

**Câu 1.** Giải các phương trình sau:

1)  $1 + \sqrt{3} \sin 2x = \cos 2x$  .

2)  $9 \sin x + 6 \cos x - 3 \sin 2x + \cos 2x = 8$  .

**Câu 2.** 1) Hoa có 11 bì thư và 7 tem thư khác nhau. Hoa cần gửi thư cho 4 người bạn, mỗi người 1 thư. Hỏi Hoa có bao nhiêu cách chọn ra 4 bì thư và 4 tem thư, sau đó dán mỗi tem thư lên mỗi bì thư để gửi đi?

2) Một bài thi trắc nghiệm khách quan gồm 5 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó có 1 phương án trả lời đúng, 3 phương án sai. Tính xác suất để một học sinh làm bài thi trả lời đúng được ít nhất 3 câu hỏi?

**Câu 3.** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{10}$  trong khai triển Niuton của biểu thức  $(2+3x)^n$  biết  $n$  là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức  $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$  .

**Câu 4.** 1) Tính giới hạn sau  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{5-x^2}}{x-1}$  .

2) Cho tam giác  $ABC$  có độ dài 3 cạnh lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng tam giác đó có 2 góc trong mà số đo không vượt quá  $60^\circ$  .

**Câu 5.** Cho tứ diện  $ABCD$  .

1) Gọi  $E, F, G$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABC, ACD, ABD$  .

a) Chứng minh  $(EFG) // (BCD)$  .

b) Tính diện tích tam giác  $EFG$  theo diện tích của tam giác  $BCD$  .

2)  $M$  là điểm thuộc miền trong của tam giác  $BCD$  . Kẻ qua  $M$  đường thẳng  $d // AB$  .

a) Xác định giao điểm  $B'$  của đường thẳng  $d$  và mặt phẳng  $(ACD)$  .

b) Kẻ qua  $M$  các đường thẳng lần lượt song song với  $AC$  và  $AD$  cắt các mặt phẳng  $(ABD), (ABC)$  theo thứ tự tại  $C', D'$  . Chứng minh rằng:  $\frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} = 1$  .

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = \sqrt{\frac{AB}{MB'}} + \sqrt{\frac{AC}{MC'}} + \sqrt{\frac{AD}{MD'}}$  .

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

## HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**Câu 1.** Giải các phương trình sau:

1)  $1 + \sqrt{3} \sin 2x = \cos 2x$

2)  $9 \sin x + 6 \cos x - 3 \sin 2x + \cos 2x = 8$

**Lời giải**

1)  $1 + \sqrt{3} \sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{6} \sin 2x - \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2} = \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

2)  $9 \sin x + 6 \cos x - 3 \sin 2x + \cos 2x = 8 \Leftrightarrow (6 \cos x - 3 \sin 2x) + (\cos 2x + 9 \sin x - 8) = 0$

$$\Leftrightarrow (6 \cos x - 6 \sin x \cos x) + (1 - 2 \sin^2 x + 9 \sin x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \cos x \cdot (1 - \sin x) + (-2 \sin^2 x + 9 \sin x - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \cos x \cdot (1 - \sin x) - (2 \sin x - 7)(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)(-6 \cos x - 2 \sin x + 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 6 \cos x + 2 \sin x = 7 (*) \end{cases}$$

Phương trình (\*) vô nghiệm vì có  $a^2 + b^2 = 40 < 49 = c^2$ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ .

- Câu 2.**
- 1) Hoa có 11 bì thư và 7 tem thư khác nhau. Hoa cần gửi thư cho 4 người bạn, mỗi người 1 thư. Hỏi Hoa có bao nhiêu cách chọn ra 4 bì thư và 4 tem thư, sau đó dán mỗi tem thư lên mỗi bì thư để gửi đi?
  - 2) Một bài thi trắc nghiệm khách quan gồm 5 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó có 1 phương án trả lời đúng, 3 phương án sai. Tính xác suất để một học sinh làm bài thi trả lời đúng được ít nhất 3 câu hỏi?

**Lời giải**

1) Chọn 4 bì thư từ 11 bì thư có  $C_{11}^4$  cách.

Chọn 4 tem thư từ 7 tem thư có  $C_7^4$  cách.

Dán 4 tem thư và 4 bì thư vừa chọn có:  $4!$  cách.

Gửi 4 bì thư đã dán 4 tem thư cho 4 người bạn có:  $4!$  Cách.

Vậy có tất cả:  $C_{11}^4 \cdot C_7^4 \cdot 4! \cdot 4! = 6652800$  cách.

2) Xác suất để một học sinh trả lời đúng 1 câu là  $\frac{1}{4}$ , trả lời sai 1 câu là  $\frac{3}{4}$ .

Xác suất để một học sinh trả lời đúng đúng 3 câu là:  $C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{45}{1024}$ .

Xác suất để một học sinh trả lời đúng đúng 4 câu là:  $C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{1024}$ .

Xác suất để một học sinh trả lời đúng cả 5 câu là:  $C_5^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$ .

Vậy xác suất để một học sinh trả lời đúng ít nhất 3 câu là:  $\frac{45}{1024} + \frac{15}{1024} + \frac{1}{1024} = \frac{61}{1024}$ .

**Câu 3.** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{10}$  trong khai triển Newton của biểu thức  $(2+3x)^n$  biết  $n$  là số nguyên dương thỏa mãn hệ thức  $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$ .

#### Lời giải

Ta có:  $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1 \Leftrightarrow C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20}$ .

Lại có:  $C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + C_{2n+1}^{n+3} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$ .

Mặt khác:  $(1+1)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n + C_{2n+1}^{n+1} + C_{2n+1}^{n+2} + C_{2n+1}^{n+3} + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}$ .

$$\Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2 \cdot 2^{20} \Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2^{21} \Leftrightarrow 2n+1 = 21 \Leftrightarrow n = 10.$$

Xét khai triển Newton  $(2+3x)^{10}$ , ta có:  $(2+3x)^{10} = C_{10}^0 2^{10} + C_{10}^1 2^9 \cdot (3x)^1 + \dots + C_{10}^{10} (3x)^{10}$ .

Suy ra hệ số của số hạng chứa  $x^{10}$  là:  $C_{10}^{10} 3^{10} = 59049$ .

**Câu 4.** 1) Tính giới hạn sau  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{5-x^2}}{x-1}$ .

2) Cho tam giác  $ABC$  có độ dài 3 cạnh lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng tam giác đó có 2 góc trong mà số đo không vượt quá  $60^\circ$ .

#### Giải:

$$\begin{aligned} 1) \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{5-x^2}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2 + 2 - \sqrt{5-x^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{5-x^2}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1) \left( \sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right)} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2 + \sqrt{5-x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2 + \sqrt{5-x^2}} = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

2) Giả sử độ dài ba cạnh của tam giác  $ABC$  lần lượt là  $a, b, c > 0$ .

Không mất tính chất tổng quát giả sử  $0 < a \leq b \leq c$ .

Do ba cạnh lập thành cấp số nhân nên ta có  $b^2 = ac$ .

Áp dụng định lý Cos trong tam giác ta có:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \Leftrightarrow a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B = ac$$

$$\Leftrightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - ac}{2ac} \Leftrightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2}{2ac} - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Mặt khác } a^2 + c^2 \geq 2ac \quad \forall a, c \text{ nên } \cos B = \frac{a^2 + c^2}{2ac} - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow B \leq 60^\circ.$$

Mà  $a \leq b \Rightarrow A \leq B \leq 60^\circ$ .

Vậy tam giác  $ABC$  có 2 góc có số đo không vượt quá  $60^\circ$ .

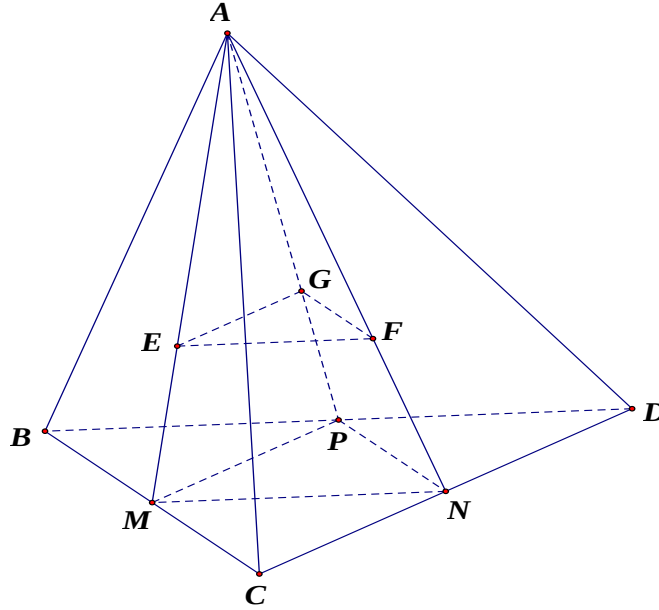
**Câu 5.** Cho tứ diện  $ABCD$ .

1) Gọi  $E, F, G$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $ABC, ACD, ABD$ .

a) Chứng minh  $(EFG) // (BCD)$ .

b) Tính diện tích tam giác  $EFG$  theo diện tích của tam giác  $BCD$ .

**Lời giải**



a) Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm  $BC, CD, DB$ .

Theo tính chất trọng tâm ta có  $\frac{SE}{SM} = \frac{SF}{SN} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF // MN$ .

Mà  $MN \subset (BCD)$  nên  $EF // (BCD)$  (1).

Chứng minh tương tự ta có  $EG // (BCD)$  (2).

Từ (1) và (2) ta có  $(EFG) // (BCD)$  (đpcm).

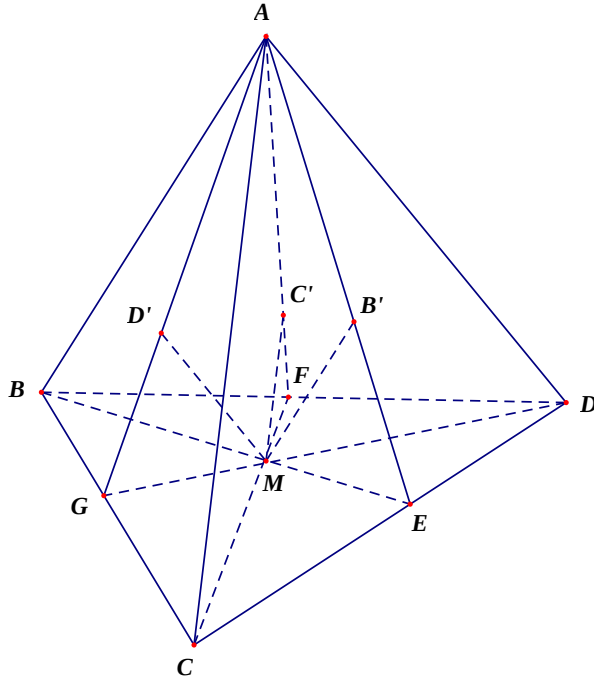
b) Ta có  $\frac{EF}{MN} = \frac{SE}{SM} = \frac{EG}{MP} = \frac{2}{3}$  (Theo định lý Talet).

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle MNP}} = \frac{\frac{1}{2} EF \cdot EG \sin \angle GEF}{\frac{1}{2} MN \cdot MP \sin \angle NMP} = \frac{EF}{MN} \cdot \frac{EG}{MP} = \frac{4}{9} \quad (3) \quad (\text{Do } (\angle EFG) = (\angle MNP))$$

$$\text{Mặt khác } \Rightarrow \frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{\frac{1}{2} MN \cdot MP \sin \angle NMP}{\frac{1}{2} BD \cdot CD \sin \angle BDC} = \frac{MN}{BD} \cdot \frac{MP}{CD} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có  $\frac{S_{\triangle EFG}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{1}{9}$ . Vậy  $S_{\triangle EFG} = \frac{1}{9} S_{\triangle BCD}$ .

2)



a) Trong mặt phẳng  $(BCD)$   $BM \cap CD = \{E\}$  .

Trong mặt phẳng  $(ABE)$  Kẻ  $MB' \parallel AB$  ( $B' \in AE$ )  $\Rightarrow d \equiv MB'$

$$\begin{cases} B' \in d \\ B' \in AE \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow d \cap (ACD) = \{B'\}$$

b) Trong mặt phẳng  $(BCD)$   $CM \cap BD = \{F\}$  ,  $DM \cap BC = \{G\}$

Trong mặt phẳng  $(ACF)$  Kẻ  $MC' \parallel AC$  ( $C' \in AF$ )

Trong mặt phẳng  $(ADG)$  Kẻ  $MD' \parallel AD$  ( $D' \in AG$ )

$$\text{Ta có: } MB' \parallel AB \Rightarrow \frac{MB'}{AB} = \frac{ME}{BE} = \frac{S_{MCD}}{S_{BCD}} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{MC'}{AC} = \frac{S_{MBD}}{S_{BCD}} \quad (2) ; \frac{MD'}{AD} = \frac{S_{MBC}}{S_{BCD}} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} = \frac{S_{MCD} + S_{MBD} + S_{MBC}}{S_{BCD}} = 1$$

$$\text{c) Ta có } \frac{MB'}{AB} + \frac{MC'}{AC} + \frac{MD'}{AD} \geq 3\sqrt[3]{\frac{MB'.MC'.MD'}{AB.AC.AD}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{MB'.MC'.MD'} \geq \frac{27}{AB.AC.AD}$$

$$T = \sqrt{\frac{AB}{MB'}} + \sqrt{\frac{AC}{MC'}} + \sqrt{\frac{AD}{MD'}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{AB.AC.AD}{MB'.MC'.MD'}}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{27.AB.AC.AD}{AB.AC.AD}}} = 3\sqrt{3}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \frac{MB'}{AB} = \frac{MC'}{AC} = \frac{MD'}{AD} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{ME}{BE} = \frac{MF}{CF} = \frac{MD}{DG} = \frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow M$  là trọng tâm  $\Delta BCD$ .