

Thời gian làm bài: 90 phút

Câu 1 (2 điểm)

- a) Tìm m để phương trình $\frac{mx^2 - 4mx + 10m - 12}{x - 2} = 4 - 5m$ có hai nghiệm thực phân biệt.
- b) Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - (m + 1)y = -(2m + 1) \\ (m + 1)x - y = m^2 - 1 \end{cases}$. Tìm m để hệ phương trình trên có nghiệm (x, y) thỏa $x^2 + y^2 = 1$.

Câu 2 (2 điểm) Giải các phương trình sau

- a) $\sqrt{x - 1}[(3x - 4)^4 - 2(3x - 4)^2 - 8] = 0$.
- b) $(4x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 2x^2 + 2x + 1$.

Câu 3 (2 điểm) Tìm a, b sao cho đường thẳng $x = 1$ là trục đối xứng của parabol $(P) : y = x^2 + ax + b$ và đỉnh S thuộc đường thẳng $(d) : y = 2x - 6$.

Câu 4 (1 điểm) Chứng minh giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào x, y

$$A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}[\cos 2x + \cos 2y + \cos(2x + 2y)] - 2 \cos x \cos y \cdot \cos(x + y).$$

Câu 5 (4 điểm) Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A(3, 3), B(-1, -5), C(6, -6)$.

- a) Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
- b) Tìm điểm D sao cho tứ giác ABDC là hình bình hành.
- c) Tìm điểm E thỏa hệ thức $\overrightarrow{CA} - 9\overrightarrow{CB} - 6\overrightarrow{CE} = \vec{0}$. Chứng minh BE vuông góc với AD.
- d) Tìm điểm M thuộc đường thẳng $x = 1$ sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 24$.

– HẾT –

ĐÁP ÁN

- Câu 1.** a) • Điều kiện: $x \neq 2$.
- Phương trình tương đương $mx^2 + (m - 4)x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(mx - 4) = 0$.
- $\Leftrightarrow x = -1$ (nhận) hoặc $mx - 4 = 0$.
- Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{4}{m} \neq 2 \\ \frac{4}{m} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 2 \\ m \neq -4. \end{cases}$
- b) • Đặt $D = m^2 + m + 1, D_x = m(m^2 + m + 1), D_y = m^3 + 2m^2 + 2m + 1 = (m + 1)(m^2 + m + 1)$.
- Ta có $m^2 + m + 1 = (m + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall m$, nên hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = \frac{D_x}{D} = m, y = \frac{D_y}{D} = m + 1$.
- Ta có $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow m^2 + (m + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = -1$.
- Câu 2.** a) • Điều kiện: $x \geq 1$.
- Phương trình tương đương $x = 1$ hoặc $(3x - 4)^4 - 2(3x - 4)^2 - 8 = 0$ (1).
- (1) $\Leftrightarrow (3x - 4)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = \frac{2}{3}$ (loại).
- Vậy phương trình có nghiệm $S = \{1, 2\}$.
- b) • Nhận thấy nếu x là nghiệm của phương trình thì $x \geq \frac{1}{4}$.
- Đặt $t = \sqrt{x^2 + 1}$. Phương trình trở thành:
 $2t^2 - (4x - 1)t + 2x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (t - \frac{1}{2})(t - 2x + 1) = 0$
 $\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ hoặc $t = 2x - 1$.
- Trường hợp $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$ (loại).
- Trường hợp $t = 2x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$.
- Vậy phương trình có nghiệm $S = \{\frac{4}{3}\}$.
- Câu 3.** • (P) có trục đối xứng $x = 1$ suy ra $-\frac{a}{2} = 1 \Leftrightarrow a = -2$.
- Gọi $S(x_0, y_0)$, suy ra $x_0 = 1$.
- $S \in y = 2x - 6$, suy ra $y_0 = -4$.

- $S \in (P)$, suy ra $-4 = 1 - 2 + b \Leftrightarrow b = -3$.
 Vậy $(P) : y = x^2 - 2x - 3$.

Câu 4.

- $A = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}[2\cos(x+y)\cos(x-y) + 2\cos^2(x+y) - 1] - 2\cos x \cos y \cos(x+y)$.
- $A = 1 + \cos(x+y)[\cos(x-y) + \cos(x+y) - 2\cos x \cos y]$
- $A = 1 + \cos(x+y)(2\cos x \cos y - 2\cos x \cos y) = 1$

Câu 5.

a) • Gọi $I(x_0, y_0)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

- $\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0 - 3)^2 + (y_0 - 3)^2 = (x_0 + 1)^2 + (y_0 + 5)^2 \\ (x_0 - 3)^2 + (y_0 - 3)^2 = (x_0 - 6)^2 + (x_0 + 6)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -2 \end{cases}$
- Vậy $I(3; -2)$.

b) • Đặt $D(x_D, y_D)$.

- $\overrightarrow{AB} = (-4, -8), \overrightarrow{CD} = (x_D - 6, y_D + 6)$.
- $ABDC$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow x_D = 2, y_D = -14$.
- Vậy $D(2, -14)$.

c) • Đặt $E(x_E, y_E)$.

- $\overrightarrow{CA} = (-3, 9), \overrightarrow{CB} = (-7, 1), \overrightarrow{CE} = (x_E - 6, y_E + 6)$.
- $\overrightarrow{CA} - 9\overrightarrow{CB} - 6\overrightarrow{CE} = \vec{0} \Leftrightarrow x_E = 16, y_E = -6$. Vậy $E(16, -6)$.
- $\overrightarrow{BE} = (17, -1), \overrightarrow{AD} = (-1, -17)$.
- $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ nên BE vuông góc với AD .

d) • Gọi $M(1, y_M)$.

- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 24 \Leftrightarrow y_M^2 + 11y_M + 18 = 0 \Leftrightarrow y_M = -2$ hoặc $y_M = -9$.
- Vậy có hai điểm $M_1(1, -2)$ và $M_2(1, -9)$ thỏa yêu cầu đề bài.

Thời gian làm bài: 90 phút

Câu 1 (2 điểm)

- a) Tìm a để phương trình $\frac{x-a}{x-2} + \frac{x-2}{x} = 2$ có nghiệm.
- b) Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + (m+1)y = 7 \\ mx + (m^2-1)y = 5m-3 \end{cases}$ (m là tham số).
- i. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x_0, y_0) .
- ii. Tìm m nguyên để x_0, y_0 là các số nguyên.

Câu 2 (1 điểm) Cho $(P): y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Biết (P) tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 8. Tìm a, b, c .

Câu 3 (2 điểm) Giải các phương trình sau

- a) $\sqrt{(4x^2 - 4x + 1)(4x + 1)} = 4x + 1$.
- b) $\sqrt{x+1} - 4x = \frac{16-4x^2}{\sqrt{x+1}}$.

Câu 4 (1 điểm) Cho $\sin x = \frac{1}{3}$. Hãy tính giá trị biểu thức

$$A = (1 + \cot^2 x) \cos 2x - 18 \sin 2x \cdot \tan x.$$

Câu 5 (2 điểm) Cho điểm $A(3, 2), B(2, 0), C(5, 0)$.

- a) Tìm tọa độ hình chiếu của H của A lên đường thẳng BC .
- b) Gọi I là trung điểm của AC . Tìm điểm M trên đường thẳng BC sao cho $(MA+MI)$ nhỏ nhất.

Câu 6 (2 điểm) Cho tam giác ABC có $AB = 2a, AC = 3a, BC = a\sqrt{7}$. Gọi M là trung điểm AB , N là điểm trên cạnh AC sao cho $AN=2CN$ và D là điểm trên đoạn thẳng MN sao cho $2DM = DN$.

- a) Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
- b) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài AD theo a .

– HẾT –

ĐÁP ÁN

- Câu 1.** a)
 - Điều kiện $x \neq 2 \wedge x \neq 0$.
 - Phương trình tương đương $ax - 4 = 0$.
 - Để phương trình có nghiệm thì $\begin{cases} a \neq 0 \\ \frac{4}{a} \neq 2 \\ \frac{4}{a} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \neq 0 \wedge a \neq 2$.
- b) i.
 - Đặt $D = (m+1)(m-2)$, $D_x = 2(m+1)(m-2)$, $D_y = 3(m-2)$.
 - Hệ có nghiệm duy nhất $(x_0, y_0) \Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1 \wedge m \neq 2$.
- ii.
 - Khi hệ có nghiệm duy nhất, ta có $x_0 = \frac{D_x}{D} = 2$, $y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{3}{m+1}$
 - Ta có $y_0 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m+1 \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Suy ra $m = -4, m = -2, m = 0$ hoặc $m = 2$ (loại).
 - Vậy $m \in \{-4, -2, 0\}$
- Câu 2.**
 - (P) cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 8, suy ra $c = 8$.
 - Tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2, suy ra phương trình $ax^2 + bx + 8 = 0$ có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 2$, suy ra $b^2 - 32a = 0$, $\frac{-b}{2a} = 2$.
Suy ra $b = -4a$, suy ra $16a^2 - 32a = 0$, suy ra $a = 2, b = -8$.
 - Vậy $a = 2, b = -8, c = 8$.
- Câu 3.** a)
 - Phương trình tương đương $\begin{cases} (4x^2 - 4x + 1)(4x + 1) = (4x + 1)^2 \\ 4x + 1 \geq 0 \end{cases}$
 - $\Leftrightarrow \begin{cases} (4x + 1)(4x^2 - 8x) = 0 \\ x \geq -\frac{1}{4} \end{cases}$
 - $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -\frac{1}{4}$.
- b)
 - Điều kiện: $x > -1$.
 - Phương trình tương đương $x + 1 - 4x\sqrt{x+1} = 16 - 4x^2$
 - $\Leftrightarrow (2x - \sqrt{x+1})^2 = 16$
 - $\Leftrightarrow 2x - \sqrt{x+1} = \pm 4$.
 - Trường hợp 1: $2x - 4 = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 16x + 16 = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$.
 - Trường hợp 2: $2x + 4 = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (2x + 4)^2 = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ Phương trình vô nghiệm.
 - Vậy phương trình đã có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Câu 4. • $A = \frac{1}{\sin^2 x} (1 - 2 \sin^2 x) - 18.2. \sin x. \cos x. \frac{\sin x}{\cos x} = 9(1 - \frac{2}{9}) - \frac{36}{9} = 3$

Câu 5. a) • Dễ thấy BC nằm trên trục Ox.

• Do đó $H(3, 0)$ là hình chiếu của A lên BC.

b) Gọi $I(8, 1)$ là trung điểm của AC, $D(3, -2)$ là điểm đối xứng của A qua Ox, $M(x_M, 0)$ thuộc đường thẳng BC.

$$\text{Khi đó } MA + MI = MD + MI \geq DI = \sqrt{10}.$$

• Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của DE và BC.

• Từ đó tìm được $M(3.67, 0)$

Câu 6. a) • $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MD}.$

• $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND}.$

• Cộng theo vế hai phương trình ta được $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}.$

b) • $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = 3a^2$

• $AD^2 = \overrightarrow{AD}^2 = (\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AN})^2 = \frac{4}{9}AM^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} + \frac{1}{9}AN^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{4a^2}{9} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{8a^2}{9} + \frac{4a^2}{9} = \frac{12a^2}{9}$

Suy ra $AD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$

Thời gian làm bài: 90 phút

Câu 1 (2 điểm)

a) Tìm m để phương trình $\frac{(x-2)(mx+4)}{\sqrt{x-1}} = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

b) Giải phương trình $(2x-1)\sqrt{x-1} = -2x^2 + 7x - 3$.

Câu 2 (2 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 3m + 1 \\ x - my = 2 - m - m^2 \end{cases}$ (m là tham số).

a) Chứng tỏ hệ có nghiệm duy nhất (x_0, y_0) với mọi giá trị của m .

b) Tìm m để hệ có nghiệm (x_0, y_0) thỏa $2x_0 = y_0^2$.

Câu 3 (2 điểm)

a) Cho $(P) : y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Biết (P) có đỉnh $S(1, -2)$ và đi qua điểm $A(0, -1)$.
Tìm a, b, c .

b) Chứng minh $P = \frac{2 \cos^3 x \cdot \sin x}{\sin 2x} - \frac{\cos^3(\frac{\pi}{2} + x) + \cos(x - \frac{3\pi}{2})}{\sin(\pi - x)} = 2$.

Câu 4 (2 điểm) Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{2}, BC = 5a, \widehat{ABC} = 135^\circ$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh AC sao cho $AM = \frac{3}{2}MC$.

a) Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

b) Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$ và tính độ dài BM theo a .

Câu 5 (2 điểm) Cho tam giác ABC có $A(0, 3), B(2, -4), C(8, -3)$.

a) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

b) Đường tròn đường kính AC cắt trục tung tại điểm E (E khác A). Tìm tọa độ điểm E.

– HẾT –

ĐÁP ÁN

- Câu 1.** a) • Điều kiện: $x > 1$.
• Phương trình tương đương $x = 2$ (nhận) hoặc $mx + 4 = 0$.
• Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{4}{m} \neq 2 \\ -\frac{4}{m} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 0 \\ m \neq -2 \end{cases}$
- b) • Điều kiện: $x \geq 1$.
• Phương trình tương đương $(2x - 1)\sqrt{x - 1} = (2x - 1)(3 - x)$
 $\Leftrightarrow (2x - 1)(\sqrt{x - 1} + x - 3) = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (loại) hoặc $\sqrt{x - 1} = 3 - x$ (1).
• (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x - 1 = (3 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.
• Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.
- Câu 2.** a) • Đặt $D = -m^2 - 1$, $D_x = -2m^2 - 2$, $D_y = -(m + 1)(m^2 + 1)$.
• Vì $D \neq 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình luôn có nghiệm duy nhất (x_0, y_0) .
b) • Hệ có nghiệm duy nhất $x_0 = \frac{D_x}{D} = 2, y_0 = \frac{D_y}{D} = m + 1$.
• $2x_0 = y_0^2 \Leftrightarrow 4 = (m + 1)^2 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = -3$.
- Câu 3.** a) • $A(0, -1) \in (P)$ suy ra $c = -1$.
• $S(1, -2) \in (P)$ suy ra $-2 = a + b + c$.
• (P) có trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a} = 1$.
• Từ đó suy ra $a = 1, b = -2, c = -1$.
• Vậy $(P) = x^2 - 2x - 1$.
b) • $P = \frac{2 \cos^3 x \sin x}{2 \sin x \cos x} + \frac{\sin^3 x + \sin x}{\sin x} = \cos^2 x + \sin^2 x + 1 = 2$.
- Câu 4.** a) • $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos 135^\circ = a\sqrt{2} \cdot 5a \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -5a^2$.
b) • $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AM}$.
• $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{CM}$.
• Cộng vế theo vế hai phương trình trên : $5\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.
• $\overrightarrow{BM}^2 = (\frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC})^2 = \frac{4}{25}\overrightarrow{BA}^2 + \frac{9}{25}\overrightarrow{BC}^2 + \frac{12}{25}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{173}{25}a^2$.
Suy ra $BM = \frac{a\sqrt{173}}{5}$

- Câu 5.** a) • Đặt $D(x_D, y_D)$. $\overrightarrow{AB} = (2, -7)$, $\overrightarrow{DC} = (8 - x_D, -3 - y_D)$.
• ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow x_D = 6, y_D = 4$.
• Vậy $D(6, 4)$.
- b) • Đặt $E(0, y_E) \in Oy$.
• $\overrightarrow{AE} = (0, y_E - 3)$, $\overrightarrow{CE} = (-8, y_E + 3)$.
• E thuộc đường tròn đường kính AC $\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \Leftrightarrow y_E = \pm 3$.
• Vì $E \neq A$ nên $E(0, -3)$.

Thời gian làm bài: 90 phút

Câu 1 (2 điểm)

a) Tìm m để phương trình $\frac{(x-3)(mx+3)}{\sqrt{x-1}-1} = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

b) Giải phương trình $\sqrt{5x-2} = \frac{4(3-x)}{\sqrt{6-2x}}$.

Câu 2 (2 điểm) Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} (m+1)x - my = 3m+2 \\ x + 2y = 3m+2 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số}).$$

a) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x_0, y_0) .

b) Tìm m để hệ có nghiệm (x_0, y_0) thỏa $|2x_0 - y_0| = 3$.

Câu 3 (1 điểm) Cho $P = \cos(x+y)\cos(x-y) + \sin(x+y)\sin(x-y) + 2\sin^2 y - 1$. Chứng minh giá trị của P không phụ thuộc vào giá trị của x, y .

Câu 4 (1 điểm) Cho parabol (P): $y = x^2 + ax + b$ với $a < 0$. Tìm a, b biết (P) tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$ tại đỉnh và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

Câu 5 (2 điểm) Cho tam giác ABC có $A(8, 0), B(5, -4), C(1, 4)$.

a) Tìm hình chiếu của A lên đường thẳng BC.

b) Tìm điểm M thuộc trung tuyến sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 6 (2 điểm) Cho hình thang vuông ABCD có đường cao $AB = 2a, AD = a$ và $BC = 4a$.

a) Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

b) Gọi I là trung điểm CD, J là điểm thỏa $\overrightarrow{BJ} = m\overrightarrow{BC}$, (m là tham số). Tìm m sao cho AJ vuông góc BI.

– HẾT –

ĐÁP ÁN

- Câu 1** a) • Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \sqrt{x-1}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2. \end{cases}$
- Khi đó phương trình tương đương $x = 3$ (nhận) hoặc $mx + 3 = 0$ (1).
 - Nếu $m = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow 3 = 0$ (vô lý).
 - Nếu $m \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x = -\frac{3}{m}$.
 - Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} -\frac{3}{m} \neq 3 \\ -\frac{3}{m} \neq 2 \\ -\frac{3}{m} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-3, 0) \setminus \{-1, -\frac{3}{2}\}.$
- b) • Điều kiện: $\begin{cases} 5x-2 \geq 0 \\ 6-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq x < 3.$
- Khi đó phương trình tương đương $\sqrt{5x-2} = 2\sqrt{2}\sqrt{3-x} \Leftrightarrow 5x-2 = 8(3-x) \Leftrightarrow x = 2.$
- Câu 2** a) • Đặt $D = 3m + 2, D_x = (m+2)(3m+2), D_y = (3m+2)m.$
- Để hệ có nghiệm duy nhất (x_0, y_0) thì $D \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{2}{3}.$
- b) • Khi $m \neq -\frac{2}{3}$, ta có $\begin{cases} x_0 = m+2 \\ y_0 = m \end{cases}.$
- $|2x_0 - y_0| = 3 \Leftrightarrow |m+4| = 3 \Leftrightarrow m = -1 \vee m = -7.$
- Câu 3** • $P = \cos(x+y)\cos(x-y) + \sin(x+y)\sin(x-y) + 2\sin^2 y - 1$
- $P = \cos[(x+y) - (x-y)] + 2\sin^2 y - 1$
 - $P = \cos 2y + 2\sin^2 y - 1 = 1 - 2\sin^2 y + 2\sin^2 y - 1 = 0$
- Câu 4** • (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 suy ra $b = 2$ (1).
- (P) tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$ tại đỉnh suy ra $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{a^2 - 4b}{4} = 1.$ (2)
 - Từ (1) và (2) suy ra $b = 2, a = \pm 2.$
 - Theo giả thiết $a < 0$, ta có (P) cần tìm là $y = x^2 - 2x + 2.$
- Câu 5** a) • Gọi $H(x_0, y_0)$ là hình chiếu của A lên BC.
- $\overrightarrow{AH} = (x_0 - 8, y_0), \overrightarrow{BC} = (-4, 8), \overrightarrow{CH} = (x_0 - 1, y_0 - 4).$
 - $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{CH} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(x_0 - 8) + 8y_0 = 0 \\ \frac{x_0 - 1}{-4} = \frac{y_0 - 4}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 4 \wedge y_0 = -2.$

- Vậy $H(4, -2)$ là điểm cần tìm.
- b) • Gọi $M(0, y_M)$ thuộc trục tung.
- $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3y_M^2 + 122 \geq 122$
- Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $y_M = 0$.
Vậy $M(0, 0)$ thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 6

a) • $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = -4a^2 + 4a^2 = 0.$

b) • Ta có $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{BC}.$

• Ta có $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$

• $AJ \perp BI \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = 0$
 $(\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{BC})(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) = 0$

• $\Leftrightarrow -2a^2 + 2ma^2 + 8ma^2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{5}.$

Thời gian làm bài: 90 phút

Câu 1 (1 điểm) Tìm m để phương trình $\frac{(x-3)(x-m)}{\sqrt{1-x}-1} = 0$ vô nghiệm.

Câu 2 (1 điểm) Cho parabol $(P): y = x^2 + bx + c$. Tìm b, c biết (P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$ và (P) cắt đường thẳng $(d): y = -x + 1$ tại điểm có tung độ bằng 0.

Câu 3 (1 điểm) Cho $\tan x = \frac{1}{2}$. Tính $A = \frac{\cos(\frac{5\pi}{2} - x) - \cos x}{\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})}$.

Câu 4 (2 điểm) Giải phương trình

a) $(x+2)\sqrt{19-2x} = x^2 - 4$.

b) $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{2}$.

Câu 5 (1 điểm) Cho hệ phương trình $\begin{cases} m\sqrt{x} + y = 4 \\ \sqrt{x} + my = 2m + 2 \end{cases}$.

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

Câu 6 (2 điểm) Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2AD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC.

a) Tính $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{DM}$.

b) Gọi E là điểm thỏa $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB}$. Tìm x để DE vuông góc AN.

Câu 7 (2 điểm) Trong mặt phẳng Oxy cho $A(3, 1), B(7, 3), C(2, -1)$.

a) Tìm tọa độ điểm I thỏa $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $(d): x - y + 1 = 0$ thỏa $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 27$.

– HẾT –

ĐÁP ÁN

Câu 1 • Điều kiện $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ \sqrt{1-x}-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \neq 0. \end{cases}$

• $(1) \Leftrightarrow x = 3$ (loại) hoặc $x = m$.

• Để phương trình vô nghiệm thì $m = 0$ hoặc $m > 1$.

Câu 2 • Gọi $A(1, 0)$ là giao điểm của (P) và (d) .

• $A(1, 0) \in (P)$ suy ra $0 = 1 + b + c$. (1)

• (P) có trục đối xứng $x = 2$, suy ra $-\frac{b}{2} = 2$. (2)

• Từ (1) và (2) ta được $b = -4, c = 3$.

Câu 3 Ta có

$$A = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = -\frac{1}{3}$$

Câu 4 a) • Điều kiện: $x \leq \frac{19}{2}$.

• $(1) \Leftrightarrow (x+2)(\sqrt{19-2x}-x+2) = 0$

• $x = -2$ (nhận) hoặc $\sqrt{19-2x} = x-2$. (*)

• $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 19-2x = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = -3 \text{ hoặc } x = 5 \end{cases}$

• Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2, 5\}$.

b) • Điều kiện: $x > 1$ hoặc $x < -1$.

• Dễ thấy nếu phương trình có nghiệm x thì $x > 0$. Do đó ta chỉ xét $x > 0$.

• Khi đó phương trình

• $\Leftrightarrow \left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2 = 8$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{x^2}{x^2-1} = 8$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} + 1\right)^2 = 9$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} + 1 = 3$

$\Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2-1} = 4$

$\Leftrightarrow (x^2-2)^2 = 0$

• $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

• So sánh với điều kiện có nghiệm ta có $S = \{\sqrt{2}\}$

Câu 5 • Đặt $u = \sqrt{x}, u \geq 0$.

• Hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases} mu + y = 4 \\ u + my = 2m + 2 \end{cases} \quad (*)$$

• Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất (u, y) với $u \geq 0$.

• Đặt $D = m^2 - 1, D_x = 2m - 2, D_y = 2(m + 2)(m - 1)$.

• Để hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất thì $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

• Khi đó $u = \frac{D_x}{D} = \frac{2}{m + 1}$.

• Để $u \geq 0$ thì $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

• Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \in (-1, -\infty) \setminus \{1\}$.

Câu 6. a) • $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{DM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{DA} = 2a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$.

b) • Để DE vuông góc AN thì $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$.

• $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AN} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) = (\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) = -\frac{a^2}{2} + x \cdot 4a^2$

• Như vậy $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AN} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$.

Câu 7. a) • Đặt $I(x, y)$. Ta có $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = (-2x, -4 - 2y)$.

• $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = -2$.

b) • Gọi $M(x_0, x_0 + 1) \in (d)$.

• $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 27 \Leftrightarrow 6x_0^2 - 21x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3 \vee x_0 = \frac{1}{2}$.

• Vậy $M_1(3, 4), M_2(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ là hai điểm cần tìm.

Thời gian làm bài: 90 phút

Ghi chú: đề thi gồm **1 trang**, học sinh không được sử dụng tài liệu.

Câu 1 (1 điểm) Tìm m để phương trình $\frac{(x-1)(x-3m)}{\sqrt{x-2}+1} = 0$ vô nghiệm

Câu 2 (1 điểm) Gọi (P) là đồ thị của hàm số: $y = x^2 + bx + c$ ($b, c \in \mathbb{R}$). Biết các điểm $A(1; -4)$, $B(2; -3)$, thuộc (P) .
Tìm tọa độ giao điểm của (P) và (P') , với (P') là đồ thị của hàm số $y = (2x - 1)^2 - 4$

Câu 3 (1 điểm) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + \frac{1}{m}\sqrt{y} = 4 \\ \frac{1}{m}x + \sqrt{y} = \frac{2}{m} + 2 \end{cases}$, với m là tham số và $m \neq 0$. Định
 m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Câu 4 (2 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 4$

b) $x + \frac{3x}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{35}{4}$

Câu 5 (1 điểm) Chứng minh đẳng thức: $\tan^2 a - \tan^2 b = \frac{\sin(a+b) \cdot \sin(a-b)}{\cos^2 a \cdot \cos^2 b}$

Câu 6 (1 điểm) Cho tam giác ABC có các đỉnh $A(-1; 3)$, $B(-3; -3)$, $C(2; 2)$. Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông và tìm trục tâm tam giác ABC .

Câu 7 (3 điểm) Cho hình bình hành $ABCD$ với $AB = 6a$, $AD = 3a$, $\angle ABC = 60^\circ$. Gọi M, N thỏa: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$, $3\overrightarrow{ND} + 2\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) Tính độ dài cạnh AN theo a .

c) Gọi G là trọng tâm tam giác AMN . Tìm x và y thỏa: $\overrightarrow{BG} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BD}$.

– HẾT –

ĐÁP ÁN

- Câu 1**
- Điều kiện: $x \geq 2$
 - $\frac{(x-1)(x-3m)}{\sqrt{x-2}+1} = 0 \quad (1)$
- $$\Leftrightarrow (x-1)(x-3m) = 0$$
- $$\Leftrightarrow x-3m = 0 \quad (2) \text{ vì } x \geq 2$$
- Để phương trình (1) vô nghiệm thì (2) phải vô nghiệm
- $$\Rightarrow 3m < 2 \Rightarrow m < \frac{2}{3}$$
-

- Câu 2**
- $A(1; -4), B(2; -3)$ thuộc (P) , ta có:
 - $\begin{cases} 1+b+c = -4 \\ 4+2b+c = -3 \end{cases}$
- $$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$$
- Do đó $(P): y = x^2 - 2x - 3$
 - Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (P') : $x^2 - 2x - 3 = (2x-1)^2 - 4$
- $$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -3 \\ x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{35}{9} \end{cases}$$
- Vậy giao điểm của (P) và (P') là $(0; -3)$ và $\left(\frac{2}{3}; -\frac{35}{9}\right)$
-

- Câu 3**
- Ta có:
- $$D = 1 - \frac{1}{m^2}$$
- $$Dx = \frac{4m^2 - 2m - 2}{m^2}$$
- $$Dy = \frac{2m - 2}{m}$$
- Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì:
- $$\begin{cases} D \neq 0 \\ y = \frac{Dy}{D} \geq 0 \end{cases}$$
- $$\Rightarrow \begin{cases} m \neq \pm 1 \\ \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Câu 4 a) • Điều kiện: $x \geq 3$.

$$\text{Ta có } \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-5x-3} = 18-3x$$

$$\Leftrightarrow 4(2x^2-5x-3) = 9x^2-108x+324 \quad (x \leq 6)$$

$$\Leftrightarrow x^2-88x+332=0 \Leftrightarrow x=4(n), x=84(l).$$

$$\text{Vậy } S = \{4\}.$$

b) • Điều kiện: $x^2 \geq 9 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq -3 \end{cases}$

$$\bullet \quad x + \frac{3x}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{35}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{9x^2}{x^2-9} + \frac{6x^2}{\sqrt{x^2-9}} = \left(\frac{35}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^4}{x^2-9} + \frac{2 \cdot x^2 \cdot 3}{\sqrt{x^2-9}} + 9 = \left(\frac{35}{4}\right)^2 + 9$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} + 3\right)^2 = \frac{1369}{16}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} + 3 = \frac{37}{4} \\ \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} + 3 = -\frac{37}{4} \text{ loại} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow 16x^4 = 625 \cdot x^2 - 9 \cdot 625$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm 5 \\ x = \pm \frac{15}{4} \end{cases}$$

• Thử lại nghiệm ta chọn $x = 5$ hoặc $x = \frac{15}{4}$

• Vậy $x = 5$ hoặc $x = \frac{15}{4}$

Câu 5 Ta có:

$$\begin{aligned} & \tan^2 a - \tan^2 b \\ &= \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - \frac{\sin^2 b}{\cos^2 b} \\ &= \frac{\sin^2 a \cdot \cos^2 b - \sin^2 b \cdot \cos^2 a}{\cos^2 a \cdot \cos^2 b} \\ &= \frac{(\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a)(\sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a)}{\cos^2 a \cdot \cos^2 b} \\ &= \frac{\sin(a+b) \cdot \sin(a-b)}{\cos^2 a \cdot \cos^2 b} \end{aligned}$$

- Câu 6**
- $AB^2 = (-3 + 1)^2 + (-3 - 3)^2 = 40$
 - $BC^2 = (2 + 3)^2 + (2 + 3)^2 = 50$
 - $AC^2 = (2 + 1)^2 + (2 - 3)^2 = 10$
- $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$
- Vậy tam giác ABC vuông tại A và có A là trực tâm.

- Câu 7** a) Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD}$
- $MA = \frac{2}{3}AB = 4a$
 - $\angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
 - $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}) = 4a \cdot 3a \cdot \cos 120^\circ = -6a^2$

b) Tính AN

- $DN = \frac{2}{3}CN = \frac{2}{5}CD = \frac{2}{5} \cdot 6a = \frac{12}{5}a$
- Áp dụng định lý cosin cho tam giác ADN , ta có:

$$\begin{aligned} AN^2 &= AD^2 + DN^2 - 2 \cdot AD \cdot DN \cdot \cos \angle ADN \\ &= (3a)^2 + \left(\frac{12}{5}a\right)^2 - 2 \cdot 3a \cdot \frac{12}{5}a \cdot \cos 60^\circ \\ &= \frac{189}{25}a^2 \end{aligned}$$

- Do đó $AN = \frac{3\sqrt{21}}{5}a$

c) Tìm x, y thỏa: $\overrightarrow{BG} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BD}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BG} &= \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EG} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EN} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN}) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{9}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)\overrightarrow{BA} \\ &= \frac{14}{45}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BD} \end{aligned}$$

Vậy $x = \frac{14}{45}$ và $y = \frac{1}{3}$

