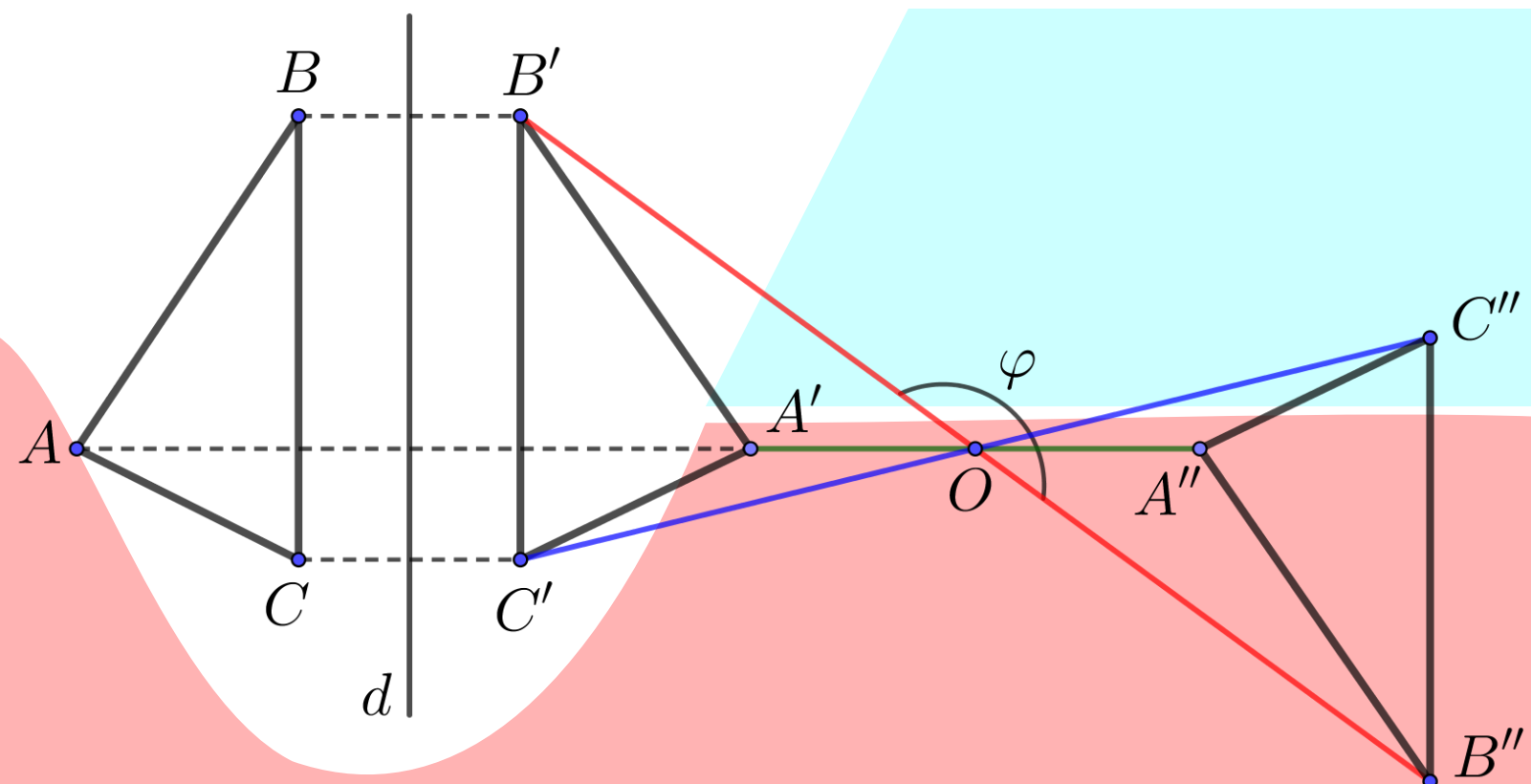


LÊ MINH TÂM

CHƯƠNG 01

PHÉP DỜI HÌNH & PHÉP ĐỒNG DẠNG



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

§1. PHÉP BIẾN HÌNH 4

 I. ĐỊNH NGHĨA:4

 II. KÝ HIỆU:.....4

 III. TÍNH CHẤT:4

§2. PHÉP TỊNH TIẾN 5

 I. ĐỊNH NGHĨA:5

 II. TÍNH CHẤT:.....5

 III. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ:6

 IV. BÀI TẬP:.....8

 4.1. Tự Luận.8

 4.2. Trắc nghiệm.11

§3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC..... 17

 I. ĐỊNH NGHĨA:17

 II. TÍNH CHẤT:.....17

 III. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ:17

 IV. BÀI TẬP:.....18

 4.1. Tự Luận.18

 4.2. Trắc nghiệm.21

§4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM..... 25

 I. ĐỊNH NGHĨA:25

 II. TÍNH CHẤT:.....25

 III. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ:25

 IV. BÀI TẬP:.....26

 4.1. Tự Luận.26

 4.2. Trắc nghiệm.28

§4. PHÉP QUAY 31

 I. ĐỊNH NGHĨA:31

 II. TÍNH CHẤT:.....31

III. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ:	32
IV. BÀI TẬP:.....	32
4.1. Tự Luận.	32
4.2. Trắc nghiệm.	34
§5. PHÉP DỜI HÌNH	38
I. ĐỊNH NGHĨA:	38
II. TÍNH CHẤT:.....	38
III. KHÁI NIỆM HAI HÌNH BẰNG NHAU:.....	38
IV. BÀI TẬP:.....	38
4.1. Tự Luận.	38
4.2. Trắc nghiệm.	40
§6. PHÉP VỊ TỰ	44
I. ĐỊNH NGHĨA:	44
II. TÍNH CHẤT:.....	44
III. CÁCH TÌM TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN:	45
IV. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ:	46
IV. BÀI TẬP:.....	46
4.1. Tự Luận.	46
4.2. Trắc nghiệm.	48
§7. PHÉP ĐỒNG DẠNG	53
I. ĐỊNH NGHĨA:	53
II. TÍNH CHẤT:.....	53
III. KHÁI NIỆM HAI HÌNH ĐỒNG DẠNG:.....	53
IV. BÀI TẬP:.....	53
4.1. Tự Luận.	53
4.2. Trắc nghiệm.	56

CHƯƠNG

01

PHÉP DỜI HÌNH & PHÉP ĐỒNG DẠNG

§1. PHÉP BIẾN HÌNH

I. ĐỊNH NGHĨA:

▪ ĐN: Phép biến hình là một quy tắc để với mỗi điểm M của mặt phẳng, xác định được một điểm duy nhất điểm M' của mặt phẳng. Điểm M' gọi là ảnh của M qua phép biến hình đó.

II. KÝ HIỆU:

▪ Kí hiệu: f là một phép biến hình nào đó, và M' là ảnh của M qua phép f . Ta viết:
 $M' = f(M)$ hay $f(M) = M'$ hay $f: M \mapsto M'$ hay $M \xrightarrow{f} M'$.

Lưu ý:

+ Điểm M gọi là tạo ảnh, M' là ảnh.

+ f là phép biến hình đồng nhất $\Leftrightarrow f(M) = M, \forall M \in H$. Điểm M gọi là điểm bất động, điểm kép, bất biến.

+ f_1, f_2 là các phép biến hình thì $f_2 \circ f_1$ là phép biến hình.

▪ Nếu H là một hình nào đó thì tập hợp các điểm $M' = f(M)$, với $M \in H$, tạo thành hình H' được gọi là ảnh của H qua phép biến hình f , và ta viết: $H' = f(H)$.

III. TÍNH CHẤT:

Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ.

Phép dời hình biến:

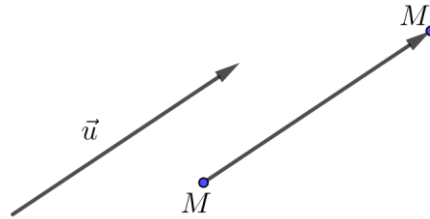
- + Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.
- + Đường thẳng thành đường thẳng.
- + Tia thành tia.
- + Tam giác thành tam giác và bằng tam giác đã cho.
- + Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính với đường tròn đã cho.
- + Góc thành góc và bằng góc đã cho.

-----HẾT-----

§2. PHÉP TỊNH TIẾN

I. ĐỊNH NGHĨA:

- Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{u}$, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
- Ký hiệu: $T_{\vec{u}}$. Như vậy $T_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

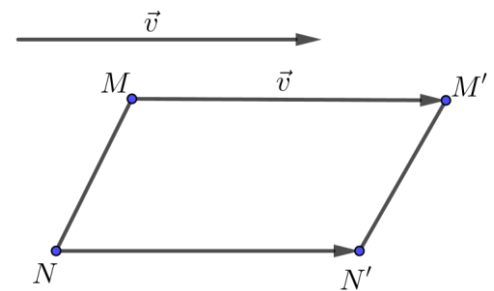


Nhận xét: Phép tịnh tiến là phép đồng nhất $\Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$.

II. TÍNH CHẤT:

Tính chất 1:

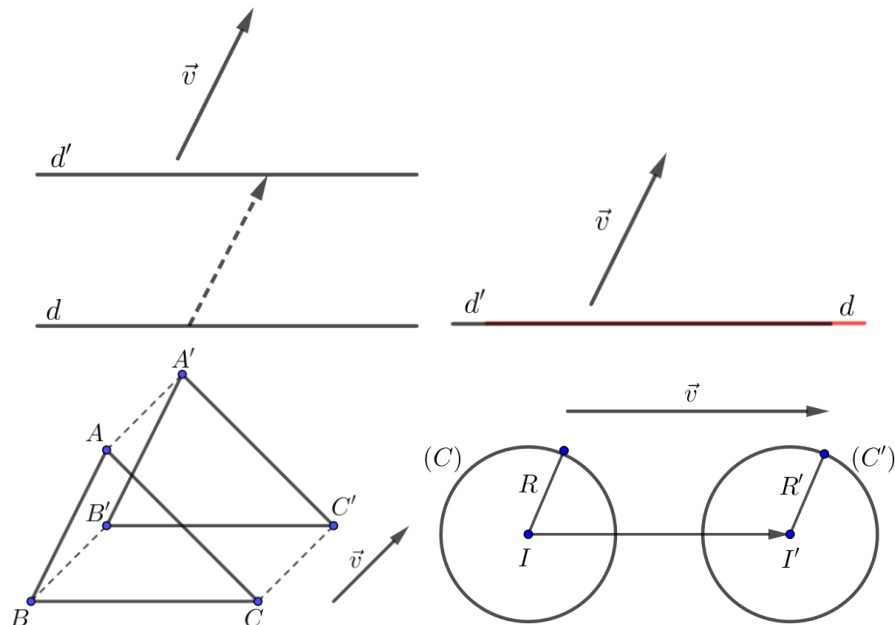
Cho $\begin{cases} T_{\vec{v}}(M) = M' \\ T_{\vec{v}}(N) = N' \end{cases}$ thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.



Tính chất 2:

Qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$,

- Đường thẳng biến thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
- Đoạn thẳng biến thành đoạn thẳng bằng nó.
- Tam giác biến thành tam giác bằng nó.
- Đường tròn biến thành đường tròn có cùng bán kính.

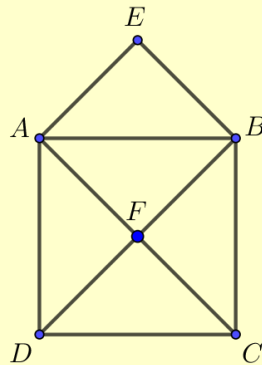


○ CHÚ Ý

- Phép tịnh tiến bảo toàn thứ tự các điểm của đa giác.
- Hai đường thẳng song song có vô số phép tịnh tiến biến đường này thành đường kia.

Ví dụ 01.

Cho hình vẽ như hình bên dưới. Xác định $T_{\overrightarrow{EA}}(BF)$, $T_{\overrightarrow{AD}}(AEB)$, $T_{\overrightarrow{AE}}(ADF)$.



Lời giải

* Xác định $T_{\overrightarrow{EA}}(BF)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} T_{\overrightarrow{EA}}(B) = F \\ T_{\overrightarrow{EA}}(F) = D \end{cases} \Rightarrow T_{\overrightarrow{EA}}(BF) = FD.$$

* Xác định $T_{\overrightarrow{AD}}(AEB)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} T_{\overrightarrow{AD}}(A) = D \\ T_{\overrightarrow{AD}}(E) = F \\ T_{\overrightarrow{AD}}(B) = C \end{cases} \Rightarrow T_{\overrightarrow{AD}}(AEB) = DFC.$$

* Xác định $T_{\overrightarrow{AE}}(ADF)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} T_{\overrightarrow{AE}}(A) = E \\ T_{\overrightarrow{AE}}(D) = F \\ T_{\overrightarrow{AE}}(F) = B \end{cases} \Rightarrow T_{\overrightarrow{AE}}(ADF) = EFB.$$

III. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ:

– Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(x; y)$ và vectơ $\vec{v} = (a; b)$. Gọi M' là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Khi đó:

$$T_{\vec{v}}(M) = M'(x'; y') \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}.$$

– Biểu thức trên được gọi là biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

Ví dụ 02.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho vectơ $\vec{v} = (-1; 2)$.

- Tìm tọa độ của điểm M' là ảnh của $M(3; -2)$ qua phép $T_{\vec{v}}$.
- Tìm tọa độ của điểm N biết $T_{\vec{v}}(N) = N'$ và $N'(4; 1)$

Lời giải

- Tìm tọa độ của điểm M' là ảnh của $M(3; -2)$ qua phép $T_{\vec{v}}$.

$$T_{\vec{v}}(M) = M'(x'; y') \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - 3 = -1 \\ y' + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 + 3 = 2 \\ y' = 2 - 2 = 0 \end{cases}.$$

Vậy $M'(2; 0)$.

- Tìm tọa độ của điểm N biết $T_{\vec{v}}(N) = N'$ và $N'(4; 1)$

$$T_{\vec{v}}(N) = N'(x'; y') \Leftrightarrow \overrightarrow{NN'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x = -1 \\ 1 - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 + 1 = 5 \\ y = 1 - 2 = -1 \end{cases}.$$

Vậy $N(5; -1)$.

Ví dụ 03.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho vectơ $\vec{v} = (-2; -1)$.

- Tìm ảnh của đường thẳng $d: x - 3y + 5 = 0$ qua phép $T_{\vec{v}}$.
- Tìm ảnh của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ qua phép $T_{\vec{v}}$.

Lời giải

- Tìm ảnh của đường thẳng $d: x - 3y + 5 = 0$ qua phép $T_{\vec{v}}$.

Gọi $M(x; y) \in d: x - 3y + 5 = 0$ (1).

$$T_{\vec{v}}(M) = M'(x'; y') \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = -2 \\ y' - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 1 \end{cases} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta được: $x' + 2 - 3(y' + 1) + 5 = 0 \Leftrightarrow x' - 3y' + 4 = 0$

Vậy $d': x - 3y + 4 = 0$.

- Tìm ảnh của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ qua phép $T_{\vec{v}}$.

Gọi $N(x; y) \in (C): x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ (3)

$$T_{\vec{v}}(N) = N'(x'; y') \Leftrightarrow \overrightarrow{NN'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = -2 \\ y' - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 1 \end{cases} \quad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta được:

$$(x' + 2)^2 + (y' + 1)^2 - 4(x' + 2) - 2(y' + 1) - 4 = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 9 = 0$$

Vậy $(C'): x^2 + y^2 - 9 = 0$.

IV. BÀI TẬP:

4.1. Tự Luận.

Bài toán xác định ảnh trong hệ tọa độ qua Phép Tịnh Tiến

Phương pháp:

Sử dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vec tơ $\vec{v} = (a; b)$. Với mỗi điểm $M(x; y)$ ta có $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$. Khi đó

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}.$$

Bài 01.

Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(2; -5)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của điểm A qua phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v} = (1; 2)$

Lời giải:

$$\text{Gọi } A'(x'; y') \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 + 1 = 3 \\ y' = -5 + 2 = -3 \end{cases} \Rightarrow A'(3; -3).$$

Bài 02.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho điểm $M(2; -3)$ là ảnh của điểm $N(3; 5)$ qua phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v}$. Tìm $\vec{v}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \vec{v} = \overrightarrow{NM} = (2 - 3; -3 - 5) = (-1; -8).$$

Bài 03.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vec tơ $\vec{v} = (-1; 2)$, hai điểm $A(3; 5)$, $B(-1; 1)$ và đường thẳng d có phương trình $x - 2y + 3 = 0$.

1. Tìm tọa độ của A' , B' theo thứ tự là ảnh của A , B qua phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{v}$.
2. Tìm tọa độ của điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{v}$.
3. Tìm phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{v}$.

Lời giải:

1. Tìm tọa độ của A' , B' theo thứ tự là ảnh của A , B qua phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{v}$.

$$\text{Tọa độ của } A' \text{ là } \begin{cases} x_{A'} = 3 + (-1) = 2 \\ y_{A'} = 5 + 2 = 7 \end{cases} \Rightarrow A'(2; 7).$$

$$\text{Tọa độ của } B' \text{ là } \begin{cases} x_{B'} = -1 + (-1) = -2 \\ y_{B'} = 1 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow B'(-2; 3).$$

2. Tìm tọa độ của điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{v}$.

$$\text{Giả sử } (x_c; y_c) \text{ là tọa độ của điểm } C \Rightarrow \begin{cases} 3 = x_c + (-1) \\ 5 = y_c + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_c = 4 \\ y_c = 3 \end{cases} \Rightarrow C(4; 3).$$

3. Tìm phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{v}$.

Giả sử $M(x; y) \in d$ và $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vec tơ $\vec{v}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{cases} \Rightarrow M'(x' + 1; y' - 2).$$

$$\text{Vì } M(x; y) \in d \Rightarrow (x' + 1) - 2(y' - 2) + 3 = 0 \Rightarrow x' - 2y' + 8 = 0.$$

$$\text{Vậy } d': x' - 2y' + 8 = 0.$$

Bài 04.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , ảnh của đường thẳng $d: 2x - y + 4 = 0$ qua phép vị tự theo vec tơ $\vec{v} = (3; 5)$ có phương trình là:

Lời giải:

Phương trình ảnh của đường thẳng d là $d': 2x - y + c = 0$.

Ảnh của điểm $A(0; 4) \in d$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (3; 5)$ là $A'(3; 9) \in d'$.

$$\text{Suy ra } 2 \cdot 3 - 9 + c = 0 \Rightarrow c = 3. \text{ Vậy } d': 2x - y + 3 = 0$$

Bài 05.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng Δ có phương trình $4x - y + 3 = 0$. Ảnh của đường thẳng Δ qua phép tịnh tiến T theo vec-tơ $\vec{v} = (2; -1)$ có phương trình là

Lời giải:

Cách 1: Gọi Δ' là ảnh của Δ qua phép $T_{\vec{v}}$. Khi đó Δ' song song hoặc trùng với Δ nên Δ' có phương trình dạng $4x - y + c = 0$.

Chọn điểm $A(0; 3) \in \Delta$. Gọi $A'(x; y)$ là ảnh của A qua phép tịnh tiến theo vec-tơ $\vec{v} = (2; -1) \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = (x; y - 3)$.

$$\text{Ta có } T_{\vec{v}}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A'(2; 2)$$

Mặt khác điểm $A' \in \Delta'$, suy ra tọa độ điểm A' thỏa mãn phương trình $4x - y + c = 0 \Rightarrow c = -6$ hay $\Delta': 4x - y - 6 = 0$.

$$\text{Ta có } T_{\vec{v}}(A) = A'(x; y) \in \Delta' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = 2 \\ y - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A'(2; 2).$$

$$\text{Vì } A' \in \Delta' \text{ nên } 4 \cdot 2 - 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -6 \Rightarrow \Delta': 4x - y - 6 = 0.$$

Cách 2: Gọi $M(x; y)$ là điểm bất kỳ thuộc đường thẳng Δ .

$$\text{Gọi } M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 2 \\ y' - y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 1 \end{cases}.$$

Thay $x = x' - 2$ và $y = y' + 1$ vào phương trình Δ ta được

$$4(x' - 2) - (y' + 1) + 3 = 0 \Leftrightarrow 4x' - y' - 6 = 0.$$

Bài 06.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , ảnh của đường tròn $(C): (x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (3; 2)$ là đường tròn có phương trình

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(-1; 3)$, bán kính $R = 2$.

Gọi $I'(x; y)$ là ảnh của $I(-1; 3)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v} = (3; 2)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{II'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x - (-1) = 3 \\ y - 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow I'(3; 2).$$

Vì phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách nên $R' = R = 2$.

Vậy ảnh của đường tròn (C) qua $T_{\vec{v}}$ là đường tròn (C') có tâm $I'(2; 5)$, bán kính

$$R' = 2 \text{ nên có phương trình } (x-2)^2 + (y-5)^2 = 4.$$

Bài 07.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2; 3)$.

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + (-2)^2 - (-4)} = 3$.

Giả sử $(C') = T_{\vec{v}}((C))$. Gọi I' là tâm đường tròn (C')

$$\Rightarrow I' = T_{\vec{v}}(I) = (1-2; -2+3) = (-1; 1).$$

Do đó (C') có phương trình $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$.

Bài 08.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{v} = (-3; -2)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến đường tròn $(C): x^2 + (y-1)^2 = 1$ thành đường tròn (C') . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

Lời giải:

Đường tròn (C) có tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = 1$.

Gọi $I'(x; y)$ là ảnh của $I(0; 1)$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v} = (-3; -2)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{II'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = -3 \\ y - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow I'(-3; -1).$$

Vì phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách nên $R' = R = 1$.

Vậy ảnh của đường tròn (C) qua phép $T_{\vec{v}}$ là đường tròn (C') có tâm $I'(-3; -1)$, bán

$$\text{kính } R' \text{ nên có phương trình } (C'): (x+3)^2 + (y+1)^2 = 1.$$

Bài 09.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 5 = 0$. Thực hiện liên tiếp hai phép tịnh tiến theo các vector $\vec{u} = (1; -2)$ và $\vec{v} = (1; -1)$ thì đường tròn (C) biến thành đường tròn (C') có phương trình là

Lời giải:

Từ giả thiết suy ra (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$.

Ta có $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} = (2; -3)$.

Biểu thức tọa độ của $T_{\vec{a}}$ là $\begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 3 \end{cases}$ thay vào (C) ta được

$$(x' - 2)^2 + (y' + 3)^2 + 4(x' - 2) - 6(y' + 3) - 5 = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 18 = 0.$$

Bài 10.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho vector $\vec{v} = (-2; -1)$. Phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}$ biến parabol $(P): y = x^2$ thành parabol (P') . Khi đó phương trình của (P') là

Lời giải:

Biểu thức tọa độ của $T_{\vec{v}}$ là $\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 1 \end{cases}$ thay vào (P) ta được

$$y' + 1 = (x' + 2)^2 \Leftrightarrow y' = x'^2 + 4x' + 3.$$

4.2. Trắc nghiệm.

Câu 1. Mệnh đề nào sau đây là **sai**? Trong mặt phẳng, phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}(M) = M'$ và $T_{\vec{v}}(N) = N'$ (với $\vec{v} \neq \vec{0}$). Khi đó

A. $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$.

B. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$.

C. $\overrightarrow{MN'} = \overrightarrow{NM'}$.

D. $MM' = NN'$

Lời giải:

Chọn C

Câu 2. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đường thẳng cho trước thành chính nó?

A. Không có.

B. Chỉ có một.

C. Chỉ có hai.

D. Vô số.

Lời giải:

Chọn D

Phép tịnh tiến theo vector $\vec{v}$, với $\vec{v}$ là vector chỉ phương đường thẳng d biến một đường thẳng cho trước thành chính nó. Khi đó sẽ có vô số vector $\vec{v}$ thỏa mãn.

Câu 3. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một đường tròn cho trước thành chính nó?

A. Không có.

B. Một.

C. Hai.

D. Vô số.

Lời giải:

Chọn B

Chỉ có duy nhất phép tịnh tiến theo vector $\vec{0}$.

Câu 4. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến một hình vuông thành chính nó?

A. Không có.

B. Một.

C. Bốn.

D. Vô số.

Lời giải:

Chọn B

Chỉ có duy nhất phép tịnh tiến theo vector $\vec{0}$.

Câu 5. Giả sử qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} \neq \vec{0}$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d' . Câu nào sau đây *sai*?

- A. d trùng d' khi $\vec{v}$ là vector chỉ phương của d .
- B. d song song với d' khi $\vec{v}$ là vector chỉ phương của d .
- C. d song song với d' khi $\vec{v}$ không phải là vector chỉ phương của d .
- D. d không bao giờ cắt d' .

Lời giải:

Chọn B

Xét B: d song song với d' khi $\vec{v}$ là vector có điểm đầu bất kỳ trên d và điểm cuối bất kỳ trên d' .

Câu 6. Cho P, Q cố định. Phép tịnh tiến T biến điểm M bất kỳ thành M_2 sao cho $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{PQ}$.

- A. T là phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{PQ}$.
- B. T là phép tịnh tiến theo vector $\overrightarrow{MM_2}$.
- C. T là phép tịnh tiến theo vector $2\overrightarrow{PQ}$.
- D. T là phép tịnh tiến theo vector $\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$.

Lời giải:

Chọn C

Gọi $T_{\vec{v}}(M) = M_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_2} = \vec{v}$

Từ $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{PQ} \Rightarrow 2\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$.

Câu 7. Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến điểm M thành M_1 và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến M_1 thành M_2 .

- A. Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}+\vec{v}}$ biến M_1 thành M_2 .
- B. Một phép đối xứng trục biến M thành M_2 .
- C. Không thể khẳng định được có hay không một phép dời hình biến M thành M_2 .
- D. Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}+\vec{v}}$ biến M thành M_2 .

Lời giải:

Chọn D

$$\begin{cases} T_{\vec{u}}(M) = M_1 \\ T_{\vec{v}}(M_1) = M_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{MM_1} \\ \vec{v} = \overrightarrow{M_1M_2} \end{cases} \Leftrightarrow \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{MM_2} \Leftrightarrow T_{\vec{u}+\vec{v}}(M) = M_2.$$

Câu 8. Cho phép tịnh tiến vector $\vec{v}$ biến A thành A' và M thành M' . Khi đó:

- A. $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{A'M'}$.
- B. $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{A'M'}$.
- C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$.
- D. $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{A'M'}$.

Lời giải:

Chọn C

Theo tính chất trong SGK $\begin{cases} T_{\vec{v}}(A) = A' \\ T_{\vec{v}}(M) = M' \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}.$

Câu 9. Tìm mệnh đề *sai* trong các mệnh đề sau:

- A. Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

- B.** Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.
C. Phép tịnh tiến biến tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
D. Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Lời giải:

Chọn B

Theo tính chất SGK, Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Câu 10. Cho phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$ biến A thành A' và M thành M' . Khi đó

- A.** $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{A'M'}$. **B.** $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{A'M'}$.
C. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$. **D.** $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{A'M'}$.

Lời giải:

Chọn C

Câu 11. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(2;5)$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1;2)$ biến A thành điểm có tọa độ là:

- A.** $(3;1)$. **B.** $(1;6)$. **C.** $(3;7)$. **D.** $(4;7)$.

Lời giải:

Chọn C

$$T_{\vec{v}}(A) = B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = x_A + x_{\vec{v}} \\ y_B = y_A + y_{\vec{v}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2 + 1 = 3 \\ y_B = 5 + 2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow B(3;7).$$

Câu 12. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $A(2;5)$. Hỏi A là ảnh của điểm nào trong các điểm sau qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1;2)$?

- A.** $(3;1)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(2;4)$.

Lời giải:

Chọn B

$$T_{\vec{v}}(M) = A \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = x_A - x_{\vec{v}} \\ y_M = y_A - y_{\vec{v}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2 - 1 = 1 \\ y_M = 5 - 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow M(1;3).$$

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho phép biến hình f xác định như sau: Với mỗi $M(x; y)$, ta có $M' = f(M)$ sao cho $M'(x'; y')$ thỏa $x' = x + 2$; $y' = y - 3$

- A.** f là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2;3)$.
B. f là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2;3)$.
C. f là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2;-3)$.
D. f là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2;-3)$.

Lời giải:

Chọn C

Câu 14. Trong mặt phẳng Oxy , phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1;3)$ biến điểm $A(2;1)$ thành điểm nào trong các điểm sau:

- A.** $A_1(2;1)$. **B.** $A_2(1;3)$. **C.** $A_3(3;4)$. **D.** $A_4(-3;-4)$.

Lời giải:

Chọn C

Câu 15. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{v} = (a; b)$. Giả sử phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến điểm $M(x; y)$ thành $M'(x'; y')$. Ta có biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là:

A. $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$ C. $\begin{cases} x' - b = x - a \\ y' - a = y - b \end{cases}$ D. $\begin{cases} x' + b = x + a \\ y' + a = y + b \end{cases}$.

Lời giải:

Chọn A

Câu 16. Trong mặt phẳng Oxy cho 2 điểm $A(1; 6)$, $B(-1; -4)$. Gọi C , D lần lượt là ảnh của A và B qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1; 5)$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. $ABCD$ là hình thang. B. $ABCD$ là hình bình hành.
C. $ABDC$ là hình bình hành. D. Bốn điểm A , B , C , D thẳng hàng.

Lời giải:

Chọn D

$$C = T_{\vec{v}}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = x_A + x_{\vec{v}} \\ y_C = y_A + y_{\vec{v}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \\ y_C = 11 \end{cases} \Leftrightarrow C(2; 11).$$

$$D = T_{\vec{v}}(B) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = x_B + x_{\vec{v}} \\ y_D = y_B + y_{\vec{v}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 0 \\ y_D = 1 \end{cases} \Leftrightarrow D(0; 1).$$

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -10), \overrightarrow{BC} = (3; 15), \overrightarrow{CD} = (-2; -10).$$

Xét cặp $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$: Ta có $\frac{-2}{3} = \frac{-10}{15} \Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng.

Xét cặp $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$: Ta có $\frac{3}{-2} = \frac{15}{-10} \Rightarrow B, C, D$ thẳng hàng.

Vậy A, B, C, D thẳng hàng.

Câu 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{v} = (1; -3)$ và đường thẳng d có phương trình $2x - 3y + 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

- A. $d': 2x - y - 6 = 0$ B. $d': x - y - 6 = 0$
C. $d': 2x - y + 6 = 0$ D. $d': 2x - 3y - 6 = 0$

Lời giải:

Chọn D

Cách 1. Sử dụng biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến.

Lấy điểm $M(x; y)$ tùy ý thuộc d , ta có $2x - 3y + 5 = 0$ (*)

$$\text{Gọi } M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' + 3 \end{cases}$$

Thay vào (*) ta được phương trình $2(x' - 1) - 3(y' + 3) + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x' - 3y' - 6 = 0$.

Vậy ảnh của d là đường thẳng $d': 2x - 3y - 6 = 0$.

Cách 2. Sử dụng tính chất của phép tịnh tiến

Do $d' = T_v(d)$ nên d' song song hoặc trùng với d , vì vậy phương trình đường thẳng d' có dạng $2x - 3y + c = 0$. (**)

Lấy điểm $M(-1;1) \in d$. Khi đó $M' = T_v(M) = (-1+1; 1-3) = (0; -2)$.

Do $M' \in d' \Rightarrow 2 \cdot 0 - 3 \cdot (-2) + c = 0 \Leftrightarrow c = -6$

Vậy ảnh của d là đường thẳng $d': 2x - 3y - 6 = 0$.

Cách 3. Để viết phương trình d' ta lấy hai điểm phân biệt M, N thuộc d , tìm tọa độ các ảnh M', N' tương ứng của chúng qua T_v . Khi đó d' đi qua hai điểm M' và N' .

Cụ thể: Lấy $M(-1;1), N(2;3)$ thuộc d , khi đó tọa độ các ảnh tương ứng là

$M'(0; -2), N'(3;0)$. Do d' đi qua hai điểm M', N' nên có phương trình

$$\frac{x-0}{3} = \frac{y+2}{2} \Leftrightarrow 2x - 3y - 6 = 0.$$

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$.

Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (2; -3)$.

A. $(C'): x^2 + y^2 - x + 2y - 7 = 0$

B. $(C'): x^2 + y^2 - x + y - 7 = 0$

C. $(C'): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

D. $(C'): x^2 + y^2 - x + y - 8 = 0$

Lời giải:

Chọn C

Cách 1. Sử dụng biểu thức tọa độ.

Lấy điểm $M(x; y)$ tùy ý thuộc đường tròn (C) , ta có $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ (*)

Gọi $M'(x'; y') = T_v(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 3 \end{cases}$

Thay vào phương trình (*) ta được $(x' - 2)^2 + (y' + 3)^2 + 2(x' - 2) - 4(y' + 3) - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 2x' + 2y' - 7 = 0$

Vậy ảnh của (C) là đường tròn $(C'): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$.

Cách 2. Sử dụng tính chất của phép tịnh tiến

Dễ thấy (C) có tâm $I(-1; 2)$ và bán kính $r = 3$. Gọi $(C') = T_v((C))$ và $I'(x'; y'); r'$ là tâm và bán kính của (C') .

Ta có $\begin{cases} x' = -1 + 2 = 1 \\ y' = 2 - 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow I'(1; -1)$ và $r' = r = 3$ nên phương trình của đường tròn (C') là

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$$

Câu 19. Trong mặt phẳng Oxy , ảnh của đường tròn: $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$ qua phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (3; 2)$ là đường tròn có phương trình:

A. $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 4$.

B. $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$.

C. $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$.

D. $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Lời giải:

Chọn B

Đường tròn đề đã cho có tâm $I(-1;3)$, bán kính $R=2$.

Đường tròn cần tìm có tâm I' , bán kính $R'=R=2$.

$$\text{Khi đó } I' = T_{\vec{v}}(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'} = x_I + x_{\vec{v}} \\ y_{I'} = y_I + y_{\vec{v}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'} = -1+3=2 \\ y_{I'} = 3+2=5 \end{cases} \Leftrightarrow I'(2;5)$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 4$.

Câu 20. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho phép tịnh tiến theo $\vec{v}=(-2;-1)$, phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến parabol $(P): y=x^2$ thành parabol (P') . Khi đó phương trình của (P') là:

A. $y=x^2+4x+5$. **B.** $y=x^2+4x-5$. **C.** $y=x^2+4x+3$. **D.** $y=x^2-4x+5$

Lời giải:

Chọn C

Chọn $M(x;y)$ tùy ý trên (P) . Gọi $M'(x';y')=T_{\vec{v}}(M)$.

Vì $T_{\vec{v}}(P)=(P')$ nên $M' \in (P')$.

$$\text{Ta có } T_{\vec{v}}(M)=M'(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x-2 \\ y'=y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'+2 \\ y=y'+1 \end{cases}. \text{ Suy ra } M(x'+2;y'+1)$$

Vì $M(x'+2;y'+1) \in (P)$ nên $y'+1=(x'+2)^2 \Leftrightarrow y'=x'^2+4x'+3$.

Suy ra $M(x';y') \in (P'): y=x^2+4x+3$.

Vậy: $(P'): y=x^2+4x+3$.

-----**HẾT**-----

§3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC

I. ĐỊNH NGHĨA:

Cho đường thẳng d .

– Phép biến hình

+ biến mỗi điểm $M \in d$ thành chính nó,

+ biến mỗi điểm $M \notin d$ thành M' ,

sao cho d là đường trung trực của MM' được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d hay phép đối xứng trục d .

– Đường thẳng d được gọi là trục của phép đối xứng hoặc đơn giản gọi là trục đối xứng.

– Phép đối xứng trục d thường được kí hiệu là: D_d .

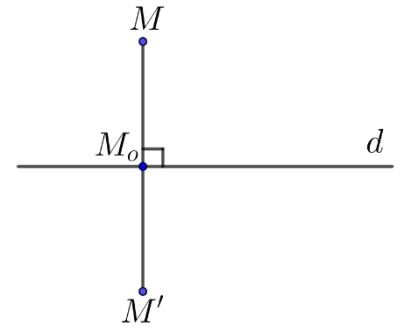
– Nếu hình H' là ảnh của hình H qua phép đối xứng trục d thì ta còn nói H đối xứng với H' qua d , hay H và H' đối xứng với nhau qua d .

Nhận xét.

– Cho đường thẳng d . Với mỗi điểm M gọi M_0 là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng d . Khi đó: $M' = D_d(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$.

$$M' = D_d(M) \Leftrightarrow M = D_d(M')$$

– Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hình H nếu phép đối xứng qua d biến hình H thành chính nó. Khi đó ta nói hình H có trục đối xứng.

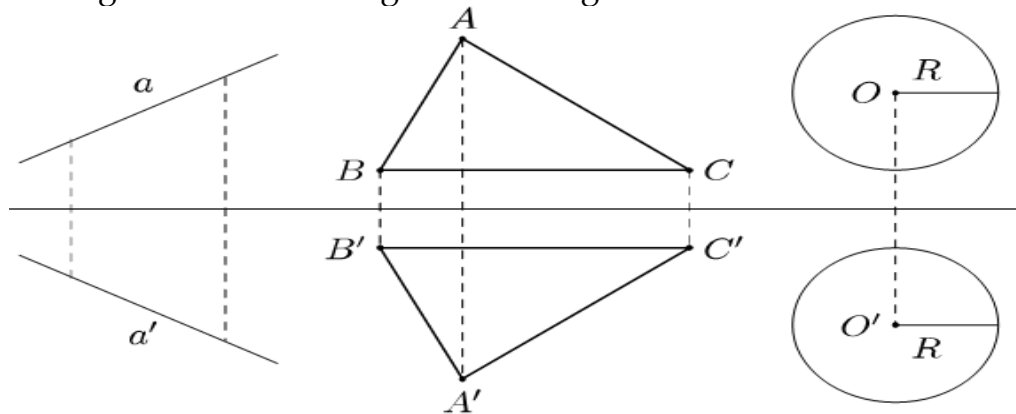


II. TÍNH CHẤT:

Tính chất 1: Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Tính chất 2:



III. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ:

– Trong mặt phẳng Oxy , với mỗi điểm $M(x; y)$, gọi $M'(x'; y') = D_d(M)$.

- ☑ Nếu chọn d là trục Ox , thì $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$. ☑ Nếu chọn d là trục Oy , thì $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$.

IV. BÀI TẬP:

4.1. Tự Luận.

Bài toán xác định ảnh trong hệ tọa độ qua Phép Đối Xứng Trục

Phương pháp:

Sử dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục.

– Trong mặt phẳng Oxy , với mỗi điểm $M(x; y)$, gọi $M'(x'; y') = D_d(M)$.

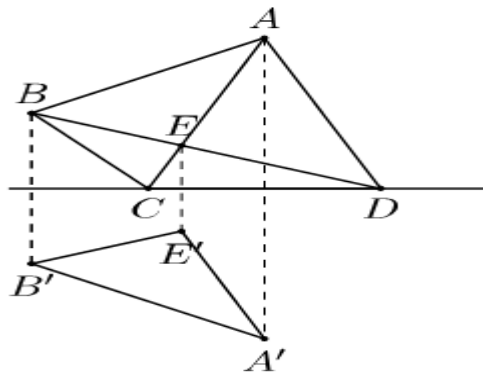
- ☑ Nếu chọn d là trục Ox , thì $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$. ☑ Nếu chọn d là trục Oy , thì $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$.

Bài 01.

Cho tứ giác $ABCD$. Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại E . Xác định ảnh của tam giác ABE qua phép đối xứng qua đường thẳng CD .

Lời giải

Chỉ cần xác định ảnh của các đỉnh của tam giác A, B, E qua phép đối xứng trục đó. Ảnh phải tìm là tam giác $A'B'E'$.



Bài 02.

Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(1; 5)$, đường thẳng d có phương trình $x - 2y + 4 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

- Tìm ảnh của $M; d; (C)$ qua phép đối xứng trục Ox .
- Tìm ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng d .

Lời giải

- Tìm ảnh của $M; d; (C)$ qua phép đối xứng trục Ox .

☑ Gọi $M'; d'$ và (C') theo thứ tự là ảnh của $M; d$ và (C) qua phép đối xứng trục Ox .

Khi đó $M'(1; -5)$.

☑ Để tìm ảnh của d ta sử dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục Ox .

Gọi $N'(x'; y')$ là ảnh của điểm $N(x; y)$ qua phép đối xứng trục Ox .

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$$

Ta có $N \in d \Leftrightarrow x' - 2(-y') + 4 = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' + 4 = 0 \Rightarrow d' : x + 2y + 4 = 0$.

☑ Để tìm (C') , ta thấy rằng (C) có tâm $J(1; -2)$ bán kính $R = 3$.

☑ Gọi J' là ảnh của J qua phép đối xứng trục Ox .

Khi đó $J'(1; 2)$. Do đó (C') là đường tròn tâm $J'(1; 2)$, bán kính bằng 3.

Từ đó suy ra (C') có phương trình: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$.

b. Tìm ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng d .

Đường thẳng d_1 đi qua M vuông góc với d có phương trình

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{-2} \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0.$$

Giao của d và d_1 là M_0 có tọa độ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$.

Vậy $M_0(2; 3)$. Từ đó suy ra ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng d là M'' sao cho M_0 là trung điểm của MM'' do đó $M''(3; 1)$.

Bài 03.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC với $A(1; 5)$, $B(-1; 2)$, $C(6; -4)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Phép đối xứng trục $\mathcal{D}_{Oy}$ biến điểm G thành điểm G' có tọa độ là

Lời giải

$$\text{Tọa độ trọng tâm } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = 2 \\ y_G = 1 \end{cases} \quad G(2; 1).$$

$$\text{Gọi } G'(x'; y') = \mathcal{D}_{Oy}[G(x; y)] \text{ thì } \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y' = 1 \end{cases}.$$

Bài 04.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(2; 3)$. Tọa độ điểm là ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng $d : x - y = 0$ là ?

Lời giải

Nhận xét:

Đường thẳng $d : x - y = 0 \Leftrightarrow d : y = x$ là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua đường phân giác $y = x$ là

$$\text{Gọi } M'(x'; y') = \mathcal{D}_d[M(x; y)] \text{ thì } \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ y' = 2 \end{cases}.$$

Bài 05.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng trục Ox có phương trình là

Lời giải

Cách 1: Trục Ox có phương trình $y = 0$.

Tọa độ giao điểm A của d và Ox thỏa mãn hệ $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2; 0)$.

Vì $A \in Ox$ nên qua phép đối xứng trục Ox biến thành chính nó, tức $A' \equiv A(2; 0)$.

Chọn điểm $B(1; 1) \in d \xrightarrow{D_{Ox}} B'(1; -1)$.

Vậy đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng trục Ox đi qua hai điểm $A'(2; 0)$ và $B'(1; -1)$ nên có phương trình $x - y - 2 = 0$.

Cách 2: Biểu thức tọa độ qua phép đối xứng trục Ox là $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$, thay vào d ta được $x' - y' - 2 = 0$.

Bài 06.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $C: x - 1^2 + y + 2^2 = 4$. Phép đối xứng trục Ox biến đường tròn C thành đường tròn C' có phương trình là

Lời giải

Cách 1: Đường tròn C có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = 2$.

Ta có $I(1; -2) \xrightarrow{D_{Ox}} I'(1; 2)$ và $R = 2 \xrightarrow{D_{Ox}} R' = R = 2$.

Do đó C' có phương trình $x - 1^2 + y - 2^2 = 4$.

Cách 2: Biểu thức tọa độ qua phép đối xứng trục Ox là $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$.

Thay vào C , ta được $x' - 1^2 + -y' + 2^2 = 4$ hay $x' - 1^2 + y' - 2^2 = 4$.

Bài 07.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $C: x + 1^2 + y - 4^2 = 1$ và đường thẳng d có phương trình $y - x = 0$. Phép đối xứng trục d biến đường tròn C thành đường tròn C' có phương trình là

Lời giải

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua trục $d: y - x = 0$ là $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

Thay vào C , ta được $y' + 1^2 + x' - 4^2 = 1$ hay $x - 4^2 + y + 1^2 = 1$.

Bài 08.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường tròn $C : x-1^2 + y-2^2 = 4$ và $C' : x-3^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình trục đối xứng của C và C' .

Lời giải

Trục đối xứng của hai đường tròn là trung trực của đoạn nối hai tâm đường tròn. Viết ra được phương trình trục đối xứng là $x - y - 1$ hay $y = x - 1$.

Bài 09.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol P có phương trình $y^2 = x$. Hỏi parabol nào là ảnh của P qua phép đối xứng trục tung?

Lời giải

Biểu thức tọa độ qua phép đối xứng trục tung là $\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$.

Thay vào P , ta được $y'^2 = -x'$.

Bài 10.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $P : y = x^2 - 2x + 3$. Phép đối xứng trục Ox biến parabol P thành parabol P' có phương trình là

Lời giải

Biểu thức tọa độ qua phép đối xứng trục Ox là $\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$.

Thay vào P , ta được $-y' = x'^2 - 2x' + 3$ hay $y' = -x'^2 + 2x' - 3$.

4.2. Trắc nghiệm.

Câu 1. Hình gồm hai đường tròn có tâm và bán kính khác nhau có bao nhiêu trục đối xứng?

- A. Không có. B. Một. C. Hai. D. Vô số

Lời giải:**Chọn B**

Một đường tròn có vô số trục đối xứng đi qua tâm của đường tròn đó.

Vậy: Trục đối xứng thỏa yêu cầu của bài toán là đường thẳng nối hai tâm của đường tròn đã cho.

Câu 2. Hình gồm hai đường thẳng d và d' vuông góc với nhau đó có mấy trục đối xứng?

- A. 0. B. 2. C. 4. D. Vô số

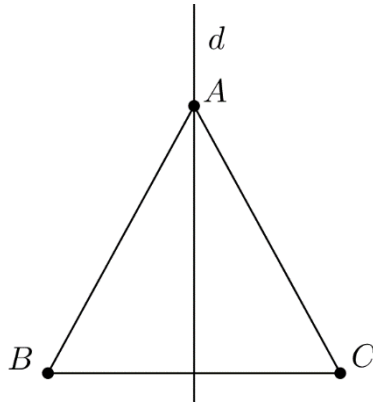
Lời giải:**Chọn C**

Có bốn trục đối xứng gồm d, d' và hai đường phân giác của hai góc tạo bởi d, d' .

Câu 3. Hình nào sau đây là có trục đối xứng:

- A. Tam giác bất kì. B. Tam giác cân.
C. Tứ giác bất kì. D. Hình bình hành.

Lời giải:**Chọn B**

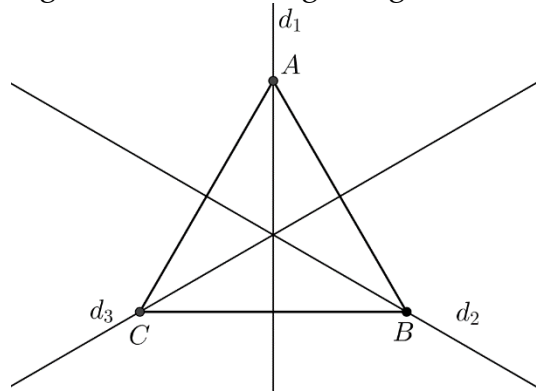


- Câu 4.** Cho tam giác ABC đều. Hình vẽ là tam giác ABC đều có bao nhiêu trục đối xứng:
A. Không có trục đối xứng. **B.** Có 1 trục đối xứng.
C. Có 2 trục đối xứng. **D.** Có 3 trục đối xứng.

Lời giải:

Chọn D

3 trục đối xứng của tam giác đều là 3 đường trung trực của 3 cạnh.



- Câu 5.** Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(2;3)$. Hỏi trong bốn điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép đối xứng trục Ox ?
A. $(3;2)$. **B.** $(2;-3)$. **C.** $(3;-2)$. **D.** $(-2;3)$

Lời giải:

Chọn B

$$\mathbb{D}_{Ox}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}. \text{ Suy ra } M'(2;-3).$$

- Câu 6.** Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(2;3)$. Hỏi M là ảnh của điểm nào trong các điểm sau qua phép đối xứng trục Oy ?
A. $(3;2)$. **B.** $(2;-3)$. **C.** $(3;-2)$. **D.** $(-2;3)$

Lời giải:

Chọn D

$$\mathbb{D}_{Oy}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}. \text{ Suy ra } M'(-2;3).$$

- Câu 7.** Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(2;3)$. Hỏi trong bốn điểm sau điểm nào là ảnh của M qua phép đối xứng qua đường thẳng $d: x - y = 0$?

A. $(3; 2)$.

B. $(2; -3)$.

C. $(3; -2)$.

D. $(-2; 3)$

Lời giải:

Chọn A

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên d . Suy ra $MH: x + y - 5 = 0$.

$$H = d \cap MH. \text{ Ta có hệ phương trình } \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = \frac{5}{2}. \text{ Vậy: } H\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

$\mathcal{D}_d(M) = M'$. Suy ra H là trung điểm của MM' .

Vậy: $M'(3; 2)$.

Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy , cho Parabol (P) có phương trình $x^2 = 24y$. Hỏi Parabol nào trong các Parabol sau là ảnh của (P) qua phép đối xứng trục Oy ?

A. $x^2 = 24y$.

B. $x^2 = -24y$.

C. $y^2 = 24x$.

D. $y^2 = -24x$

Lời giải:

Chọn A

Gọi $M(x; y) \in (P)$ tùy ý.

$$\mathcal{D}_{Oy}(M) = M'(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}.$$

Suy ra $M(-x'; y')$.

Vì $M \in (P)$ nên $(-x')^2 = 24y' \Leftrightarrow x'^2 = 24y'$.

Vậy $M' \in (P'): x^2 = 24y$.

Câu 9. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d: x + 2y + 4 = 0$. Tìm ảnh của d qua phép đối xứng trục Ox .

A. $d': 2x - 2y + 4 = 0$

B. $d': x - 2y + 2 = 0$

C. $d': 3x - 2y + 4 = 0$

D. $d': x - 2y + 4 = 0$

Lời giải:

Chọn D

Lấy $M(x; y) \in d \Rightarrow x + 2y + 4 = 0$ (1)

Gọi $N(x'; y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng $\mathcal{D}_{Ox}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}.$$

Thay vào (1) ta được $x' - 2y' + 4 = 0$.

Vậy $d': x - 2y + 4 = 0$.

Câu 10. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của (C) qua phép đối xứng trục Ox .

A. $(C'): (x+2)^2 + (y+2)^2 = 9$

B. $(C'): (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$

C. $(C'): (x+3)^2 + (y+2)^2 = 9$

D. $(C'): (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9$

Lời giải:

Chọn D

Cách 1: Ta thấy (C) có tâm $I(-1; 2)$ và bán kính $R=3$.

Gọi I', R' là tâm và bán kính của (C') thì $I'(-1; -2)$ và $R'=R=3$, do đó

$$(C'): (x+1)^2 + (y+2)^2 = 9.$$

Cách 2: Lấy $P(x; y) \in (C) \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ (2).

Gọi $Q(x'; y')$ là ảnh của P qua phép đối xứng D_{ox} . Ta có

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}, \text{ thay vào (2) ta được } x'^2 + y'^2 + 2x' + 4y' - 4 = 0, \text{ hay}$$

$$(C'): x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0.$$

-----HẾT-----

§4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

I. ĐỊNH NGHĨA:

Cho điểm I .

– Phép biến hình

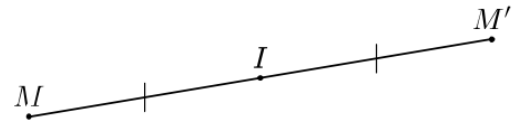
+ biến điểm I thành chính nó,

+ biến mỗi điểm M khác I thành M'

sao cho I là trung điểm của MM' được gọi là phép đối xứng tâm I .

– Điểm I được gọi là tâm đối xứng.

– Phép đối xứng tâm I thường được kí hiệu là $\mathcal{D}_I$



Nhận xét.

– Nếu hình H' là ảnh của hình H qua $\mathcal{D}_I$ thì ta còn nói H đối xứng với H' qua tâm I , hay H và H' đối xứng với nhau qua I .

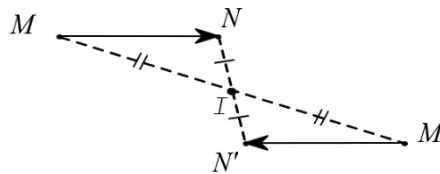
Từ định nghĩa suy ra $M' = \mathcal{D}_I(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$.

– Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình H nếu phép đối xứng tâm I biến hình H thành chính nó. Khi đó ta nói H là hình có tâm đối xứng;

II. TÍNH CHẤT:

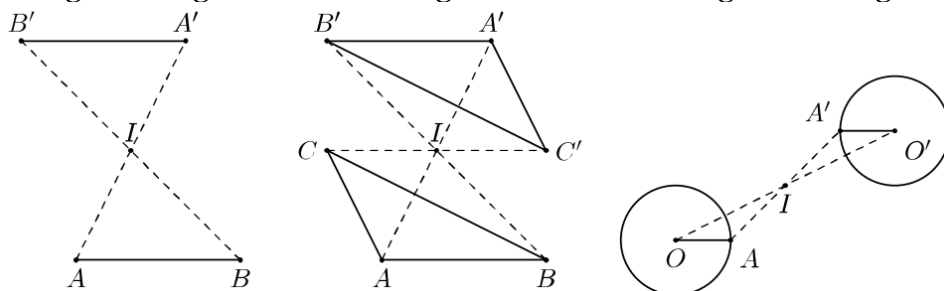
Tính chất 1:

Nếu $\mathcal{D}_I(M) = M'$ và $\mathcal{D}_I(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$, từ đó suy ra $M'N' = MN$.



Tính chất 2:

Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.



III. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ:

– Trong mặt phẳng Oxy , với mỗi điểm $M(x; y)$, gọi $M'(x'; y') = \mathcal{D}_I(M)$.

☑ Với $I \equiv O(0; 0)$, ta có $M'(x'; y') = \mathcal{D}_O[M(x; y)]$ thì
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

☑ Với $I(a;b)$, ta có $M'(x';y') = \mathcal{D}_I[M(x;y)]$ thì $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$.

IV. BÀI TẬP:

4.1. Tự Luận.

Bài toán xác định ảnh trong hệ tọa độ qua Phép Đối Xứng Tâm

Phương pháp:

Sử dụng biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục.

– Trong mặt phẳng Oxy , với mỗi điểm $M(x;y)$, gọi $M'(x';y') = \mathcal{D}_I(M)$.

☑ Với $I \equiv O(0;0)$, ta có $M'(x';y') = \mathcal{D}_O[M(x;y)]$ thì $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$.

☑ Với $I(a;b)$, ta có $M'(x';y') = \mathcal{D}_I[M(x;y)]$ thì $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$.

– Để tìm tâm đối xứng của một hình ta có nhận xét như sau:

📖 Nếu hình đã cho là một đa giác thì sử dụng tính chất:

Một đa giác có tâm đối xứng I thì qua phép đối xứng tâm I

+ mỗi đỉnh của nó phải biến thành một đỉnh của đa giác,

+ mỗi cạnh của nó phải biến thành một cạnh của đa giác song song và bằng cạnh ấy.

📖 Nếu hình đã cho không phải một đa giác thì sử dụng định nghĩa.

Bài 01.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép đối xứng tâm $O(0;0)$ biến điểm $M(-2;3)$ thành điểm M' có tọa độ là

Lời giải

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $O(0;0)$ là $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow M'(2;-3)$.

Bài 02.

Phép đối xứng tâm $I(a;b)$ biến điểm $A(1;3)$ thành điểm $A'(1;7)$. Tính tổng $T = a + b$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra I là trung điểm của $AA' \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1+1}{2} = 1 \\ b = \frac{3+7}{2} = 5 \end{cases} \Rightarrow T = 6$.

Bài 03.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $I(2;-3)$ và đường thẳng d có phương trình $3x + 2y - 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm I' và phương trình đường thẳng d' lần lượt là ảnh của I và d qua phép đối xứng tâm O .

Lời giải

Ta có $I'(-2;3)$.

Từ biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm qua gốc tọa độ ta có $\begin{cases} x = -x' \\ y = -y' \end{cases}$.

Thay biểu thức của x và y vào phương trình của d ta được $3(-x') + 2(-y') - 1 = 0$ hay $3x' + 2y' + 1 = 0$.

Do đó phương trình của $d' : 3x + 2y + 1 = 0$.

Bài 04.

Trong các mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d : x + y - 2 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng tâm $I(1;2)$

Lời giải

Qua phép đối xứng tâm, đường thẳng biến thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó nên $d' : x + y + c = 0$.

Chọn $A(1;1) \in d$.

Ta có $D_I(A) = A'(x;y) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA'} = -\overrightarrow{IA} \\ A' \in d \end{cases} \Rightarrow A'(1;3)$.

Thay vào d' ta được $1 + 3 + c = 0 \Rightarrow c = -4 \Rightarrow d' : x + y - 4 = 0$.

Cách 2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $I(a;b)$ là $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 4 - y' \end{cases}$.

Thay vào phương trình đường thẳng d ta được $(2 - x') + (4 - y') - 2 = 0 \Rightarrow x' + y' - 4 = 0$.

Bài 05.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C) : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$ qua phép đối xứng tâm $O(0;0)$.

Lời giải

Cách 1. Đường tròn (C) có tâm $I(3;-1)$, bán kính $R = 3$.

Gọi I' là điểm đối xứng của $I(3;-1)$ qua phép đối xứng tâm $O(0;0) \Rightarrow I'(-3;1)$.

Phép đối xứng tâm bảo toàn khoảng cách nên $R' = R = 3$.

Vậy phương trình đường tròn $(C') : (x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$.

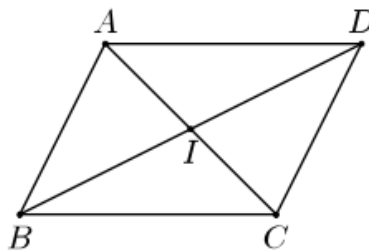
Cách 2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $O(0;0)$ là $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$.

Thay vào (C) ta được $(-x' - 3)^2 + (-y' + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow (x' + 3)^2 + (y' - 1)^2 = 9$.

Bài 06.

Chứng minh rằng nếu một tứ giác có tâm đối xứng thì nó phải là hình bình hành.

Lời giải



- ☒ Giả sử tứ giác $ABCD$ có tâm đối xứng là I .
 - ☒ Qua phép đối xứng tâm I , tứ giác $ABCD$ biến thành chính nó nên đỉnh A chỉ có thể biến thành A, B, C và D .
 - ☒ Nếu đỉnh A biến thành chính nó thì theo ví dụ trên A trùng với I .
Khi đó tứ giác có hai đỉnh đối xứng qua A điều đó vô lí.
 - ☒ Nếu đỉnh A biến thành B hoặc D thì tâm đối xứng thuộc các cạnh AB hoặc AD của tứ giác nên cũng suy ra điều vô lí.
 - ☒ Do đó A chỉ có thể biến thành C .
 - ☒ Lí luận tương tự B chỉ có thể biến thành D .
- Khi đó tâm đối xứng I là trung điểm của hai đường chéo AC và BD nên tứ giác $ABCD$ phải là hình bình hành.

4.2. Trắc nghiệm.

Câu 1. Hình nào sau đây có tâm đối xứng?

- A.** Hình thang. **B.** Hình tròn. **C.** Parabol. **D.** Tam giác bất kì.

Lời giải:

Chọn B

Tâm đối xứng của hình tròn là tâm của hình tròn đó.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** Tam giác đều có tâm đối xứng. **B.** Tứ giác có tâm đối xứng.
C. Hình thang cân có tâm đối xứng. **D.** Hình bình hành có tâm đối xứng.

Lời giải:

Chọn D

Tâm đối xứng của hình bình hành là giao điểm của hai đường chéo.

Câu 3. Hình nào sau đây không có tâm đối xứng?

- A.** Hình vuông. **B.** Hình tròn. **C.** Hình tam giác đều. **D.** Hình thoi.

Lời giải:

Chọn C

Hình vuông và hình thoi có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo.

Câu 4. Trong các hình sau đây, hình nào không có tâm đối xứng?

- A.** Hình gồm một đường tròn và một hình chữ nhật nội tiếp.
B. Hình gồm một đường tròn và một tam giác đều nội tiếp.
C. Hình lục giác đều.
D. Hình gồm một hình vuông và đường tròn nội tiếp.

Lời giải:

Chọn B

Tam giác đều không có tâm đối xứng.

Câu 5. Trong các hình dưới đây, hình nào không có tâm đối xứng?

A. Đường elip.

B. Đường hypebol.

C. Đường parabol.

D. Đồ thị hàm số $y = \sin x$.

Lời giải:

Chọn C

Đường parabol không có tâm đối xứng.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép đối xứng tâm $I(1;2)$ biến điểm $M(x;y)$ thành $M'(x';y')$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y - 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y + 4 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y - 4 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 2 \end{cases}$

Lời giải:

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{IM'} = (x' - 1; y' - 2)$, $\overrightarrow{IM} = (x - 1; y - 2)$.

Vì $\tilde{N}_I(M) = M'$ nên $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM} \Rightarrow \begin{cases} x' - 1 = -(x - 1) \\ y' - 2 = -(y - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x + 2 \\ y' = -y + 4 \end{cases}$

Câu 7. Phép đối xứng tâm $O(0;0)$ biến điểm $A(m;-m)$ thành điểm A' nằm trên đường thẳng $x - y + 6 = 0$. Tìm m .

A. $m = 3$.

B. $m = 4$.

C. $m = -3$.

D. $m = -4$.

Lời giải:

Chọn A

Ta có $D_O : A(m;-m) \mapsto A'(-m;m)$.

Do A' nằm trên đường thẳng $x - y + 6 = 0$ nên $-m - m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(2;1)$. Thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua tâm O và phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (1;2)$ biến điểm M thành điểm nào trong các điểm sau?

A. $A(1;3)$.

B. $B(2;0)$.

C. $C(0;2)$.

D. $D(-1;1)$.

Lời giải:

Chọn A

Phép đối xứng tâm $O(0;0)$ biến điểm $M(2;1)$ thành điểm $M'(-2;-1)$.

Phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (1;2)$ biến điểm M' thành điểm M''

$\Rightarrow \overrightarrow{M'M''} = \vec{v} \Rightarrow M''(-1;1) \equiv D$.

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 1$ qua phép đối xứng tâm $I(1;0)$

A. $(C'): (x - 2)^2 + y^2 = 1$.

B. $(C'): (x + 2)^2 + y^2 = 1$.

C. $(C'): x^2 + (y + 2)^2 = 1$.

D. $(C'): x^2 + (y - 2)^2 = 1$.

Lời giải:

Chọn A

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm $I(1;0)$ là $\begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 0 - y' = -y' \end{cases}$.

Thay vào (C) ta được $(2 - x')^2 + (-y')^2 = 1 \Leftrightarrow (x' - 2)^2 + y'^2 = 1$.

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$. Giả sử phép đối xứng tâm I biến điểm $A(1;3)$ thành điểm $B(a;b)$. Tìm phương trình của đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng tâm I .

A. $(C'): (x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$.

B. $(C'): (x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$.

C. $(C'): (x-a)^2 + (y-b)^2 = 9$.

D. $(C'): (x-a)^2 + (y-b)^2 = 16$.

Lời giải:

Chọn D

Theo giả thiết điểm $A(1;3)$ biến thành điểm $B(a;b)$ qua phép đối xứng tâm I .

Nên ta có $\begin{cases} 2x_I = x_A + x_B = a + 1 \\ 2y_I = y_A + y_B = b + 3 \end{cases}$.

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm I là

$$\begin{cases} x' = 2x_I - x = a + 1 - x \\ y' = 2y_I - y = b + 3 - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a + 1 - x' \\ y = b + 3 - y' \end{cases}$$

Thay vào (C) ta được $(a - x')^2 + (b - y')^2 = 16 \Rightarrow (x' - a)^2 + (y' - b)^2 = 16$.

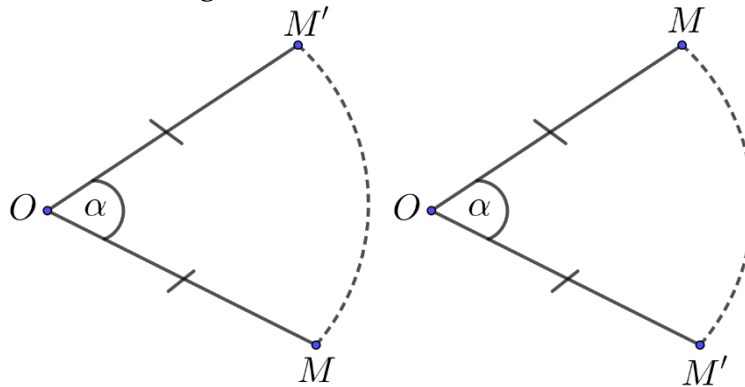
-----**HẾT**-----

§4. PHÉP QUAY

I. ĐỊNH NGHĨA:

Cho điểm O và góc lượng giác α .

- Phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM')$ bằng α được gọi là phép quay tâm O góc α .
- Điểm O được gọi là tâm quay, α được gọi là góc quay của phép quay đó.
- Phép quay tâm O góc α thường được kí hiệu là $Q_{(O, \alpha)}$.
- Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác nghĩa là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.

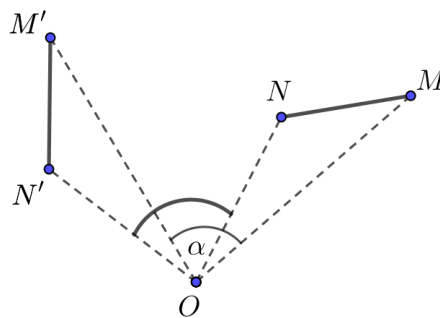


- Với k là số nguyên ta luôn có:
- + Phép quay $Q_{(O, 2k\pi)}$ là phép đồng nhất.
- + Phép quay $Q_{(O, (2k+1)\pi)}$ là phép đối xứng tâm O .

II. TÍNH CHẤT:

Tính chất 1:

Cho $Q_{(O, \alpha)}(M) = M'$ và $Q_{(O, \alpha)}(N) = N'$ thì $M'N' = MN$.



Tính chất 2:

- Phép quay tâm O góc α biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng cùng độ dài.
- Phép quay tâm O góc α biến đường thẳng thành đường thẳng.
- Phép quay tâm O góc α biến tam giác thành tam giác bằng nó.
- Phép quay tâm O góc α biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

III. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ:

– Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(x; y)$ và điểm $I(a; b)$. Gọi M' là ảnh của M qua phép quay tâm I góc φ . Khi đó

$$M'(x'; y') = Q_{(I, \alpha)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = (x - a) \cos \varphi - (y - b) \sin \varphi + a \\ y' = (x - a) \sin \varphi + (y - b) \cos \varphi + b \end{cases}$$

○ CHÚ Ý

① Xét $Q_{(O, \alpha)}(M) = M'$:

- Nếu $\alpha > 0$ thì ta quay theo chiều dương là ngược chiều kim đồng hồ.
- Nếu $\alpha < 0$ thì ta quay theo chiều âm là cùng chiều kim đồng hồ.
- Nếu $\alpha = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì $M' \equiv M$.
- Nếu $\alpha = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì O là trung điểm của MM' .

② Xét $Q_{(O, \alpha)}(d) = d'$ và cho $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ thì góc $(d; d') = \begin{cases} \alpha & \text{khi } 0^\circ < \alpha \leq 90^\circ \\ \pi - \alpha & \text{khi } 90^\circ \leq \alpha < 180^\circ \end{cases}$.

IV. BÀI TẬP:

4.1. Tự Luận.

Bài toán xác định ảnh trong hệ tọa độ qua Phép Quay

Phương pháp:

Sử dụng biểu thức tọa độ của phép quay.

– Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(x; y)$ và điểm $I(a; b)$. Gọi M' là ảnh của M qua phép quay tâm I góc φ . Khi đó

$$M'(x'; y') = Q_{(I, \alpha)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = (x - a) \cos \varphi - (y - b) \sin \varphi + a \\ y' = (x - a) \sin \varphi + (y - b) \cos \varphi + b \end{cases}$$

Bài 01.

Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự trên. Cùng thuộc nửa mặt phẳng có bờ là AB , vẽ các tam giác đều ABD, BCE . Chứng minh $DC = AE, (DC, AE) = 60^\circ$.

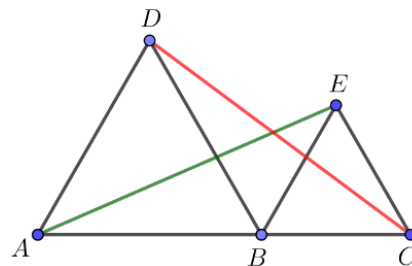
Lời giải

Xét

$$Q_{(B, 60^\circ)} : C \mapsto E; D \mapsto A$$

$$\Rightarrow CD \mapsto EA.$$

Khi đó $CD = EA$ và $(CD, EA) = 60^\circ$.



Bài 02.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(3;0), B(0;-2), C(3;-2), D(0;-3)$ tìm tọa độ ảnh của các đối tượng sau biết $Q_{(O;90^\circ)}(B) = B', Q_{(O;90^\circ)}(A) = A', Q_{(O;90^\circ)}(C) = C', Q_{(O;90^\circ)}(D) = D'$.

Lời giải

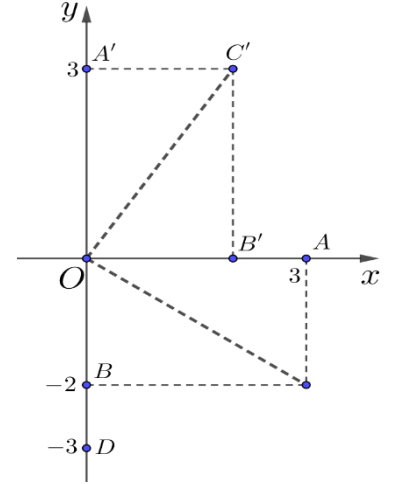
$$A(3;0), B(0;-2), C(3;-2), D(0;-3).$$

$$Q_{(O;90^\circ)}(A) = A' \Rightarrow \begin{cases} (OA;OA') = 90^\circ \\ OA = OA' \end{cases} \Rightarrow A'(0;3).$$

$$Q_{(O;90^\circ)}(B) = B' \Rightarrow \begin{cases} (OB;OB') = 90^\circ \\ OB = OB' \end{cases} \Rightarrow B'(2;0)$$

$$Q_{(O;90^\circ)}(C) = C' \Rightarrow Q_{(O;90^\circ)}(OBCA) = OB'C'A' \Rightarrow C'(2;3)$$

$$Q_{(O;90^\circ)}(D) = D' \Rightarrow \begin{cases} (OD;OD') = 90^\circ \\ OD = OD' \end{cases} \Rightarrow D'(0;3) \equiv A'.$$



Bài 03.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm ảnh của đường thẳng $d: 3x - 4y + 2 = 0$ qua $Q_{(O;\frac{\pi}{2})}$

Lời giải

$$\text{Gọi } d' = Q_{(O;\frac{\pi}{2})}(d) \Rightarrow d \perp d' \Rightarrow d': 4x + 3y + c = 0.$$

$$\text{Lấy } A(2;2) \in d \Rightarrow A' = Q_{(O;\frac{\pi}{2})}(A) \in d'.$$

$$\text{Ta có } A'(-2;2) \in d' \Rightarrow 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 2.$$

$$\text{Vậy } d': 4x + 3y + 2 = 0.$$

Bài 04.

Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $\Delta: x + 2y - 11 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng Δ qua phép quay tâm O góc 90° .

Lời giải

Gọi điểm $M(x;y)$ bất kì thuộc đường thẳng Δ , $M'(x';y')$ là ảnh của điểm M qua phép quay tâm O góc 90° .

Khi đó M' sẽ thuộc đường thẳng Δ' .

Theo biểu thức tọa độ của phép quay tâm O , góc quay 90° ta có:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos 90^\circ - y \cdot \sin 90^\circ \\ y' = x \cdot \sin 90^\circ + y \cdot \cos 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y' \\ y = -x' \end{cases}$$

$$\text{Thay vào phương trình } \Delta \text{ ta có } y' + 2(-x') - 11 = 0 \Leftrightarrow 2x' - y' + 11 = 0$$

$$\text{Vậy phương trình } \Delta' \text{ là } 2x - y + 11 = 0.$$

Bài 05.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(3;0)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của điểm A qua phép quay tâm $O(0;0)$ góc quay $-\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

$$\text{Gọi } A'(x;y). \text{ Ta có } Q_{\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)} A = A' \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OA' \\ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } A(3;0) \in Ox \xrightarrow{\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) = -\frac{\pi}{2}} A' \in Oy \Rightarrow A'(0;y). \text{ Mà } OA = OA' \Rightarrow |y| = 3.$$

$$\text{Do góc quay } \varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y < 0. \text{ Vậy } A'(0;-3).$$

Bài 06.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $2x + y + 5 = 0$ và $x - 2y - 3 = 0$. Nếu có phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia thì số đo của góc quay $\varphi (0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ)$ là

Lời giải

Ta thấy hai đường thẳng a và b có phương trình $2x + y + 5 = 0$ và $x - 2y - 3 = 0$ là vuông góc với nhau. Suy ra $\varphi = 90^\circ$.

Bài 07.

Trong hệ tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) có phương trình: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O góc quay 90° là

Lời giải

(C) có tâm $I(1;-2)$.

$$\text{Gọi } I' = Q_{(O, 90^\circ)}(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = y \cos \alpha + x \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \cos 90^\circ + 2 \sin 90^\circ \\ y' = -2 \cos 90^\circ + \sin 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 1 \end{cases}$$

Suy ra $I'(2;1)$.

$$\text{Vậy phương trình } (C'): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25.$$

4.2. Trắc nghiệm.

Câu 1. Có bao nhiêu điểm biến thành chính nó qua phép quay tâm O góc α với $\alpha \neq k2\pi$ (k là một số nguyên)?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải:

Chọn B

Điểm đó chính là tâm quay O .

Câu 2. Cho tam giác đều tâm O . Với giá trị nào dưới đây của φ thì phép quay $Q_{(O, \varphi)}$ biến tam giác đều thành chính nó?

A. $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

B. $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

C. $\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

D. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải:

Chọn B

Các góc quay để biến tam giác đều thành chính nó là: $0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; 4\pi$.

Câu 3. Cho tam giác đều ABC . Hãy xác định góc quay của phép quay tâm A biến B thành C .

A. $\varphi = 30^\circ$.

B. $\varphi = 90^\circ$.

C. $\varphi = -120^\circ$.

D. $\varphi = 60^\circ$ hoặc $\varphi = -60^\circ$.

Lời giải:

Chọn D

Tam giác ABC đều, nên $BAC = 60^\circ$. Khi đó $Q_{(A, \varphi)}(B) = C \Rightarrow \varphi = \pm 60^\circ$.

Câu 4. Cho tam giác đều tâm O . Hỏi có bao nhiêu phép quay tâm O góc α với $0 \leq \alpha < 2\pi$, biến tam giác trên thành chính nó?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải:

Chọn C

Do $0 \leq \alpha < 2\pi$ nên ta có góc quay là $0; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$.

Câu 5. Cho hình vuông tâm O . Xét phép quay Q có tâm quay O và góc quay φ . Với giá trị nào sau đây của φ , phép quay Q biến hình vuông thành chính nó?

A. $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

B. $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

C. $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

D. $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải:

Chọn D

Các góc quay để biến hình vuông thành chính nó là: $0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(3;0)$. Tìm tọa độ điểm A' là ảnh của điểm A qua phép quay tâm $O(0;0)$ góc quay $\frac{\pi}{2}$.

A. $A'(0;-3)$.

B. $A'(0;3)$.

C. $A'(-3;0)$.

D. $A'(2\sqrt{3};2\sqrt{3})$.

Lời giải:

Chọn B

Gọi $A'(x;y)$. Ta có $Q_{(O, \frac{\pi}{2})}A = A' \Leftrightarrow \begin{cases} OA = OA' \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Vì $A(3;0) \in Ox \xrightarrow{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \frac{\pi}{2}} A' \in Oy \Rightarrow A'(0;y)$. Mà $OA = OA' \Rightarrow |y| = 3$.

Do góc quay $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y > 0$. Vậy $A'(0;3)$.

- Câu 7.** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho hai đường thẳng a và b có phương trình lần lượt là $4x+3y+5=0$ và $x+7y-4=0$. Nếu có phép quay biến đường thẳng này thành đường thẳng kia thì số đo của góc quay $\varphi (0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ)$ là
- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 120° .

Lời giải:

Chọn B

Đường thẳng $a: 4x+3y+5=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_a = (4; 3)$. Đường thẳng $b: x+7y-4=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_b = (1; 7)$. Góc α là góc tạo bởi a và b .

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_a, \vec{n}_b) \right| = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 7|}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Vậy $\varphi = 45^\circ$.

- Câu 8.** Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy , cho đường thẳng $\Delta: x+2y-6=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng Δ qua phép quay tâm O góc 90° .
- A. $2x-y+6=0$. B. $2x+y+6=0$. C. $2x+y-6=0$. D. $2x-y-6=0$.

Lời giải:

Chọn A

Đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; 2)$, vì đường thẳng Δ' vuông góc với đường thẳng Δ nên đường thẳng Δ' có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (2; -1)$.

Đường thẳng Δ cắt trục Oy tại $A(0; 3)$ nên ảnh của A qua phép quay tâm O góc 90° là điểm $B(-3; 0)$ thuộc đường thẳng Δ' nên phương trình đường thẳng Δ' là $2x-y+6=0$.

- Câu 9.** Ảnh của điểm $M(2; -3)$ qua phép quay tâm $I(-1; 2)$ góc quay 120° là

A. $M' \left(\frac{-5\sqrt{3}+5}{2}; \frac{3\sqrt{3}+9}{2} \right)$. B. $M' \left(\frac{-5\sqrt{3}+1}{2}; \frac{-3\sqrt{3}-1}{2} \right)$.

C. $M' \left(\frac{5\sqrt{3}-5}{2}; \frac{3\sqrt{3}+9}{2} \right)$. D. $M' \left(\frac{-5\sqrt{3}+1}{2}; \frac{3\sqrt{3}+9}{2} \right)$.

Lời giải:

Chọn C

Chú ý: Trong mặt phẳng Oxy , giả sử $M(x; y), I(a; b)$ và $M'(x'; y') = Q_{(I; \alpha)}$ thì

$$\begin{cases} x' = a + (x - a) \cdot \cos \alpha - (y - b) \cdot \sin \alpha \\ y' = b + (x - a) \cdot \sin \alpha + (y - b) \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

Vậy ảnh của điểm $M(2; -3)$ qua phép quay tâm $I(-1; 2)$ góc quay 120° là $M'(x'; y')$:

$$\begin{cases} x' = -1 + 3 \cos 120^\circ + 5 \sin 120^\circ \\ y' = 2 + 3 \sin 120^\circ - 5 \cos 120^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{5\sqrt{3}-5}{2} \\ y' = \frac{3\sqrt{3}+9}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } M' \left(\frac{5\sqrt{3}-5}{2}; \frac{3\sqrt{3}+9}{2} \right).$$

Câu 10. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(-2;1)$. Xác định tọa độ điểm M' là ảnh của điểm M qua phép quay tâm O góc 90° .

- A.** $M'(1;2)$. **B.** $M'(1;-2)$. **C.** $M'(-1;-2)$. **D.** $M'(-1;2)$.

Lời giải:

Chọn C

Theo biểu thức tọa độ của phép quay tâm O , góc quay 90° ta có:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos 90^\circ - y \cdot \sin 90^\circ \\ y' = x \cdot \sin 90^\circ + y \cdot \cos 90^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ y' = -2 \end{cases} \Rightarrow M'(-1;-2).$$

-----HẾT-----

§5. PHÉP DỜI HÌNH

I. ĐỊNH NGHĨA:

– Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Nhận xét.

– Các phép đồng nhất, tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay đều là những phép dời hình.

– Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình là một phép dời hình.

II. TÍNH CHẤT:

Tính chất:

Phép dời hình:

+ Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm.

+ Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.

+ Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó.

+ Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

○ CHÚ Ý

– Xét phép dời hình F biến $\triangle ABC$ thành $\triangle A_1B_1C_1$ thì nó biến trọng tâm, trục tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của $\triangle ABC$ tương ứng với trọng tâm, trục tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp của $\triangle A_1B_1C_1$

– Phép dời hình F biến đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, biến đỉnh thành đỉnh tương ứng, biến cạnh thành cạnh.

– Hai hình được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

III. KHÁI NIỆM HAI HÌNH BẰNG NHAU:

– Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

IV. BÀI TẬP:

4.1. Tự Luận.

Bài toán xác định ảnh trong hệ tọa độ qua Phép Dời Hình

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa, tính chất và biểu thức tọa độ của phép dời hình (tịnh tiến, đối xứng trục/ tâm, quay).

Bài 01.

Cho tam giác đều ABC và G là trọng tâm tam, giác ABC . Tìm ảnh của tam giác ABC lần lượt qua $T_{\overrightarrow{AG}}$ và $Q_{(B, -60^\circ)}$

a. Qua $T_{\overrightarrow{AG}}$.

b. Qua $Q_{(B, -60^\circ)}$

Lời giải

a. Qua $T_{\overrightarrow{AG}}$:

Ta có

$$T_{\overrightarrow{AG}}(A) = A_1 \equiv G;$$

$$T_{\overrightarrow{AG}}(B) = B_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AG};$$

$$T_{\overrightarrow{AG}}(C) = C_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AG}$$

$$\text{Vậy } T_{\overrightarrow{AG}}(\Delta ABC) = \Delta A_1 B_1 C_1$$

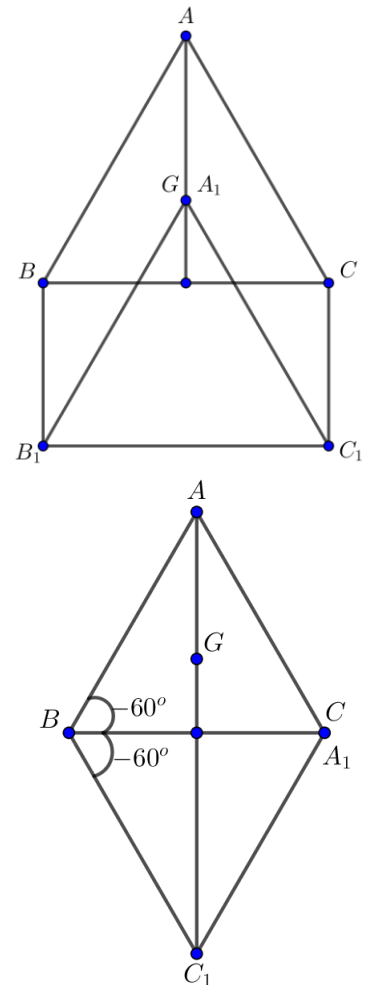
b. Qua $Q_{(B, -60^\circ)}$

$$Q_{(B, -60^\circ)}(B) = B;$$

$$Q_{(B, -60^\circ)}(A) = A_1, A_1 \equiv C;$$

$$Q_{(B, -60^\circ)}(C) = C_1, C_1 \text{ đối xứng với } A \text{ qua } BC$$

$$\text{Vậy } Q_{(B, -60^\circ)}(\Delta ABC) = \Delta A_1 B C_1$$



Bài 02.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): 3x - y - 3 = 0$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm $I(1;2)$ và phép tịnh tiến $\vec{v} = (-2;1)$ biến đường thẳng (d) thành đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

Lời giải

Gọi (d') là ảnh cần tìm của (d) .

Khi đó (d') song song hoặc trùng (d) nên phương trình (d') có dạng: $3x - y + c = 0$.

Gọi $A(1;0) \in (d)$ Suy ra AA' là đường cao của lăng trụ: $h = AA' = 4a$.

Phép đối xứng tâm $I(1;2)$ biến $A(1;0)$ thành $B(1;4)$.

Phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (-2; 1)$ biến $B(1; 4)$ thành $C(-1; 5)$.

Mà $C(-1; 5) \in (d'): 3x - y + c = 0$ nên $3 \cdot (-1) - 5 + c = 0 \Rightarrow c = 8$.

Vậy $(d'): 3x - y + 8 = 0$.

Bài 03.

Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$. Tìm ảnh của (C) khi thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vector $\vec{u} = (-2; 1)$ và phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (1; 3)$.

Lời giải

Theo giả thiết $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ có tâm $I(2; -1)$, bán kính $R = 1$.

Phép tịnh tiến theo vector $\vec{u} = (-2; 1)$ biến $I(2; -1)$ thành $O(0; 0)$.

Phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (1; 3)$ biến $O(0; 0)$ thành $I'(1; 3)$.

Do đó, ảnh của (C) khi thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vector $\vec{u} = (-2; 1)$ và phép tịnh tiến theo vector $\vec{v} = (1; 3)$ là đường tròn (C') có tâm $I'(1; 3)$ và bán kính $R = 1$.

Vậy $(C'): (x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$.

4.2. Trắc nghiệm.

Câu 1. Hợp thành của hai phép tịnh tiến là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục.

B. Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến.

D. Phép quay.

Lời giải:

Chọn C

Hợp thành của hai phép tịnh tiến là phép tịnh tiến với vector tịnh tiến là vector tổng của hai vector tịnh tiến của hai phép tịnh tiến đã cho.

Câu 2. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến $\vec{v}$ và phép đối xứng tâm I là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục.

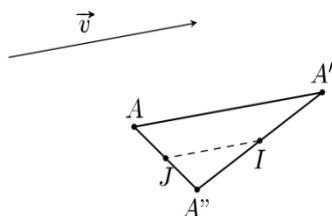
B. Phép đối xứng tâm.

C. Phép đồng nhất.

D. Phép tịnh tiến.

Lời giải:

Chọn B



Tâm đối xứng là J thỏa mãn $\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{v}$.

Câu 3. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua hai đường thẳng song song là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục.

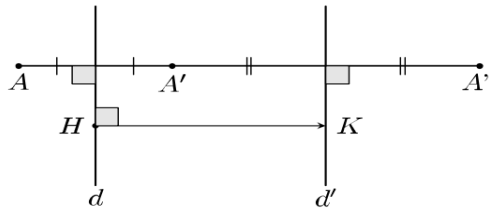
B. Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến.

D. Phép quay, góc quay khác π .

Lời giải:

Chọn C



Vecto tịnh tiến là $\vec{u} = \overrightarrow{2HK}$, với H, K lần lượt là hai điểm nằm trên hai đường thẳng song song đã cho, đồng thời HK sẽ vuông góc với hai đường thẳng đó.

Câu 4. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua hai đường thẳng vuông góc với nhau là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục.

B. Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến.

D. Phép quay, góc quay khác π .

Lời giải:

Chọn B

Tâm đối xứng là giao điểm của hai đường thẳng đã cho.

Câu 5. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua hai đường thẳng cắt nhau (không vuông góc) là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục.

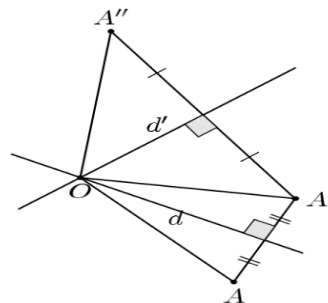
B. Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến.

D. Phép quay, góc quay khác π .

Lời giải:

Chọn D



Tâm quay là giao điểm của hai đường thẳng đã cho, góc quay là góc giữa hai đường thẳng đó.

Câu 6. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm là phép nào trong các phép dưới đây?

A. Phép đối xứng trục.

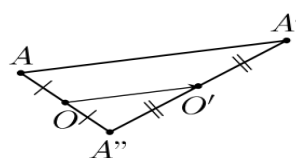
B. Phép đối xứng tâm.

C. Phép tịnh tiến.

D. Phép quay.

Lời giải:

Chọn C



Vecto tịnh tiến là $\vec{u} = 2\overrightarrow{II'}$, với I, I' lần lượt là tâm đối xứng của hai phép đối xứng tâm đã cho.

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$. Phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp một phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-1; 4)$ và phép đối xứng trục Oy là

- A. $(C') : (x-1)^2 + (y+5)^2 = 9$. B. $(C') : (x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$.
C. $(C') : (x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$. D. $(C') : (x+1)^2 + (y-5)^2 = 9$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có: (C) là đường tròn tâm $I(2;1)$ và bán kính $R=3$.

Gọi $I''(a;b) = T_{\vec{v}}(I) \Rightarrow I''(1;5) \Rightarrow$ tâm của (C') là $I'(-1;5) = D_{Oy}(I'')$.

Qua phép dời hình bán kính đường tròn không đổi nên phương trình (C') là:

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = 9.$$

Câu 8. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) . Tịnh tiến (C) qua phải 2 đơn vị rồi tịnh tiến xuống dưới 1 đơn vị. Ảnh của (C) là đồ thị của hàm số

- A. $y = -x^3 - 6x^2 + 9x - 1$. B. $y = x^3 - 6x^2 - 9x + 1$.
C. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$. D. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Lời giải:

Chọn D

Mỗi điểm $M(x;y) \in (C) \Rightarrow y = x^3 - 3x + 2(1)$.

Gọi $M_1(x_1;y_1)$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến qua phải 2 đơn vị, tức là tịnh tiến theo véc

tơ $\vec{u} = (2;0)$, khi đó ta có: $\begin{cases} x_1 = x + 2 \\ y_1 = y \end{cases}$.

Gọi $M_2(x_2;y_2)$ là ảnh khi tịnh tiến $M_1(x_1;y_1)$ xuống dưới 1 đơn vị, tức là tịnh tiến theo véc

tơ $\vec{v} = (0;-1)$, khi đó ta có: $\begin{cases} x_2 = x_1 = x + 2 \\ y_2 = y_1 - 1 = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_2 - 2 \\ y = y_2 + 1 \end{cases}$.

Thay vào phương trình (1) ta được:

$y_2 + 1 = (x_2 - 2)^3 - 3(x_2 - 2) + 2 \Leftrightarrow y_2 = x_2^3 - 6x_2^2 + 9x_2 - 1$. Suy ra M_2 thuộc đồ thị hàm số có phương trình $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$.

Vậy ảnh của (C) qua phép biến hình trên là đồ thị của hàm số có phương trình

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1.$$

Câu 9. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Xác định phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = (-1;1)$ và phép quay tâm O , góc quay $\frac{\pi}{2}$.

A. $(d'): x - y + 2 = 0$.

B. $(d'): x - y - 2 = 0$.

C. $(d'): x - y = 0$.

D. $(d'): x - y + 1 = 0$.

Lời giải:

Chọn A

Cách 1: Gọi $d_1 = T_{\vec{v}(d)} \Rightarrow d_1 // d$ hoặc $d_1 \equiv d \Rightarrow$ phương trình d_1 có dạng $x + y + c = 0$.

Gọi $d' = Q_{\left(0; \frac{\pi}{2}\right)}(d_1) \Rightarrow d' \perp d_1 \Rightarrow$ phương trình d' có dạng $x - y + c' = 0$.

Lấy $M(1; 1) \in d \Rightarrow M_1(0; 2) = T_{\vec{v}}(M)$ và $M_1 \in d_1$.

Gọi $M' = Q_{\left(0; \frac{\pi}{2}\right)}(M_1) \Rightarrow M'(-2; 0) \Rightarrow c' = 2$.

Vậy phương trình d' là $x - y + 2 = 0$.

Cách 2: Ta có $\vec{v}$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng d nên ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ là đường thẳng d .

Gọi $d' = Q_{\left(0; \frac{\pi}{2}\right)}(d) \Rightarrow d' \perp d \Rightarrow$ phương trình d' có dạng $x - y + c' = 0$.

Lấy $M(0; 2) \in d$. Gọi $M' = Q_{\left(0; \frac{\pi}{2}\right)}(M_1) \Rightarrow M'(-2; 0) \Rightarrow c' = 2$.

Vậy phương trình d' là $x - y + 2 = 0$.

Câu 10. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d: 3x - 4y + 1 = 0$. Thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = -3$ và phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{u} = (1; 2)$ thì đường thẳng d biến thành đường thẳng d' có phương trình là

A. $3x - 4y + 2 = 0$.

B. $3x - 4y - 2 = 0$.

C. $3x - 4y + 5 = 0$.

D. $3x - 4y - 5 = 0$.

Lời giải:

Chọn A

Theo công thức tọa độ phép vị tự ta có $\begin{cases} x'' = -3x \\ y'' = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x''}{-3} \\ y = \frac{y''}{-3} \end{cases}$.

Thay vào phương trình của d ta có: $3 \cdot \frac{x''}{-3} - 4 \cdot \frac{y''}{-3} + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x'' - 4y'' - 3 = 0$ (d'').

Theo công thức tọa độ phép tịnh tiến ta có $\begin{cases} x' = x'' + 1 \\ y' = y'' + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x' - 1 \\ y'' = y' - 2 \end{cases}$.

Thay vào phương trình của d'' ta có $3(x' - 1) - 4(y' - 2) - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x' - 4y' + 2 = 0$.

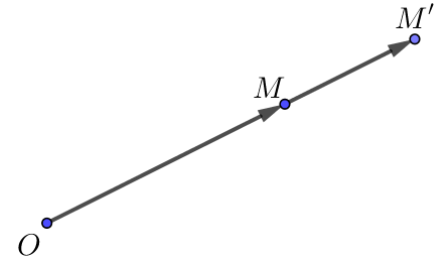
Vậy đường thẳng d' có phương trình $3x - 4y + 2 = 0$.

-----HẾT-----

§6. PHÉP VỊ TỰ

I. ĐỊNH NGHĨA:

- Cho một điểm O cố định và một số k không đổi, $k \neq 0$. Khi đó phép vị tự tâm O tỷ số $k \neq 0$ là phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.
- Ký hiệu: $V_{(O,k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.



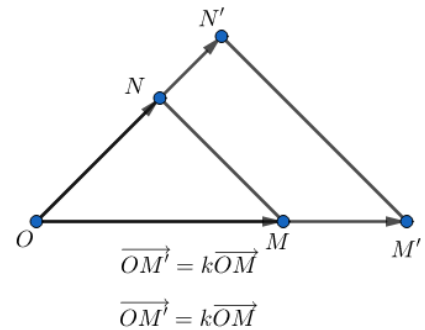
Nhận xét:

- Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.
- Khi $k > 0$ thì M và M' cùng phía với điểm O .
- Khi $k < 0$ thì M và M' khác phía với điểm O .
- Khi $k = -1$ thì M và M' đối xứng nhau qua O .
- Khi $k = 1$ thì M và M' có vị trí trùng nhau nên phép vị tự tỷ số $k = 1$ là phép đồng nhất.
- $V_{(O,k)}(M) = M' \Leftrightarrow V_{(O, \frac{1}{k})}(M') = M$

II. TÍNH CHẤT:

Tính chất 1:

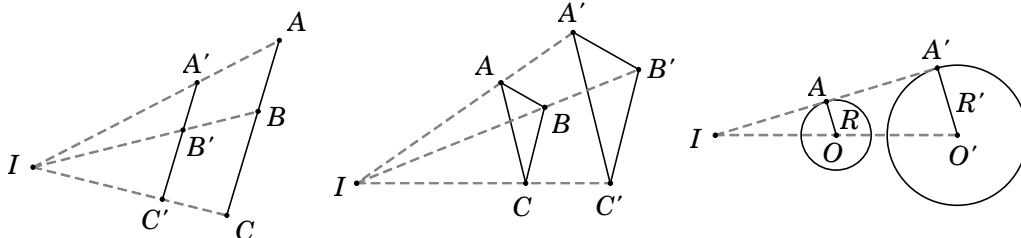
Nếu phép vị tự tỷ số k biến hai điểm M, N tùy ý thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$.



Phép vị tự tỷ số k biến:

- Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm.
- Đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, góc thành góc bằng nó.
- Đường tròn bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.

Tính chất 2:



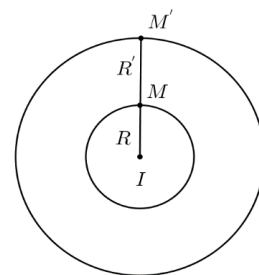
III. CÁCH TÌM TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN:

Cho hai đường tròn (I, R) và (I', R') .

**Trường
hợp 1:**

Trường hợp I trùng với I' .

Phép vị tự tâm I , tỉ số $\frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm I , tỉ số $-\frac{R'}{R}$ biến đường tròn (I, R) thành đường tròn (I', R') .



**Trường
hợp 2:**

Trường hợp I khác I' và $R \neq R'$.

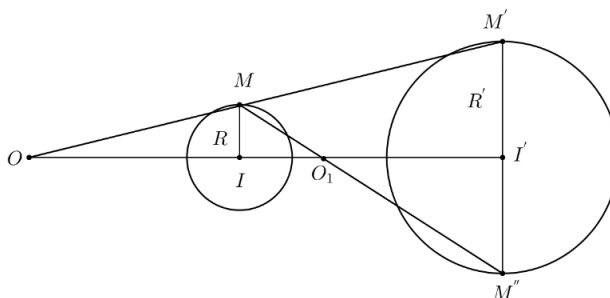
+ Lấy M bất kì thuộc (I, R) , đường thẳng qua I' song song với IM cắt (I', R') tại M' và M'' .

+ Giả sử M, M' nằm cùng phía đối với đường thẳng II' , còn M, M'' nằm khác phía với đường thẳng II' .

+ Giả sử đường thẳng MM' cắt II' tại O nằm ngoài đoạn thẳng II' , còn đường thẳng MM'' cắt II' tại O_1 nằm ngoài đoạn thẳng II' .

+ Khi đó phép vị tự tâm O , tỉ số $\frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm O_1 , tỉ số $-\frac{R'}{R}$ biến đường tròn (I, R) thành đường tròn (I', R') .

+ Ta gọi O là tâm vị tự ngoài, còn O_1 là tâm vị tự trong của 2 đường tròn.

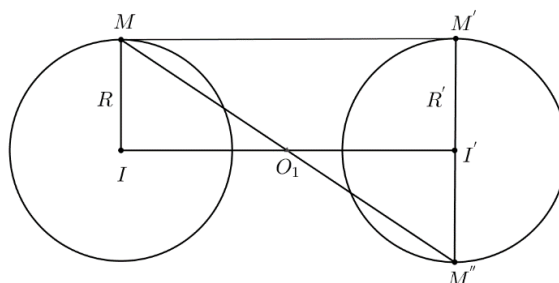


**Trường
hợp 3:**

Trường hợp I khác I' và $R = R'$.

+ Khi đó MM' song song với II' nên chỉ có phép vị tự tâm O_1 , tỉ số $k = -\frac{R'}{R} = -1$ biến đường tròn (I, R) thành đường tròn (I', R') .

+ Nó chính là phép đối xứng tâm O_1 .



IV. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ:

– Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(x; y)$ và điểm $I(a; b)$. Gọi M' là ảnh của M qua phép vị tự tâm I . Khi đó

$$V_{(I; k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow (x' - a; y' - b) = k(x - a; y - b) \Leftrightarrow \begin{cases} x' - a = k(x - a) \\ y' - b = k(y - b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = a + k(x - a) \\ y' = b + k(y - b) \end{cases}$$

IV. BÀI TẬP:

4.1. Tự Luận.

Bài toán xác định ảnh trong hệ tọa độ qua Phép Quay

Phương pháp:

Sử dụng biểu thức tọa độ của phép vị tự.

– Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(x; y)$ và điểm $I(a; b)$. Gọi M' là ảnh của M qua phép vị tự tâm I . Khi đó

$$V_{(I; k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow (x' - a; y' - b) = k(x - a; y - b) \Leftrightarrow \begin{cases} x' - a = k(x - a) \\ y' - b = k(y - b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = a + k(x - a) \\ y' = b + k(y - b) \end{cases}$$

Bài 01.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $M(4; 6)$ và $M'(-3; 5)$. Phép vị tự tâm I , tỉ số $k = \frac{1}{2}$ biến điểm M thành điểm M' . Tìm tọa độ tâm vị tự I .

Lời giải

Gọi $I(x; y)$. Suy ra $\overrightarrow{IM} = (4 - x; 6 - y)$, $\overrightarrow{IM'} = (-3 - x; 5 - y)$.

$$\text{Ta có } V_{\left(I; \frac{1}{2}\right)} M = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x = \frac{1}{2}(4 - x) \\ 5 - y = \frac{1}{2}(6 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow I(-10; 4).$$

Bài 02.

Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(3; -5)$ và đường thẳng $d: 2x + y - 4 = 0$. Hãy tìm ảnh của điểm A và ảnh của d qua phép vị tự $I(-1; 2)$ và tỷ số $k = -2$.

Lời giải

Gọi $A'(x'; y')$ là ảnh của A qua phép vị tự $V_{(I; k)}$

$$\text{Theo biểu thức tọa độ, ta có: } \begin{cases} x' = -1 + (-2)(3 - (-1)) = -9 \\ y' = 2 + (-2)(-5 - 2) = 16 \end{cases}$$

Vậy ảnh của điểm A là $A'(-9; 16)$.

Gọi d' là ảnh của d qua phép vị tự $V_{(I;k)}$.

Vì $d' // d$ nên phương trình đường thẳng d' có dạng: $2x + y + c = 0$.

Gọi $M(2;0) \in d$; $V_{(I;k)}(M) = M'(x', y')$

Theo biểu thức tọa độ, ta có:
$$\begin{cases} x' = -1 + (-2)(2 - (-1)) = -7 \\ y' = 2 + (-2)(0 - 2) = 6 \end{cases}$$

Khi đó $M' \in d'$ nên $2 \cdot (-7) + 6 + c = 0 \Leftrightarrow c = 8$

Vậy pt đường thẳng $d': 2x + y + 8 = 0$

Bài 03.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x + y - 3 = 0$. Phép vị tự tâm O , tỉ số $k = 2$ biến d thành đường thẳng nào ?

Lời giải

Cách 1: Ta có $V_{(O;2)}: d \mapsto d' \Rightarrow d // d'$ nên $d': 2x + y + c = 0$ ($c \neq -3$ do $k \neq 1$).

Chọn $A(0;3) \in d$. Ta có $V_{(O;2)}A = A' \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA} \\ A' \in d' \end{cases}$.

Từ $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA} \Rightarrow A'(0;6)$. Thay vào d' ta được $d': 2x + y - 6 = 0$.

Cách 2: Giả sử phép vị tự $V_{(O;2)}$ biến điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(x'; y')$.

Ta có $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' \\ y = \frac{1}{2}y' \end{cases}$.

Thay vào ta được $2 \cdot \frac{x'}{2} + \frac{y'}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x' + y' - 6 = 0$.

Bài 04.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$ và điểm $I(2; -3)$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = -2$. Khi đó (C') có phương trình là

Lời giải

♦ Đường tròn (C) có tâm $K(1;5)$ và bán kính $R = 2$

♦ Gọi $V_{(I;-2)}K = K'(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{IK'} = -2\overrightarrow{IK} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -2(1 - 2) \\ y + 3 = -2(5 + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -19 \end{cases} \Rightarrow K'(4; -19)$ là tâm

của đường tròn (C') .

♦ Bán kính R' của (C') là $R' = |k| \cdot R = 2 \cdot 2 = 4$

♦ Vậy $(C'): (x-4)^2 + (y+19)^2 = 16$

Bài 05.

Cho phép vị tự $I(1;3)$ và tỷ số $k=-2$. Tìm ảnh của đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 3$ qua $V_{(I;k)}$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $J(2;-1)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$.

Gọi $V_{(I;k)}(J) = J'(x';y')$

Theo biểu thức tọa độ, ta có:
$$\begin{cases} x' = 1 + (-2)(2-1) = -1 \\ y' = 3 + (-2)(-1-3) = 11 \end{cases}$$

Tọa độ $J'(-1;11)$, $R' = |-2|\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

Ảnh của đường tròn (C) qua $V_{(I;k)}$ có phương trình: $(x+1)^2 + (y-11)^2 = 12$.

4.2. Trắc nghiệm.

Câu 1. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d' . Có bao nhiêu phép vị tự biến đường thẳng d thành đường thẳng d' ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải:

Chọn A

Vì qua phép vị tự, đường thẳng biến thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Câu 2. Cho hai đường thẳng song song d và d' . Có bao nhiêu phép vị tự với tỉ số $k=20$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d' ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải:

Chọn D

Lấy hai điểm A và A' tùy ý trên d và d' .

Chọn điểm O thỏa mãn $\overrightarrow{OA'} = 20\overrightarrow{OA}$.

Khi đó phép vị tự tâm O tỉ số $k=20$ sẽ biến đường thẳng d thành đường thẳng d' . Do A và A' tùy ý trên d và d' nên suy ra có vô số phép vị tự.

Câu 3. Cho hai đường thẳng song song d và d' và một điểm O không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến đường thẳng d thành đường thẳng d' ?

- A. 0. B. 1. C. 3. D. Vô số.

Lời giải:

Chọn B

Kẻ đường thẳng Δ qua O cắt d tại A và cắt d' tại A' .

Gọi k là số thỏa mãn $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$. Khi đó phép vị tự tâm O tỉ số k sẽ biến d thành d' .

Do k xác định duy nhất (không phụ thuộc vào Δ) nên có duy nhất một phép vị tự.

Câu 4. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d' . Có bao nhiêu phép vị tự biến mỗi đường thẳng thành chính nó.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải:

Chọn D

Tâm vị tự là giao điểm của d và d' .

Tỉ số vị tự là số k khác 0 (hoặc tâm vị tự tùy ý, tỉ số $k=1$ đây là phép đồng nhất.)

Câu 5. Cho hai đường tròn bằng nhau $(O; R)$ và $(O'; R')$ với tâm O và O' phân biệt. Có bao nhiêu phép vị tự biến $(O; R)$ thành $(O'; R')$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Lời giải:

Chọn B

Phép vị tự có tâm là trung điểm OO' , tỉ số vị tự là -1 .

Câu 6. Cho đường tròn $(O; 3)$ và điểm I nằm ngoài (O) sao cho $OI = 9$. Gọi $(O'; R')$ là ảnh của $(O; 3)$ qua phép vị tự $V_{(I; 5)}$. Tính R' .

- A. $R' = 9$ B. $R' = \frac{5}{3}$ C. $R' = 27$ D. $R' = 15$.

Lời giải:

Chọn D

Ta có $R' = |k| \cdot R = 5 \cdot R = 5 \cdot 3 = 15$.

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự tâm $I(2; 3)$ tỉ số $k = -2$ biến điểm $M(-7; 2)$ thành điểm M' có tọa độ là:

- A. $(-10; 2)$ B. $(20; 5)$ C. $(18; 2)$ D. $(-10; 5)$

Lời giải:

Chọn B

Gọi $M'(x; y)$. Suy ra $\overrightarrow{IM} = (-9; -1)$, $\overrightarrow{IM'} = (x - 2; y - 3)$.

Ta có $V_{(I; -2)}M = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -2\overrightarrow{IM} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = -2 \cdot (-9) \\ y - 3 = -2 \cdot (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow M'(20; 5)$.

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự V , tỉ số $k = 2$ biến điểm $A(1; -2)$ thành điểm $A'(-5; 1)$. Hỏi phép vị tự V biến điểm $B(0; 1)$ thành điểm có tọa độ nào sau đây?

- A. $(0; 2)$ B. $(12; -5)$ C. $(-7; 7)$ D. $(11; 6)$

Lời giải:

Chọn C

Gọi $B'(x; y)$ là ảnh của B qua phép vị tự V .

Suy ra $\overrightarrow{A'B'} = (x + 5; y - 1)$ và $\overrightarrow{AB} = (-1; 3)$.

Theo giả thiết, ta có $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = 2 \cdot (-1) \\ y - 1 = 2 \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 7 \end{cases}$.

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x + 2y - 1 = 0$. Lập phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép $V_{(0; -2)}$ là:

- A. $3x + y + 3 = 0$. B. $3x + y + 6 = 0$. C. $3x + y - 6 = 0$. D. $3x + y - 3 = 0$.

Lời giải:

Chọn B

♦ Ta có $V_{(0,-2)}M(x,y) = M'(x';y') \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{x'}{2} \\ y = -\frac{y'}{2} \end{cases}$

Thay vào phương trình đường thẳng $d \Rightarrow -\frac{3}{2}x' - \frac{1}{2}y' - 3 = 0 \Rightarrow 3x' + y' + 6 = 0$.

♦ Vậy phương trình đường thẳng d' : $3x + y + 6 = 0$

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy Phép vị tự tâm $I(3;-1)$, tỉ số 2 biến parabol $(P): y = 2x^2 + 2x - 1$. Thành parabol có phương trình là:

A. $y = -x^2 + 8x - 3$. **B.** $y = x^2 + 8x + 14$. **C.** $y = 2x^2 + 4x - 5$. **D.** $y = 2x^2 - x + 1$.

Lời giải:

Chọn B

♦ Gọi (P') là ảnh của qua phép vị tự tâm $I(3;-1)$, tỉ số 2.

Đỉnh của parabol (P) có tọa độ $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Khi đó đỉnh của (P') là $V_{(I;2)}(A) = A'$.

Ta có $\overrightarrow{IA'} = 2\overrightarrow{IA}$.

Suy ra $A'(-4;-2)$.

Trong bốn đáp án thì chỉ có parabol $y = x^2 + 8x + 14$ có đỉnh $A'(-4;-2)$.

Câu 11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2 + (y-3)^2 = 4$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$. Khi đó (C') có phương trình là

A. $x^2 + (y+6)^2 = 16$.

B. $x^2 + (y-6)^2 = 16$.

C. $x^2 + (y+6)^2 = 64$.

D. $x^2 + (y-6)^2 = 64$.

Lời giải:

Chọn A

♦ Đường tròn (C) có tâm $I(0;3)$ và bán kính $R = 2$

♦ Gọi $(C') = V_{(O,-2)}(C)$ có tâm $I' = V_{(O,-2)}(I) \Rightarrow I'(0;-6)$ và bán kính R' của (C') là $R' = |k| \cdot R = 2 \cdot 2 = 4$

♦ Vậy $(C'): x^2 + (y+6)^2 = 16$

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm $A(2;-4)$ tỉ số $k = -2$. Khi đó (C') có phương trình là

A. $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 36$.

B. $(x-4)^2 + (y+6)^2 = 36$.

C. $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 16 = 0$.

D. $(x+2)^2 + (y-6)^2 = 36$.

Lời giải:

Chọn B

♦ Đường tròn (C) có tâm $I(1;-3)$ và bán kính $R = 3$

$$\diamond V_{(A;-2)}(I) = I'(x'; y') \Rightarrow \begin{cases} x' = -2 \cdot 1 + (1+2) \cdot 2 \\ y' = -2 \cdot (-3) + (1+2) \cdot (-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4 \\ y' = -6 \end{cases} \text{ và bán kính } R' \text{ của } (C') \text{ là}$$

$$R' = |k| \cdot R = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\diamond \text{ Vậy } (x-4)^2 + (y+6)^2 = 36$$

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ phép vị tự tâm O tỉ số $k=2$ biến đường tròn (C) thành đường tròn có phương trình là

A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$

B. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$

C. $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 16$

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$

Lời giải:

Chọn B

Gọi $M(x; y) \in (C)$. Qua phép vị tự tâm O tỉ số $k=2$ biến đường tròn C thành đường tròn C' thì điểm $M(x; y)$ biến thành $M'(x'; y')$ Khi đó, ta có

$$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{2} \\ y = \frac{y'}{2} \end{cases}$$

Và $(x; y) \in (C)$ nên

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{x'}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{y'}{2}-1\right)^2 = 4 \Leftrightarrow (x'-2)^2 + (y'-2)^2 = 16$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 16$.

Câu 14. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB . Khi đó phép vị tự nào sau đây biến tam giác $A'B'C'$ thành tam giác ABC ?

A. Phép vị tự tâm G , tỉ số 2 .

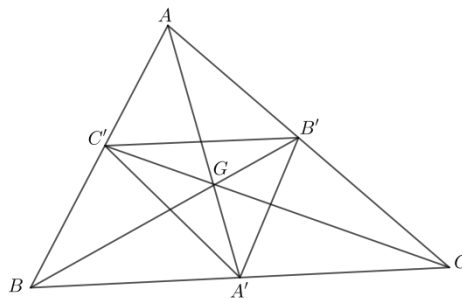
B. Phép vị tự tâm G , tỉ số $-\frac{1}{2}$.

C. Phép vị tự tâm G , tỉ số $\frac{1}{2}$.

D. Phép vị tự tâm A , tỉ số -2 .

Lời giải:

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$; $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GB'}$; $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC'}$.

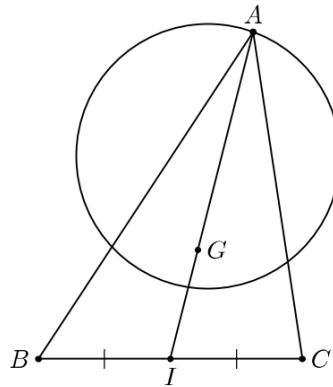
Từ đó suy ra $V_{(G,-2)}(\Delta A'B'C') = \Delta ABC$.

Câu 15. Cho tam giác ABC có B, C cố định, đỉnh A chạy trên một đường tròn $(O; R)$ cố định không có điểm chung với đường thẳng BC và G là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó, quỹ tích trọng tâm G là ảnh của đường tròn $(O; R)$ qua phép biến hình nào sau đây?

- A. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BC}$.
- B. Phép vị tự tâm I tỉ số $k = 3$, trong đó I là trung điểm của BC .
- C. Phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{1}{3}$, trong đó I là trung điểm của BC .
- D. Phép tịnh tiến theo $\vec{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$

Lời giải:

Chọn C



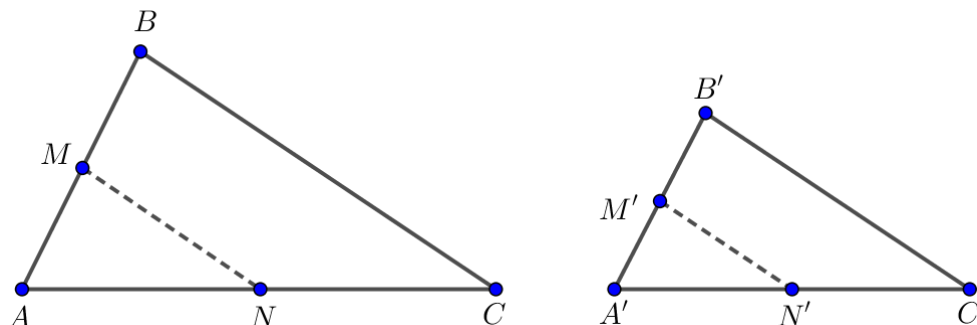
Gọi I là trung điểm của BC , khi đó I cố định. Ta có $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ suy ra G là ảnh của A qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{1}{3}$. Mà A thuộc đường tròn $(O; R)$ nên G thuộc đường tròn $(O'; R')$ là ảnh của đường tròn $(O; R)$ qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = \frac{1}{3}$.

-----HẾT-----

§7. PHÉP ĐỒNG DẠNG

I. ĐỊNH NGHĨA:

– Phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$) nếu với hai điểm M, N bất kì và ảnh M', N' tương ứng của chúng ta luôn có $M'N' = kMN$.



Nhận xét

- Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số 1.
- Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.
- Nếu thực hiện liên tiếp các phép đồng dạng ta được một phép đồng dạng.

II. TÍNH CHẤT:

Tính chất:

Phép đồng dạng tỉ số k :

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy;
- Biến đường thẳng thành đường thẳng.
- Biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó.
- Biến góc thành góc bằng nó;
- Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|R$.

III. KHÁI NIỆM HAI HÌNH ĐỒNG DẠNG:

– Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

IV. BÀI TẬP:

4.1. Tự Luận.

Bài toán xác định ảnh trong hệ tọa độ qua Phép Đồng Dạng

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa, tính chất của phép đồng dạng.

Bài 01.

Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(-1; -1)$ tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc -45°

Lời giải

Gọi d_1 là ảnh của d qua phép vị tự tâm $I(-1; -1)$ tỉ số $k = \frac{1}{2}$.

Vì d_1 song song hoặc trùng với d nên phương trình có dạng $x + y + c = 0$.

Lấy $M(1; 1) \in d$.

$$\text{Gọi } M'(x'; y') = V_{\left(I; \frac{1}{2}\right)}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \frac{1}{2}(1+1) \\ y+1 = \frac{1}{2}(1+1) \end{cases} \Leftrightarrow M'(0; 0) \text{ thuộc } d_1.$$

Vậy phương trình d_1 là $x + y = 0$.

Ảnh của d_1 (đường phân giác góc phần tư thứ hai) qua phép quay tâm O góc -45° là đường thẳng Oy .

Vậy phương trình của d' là $x = 0$.

Bài 02.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$. Ảnh của đường tròn (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(1; -1)$, tỉ số $k = \frac{1}{3}$ và phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (3; 4)$ có phương trình là

Lời giải

Gọi $M(1; 2)$; $R = 3$ là tâm và bán kính đường tròn (C) .

$$V_{(I; k)}(M) = O' \Leftrightarrow \overrightarrow{IO'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IM} \Rightarrow O'(1; 0).$$

Phép vị tự biến đường tròn tâm M thành đường tròn tâm O' bán kính $R' = \frac{1}{3}R = 1$.

$$T_{\vec{v}}(O') = O'' \Rightarrow O''(4; 4).$$

Phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$ biến đường tròn tâm O' bán kính R' thành đường tròn tâm O'' bán kính $R'' = R' = 1$.

Vậy phương trình đường tròn ảnh: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 1$.

Bài 03.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$. Gọi (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm

O , tỉ số $k = -\frac{1}{3}$ và phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (-1; 3)$. Tìm bán kính R' của đường tròn (C') .

Lời giải

Đường tròn (C) có bán kính $R = 3$.

Gọi (C_1) là ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm O , tỉ số $k = -\frac{1}{3}$, ta có (C') là ảnh của (C_1) qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (-1; 3)$.

Khi đó đường tròn (C_1) có bán kính $R_1 = |k|R = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$ và đường tròn (C') có bán kính $R' = R = 1$.

Bài 04.

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 + 12x - 16y = 0$. Phép đồng dạng F tỉ số k biến (C_1) thành (C_2) . Tìm k .

Lời giải

Ta có $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$

Suy ra (C_1) có bán kính $R_1 = 2$. $(C_2): x^2 + y^2 + 12x - 16y = 0 \Leftrightarrow (x+6)^2 + (y-8)^2 = 10^2$

Suy ra (C_2) có bán kính $R_2 = 10$. Do đó $k = \frac{R_2}{R_1} = 5$.

Bài 05.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(-1; -1)$ tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc -45° .

Lời giải

Xét điểm $A(1; 1)$ và $B(2; 0)$ nằm trên đường thẳng d .

Qua phép vị tự tâm $I(-1; -1)$ điểm A biến thành điểm A' với tọa độ thỏa mãn

$$\begin{cases} (x_{A'} + 1) = \frac{1}{2}(x_A + 1) \\ (y_{A'} + 1) = \frac{1}{2}(y_A + 1) \end{cases}. \text{ Vậy } A'(0; 0).$$

Qua phép quay tâm O góc -45° , điểm A' biến thành điểm $A''(0; 0)$.

Qua phép vị tự tâm $I(-1; -1)$ điểm B biến thành điểm B' với tọa độ thỏa mãn

$$\begin{cases} (x_{B'} + 1) = \frac{1}{2}(x_B + 1) \\ (y_{B'} + 1) = \frac{1}{2}(y_B + 1) \end{cases}. \text{ Vậy } B'\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Qua phép quay tâm O góc -45° , biến điểm B' thành điểm B'' với tọa độ thỏa mãn

$$\begin{cases} x_{B''} = \cos(-45^\circ) \cdot x_{B'} - \sin(-45^\circ) \cdot y_{B'} \\ y_{B''} = \sin(-45^\circ) \cdot x_{B'} + \cos(-45^\circ) \cdot y_{B'} \end{cases}.$$

Vậy $B'' \left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$.

Do đó đường thẳng d biến thành đường thẳng $A''B''$ có phương trình $x=0$.

4.2. Trắc nghiệm.**Câu 1.** Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A.** Phép dời hình là phép đồng dạng. **B.** Phép vị tự là phép đồng dạng.
C. Phép đồng dạng là phép dời hình. **D.** Phép vị tự không phải là phép dời hình.

Lời giải:**Chọn C**

Khi $k \neq 1$ thì phép đồng dạng không là phép dời hình.

Câu 2. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A.** Hai đường thẳng bất kì luôn đồng dạng. **B.** Hai đường tròn bất kì luôn đồng dạng.
C. Hai hình vuông bất kì luôn đồng dạng. **D.** Hai hình chữ nhật bất kì luôn đồng dạng.

Lời giải:**Chọn D**

Ví dụ hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2, AD=4$ và hình chữ nhật $MNPQ$ có $MN=3, MQ=5$

khi đó không tồn tại số thực k để thỏa mãn $\begin{cases} MN = kAB \\ MQ = kAD \end{cases}$.

Câu 3. Cho tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng với nhau theo tỉ số k . Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A.** k là tỉ số hai trung tuyến tương ứng.
B. k là tỉ số hai đường cao tương ứng.
C. k là tỉ số hai góc tương ứng.
D. k là tỉ số hai bán kính đường tròn ngoại tiếp tương ứng.

Lời giải:**Chọn C**

Vì hai tam giác đồng dạng thì các góc tương ứng bằng nhau.

Câu 4. Mọi phép dời hình cũng là phép đồng dạng với tỉ số k bằng

- A.** $k=1$. **B.** $k=-1$. **C.** $k=0$. **D.** $k=2$.

Lời giải:**Chọn A**

Tính chất: Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số $k=1$.

Câu 5. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A.** Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số $k=1$.
B. Phép đồng dạng biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

C. Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

D. Phép đồng dạng bảo toàn độ lớn góc.

Lời giải:

Chọn B

Phép đồng dạng biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó hoặc cắt nó.

Câu 6. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $M(2;4)$. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép đối xứng qua trục Oy sẽ biến điểm M thành điểm nào sau đây.

A. $(1;2)$.

B. $(-2;4)$.

C. $(-1;2)$.

D. $(1;-2)$.

Lời giải:

Chọn C

$$\text{Gọi } M'(x'; y') = V_{\left(O; \frac{1}{2}\right)}(M(x; y)) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2 \end{cases} \Rightarrow M'(1; 2)$$

$$\text{Gọi } M''(x''; y'') = D_{Oy}(M')$$

$$\Rightarrow M'' = (-1; 2).$$

Câu 7. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(-1; -1)$ tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc -45°

A. $y = 0$.

B. $x = 0$.

C. $y = x$.

D. $y = -x$.

Lời giải:

Chọn B

Gọi d_1 là ảnh của d qua phép vị tự tâm $I(-1; -1)$ tỉ số $k = \frac{1}{2}$.

Vì d_1 song song hoặc trùng với d nên phương trình có dạng $x + y + c = 0$.

Lấy $M(1; 1) \in d$.

$$\text{Gọi } M'(x'; y') = V_{\left(I; \frac{1}{2}\right)}(M) \Leftrightarrow \overline{IM'} = \frac{1}{2} \overline{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \frac{1}{2}(1+1) \\ y+1 = \frac{1}{2}(1+1) \end{cases} \Leftrightarrow M'(0; 0) \text{ thuộc } d_1.$$

Vậy phương trình d_1 là $x + y = 0$.

Ảnh của d_1 (đường phân giác góc phần tư thứ hai) qua phép quay tâm O góc -45° là đường thẳng Oy .

Vậy phương trình của d' là $x = 0$.

Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc 90° sẽ biến (C) thành đường tròn nào sau đây?

A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$.

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$.

D. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Lời giải:

Chọn D

Đường tròn (C) có tâm $I(2;2)$ và bán kính $R=2$.

Suy ra phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{1}{2}$ biến (C) thành đường tròn (C') có tâm $I'(1;1)$, bán kính $R'=1$.

Phép quay $Q_{(O;90^\circ)}$ biến (C') thành (C'') có tâm $I''(-1;1)$, bán kính $R''=R'=1$.

Vậy phương trình đường tròn (C'') là: $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Câu 9. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-2;-3), B(4;1)$. Phép đồng dạng tỉ số $k = \frac{1}{2}$ biến điểm A thành A', biến B thành B'. Tính độ dài A'B'

A. $A'B' = \sqrt{13}$.

B. $A'B' = 2\sqrt{13}$.

C. $A'B' = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

D. $A'B' = 5\sqrt{2}$.

Lời giải:

Chọn A

Phép đồng dạng tỉ số $k = \frac{1}{2}$ biến điểm A thành A', biến B thành B' thì

$$A'B' = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{13}.$$

Câu 10. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn (C) và (C') có phương trình $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ và $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng tỉ số k, khi đó giá trị của k là

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{9}{16}$.

D. $\frac{16}{9}$.

Lời giải:

Chọn A

Đường tròn (C) có bán kính $R=3$, đường tròn (C') có bán kính $R'=4$.

Suy ra tỉ số đồng dạng $k = \frac{R'}{R} = \frac{4}{3}$.

-----HẾT-----