trị cực tiểu của hàm số. **Chọn B.**

Câu 77: Do hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x = -1, x = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ nên ta giả sử

$$f'(x) = (x+1)(x-1) \Rightarrow g'(x) = [f(x^2)]' = 2x.f'(x^2) = 2x.(x^2+1)(x^2-1)$$

Ta có bảng xét dấu cho $g'(x)$:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = -1, x = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ là điểm cực tiểu. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$. **Chọn D.**

Câu 78: Dựa vào đồ thị hàm số ta giả sử $f'(x) = -(x+1)(x-1)$ (Do hàm số đạt cực trị tại điểm $x = -1, x = 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ nên ta đặt dấu trừ đằng trước biểu thức đạo hàm).

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } g'(x) &= (2x+2).f'(x^2+2x) = -(2x+2).(x^2+2x+1)(x^2+2x-1) \\ &= -2(x+1)^2(x+1)(x^2+2x-1) \end{aligned}$$

Ta có bảng xét dấu cho $g'(x)$:

x	$-\infty$	$-1-\sqrt{2}$	-1	$-1+\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại các điểm $x = -1 \pm \sqrt{2}$ và đạt cực tiểu tại điểm $x = -1$. Khẳng định **sai** là D. **Chọn D.**

Câu 79: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta giả sử $f'(x) = -(x+1).x.(x-1)$

(Do hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 0, x = \pm 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$)

$$\text{Khi đó } g'(x) = -2x.f'(-x^2-1) = 2x(-x^2).(-x^2-1)(-x^2-2) = -2x^3(x^2+1)(x^2+2)$$

Suy ra hàm số $g(x)$ có một điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 80: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta giả sử $f'(x) = -x(x+1)(x-1)$ (Do hàm số đạt cực trị tại điểm $x = \pm 1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$)

$$\text{Khi đó } g'(x) = 2x.f'(x^2-3) = -2x(x^2-2)(x^2-4)$$

Ta có bảng xét dấu cho $g'(x)$

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu suy ra hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = -2, x = 0, x = 2$

Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$.

Hàm số có 3 điểm cực đại và hai điểm cực tiểu. **Chọn A.**

Câu 81: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta giả sử $f'(x) = -kx^3$ (với $k > 0$) (Do hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$)

$$\text{Khi đó } g'(x) = -4x \cdot f'(-2x^2 + 2) = 4kx \cdot (-2x^2 + 2)^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu cho $g'(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu suy ra hàm số đạt cực đại tại các điểm $x = -1, x = 1 \Rightarrow$ tổng bình phương các điểm cực đại bằng 2. **Chọn A.**

Câu 82: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta giả sử $f'(x) = -x(x-2)$ (Do hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 0, x = 2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = -\infty$)

$$\text{Khi đó } g'(x) = (2x-2) \cdot f'(x^2-2x+2) = -(2x-2)(x^2-2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Do đó hàm số đạt cực trị tại các điểm $x = 0, x = 1, x = 2 \Rightarrow$ tổng tất cả các điểm cực trị bằng 3.

Chọn D.

Câu 83: Ta có $g'(x) = f'(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$\text{Suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Do đó hàm số đã cho có 2 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 84: Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3x \Rightarrow f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C$ mà $f(2) = 3 \Rightarrow C = 1$

$$\text{Do đó } f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1 \Rightarrow g(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4$$

$$\text{Lại có } g'(x) = 3x^2 - 3x; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \text{ là điểm cực đại}$$

Vậy $g(1) = 1 - \frac{3}{2} + 4 = \frac{7}{2}$. **Chọn B.**

Câu 85: $g'(x) = (2x+1)f'(x^2+x-1) = (2x+1) \cdot (x^2+x-1)^2 \cdot (x^2+x-2) \cdot (x^2+x-4)^2$

Và nghiệm bội chẵn không phải điểm cực trị $\Rightarrow g(x)$ có 3 điểm cực trị $x = \left\{1; -2; -\frac{1}{2}\right\}$. **Chọn C.**

Câu 86: $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2+1) = 2x^7 \cdot (x^2+1) \cdot (x^2+3)$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (nghiệm bội lẻ)

Vậy hàm số đã cho có 1 điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 87: $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2-1) = 2x \cdot (x^2-1) \cdot (x^2-2)$;

Phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt (nghiệm đơn và bội lẻ)

Vậy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 88: $g'(x) = (2x-6)f'(x^2-6x+m) = (2x-6) \cdot (x^2-6x+m)^2 \cdot (x^2-6x+m-1)$

Vì nghiệm bội chẵn không phải điểm cực trị $\Rightarrow$ Viết gọn $g'(x) = (2x-6)(x^2-6x+m-1)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x^2-6x+m-1=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 - 6 \cdot 3 + m - 1 \neq 0 \\ \Delta' = (-3)^2 - (m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 10. \text{ Kết hợp } m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \text{có 9 giá trị nguyên } m. \text{ **Chọn A.**}$$

Câu 89: Viết gọn $f'(x) = (x-3)(x-4)$ (nghiệm bội chẵn không phải điểm cực trị)

Ta có $g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x+m) = 2(x-1) \cdot (x^2-2x+m-3) \cdot (x^2-2x+m-4)$

$$\text{Phương trình } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2-2x+m-3=0 \\ x^2-2x+m-4=0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1), (2)$ đều có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow m < 4$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z}^+ \longrightarrow m = \{1; 2; 3\}$ là giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Câu 90: $g'(x) = f'(x) - m + 1 = x^4 - 4x^2 + 1 - m; \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = h(x) = x^4 - 4x^2 + 1$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = h(x)$ có 4 nghiệm phân biệt

Lập bảng biến thiên hàm số $h(x) \longrightarrow -3 < m < 1$ là giá trị cần tìm

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 3 giá trị nguyên m cần tìm. **Chọn A.**

Câu 91: $g'(x) = f'(x) - m = x^3 - 3x - m; \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x - m = 0 \Leftrightarrow m = h(x) = x^3 - 3x$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = h(x)$ có 3 nghiệm phân biệt

Lập bảng biến thiên hàm số $h(x) \longrightarrow -2 < m < 2$ là giá trị cần tìm

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 3 giá trị nguyên m cần tìm. **Chọn C.**

Câu 92: $g'(x) = f'(x) - m = x - \sqrt{x-4} - m; \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{x-4} - m = 0 \Leftrightarrow m = h(x) = x - \sqrt{x-4}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = h(x)$ có 2 nghiệm phân biệt

Lập bảng biến thiên hàm số $h(x) \longrightarrow \frac{15}{4} < m \leq 4$ là giá trị cần tìm

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 1 giá trị nguyên m cần tìm. **Chọn A.**

Câu 93: $g'(x) = f'(x) - m = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} - m; \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} - m = 0 \Leftrightarrow m = h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = h(x)$ có 2 nghiệm phân biệt

Lập bảng biến thiên hàm số $h(x) \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < m < 1 \\ 1 < m < 3 \end{cases}$ là giá trị cần tìm

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 1 giá trị nguyên m cần tìm. **Chọn A.**

Câu 94: $g'(x) = f'(x) - m + 1 = 2x^3 - 6x + 1 - m; \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x + 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = h(x) = 2x^3 - 6x + 1$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = h(x)$ có 3 nghiệm phân biệt

Lập bảng biến thiên hàm số $h(x) \longrightarrow -3 < m < 5$ là giá trị cần tìm

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên m cần tìm. **Chọn D.**

Câu 95: $g'(x) = f'(x) - m + 1 = 2x^3 - 3x^2 + 1 - m; \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = h(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = h(x)$ có nghiệm duy nhất hoặc có 2 nghiệm phân biệt

Lập bảng biến thiên hàm số $h(x) \longrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases}$

Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-10; 10) \end{cases} \Rightarrow$ có 19 giá trị nguyên m cần tìm. **Chọn D.**

Câu 96: $g'(x) = f'(x) - m^2 + 3 = x^4 - x^2 + 9 - m^2; \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 + 9 - m^2 = 0 \quad (*)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (*)$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 9 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$. **Chọn A.**

Câu 97: $g'(x) = (x^2 - 8x + m)' f'(x^2 - 8x + m) = (2x - 8) f'(x^2 - 8x + m)$
 $= (2x - 8)(x^2 - 8x + m - 1)^2 (x^2 - 8x + m)(x^2 - 8x + m - 2); \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \\ (x^2 - 8x + m - 1)^2 = 0 \\ x^2 - 8x + m = 0 \quad (1) \\ x^2 - 8x + m - 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1), (2)$ đều có 2 nghiệm phân biệt khác 4 $\Leftrightarrow m < 16$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}^+ \longrightarrow$ có 15 giá trị nguyên m cần tìm. **Chọn A.**

Câu 98: Số điểm cực của hàm số $y = f(ax + b)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

Dựa vào hình vẽ, ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 6 điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 99: Dựa vào hình vẽ, ta chọn

$$f'(x) = (x - 1)(x - 3) \Rightarrow f'(x^2 - 4x + 6) = (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 3)$$

Ta có $g'(x) = (2x - 4) f'(x^2 - 4x + 6) = (2x - 4)(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 3)$

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \{1; 2; 3\}$

Suy ra hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$. **Chọn B.**

Câu 100: Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{-1; 1; 2\}$

Và $f'(x)$ đổi dấu từ + sang - khi qua $x = 1$.

Vậy $x = 1$ là điểm cực đại của hàm số đã cho. **Chọn B.**

Câu 101: Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng $f'(x) = 0$ vô nghiệm

Vậy hàm số đã cho không có điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 102: Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{-1; 1; 2\}$

Và $f'(x)$ đổi dấu từ - sang + khi qua $x = 1$.

Vậy $x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho. **Chọn B.**

Câu 103: Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{-2; -1; 1; 2\}$

Và $f'(x)$ đổi dấu từ - sang + khi qua $x = -1; x = 2$

Vậy $x = -1; x = 2$ là điểm cực tiểu của hàm số đã cho. **Chọn B.**

Câu 104: Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng $f'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt

Vậy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 105: Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng $f'(x) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt

Vậy hàm số đã cho có 6 điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 106: Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng $f'(x) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt

Và $f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi qua các điểm $x = x_1; x = x_2; x = x_3$

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực tiểu. **Chọn B.**

Câu 107: Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt

Và $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua ba điểm $\Rightarrow y = f(x)$ có 3 điểm cực trị

Số điểm cực của hàm số $y = f(ax + b)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$. **Chọn A.**

Câu 108: Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng $f'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt

Và $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua 7 điểm $\Rightarrow y = f(x)$ có 7 điểm cực trị

Số điểm cực của hàm số $y = f(ax + b)$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$. **Chọn D.**

Câu 109: Dựa vào hình vẽ, ta chọn $f'(x) = (x+2)(x+1)(x-1) \Rightarrow f'(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 1)(x^2 - 3)$

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2 - 2) = 2x(x^2 - 4)(x^2 - 1)(x^2 - 3); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = \pm 2 \\ x = \pm\sqrt{3}; x = \pm 1 \end{cases}$

Suy ra hàm số $y = g(x)$ có 7 điểm cực trị gồm 3 điểm cực đại (bảng xét dấu). **Chọn C.**

Câu 110: Dựa vào hình vẽ, ta chọn $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$

$\Rightarrow f'(\sqrt{x^2 - 2x + 4}) = (\sqrt{x^2 - 2x + 4} + 1)(\sqrt{x^2 - 2x + 4} - 1)(\sqrt{x^2 - 2x + 4} - 2)$

Ta có $g'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}} \cdot (\sqrt{x^2 - 2x + 4} + 1) \cdot (\sqrt{x^2 - 2x + 4} - 1) \cdot (\sqrt{x^2 - 2x + 4} - 2)$

Do đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 4} - 1 = 0 \\ \sqrt{x^2 - 2x + 4} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \\ x=2 \end{cases} \text{ (ba nghiệm đơn)}$

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 111: Dựa vào hình vẽ, ta chọn $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$

$\Rightarrow f'(\sqrt{x^2 + 2x + 2}) = (\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 3)$

Ta có $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \cdot (\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1) \cdot (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 1) \cdot (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 3)$

$$\text{Do đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+2}-1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+2}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^3=0 \\ x^2+2x-7=0 \end{cases} \quad (2 \text{ nghiệm đơn; 1 nghiệm bội lẻ})$$

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 112: Dựa vào hình vẽ, ta chọn $f'(x) = (x-1)^2(x-3)$

$$\Rightarrow f'(x^2 - 6x + m + 3) = (x^2 - 6x + m + 2)^2(x^2 - 6x + m)$$

$$\text{Ta có } g'(x) = (2x-6)f'(x^2 - 6x + m + 3) = (2x-6)(x^2 - 6x + m + 2)^2(x^2 - 6x + m)$$

$$\text{Do đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6=0 \\ (x^2 - 6x + m + 2)^2 = 0 \\ x^2 - 6x + m = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) & (\text{nghiệm bội chẵn không phải điểm cực trị}) \\ (2) \end{matrix}$$

Yêu cầu bài toán tương đương với:

TH1. (1) có nghiệm $x = 3$; (2) có hai nghiệm phân biệt khác 3 $\Rightarrow m = 7$

$$\text{TH2. (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 3} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 7 \\ 9-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 7 \\ m < 9 \end{cases}$$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}^+$, ta được $m = \{1; 2; 3; \dots; 8\}$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 113: Đặt $h(x) = f'(x)$ là một hàm số bậc ba.

$$\text{Dựa vào đồ thị hàm số } y = f'(x) \text{ ta có: } h'(x) = kx(x-2) \Rightarrow h'(x) = k(x^2 - 2x)$$

$$\text{Do đó } h(x) = k\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right) \quad (\text{Do } h(0) = 0)$$

$$\text{Lại có } h(2) = 4 \Rightarrow 4 = k\left(\frac{8}{3} - 4\right) \Rightarrow k = -3 \Rightarrow f'(x) = h(x) = -x^3 + 3x^2 = -x^2(x-3)$$

$$\text{Khi đó } g'(x) = (2x-2) \cdot f'(x^2 - 2x) = -(2x-2)(x^2 - 2x)^2(x^2 - 2x - 3)$$

Suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực trị tại các điểm $x = 1, x = -1, x = 3 \Rightarrow$ Tổng bình phương các điểm cực trị của hàm số bằng 11. **Chọn C.**

$$\text{Câu 114: Hàm số } g(x) \text{ xác định khi } \begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Dựa vào đồ thị hàm số ta giả sử } f'(x) = x^2(x-2)$$

$$\text{Khi đó } g'(x) = (\sqrt{x^2-2})' \cdot f'(\sqrt{x^2-2}) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-2}} \cdot (x^2-2) \cdot (\sqrt{x^2-2}-2) = \frac{2x(x^2-2)(x^2-6)}{\sqrt{x^2-2}(\sqrt{x^2-2}+2)}$$

Với điều kiện $\begin{cases} x > \sqrt{2} \\ x < -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow g'(x) \text{ đổi dấu qua điểm } x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \text{Hàm số có 2 điểm cực trị. Chọn A.}$

Câu 115: Dựa vào đồ thị hàm số ta giả sử $f'(x) = (x-1)(x-3)$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } g'(x) &= \left(\sqrt{x^2+1}\right)' \cdot f'(\sqrt{x^2+1}) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot (\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}-3) \\ &= \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)} \cdot \frac{x^2-8}{\sqrt{x^2+1}+3} \text{ đổi dấu qua các điểm } x=0, x=\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{Hàm số } g(x) \text{ có 3 điểm cực} \end{aligned}$$

trị. **Chọn C.**

$$\textbf{Câu 116: } g'(x) = f'(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $f'(x) > -2 \Rightarrow g'(x) > 0$ ta có bảng xét dấu cho $g'(x)$:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=2$. **Chọn B.**

$$\textbf{Câu 117: } f'(x) = 2f'(x) - 2x - 4 = 2[f'(x) - (x+2)] = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x+2$$

Dựa vào sự tương giao giữa đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x+2$ (Đường thẳng này đi qua các điểm $(-2;0), (0;2), (2;4)$ trên đồ thị)

$$\text{Ta có: } f'(x) = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=0 \\ x=2 \end{cases} . \text{ Do } x \rightarrow +\infty \text{ thì } f'(x) > x+2 \text{ nên ta suy ra bảng xét dấu của } g'(x):$$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm $x=0$. **Chọn A.**

$$\textbf{Câu 118: } g'(x) = 2f'(x) - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x-2$$

Dựa vào sự tương giao giữa đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x-2$ (Đường thẳng này đi qua các điểm $(-1;-3), (1;-1), (2;0)$ trên đồ thị)

$$\text{Ta có: } f'(x) = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases} . \text{ Do } x \rightarrow +\infty \text{ thì } f'(x) > x-2 \text{ nên ta suy ra bảng xét dấu của } g'(x):$$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$. **Chọn D.**

Câu 119: $g'(x) = f'(x) + x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -x$

Dựa vào sự tương giao giữa đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -x$

Ta có: $f'(x) = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$. Do $x \rightarrow +\infty$ thì $f'(x) > -x$ nên ta suy ra bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	0	+

Suy ra hàm số đạt cực trị tại các điểm $x = 0, x = 1, x = 2 \Rightarrow$ Tổng bình phương các điểm cực trị của hàm số bằng 5. **Chọn C.**

Câu 120: $h'(x) = 2f'(x) - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x + 1$

Vẽ đường thẳng $y = x + 1 (d)$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y = f'(x)$

Ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt d tại 3 điểm phân biệt trong đó có điểm $(2; 3) \Rightarrow$ Hàm số có 3 điểm cực trị.

Khi $x > 2 \Rightarrow f'(x) > x + 1 \Rightarrow h'(x) > 0 \Rightarrow h'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 2 \Rightarrow x = 2$ là điểm cực tiểu.

Từ đó suy ra hàm số có 2 điểm cực tiểu và một điểm cực đại. **Chọn B.**

Câu 121: $g'(x) = f'(x + 1) - (2x + 3)$. Đặt $t = x + 1 \Rightarrow g'(x) = f'(t) - (2t + 1)$

Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và đường thẳng $y = 2t + 1$ (đường thẳng này đi qua các điểm $(2; 5), (0; 1), (-2; -3)$ trên hình vẽ) ta có:

$$f'(t) = 2t + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 0 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 2 \\ x + 1 = 0 \\ x + 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $f'(t) > 2t + 1$ nên ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -3, x = 1$. **Chọn B.**

Câu 122: $g'(x) = f'(x + 1) + x + 2$

Đặt $t = x + 1 \Rightarrow g'(x) = f'(t) + t + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(t) = -t - 1$

Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và đường thẳng $y = -t - 1$ (đường thẳng này đi qua các điểm $(-3; 2), (1; -2), (3; -4)$ trên hình vẽ) ta có:

$$f'(t) = -t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = -3 \\ x + 1 = 1 \\ x + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Mặt khác $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f'(x) < -x - 1$ (Do đồ thị $f'(x)$ nằm phía dưới đường thẳng $y = -x - 1$) ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	0	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu suy ra hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -4, x = 2$. **Chọn D.**

Câu 123: $y = f(x) - \frac{1}{2}x^2 - 1 \Rightarrow y' = f'(x) - x$

Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x$ (đường thẳng này đi qua các

điểm $(-2; -2), (2; 2), (4; 4)$ trên hình vẽ) ta có: $f'(x) - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

Mặt khác $x \rightarrow +\infty \Rightarrow f'(x) > x$ (Do đồ thị $f'(x)$ nằm phía trên đường thẳng $y = x$) ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	2	4	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu suy ra hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = -2, x = 4$ và đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Chọn D.

Câu 124: Giả sử $f'(x) = k(x+3)(x-1)^2$ (Do $f'(x)$ là hàm bậc 3)

Mặt khác $f'(0) = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}(x+3)(x-1)^2$

Lại có: $g'(x) = f'(x) + x^2 + x - 2 = f'(x) + (x-1)(x+2)$

$$= (x-1) \left[\frac{2}{3}(x+3)(x-1) + (x+2) \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = \frac{-7}{2} \end{cases} \Rightarrow g(x) \text{ có 3 điểm cực trị. Chọn C.}$$

$$\text{Câu 125: } y' = 3ax^2 + 2bx + c \longrightarrow \begin{cases} y(0) = 2 \\ y(2) = -2 \\ y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ c = 0 \\ a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y(-2) = -18. \text{ Chọn D.}$$

$$\text{Câu 126: } y' = 3ax^2 + 2bx + c \longrightarrow \begin{cases} y(0) = 4 \\ y(2) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 4 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 4 \\ c = 0 \\ a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 4 \Rightarrow y(1) = 2. \text{ Chọn B.}$$

$$\text{Câu 127: } y' = 3x^2 - 4ax + a^2 \Rightarrow y'' = 6x - 4a \longrightarrow \begin{cases} y(1) = 3 \\ y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2a + a^2 + b = 3 \\ 3 - 4a + a^2 = 0 \\ 6 - 4a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = 4. \text{ Chọn D.}$$

$$\text{Câu 128: } y' = 3x^2 - 6x + 2a \Rightarrow y'' = 6x - 6 \longrightarrow \begin{cases} y(2) = -2 \\ y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 - 12 + 4a + b = -2 \\ 2a = 0 \\ 6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = 2. \text{ Chọn B.}$$

$$\text{Câu 129: } y' = 3ax^2 + 2bx + c \longrightarrow \begin{cases} y(0) = -1 \\ y(2) = 3 \\ y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 3 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -1 \\ c = 0 \\ a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b + c + d = 1. \text{ Chọn A.}$$

$$\text{Câu 130: } y' = 3ax^2 + 2bx + c \longrightarrow \begin{cases} y(1) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(1) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ d = 1 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ c = 0 \\ a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 14. \text{ Chọn B.}$$

$$\text{Câu 131: } y' = x^2 + 2(m^2 - m + 2)x + 3m^2 + 1 \Rightarrow y'' = 2x + 2(m^2 - m + 2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y''(-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4(m^2 - m + 2) + 3m^2 + 1 = 0 \\ -4 + 2(m^2 - m + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3. \text{ Chọn C.}$$

Câu 132: $y' = 3x^2 - 2(m^2 + 1)x + m^2 - 1 \Rightarrow y'' = 6x - 2(m^2 + 1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \\ y''(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ -2(m^2 + 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1. \text{ Chọn D.}$$

Câu 133: $f'(x) = 3x^2 - 6mx + 3(2m - 1) \Rightarrow f''(x) = 6x - 6m$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ -6m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{1}{2}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 134: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(m-1)^2$. Ta có $y'(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 135: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 \Rightarrow y'' = 2x - 2m$

$$\text{Ta có } \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 1 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \Rightarrow m = 2. \text{ Chọn B.} \\ m > 1 \end{cases}$$

Câu 136: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4 \Rightarrow y'' = 2x - 2m$

$$\text{Ta có } \begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \Leftrightarrow m = 5. \text{ Chọn C.} \\ m > 3 \end{cases}$$

Câu 137: $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 3(x - m + 1)(x - m - 1); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{cases}$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = m + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$. **Chọn D.**

Câu 138: $y' = 3x^2 - 6mx + m^2 \Rightarrow y'' = 6x - 6m$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 3 = 0 \\ 6 - 6m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \pm \sqrt{6} \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3 - \sqrt{6}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 139: $y' = -3x^2 + 2mx + m^2 + 2m - 3 \Rightarrow y'' = -6x + 2m$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} y'(0) = 0 \\ y''(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 = 0 \\ 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \Leftrightarrow m = -3. \text{ Chọn D.} \\ m < 0 \end{cases}$$

Câu 140: $y' = 3ax^2 + 2bx - 5$. Ta có $\begin{cases} y(1) = 2 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 7 \\ 3a + 2b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 3. \text{ Chọn B.}$

Câu 141: $y' = 3x^2 - 6mx + 6m^2 - 3m \Rightarrow y'' = 6x - 6m$

$$\text{Ta có } \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m^2 - 9m + 3 = 0 \\ 6 - 6m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1; m = \frac{1}{2} \\ m > 1 \end{cases} \Rightarrow m = \emptyset. \text{ Chọn D.}$$

Câu 142: $y' = 4x^3 - 4mx$.

Ta có $y'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = 1$. **Chọn A.**

Câu 143: $y' = 3x^2 - 2x + m \Rightarrow y'' = 6x - 2$.

Ta có $\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 8 = 0 \\ 10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -8$. **Chọn C.**

Câu 144: $y' = 3x^2 + 6mx + 3m^2 - 12 \Rightarrow y'' = 6x + 6m$

Ta có $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y''(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 12 = 0 \\ 6m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$. **Chọn D.**

Câu 145: $y' = -4x^3 + 4mx$.

Ta có $y'(-1) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 1$. **Chọn A.**

Câu 146: $y' = 3x^2 - 2mx + 3, y''(x) = 6x - 2m$

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = 2 \Rightarrow y'(2) = 12 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{15}{4}$.

Khi đó $y''(2) = 12 - \frac{15}{2} > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$. Vậy $m = \frac{15}{4}$. **Chọn C.**

Câu 147: $y' = 4(m-1)x^3$

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0 \Leftrightarrow y'$ đổi dấu từ (+) sang (-) khi đi qua điểm $x = 0$.

Khi đó $m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$. **Chọn D.**

Câu 148: $y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3 = x^3 [8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)] = x^3 \cdot g(x)$

Trong đó $g(x) = [8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)]$

▪ **TH1:** $g(0) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Với $m = 2 \Rightarrow y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Với $m = -2 \Rightarrow y' = x^4(8x^3 - 20) \Rightarrow$ Hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 0$.

▪ **TH2:** $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0 \Leftrightarrow y'$ đổi dấu từ (-) sang (+) khi đi qua điểm $x = 0$.

Khi đó $g(0) > 0 \Leftrightarrow -4(m^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Kết hợp 2 trường hợp và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-1; 0; 1; 2\}$. **Chọn C.**

Câu 149: $y' = 8x^7 + 5(m-1)x^4 - 4(m^2-1)x^3 = x^3 [8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1)] = x^3 \cdot g(x)$

Trong đó $g(x) = [8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2 - 1)]$

▪ **TH1:** $g(0) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Với $m = 1 \Rightarrow y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Với $m = -1 \Rightarrow y' = x^4(8x^3 - 10) \Rightarrow$ Hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 0$.

▪ **TH2:** $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0 \Leftrightarrow y'$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi đi qua điểm $x = 0$.

Khi đó $g(0) > 0 \Leftrightarrow -4(m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Kết hợp 2 trường hợp và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{0; 1\}$. **Chọn B.**

Câu 150: $y' = 8x^7 + 5(m-1)x^4 - 4(m^2 - 1)x^3 = x^3 [8x^4 + 5(m-4)x - 4(m^2 - 16)] = x^3 \cdot g(x)$

Trong đó $g(x) = [8x^4 + 5(m-4)x - 4(m^2 - 16)]$

▪ **TH1:** $g(0) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Với $m = 4 \Rightarrow y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Với $m = -4 \Rightarrow y' = x^4(8x^3 - 40) \Rightarrow$ Hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 0$.

▪ **TH2:** $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 4$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0 \Leftrightarrow y'$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi đi qua điểm $x = 0$.

Khi đó $g(0) > 0 \Leftrightarrow -4(m^2 - 16) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$.

Kết hợp 2 trường hợp và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$. **Chọn A.**

Câu 151: $y' = 8x^7 + 5(m-3)x^4 - 4(m^2 - 1)x^3 = x^3 [8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2 - 9)] = x^3 \cdot g(x)$

Trong đó $g(x) = [8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2 - 9)]$

▪ **TH1:** $g(0) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

Với $m = 3 \Rightarrow y' = 8x^7 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Với $m = -3 \Rightarrow y' = x^4(8x^3 - 30) \Rightarrow$ Hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 0$.

▪ **TH2:** $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0 \Leftrightarrow y'$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi đi qua điểm $x = 0$.

Khi đó $g(0) > 0 \Leftrightarrow -4(m^2 - 9) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Kết hợp 2 trường hợp và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$. **Chọn C.**

Câu 152: $y' = 16x^7 + 5(m^2 + 1)x^4 + 4(m + 7)x^3 = x^3 [16x^4 + 5(m^2 + 1)x + 4(m + 7)] = x^3 \cdot g(x)$

Trong đó $g(x) = 16x^4 + 5(m^2 + 1)x + 4(m + 7)$

▪ **TH1:** $g(0) = 0 \Leftrightarrow m = -7 \Rightarrow y' = x^4(16x^3 + 250) \Rightarrow$ Hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 0$.

▪ **TH2:** $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -7$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0 \Leftrightarrow y'$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi đi qua điểm $x = 0$.

Khi đó $g(0) > 0 \Leftrightarrow m + 7 > 0 \Leftrightarrow m > -7$

Kết hợp 2 trường hợp và $m \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow m = \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$. **Chọn C.**

Câu 153: $y' = 7x^6 + 4(2m^2 + 1)x^3 - 2(m - 10)x = x [7x^5 + 4(2m^2 + 1)x^2 - 2(m - 10)] = x \cdot g(x)$

Trong đó $g(x) = 7x^5 + 4(2m^2 + 1)x^2 - 2(m - 10)$

▪ **TH1:** $g(0) = 0 \Leftrightarrow m = 10 \Rightarrow y' = x^3(7x^3 + 804) \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$.

▪ **TH2:** $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 10$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0 \Leftrightarrow y'$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi đi qua điểm $x = 0$.

Khi đó $g(0) = -2(m - 10) > 0 \Leftrightarrow m < 10$

Kết hợp 2 trường hợp và $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$ có 10 giá trị của tham số m . **Chọn A.**

Câu 154: $y' = 9x^8 + 7(m - 2)x^6 - 6(m^2 - 5m + 6)x^5 = x^5 [9x^3 + 7(m - 2)x - 6(m^2 - 5m + 6)]$

Trong đó $g(x) = 9x^3 + 7(m - 2)x - 6(m^2 - 5m + 6)$

▪ **TH1:** $g(0) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases}$.

Với $m = 2 \Rightarrow y' = 9x^8 \Rightarrow$ Hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 0$.

Với $m = 3 \Rightarrow y' = x^6(9x^2 + 7) \Rightarrow$ Hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 0$.

▪ **TH2:** $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq 3 \end{cases}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0 \Leftrightarrow y'$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi đi qua điểm $x = 0$.

Khi đó $g(0) = -6(m^2 - 5m + 6) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < m < 3$.

Kết hợp 2 trường hợp và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \emptyset$. **Chọn D.**

Câu 155: $y' = 12\sqrt{3}x^{11} + 9(3 - m)x^8 - 8(m - 2020)x^7 = x^7 [12\sqrt{3}x^4 + 9(3 - m)x - 8(m - 2020)]$

$= x^7 \cdot g(x)$. Trong đó $g(x) = 12\sqrt{3}x^4 + 9(3 - m)x - 8(m - 2020)$.

- **TH1:** $g(0) = 0 \Leftrightarrow m = 2020 \Rightarrow y' = x^8(12\sqrt{3}x^3 - 18153) \Rightarrow$ Hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 0$.
- **TH2:** $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2020$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0 \Leftrightarrow y'$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi đi qua điểm $x = 0$.

Khi đó $g(0) = -8(m - 2020) > 0 \Leftrightarrow m < 2020$.

Kết hợp 2 trường hợp và $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$ có 2019 giá trị của tham số m . **Chọn B.**

Câu 156: Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm thực nên hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ phải có 2 điểm cực trị.

Khi đó hàm số $y = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có $3 + 2 = 5$ điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 157: Hàm số $y = x^2 - 5x + 6$ có một điểm cực trị.

Lại có: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow$ hàm số $y = |x^2 - 5x + 6|$ có 3 điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 158: Hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ có $ab < 0 \Rightarrow$ hàm số có 3 điểm cực trị.

Mặt khác $x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$ có 4 nghiệm phân biệt.

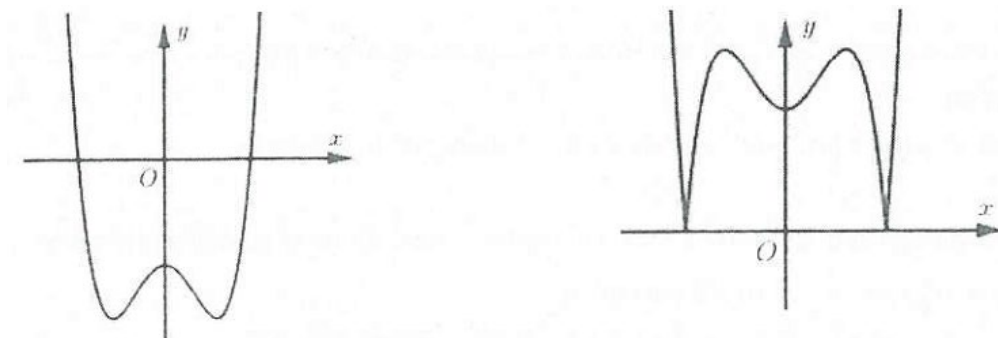
Do đó hàm số $y = |x^4 - 4x^2 + 3|$ có $3 + 4 = 7$ điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 159: Ta có: $y = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$

Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị và phương trình $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ có 2 nghiệm **kép** nên hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 160: Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -2 \\ x = \pm 1 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$

Từ đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 2$ ta suy ra đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2x^2 - 2|$ như hình vẽ.



Suy ra hàm số $y = |x^4 - 2x^2 - 2|$ có 1 giá trị cực đại là: $y_{CD} = 3$.

Do đó tổng bình phương các giá trị cực đại của hàm số $y = |x^4 - 2x^2 - 2|$ bằng 9. **Chọn A.**

Câu 161: Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có một nghiệm thực nên có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có 2 điểm cực trị và đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất. Khi đó hàm số $g(x) = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có 3 điểm cực trị.

TH2: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ không có cực trị và đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất. Khi đó hàm số $g(x) = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có một điểm cực trị.

Vậy hàm số $g(x) = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có tối đa 3 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 162: Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có hai nghiệm thực nên

- Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ phải có 2 điểm cực trị.
- Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 2 nghiệm, một nghiệm kép.

Do đó hàm số $g(x) = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có 3 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 163: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị $M(-1; 2), N(1; -2)$ nằm về hai phía so với trục hoành nên phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Khi đó hàm số $g(x) = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có $2 + 3 = 5$ điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 164: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có 2 điểm cực trị $M(0; 2), N(1; 1)$ đều nằm phía trên trục hoành nên phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có một nghiệm duy nhất.

Do đó hàm số $g(x) = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có $1 + 2 = 3$ điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 165: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía so với trục hoành nên phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Khi đó hàm số $g(x) = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có $2 + 3 = 5$ điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 166: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị nằm về cùng một phía so với trục hoành nên phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có một nghiệm duy nhất.

Mặt khác hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị nên hàm số $g(x) = |ax^3 + bx^2 + cx + d|$ có $1 + 2 = 3$ điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 167: Phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ có bốn nghiệm thực nên hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ phải có 3 điểm cực trị.

Do đó hàm số $g(x) = |ax^4 + bx^2 + c|$ có $3 + 4 = 7$ điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 168: Phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ có 3 nghiệm thực thì nó sẽ có một nghiệm kép $x = 0$.

Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ sẽ có 3 điểm cực trị.

Do đó hàm số $g(x) = |ax^4 + bx^2 + c|$ có $2 + 3 = 5$ điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 169: Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt

Do đó phương trình $ax^4 + bx^2 + c = 0$ có 4 nghiệm phân biệt suy ra hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ phải có 3 điểm cực trị.

Vậy hàm số $g(x) = |ax^4 + bx^2 + c|$ có 7 điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 170: Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2019 = ax^3 + bx^2 + cx + d - 2019$

Ta có $a > 0$ nên: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty; g(0) = d - 2019 > 0, g(1) < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Suy ra phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và hàm số $y = g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Do đó hàm số $y = |g(x)| = |f(x) - 2019|$ có 5 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 171: Đặt $g(x) = f(x) - 2019 = ax^4 + bx^2 + c - 2019$

Do $a > 0$ nên ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty; g(-1) = a + b + c - 2019 < 0, g(0) = c - 2019 > 0, g(1) < 0,$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ suy ra phương trình $g(x) = 0$ có 4 nghiệm và hàm số $y = g(x)$ phải có 3 điểm cực trị. Vậy

hàm số $y = |g(x)| = |f(x) - 2019|$ có 7 điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 172: Xét hàm số $g(x) = f(x) - x^2 \Rightarrow g'(x) = f'(x) - 2x = x(x^2 - 1) - 2x = x(x^2 - 3) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Khi đó phương trình $g(x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm phân biệt

Do đó hàm số $y = |g(x)| = |f(x) - x^2|$ có tối đa 7 điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 173: Xét hàm số $g(x) = f(x) - 3 = ax^4 + bx^2 + c - 3$

Do $a < 0$ nên ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty; g(-1) = a + b + c - 3 > 0, g(0) = c - 3 < 0, g(1) > 0,$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ suy ra phương trình $g(x) = 0$ có 4 nghiệm và hàm số $y = g(x)$ phải có 3 điểm cực trị.

Vậy hàm số $y = |g(x)| = |f(x) - 3|$ có 7 điểm cực trị.

Do đó hàm số $y = |g(x - 2019)| = |f(x - 2019) - 3|$ có 7 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 174: Dễ thấy hàm số $P(x)$ và $P(ax + b) (a \neq 0)$ có cùng số điểm cực trị do

$[P(ax + b)]' = a.P'(ax + b) = 0$ có cùng số nghiệm với phương trình $P'(x) = 0$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - 2020 = ax^4 + bx^2 + c - 2020$

Do $a < 0$ và $b = 2020 - c < 0 \Rightarrow ab > 0$ nên hàm số $y = g(x)$ có 1 điểm cực trị.

Lại có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty, g(0) = c - 2020 > 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y = |g(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Do đó hàm số $y = |g(2x-1)| = |f(2x-1) - 2020|$ có 3 điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 175: $y' = (|f(1-2x)-1|)' = \frac{-2 \cdot f'(1-2x) \cdot [f(1-2x)-1]}{|f(1-2x)-1|}$

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(1-2x) = 0 & (1) \\ f(1-2x) = 1 & (2) \end{cases}$

- Giải (1), ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \longrightarrow f'(1-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x = -1 \\ 1-2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$
- Giải (2), ta có $f(x) = 1$ có 3 nghiệm phân biệt $\longrightarrow f(1-2x) = 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y = |f(1-2x)-1|$ có $2+3=5$ điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 176: $y' = (|f(2019-x)|)' = -\frac{f'(2019-x) \cdot f(2019-x)}{|f(2019-x)|}$

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(2019-x) = 0 & (1) \\ f(2019-x) = 0 & (2) \end{cases}$

- Giải (1), ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases} \longrightarrow f'(2019-x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt
- Giải (2), ta có $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\longrightarrow f(x) = 0$ có nhiều nhất 4 nghiệm

Vậy hàm số $y = |f(2019-x)|$ có nhiều nhất $3+4=7$ điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 177: Xét $f'(x) = -x^{2018}(x-1)^2 \cdot x(x+1) \longrightarrow$ đơn giản: $f'(x) = x(x+1)$

Ta có: $y' = |f(2019-x)|' = -\frac{f'(2019-x) \cdot f(2019-x)}{|f(2019-x)|}$

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(2019-x) = 0 & (1) \\ f(2019-x) = 0 & (2) \end{cases}$

- Giải (1), ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \longrightarrow f'(2019-x) = 0$ có 2 nghiệm đơn phân biệt
- Giải (2), ta có $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm đơn phân biệt $\longrightarrow f(x) = 0$ có nhiều nhất 3 nghiệm

Vậy hàm số $y = |f(2019-x)|$ có nhiều nhất $2+3=5$ điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 178: $y' = |f(1-x)|' = -\frac{f'(1-x) \cdot f(1-x)}{|f(1-x)|}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(1-x) = 0 & (1) \\ f(1-x) = 0 & (2) \end{cases}$

- Giải (1), ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow f'(1-x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt
- Giải (2), ta có $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt $\longrightarrow f(x) = 0$ có nhiều nhất 4 nghiệm

Vậy hàm số $y = |f(1-x)|$ có nhiều nhất $3 + 4 = 7$ điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 179: Xét $f'(x) = (x+1)(x^3 - x) = x \cdot (x-1) \cdot (x+1)^2 \longrightarrow$ đơn giản: $f'(x) = x(x-1)$

Ta có $y' = (|f(x^2)|)' = \frac{2x \cdot f'(x^2) \cdot f(x^2)}{|f(x^2)|}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \cdot f'(x^2) = 0 & (1) \\ f(x^2) = 0 & (2) \end{cases}$

- Giải (1), ta có $2x \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow$ có 2 nghiệm đơn phân biệt và 1 nghiệm bội lẻ
- Giải (2), ta có $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn phân biệt $\longrightarrow f(x) = 0$ có nhiều nhất 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \longrightarrow f(x^2) = 0$ có nhiều nhất 4 nghiệm nhưng chỉ có 1 giá trị cực trị là 0.

Vậy hàm số $y = |f(1-x)|$ có nhiều nhất $1 + 1 + 1 = 3$ giá trị cực trị. **Chọn D.**

Câu 180: Xét $f'(x) = 0 \longrightarrow x = \{-2; 0; 2\}$, ta được bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			0		0		0	
	$-\infty$							$-\infty$

Ta có $y' = (|f(2-x)-3|)' = -\frac{f'(2-x) \cdot [f(2-x)-3]}{|f(2-x)-3|}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(2-x) = 0 & (1) \\ f(2-x) = 3 & (2) \end{cases}$

- Giải (1), ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{-2; 0; 2\} \longrightarrow f'(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = \{4; 2; 0\}$
- Giải (2), ta có $f(x) = 3$ vô nghiệm $\longrightarrow f(2-x) = 3$ vô nghiệm

Vậy hàm số $y = |f(2-x)-3|$ có $3 + 0 = 3$ điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 181: $y' = (|f(x)|)' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{|f(x)|}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 0 & (2) \end{cases}$

- Giải (1), ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$ (hai nghiệm đơn phân biệt)

- Giải (2), ta có $f(x) = 0$ có nghiệm đơn duy nhất

Vậy hàm số $y = |f(x)|$ có $2 + 1 = 3$ điểm cực trị. **Chọn C.**

$$\text{Câu 182: } y' = (|f(x) - 2|)' = \frac{f'(x) \cdot [f(x) - 2]}{|f(x) - 2|}; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \end{cases}$$

- Giải (1), ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ (hai nghiệm đơn phân biệt)

- Giải (2), ta có $f(x) = 2$ có ba nghiệm đơn phân biệt

Vậy hàm số $y = |f(x - 1) - 1| + 2$ có $2 + 3 = 5$ điểm cực trị. **Chọn B.**

$$\text{Câu 183: } y' = (|f(x) - 2019|)' = \frac{f'(x) \cdot [f(x) - 2019]}{|f(x) - 2019|}; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 2019 & (2) \end{cases}$$

- Giải (1), ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$ (ba nghiệm đơn phân biệt)

- Giải (2), ta có $f(x) = 2019 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases}$ (hai nghiệm đơn phân biệt $\neq \{0; \pm 1\}$)

Vậy hàm số $y = |f(x) - 2019| + 2020$ có $2 + 3 = 5$ điểm cực trị. **Chọn D.**

$$\text{Câu 184: } y' = (|f(x) - 1|)' = \frac{f'(x) \cdot [f(x) - 1]}{|f(x) - 1|}; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = 1 & (2) \end{cases}$$

- Giải (1), ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$ (hai nghiệm đơn phân biệt)

- Giải (2), ta có $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x - x_0) = 0 \longrightarrow f(x) = 1$ có một nghiệm đơn

Vậy hàm số $y = |f(x) - 1| + 2$ có $2 + 1 = 3$ điểm cực trị. **Chọn C.**

$$\text{Câu 185: } y' = (|f(x - 1)|)' = \frac{f'(x - 1) \cdot f(x - 1)}{|f(x - 1)|}; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x - 1) = 0 & (1) \\ f(x - 1) = 0 & (2) \end{cases}$$

- Giải (1), ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -1 \end{cases} \longrightarrow f'(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -5 \\ x - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 0 \end{cases}$

- Giải (2), ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases} \longrightarrow f(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + x_1 \\ x = 1 + x_2 \end{cases}$

Vậy hàm số $y = |f(x - 1)| + 2019$ có $2 + 2 = 4$ điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 186: $y' = (|f(x-1)-1|)' = \frac{f'(x-1) \cdot [f(x-1)-1]}{|f(x-1)-1|}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x-1) = 0 & (1) \\ f(x-1) = 1 & (2) \end{cases}$

- Giải (1), ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \longrightarrow f'(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ x-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$
- Giải (2), ta có $f(x) = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \cdot (x-x_0) = 0 \longrightarrow f(x-1) = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 \cdot (x-1-x_0) = 0$

Do đó, phương trình $f(x-1) = 1$ có một nghiệm đơn $x = 1 + x_0$

Vậy hàm số $y = |f(x-1)-1| + 2$ có $2+1=3$ điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 187: $y' = (|f(x-2019)+2020|)' = \frac{f'(x-2019) \cdot [f(x-2019)+2020]}{|f(x-2019)+2020|}$;

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x-2019) = 0 & (1) \\ f(x-2019) = -2020 & (2) \end{cases}$

- Giải (1), ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \longrightarrow f'(x-2019) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2020 \\ x=2022 \end{cases}$
- Giải (2), ta có $f(x) = -2020$ có nghiệm đơn duy nhất

Do đó, phương trình $f(x-2019) = -2020$ có một nghiệm đơn $x = x_0$

Vậy hàm số $y = |f(x-1)-1| + 2$ có $2+1=3$ điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 188: Vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ từ đồ thị $y = f(x) \longrightarrow$ Hàm số đã cho có 7 điểm cực trị.

Chọn B.

Câu 189: Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x-1) + 4$ là 2

Số nghiệm đơn và bội lẻ của phương trình $f(x-1) + 4 = 0$ là 1

Vậy hàm số đã cho có $2+1=3$ điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 190: Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x-1)$ là 2

Số nghiệm đơn và bội lẻ của phương trình $f(x-1) = 0$ là 3

Do đó, hàm số đã cho có 3 điểm cực đại là nghiệm phương trình $f(x-1) = 0$

Vậy tổng các giá trị cực đại của hàm số là 0. **Chọn A.**

Câu 191: Số điểm cực trị của hàm số $y = 2f(x+1) + 3$ là 2

Số nghiệm đơn và bội lẻ của phương trình $2f(x+1) + 3 = 0$ là 3

Vậy hàm số đã cho có $2+3=5$ điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 192: Số điểm cực trị của hàm số $y = 2f(x-2019) - 4$ là 4

Số nghiệm đơn và bội lẻ của phương trình $2f(x-2019)-4=0$ là 1

Vậy hàm số đã cho có $4+1=5$ điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 193: Xét hàm số $y = f(x^2) + 4$, có $y' = 2xf'(x^2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases}$

Suy ra hàm số $y = f(x^2) + 4$ có 3 điểm cực trị

Dựa vào hình vẽ, ta thấy $f(x) = -4$ không có nghiệm đơn và bội lẻ

Do đó $f(x^2) = -4$ không có nghiệm đơn và bội lẻ.

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 194: Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x+1) + 3$ là 3

Số nghiệm đơn và bội lẻ của phương trình $f(x+1) + 3 = 0$ là 2

Vậy hàm số đã cho có $3+2=5$ điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 195: Xét hàm số $y = f(x^2 + 1) - 1$, có $y' = 2xf'(x^2 + 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ x^2 + 1 = 2 \end{cases}$

Suy ra hàm số $y = f(x^2) + 4$ có 3 điểm cực trị

Lại có $f(x) - 1 = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 > 2$

Do đó $f(x^2 + 1) = 1$ có nghiệm $x^2 + 1 = x_0 > 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{x_0 - 1}$ (2 nghiệm đơn)

Vậy hàm số đã cho có $3+2=5$ điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 196: Đặt $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$; $g(x) = f(x) + m$

Ta có $g'(x) = f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{-1; 0; 2\}$

Suy ra hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt (nghiệm đơn và bội lẻ)

$\Leftrightarrow -m = f(x)$ có 4 nghiệm phân biệt (nghiệm đơn và bội lẻ) (*)

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$, có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{-1; 0; 2\}$

Lập bảng biến thiên $y = f(x) \Rightarrow (*) \Leftrightarrow -5 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 5$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z} \longrightarrow m = \{1; 2; 3; 4\}$. **Chọn D.**

Câu 197: Đặt $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$; $g(x) = f(x) + m$

Ta có $g'(x) = f'(x) = -3x^2 + 6x$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{0; 2\}$

Suy ra hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (nghiệm đơn và bội lẻ)

$$\Leftrightarrow -m = f(x) \text{ có 3 nghiệm phân biệt (nghiệm đơn và bội lẻ)} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$, có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \{0; 2\}$

Lập bảng biến thiên $y = f(x) \Rightarrow (*) \Leftrightarrow 2 < -m < 6 \Leftrightarrow -6 < m < -2$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z} \longrightarrow m = \{-5; -4; -3\}$. **Chọn A.**

Câu 198: Đặt $f(x) = x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2$; $g(x) = f(x) + m$

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - x; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \left\{-1; 0; \frac{1}{4}\right\}$$

Suy ra hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt (nghiệm đơn và bội lẻ)

$$\Leftrightarrow -m = f(x) \text{ có 2 nghiệm phân biệt (nghiệm đơn và bội lẻ)} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2$, có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \left\{-1; 0; \frac{1}{4}\right\}$

$$\text{Lập bảng biến thiên } y = f(x) \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} -m \geq 0 \\ -\frac{1}{2} < -m \leq \frac{9}{256} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ -\frac{9}{256} \leq m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$ và $-5 \leq m \leq 5 \longrightarrow m = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. **Chọn C.**

Câu 199: Xét hàm số $g(x) = mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m$

Hàm số $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị khi $g(x)$ có 2 điểm cực trị và phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có: } g(x) = m(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)[m(x - 1)^2 - 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ m(x - 1)^2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình } g(x) = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{2}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

$$\text{Kết hợp } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-9; 9] \end{cases} \Rightarrow \text{có 9 giá trị của tham số } m. \text{ **Chọn D.}**$$

Câu 200: Xét hàm số $g(x) = 2x^3 - 3mx^2 + mx$

Hàm số $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị khi $g(x)$ có 2 điểm cực trị và phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có: } g(x) = x(2x^2 - 3mx + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 2x^2 - 3mx + m = 0 \end{cases}$$

Phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác

$$0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9m^2 - 8m > 0 \\ g(0) = m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{8}{9} \\ m < 0 \end{cases}$$

Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [0; 100] \end{cases} \Rightarrow$ có 100 giá trị của tham số m . **Chọn A.**

Câu 201: Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + m$

Hàm số $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị khi $g(x)$ có 2 điểm cực trị và phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có: } g(x) = 0 \Leftrightarrow -m = x^3 - 3x = h(x).$$

$$\text{Mặt khác } h'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow h(1) = -2 \\ x = -1 \Rightarrow h(-1) = 2 \end{cases}$$

Dựa vào BBT suy ra phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi $-2 < -m < 2 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 3 giá trị của tham số m . **Chọn A.**

Câu 202: Xét hàm số $g(x) = x^3 - 6x^2 + (m+6)x - m - 1$

Hàm số $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị khi $g(x)$ có 2 điểm cực trị và phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có: } g(x) = m(x-1) + x^3 - 6x^2 + 6x - 1 = m(x-1) + (x^3 - 1) - 6x(x-1)$$

$$= (x-1)(x^2 + x + 1 - 6x + m) = (x-1)(x^2 - 5x + m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ h(x) = x^2 - 5x + m + 1 = 0 \end{cases}$$

Phương trình $g(x)$ có 3 nghiệm phân biệt khi $h(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 25 - 4m - 4 > 0 \\ h(1) = m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{21}{4} \\ m \neq 3 \end{cases}$$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m = \{1; 2; 4; 5\} \Rightarrow$ có 4 giá trị của tham số m . **Chọn A.**

Câu 203: Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 - m + 2$

Hàm số $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị khi $g(x)$ có 2 điểm cực trị và phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có: $g(x) = 0 \Leftrightarrow m - 2 = x^3 - 3x^2 = h(x)$.

Mặt khác $h'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \\ x = 2 \Rightarrow h(-1) = -4 \end{cases}$

Dựa vào BBT suy ra phương trình $g(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khi

$$-4 < m - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 3 giá trị của tham số m . **Chọn D.**

Câu 204: Xét hàm số $g(x) = x^4 - 2x^2 + m \Rightarrow g'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Do đó để hàm số $y = |x^4 - 2x^2 + m|$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow g(x) = 0$ vô nghiệm hoặc chỉ có nghiệm kép.

Đồ thị hàm số $y = g(x) = x^4 - 2x^2 + m$ có $a > 0$ nên bài toán thỏa mãn

$$\Leftrightarrow y_{CT} \geq 0 \Leftrightarrow g(\pm 1) = m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10; 10] \end{cases} \Rightarrow$ có 10 giá trị của tham số m . **Chọn C.**

Câu 205: Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - m| + 2019$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - m|$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - m$. Do $f(x)$ có 2 điểm cực trị nên $g(x)$ có hai điểm cực trị.

Để hàm số $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$ phải có 3 nghiệm phân biệt.

Dựa vào BBT suy ra $m \in (-2; 2)$.

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 3 giá trị của tham số m . **Chọn D.**

Câu 206: Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - m^2 + 3| + 2019$ bằng số điểm cực trị của hàm số

$$y = |f(x) - m^2 + 3|$$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - m^2 + 3$. Do $f(x)$ có 3 điểm cực trị nên $g(x)$ có ba điểm cực trị.

Để hàm số $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = m^2 - 3$ phải có 2 nghiệm bội lẻ.

Dựa vào BBT suy ra $m^2 - 3 \leq 1 \Leftrightarrow m^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 5 giá trị của tham số m . **Chọn B.**

Câu 207: Xét hàm số $g(x) = f(x) - m \Rightarrow g(x)$ có hai điểm cực trị.

Để hàm số $y = |g(x)|$ có 3 điểm cực trị thì phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$ phải có 1 nghiệm bội lẻ.

Dựa vào BBT suy ra $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$.

Do đó giá trị m có thể nhận là $m = -2$. **Chọn C.**

Câu 208: Xét hàm số $g(x) = f(x) + m \Rightarrow g(x)$ có hai điểm cực trị.

Để hàm số $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -m$ phải có 3 nghiệm phân biệt. Dựa vào đồ thị suy ra $-m \in (0; 4) \Leftrightarrow m \in (-4; 0)$.

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 3 giá trị của tham số m . **Chọn B.**

Câu 209: Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x + 2019) - m|$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - m|$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - m \Rightarrow g(x)$ có hai điểm cực trị.

Để hàm số $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$ phải có 3 nghiệm bội lẻ.

Dựa vào đồ thị suy ra $-2 < m < 2$.

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 3 giá trị của tham số m . **Chọn B.**

Câu 210: Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Đặt $g(x) = f(x^2 + 2) + m^2 + 2$

Ta có: $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2 = 0 \\ x^2 + 2 = 2 \end{cases}$

Do đó hàm số $y = g(x)$ có một điểm cực trị. Do đó hàm số $y = |f(x^2 + 2) + m^2 + 2|$ có 1 điểm cực trị khi phương trình $f(x^2 + 2) + m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x^2 + 2) = -m^2 - 2$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x^2 + 2)$ như sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x^2 + 2) = -m^2 - 2$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép khi $-m^2 - 2 \leq -2 \Leftrightarrow m^2 \geq 0$.

Vậy có vô số giá trị nguyên của m . **Chọn C.**

Câu 211: Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x-2019) - m| + 1$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - m|$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - m$. Do $f(x)$ có 3 điểm cực trị nên $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Để hàm số $y = |g(x)|$ có 7 điểm cực trị thì phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$ phải có 4 nghiệm bội lẻ.

Dựa vào đồ thị suy ra $-2 < m < 2$.

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 3 giá trị của tham số m . **Chọn B.**

Câu 212: Đặt $g(x) = f^2(x) + f(x) + m$

Ta có: $g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) + f'(x) = f'(x) \cdot [2f(x) + 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ 2f(x) + 1 = 0 \end{cases} (*)$

Do hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị tại $x = 1, x = 3$ nên $f'(x) = 0$ có nghiệm $x = 1, x = 3$

Lại có $f(x) = -\frac{1}{2}$ có một nghiệm âm nên $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có: $f^2(x) + f(x) + m = 0 \xrightarrow{t=f(x)} t^2 + t + m = 0$ (trong đó $t = f(x) \in \mathbb{R}$ luôn có nghiệm bội lẻ)

Để hàm số $y = |g(x)|$ có 3 điểm cực trị thì phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{4}.$$

Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-10; 20) \end{cases} \Rightarrow$ Có 19 giá trị của tham số m . **Chọn A.**

Câu 213: Dựa vào đồ thị hàm số ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

Đặt $g(x) = f(x^2 - 1) - m \Rightarrow g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 1) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow g(x) \text{ có 3 điểm cực trị. Do đó hàm số } y = |f(x^2 - 1) - m| \text{ có 7 điểm cực trị}$$

khi phương trình $f(x^2 - 1) - m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Ta có BBT của hàm số $y = f(x^2 - 1)$:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				4				$+\infty$
					0			0	

Dựa vào BBT suy ra phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^2 - 1) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt khi $0 < m < 4$.

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 3 giá trị của m . **Chọn D.**

Câu 214: Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - m + 1| + 2$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x) - m + 1|$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - m + 1$. Do $f(x)$ có 2 điểm cực trị nên $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Để hàm số $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị thì phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = m - 1$ phải có 3 nghiệm bội lẻ.

Dựa vào đồ thị suy ra $-3 < m - 1 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$.

Vậy giá trị của tham số m có thể là $m = 0$. **Chọn B.**

Câu 215: Hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ có 1 điểm cực trị dương $x = 1$

Suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có $2.1 + 1 = 3$ điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 216: Hàm số $f(x) = x^2 + 3x + 1$ không có điểm cực trị dương

Suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có $2.0 + 1 = 1$ điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 217: Hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1$ có 2 điểm cực trị dương $x = \{2; 3\}$

Suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có $2.2 + 1 = 5$ điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 218: Hàm số $f(x) = x^5 - 5x + 1$ có 1 điểm cực trị dương $x = 1$

Suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có $2.1 + 1 = 3$ điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 219: Hàm số $f(x) = x^3 - x^2$ có 2 điểm cực trị $x = \left\{0; \frac{2}{3}\right\}$

Suy ra hàm số $y = f(x+1)$ có 2 điểm cực trị thỏa mãn $\begin{cases} x+1=0 \\ x+1=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$

Do đó hàm số $y = f(x+1)$ không có điểm cực trị dương

Vậy hàm số $g(x) = f(|x+1|)$ có $2.0 + 1 = 1$ điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 220: Hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 2$ không có cực trị

Suy ra hàm số $y = f(x-2)$ cũng không có cực trị

Vậy hàm số $g(x) = f(|x-2|)$ có $2.0+1=1$ điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 221: Hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị là $x = \{-\sqrt{2}; 0; 1; \sqrt{2}\}$

Suy ra hàm số $y = f(x-2019)$ có 4 điểm cực trị thỏa mãn
$$\begin{cases} x-2019 = -\sqrt{2} \\ x-2019 = 0 \\ x-2019 = 1 \\ x-2019 = \sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{đều dương})$$

Vậy hàm số $g(x) = f(|x-2019|)+2$ có $2.4+1=9$ điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 222: $g'(x) = (|x|+2)' \cdot f'(|x|+2) = \frac{x}{|x|} \cdot f'(|x|+2)$

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f'(|x|+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ |x|+2=-1 \\ |x|+2=3 \\ (|x|+2)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$

Vậy hàm số $g(x) = f(|x|+2)+1$ có 3 điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 223: $g'(x) = (|2x+2|-5)' \cdot f'(|2x+2|-5) = \frac{4x+4}{|2x+2|} \cdot f'(|2x+2|-5)$

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(|2x+2|-5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ |2x+2|-5=0 \\ |2x+2|-5=\frac{1}{2} \\ |2x+2|-5=-1 \\ 4-(|2x+2|-5)^2=0 \end{cases} \quad (11 \text{ nghiệm})$

Vậy hàm số $g(x) = f(|2x+2|-5)+2019$ có 11 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 224: Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $x = \{0; 2\}$

Ta có $g'(x) = \frac{2020(2020x+2019)}{|2020x+2019|} \cdot f'(|2020x+2019|-2)$

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2020x+2019=0 \\ f'(|2020x+2019|-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2020x+2019=0 \\ |2020x+2019|-2=0 \\ |2020x+2019|-2=2 \end{cases} \quad (5 \text{ nghiệm})$

Vậy hàm số $g(x) = f(|2020x+2019|-2)-1$ có 5 điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 225: Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực trị dương

Suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có $2.1+1=3$ điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 226: Dựa vào hình vẽ, ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

Suy ra hàm số $y = f(2x-1)$ có 2 điểm cực trị thỏa mãn $\begin{cases} 2x-1=0 \\ 2x-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=1 \end{cases}$ (đều dương)

Vậy hàm số $y = f(|2x-1|)-1$ có $2.2+1=5$ điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 227: Dựa vào hình vẽ, ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 1 \end{cases}$

Ta có $y' = (|x-1|-1)' f'(|x-1|-1) = \frac{x-1}{|x-1|} \cdot f'(|x-1|-1)$

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ f'(|x-1|-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ |x-1|-1=1 \\ |x-1|-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \\ x=3 \end{cases}$

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 228: Ta có $y' = (|2-3x|+3)' f'(|2-3x|+3) = -\frac{3(2-3x)}{|2-3x|} \cdot f'(|2-3x|+3)$

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3x=0 \\ f'(|2-3x|+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-3x=0 \\ |2-3x|+3=-2 \\ |2-3x|+3=2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Vậy hàm số đã cho có duy nhất 1 điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 229: Ta có $y' = (|x-1|-2)' f'(|x-1|-2) = \frac{x-1}{|x-1|} \cdot f'(|x-1|-2)$

Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ f'(|x-1|-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ |x-1|-2=0 \\ |x-1|-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3; x=-1 \\ x=5; x=-3 \end{cases}$

Vậy hàm số đã cho có duy nhất 5 điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 230: Dựa vào hình vẽ, ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm 2 \end{cases}$

Ta có $y' = (|2-3x|+3)' f'(|2-3x|+3) = -\frac{3(2-3x)}{|2-3x|} \cdot f'(|2-3x|+3)$

$$\text{Phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3x = 0 \\ f'(|2 - 3x| + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 3x = 0 \\ |2 - 3x| + 3 = \pm\sqrt{2} \\ |2 - 3x| + 3 = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Vậy hàm số đã cho có 1 điểm cực trị. **Chọn A.**

Câu 231: Dựa vào hình vẽ, ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{cases}$

$$\text{Ta có } y' = (|x - 1| + 1)' \cdot f'(|x - 1| + 1) = \frac{x - 1}{|x - 1|} \cdot f'(|x - 1| + 1)$$

$$\text{Phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ |x - 1| + 1 = 1 \\ |x - 1| + 1 = 2 \\ |x - 1| + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ |x - 1| + 1 = 1 \\ |x - 1| + 1 = 2 \\ |x - 1| + 1 = 3 \end{cases} \quad (5 \text{ nghiệm})$$

Vậy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị. **Chọn D.**

Câu 232: Dựa vào hình vẽ, ta thấy $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị $x = -1; x = 2; x = 5$

$$\text{Ta có } y' = (|2x + 1| - 2)' \cdot f'(|2x + 1| - 2) = \frac{4x + 2}{|2x + 1|} \cdot f'(|2x + 1| - 2)$$

$$\text{Phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2 = 0 \\ |2x + 1| - 2 = -1 \\ |2x + 1| - 2 = 2 \\ |2x + 1| - 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2 = 0 \\ |2x + 1| - 2 = -1 \\ |2x + 1| - 2 = 2 \\ |2x + 1| - 2 = 5 \end{cases} \quad (7 \text{ nghiệm})$$

Vậy hàm số đã cho có 7 điểm cực trị. **Chọn B.**

Câu 233: Dựa vào hình vẽ, ta thấy $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị $x = 2; x = 3$

$$\text{Ta có } y' = (|2x + 1| - 4)' \cdot f'(|2x + 1| - 4) = \frac{4x + 2}{|2x + 1|} \cdot f'(|2x + 1| - 4)$$

$$\text{Phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2 = 0 \\ |2x + 1| - 4 = 2 \\ |2x + 1| - 4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2 = 0 \\ |2x + 1| - 4 = 2 \\ |2x + 1| - 4 = 3 \end{cases} \quad (5 \text{ nghiệm})$$

Vậy hàm số đã cho có 5 điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 234: Dựa vào hình vẽ, ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực trị dương

Suy ra hàm số $y = f(|x|)$ có $2 \cdot 1 + 1 = 3$ điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 235: Dựa vào hình vẽ, ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị $x = -1; x = 1$

Suy ra hàm số $y = f(x-1)$ có 2 điểm cực trị thỏa mãn $\begin{cases} x-1 = -1 \\ x-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ (1 nghiệm dương)

Vậy hàm số đã cho có $2.1+1=3$ điểm cực trị. **Chọn C.**

Câu 236: Dựa vào hình vẽ, ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị $x = -1; x = 1$

$$\text{Ta có } g'(x) = (|x-1|-2)' \cdot f'(|x-1|-2) = \frac{x-1}{|x-1|} \cdot f'(|x-1|-2)$$

$$\text{Phương trình } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ |x-1|-2 = -1 \\ |x-1|-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0; x = 2 \\ x = -2; x = 4 \end{cases}$$

Dựa vào bảng xét dấu, ta được $x = 0$ là điểm cực đại của hàm số. **Chọn A.**

Câu 237: Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = (x+1)(x-1)$

$$\text{Khi đó } g'(x) = |x|' \cdot f'(|x|+m) = \frac{x}{|x|} \cdot (|x|+m+1)(|x|+m-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ |x| = -m-1 \\ |x| = -m+1 \end{cases}$$

Hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị khi $\begin{cases} -m-1 > 0 \\ -m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1$.

Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m < -1 \end{cases} \Rightarrow$ có 18 giá trị là tham số m . **Chọn B.**

Câu 238: Dựa vào đồ thị hàm số ta giả sử $f'(x) = (x+2)^2 \cdot x \cdot (x-1)$

$$\text{Khi đó } g'(x) = |3x-1|' \cdot f'(|3x-1|-m-5) = \frac{3x-1}{|3x-1|} \cdot f'(|3x-1|-m-5).$$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3x-1 = 0 \\ |3x-1|-m-5 = 0 \\ |3x-1|-m-5 = 1 \end{cases}$

Khi đó hàm số có 7 điểm cực trị khi $\begin{cases} m+5 > 0 \\ m+6 > 0 \end{cases} \Rightarrow m > -5$.

Kết hợp $m \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow m = \{-4; -3; -2; -1\}$. Vậy có 4 giá trị của m . **Chọn C.**

Câu 239: Dựa vào hình vẽ, ta có $f'(x) = x(x-1)(x-3); \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{4x-2}{|2x-1|} \cdot f'(|2x-1|+m^2-5);$$

$$\text{Lại có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2 = 0 \\ f'(|2x - 1| + m^2 - 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2 = 0 \\ |2x - 1| + m^2 - 5 = 0 \\ |2x - 1| + m^2 - 5 = 1 \\ |2x - 1| + m^2 - 5 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2 = 0 \\ |2x - 1| = 5 - m^2 \\ |2x - 1| = 6 - m^2 \\ |2x - 1| = 8 - m^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1), (2), (3)$ đều có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 5 - m^2 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5})$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z} \longrightarrow$ có 5 giá trị nguyên m cần tìm. **Chọn A.**

Câu 240: Dựa vào hình vẽ, ta có $f'(x) = -x(x+2)(x-1); \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{4x+2}{|2x+1|} \cdot f'(|2x+1| + 2m - 2020); \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2 = 0 \\ f'(|2x+1| + 2m - 2020) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2 = 0 \\ |2x+1| + 2m - 2020 = -2 \\ |2x+1| + 2m - 2020 = 0 \\ |2x+1| + 2m - 2020 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2 = 0 \\ |2x+1| = 2018 - 2m \\ |2x-1| = 2020 - 2m \\ |2x-1| = 2021 - 2m \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (1), (2), (3)$ đều có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2018 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 1009$

Kết hợp $m \in \mathbb{Z}^+ \longrightarrow$ có 1008 giá trị nguyên m cần tìm. **Chọn B.**