

TRƯỜNG THPT NGUYỄN DU
TỔ TOÁN



Đề cương TOÁN 11

HỌC KÌ 1



Họ và tên:

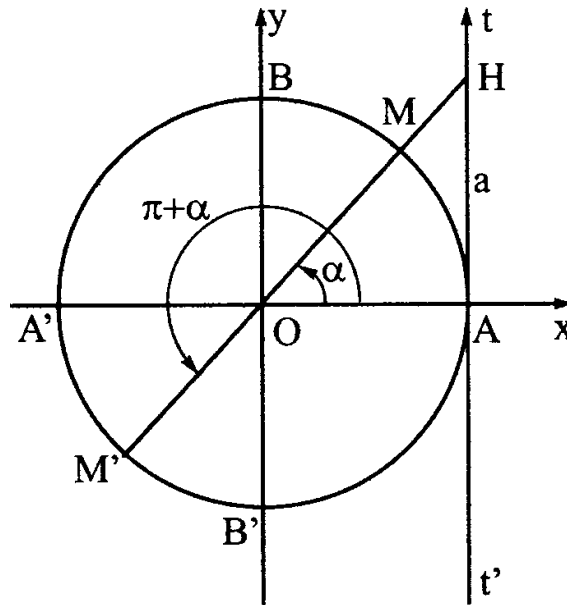
Lớp:

LƯU HÀNH NỘI BỘ
2021 - 2022

GIỚI THIỆU MÔN HỌC.....	2
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11 – Chương 1.....	4
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC	4
§ 0. ÔN TẬP CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	4
§ 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	5
§ 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN	24
§ 3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP	31
ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11 – Chương 2.....	48
TỔ HỢP – XÁC SUẤT.....	48
§ 1. QUY TẮC ĐẾM	48
§ 2. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP	51
§ 3. NHỊ THỨC NIU-TƠN.....	61
§ 4. PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ	66
§ 5. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ.....	69
HÌNH HỌC 11 – Chương 1	78
PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG.....	78
§ 1. PHÉP BIẾN HÌNH	78
§ 2. PHÉP TỊNH TIẾN.....	79
§ 2. PHÉP QUAY.....	83
§ 4. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU	89
§ 5. PHÉP VỊ TỰ	92
§ 6. PHÉP ĐỒNG DẠNG	98
HÌNH HỌC 11 – CHƯƠNG 2	101
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG.....	101
§ 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG	101
§ 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.....	113
§ 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG.....	119
§ 4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG	124
§ 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN	133
ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ 1	136
ĐỀ KIỂM TRA HỌC KỲ I.....	141

ĐẠI SỐ – GIẢI TÍCH

11



HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§ 0. ÔN TẬP CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Công thức lượng giác cơ bản

$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
-------------------------------------	-------------------------------------	---	---

2. Cung liên kết

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung phụ nhau
$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$
$\sin(-a) = -\sin a$	$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$
$\tan(-a) = -\tan a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cot a$
$\cot(-a) = -\cot a$	$\cot(\pi - a) = -\cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \tan a$

Cung hơn kém π	Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$
$\sin(\pi + a) = -\sin a$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$
$\cos(\pi + a) = -\cos a$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$
$\tan(\pi + a) = \tan a$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\cot a$
$\cot(\pi + a) = \cot a$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\tan a$

3. Công thức cộng

$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b.$	$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b.$
$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}.$	$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}.$
Hệ quả: $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$ và $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}.$	

4. Công thức nhân đôi và hạ bậc

Nhân đôi	Hạ bậc
----------	--------

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$	$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$	$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$	$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$	$\cot^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$
Nhân ba	
$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$	$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$
$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$
$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$	$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$
$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}$	$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}$
Đặc biệt	
$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$	$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

6. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$	$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} \cdot [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cdot [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$	

§ 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC

I – ĐỊNH NGHĨA

Trước hết, ta nhắc lại bảng các giá trị lượng giác của các cung đặc biệt.

Cung Giá trị lượng giác	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$
$\cot x$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



1

a) Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy tính $\sin x, \cos x$ với x là các số sau :

$$\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; 1, 5; 2; 3, 1; 4, 25; 5.$$

b) Trên đường tròn lượng giác, với điểm gốc A , hãy xác định các điểm M mà số đo của cung $\widehat{AM}$ bằng x (rad) tương ứng đã cho ở trên và xác định $\sin x, \cos x$ (lấy $\pi \approx 3,14$).

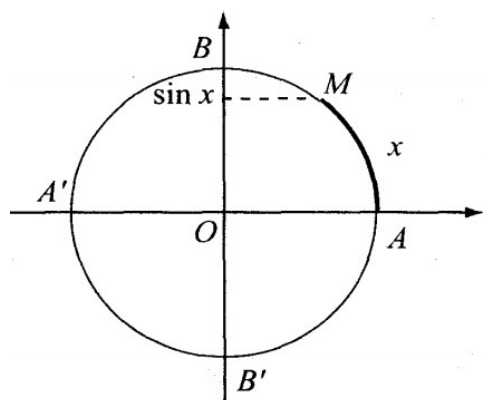
1. Hàm số sin và hàm số cosin

a) Hàm số sin

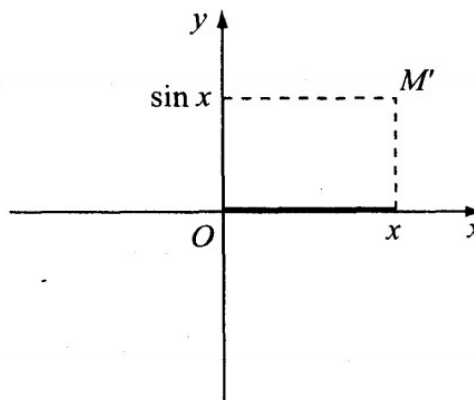
Ở lớp 10 ta đã biết, có thể đặt tương ứng mỗi số thực x với một điểm M duy nhất trên đường tròn

lượng giác mà số đo của cung $\widehat{AM}$ bằng x (rad) (h.1a). Điểm M có tung độ hoàn toàn xác định, đó chính là giá trị $\sin x$.

Biểu diễn giá trị của x trên trục hoành và giá trị của $\sin x$ trên trục tung, ta được Hình 1b.



a)



b)

Hình 1

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$

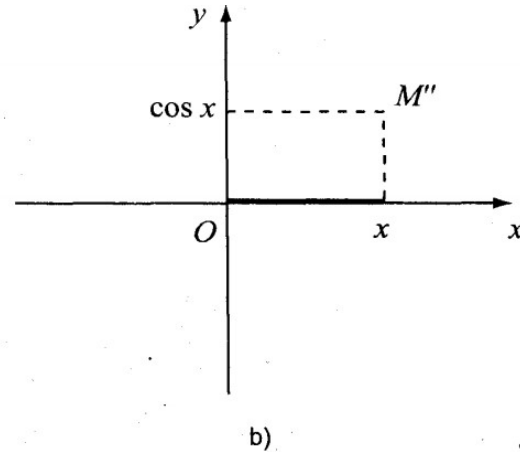
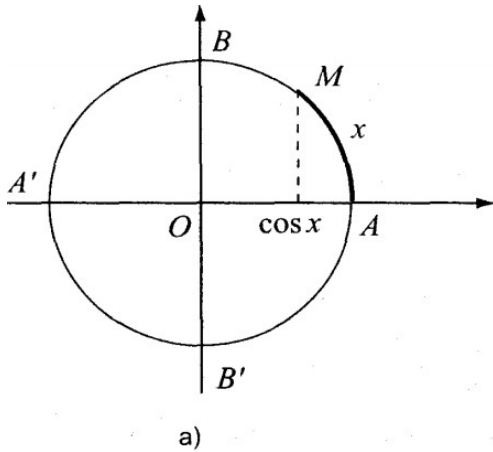
$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = \sin x$$

được gọi là **hàm số sin**, kí hiệu là $y = \sin x$.

Tập xác định của hàm số sin là $\mathbb{R}$.

b) Hàm số cosin



Hình 2

Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$

$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = \cos x$$

được gọi là **hàm số cosin**, kí hiệu là $y = \cos x$.

Tập xác định của hàm số sin là $\mathbb{R}$.

2. Hàm số tang và hàm số cotang

a) Hàm số tang

Hàm số **tang** là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (\cos x \neq 0),$$

kí hiệu là $y = \tan x$.

Vì $\cos x \neq 0$ khi và chỉ khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) nên tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) Hàm số cotang

Hàm số **cotang** là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (\sin x \neq 0),$$

kí hiệu là $y = \cot x$.

Vì $\sin x \neq 0$ khi và chỉ khi $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) nên tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là

$$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$



2

Hãy so sánh các giá trị $\sin x$ và $\sin(-x)$, $\cos x$ và $\cos(-x)$.

NHẬN XÉT

Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, từ đó suy ra các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ đều là những hàm số lẻ.

II – TÍNH TUẦN HOÀN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC



3

Tìm những số T sao cho $f(x + T) = f(x)$ với mọi x thuộc tập xác định của các hàm số sau:

- a) $f(x) = \sin x$; b) $f(x) = \tan x$.

Người ta chứng minh được rằng $T = 2\pi$ là số dương nhỏ nhất thoả mãn đẳng thức

$$\sin(x + T) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hàm số $y = \sin x$ thoả mãn đẳng thức trên được gọi là **hàm số tuần hoàn** với **chu kì** 2π .

Tương tự, hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π .

Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ cũng là những hàm số tuần hoàn, với chu kì π .

III – SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Hàm số $y = \sin x$

Từ định nghĩa ta thấy hàm số $y = \sin x$:

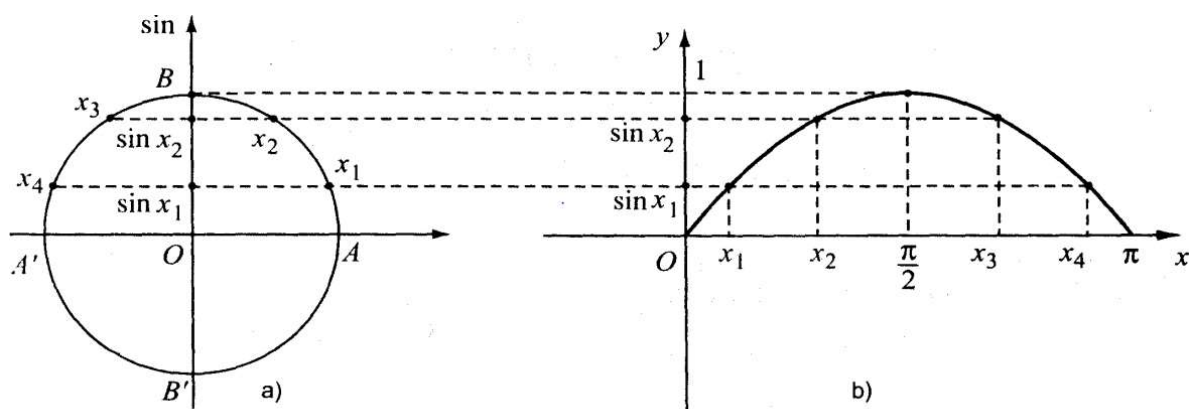
- Xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- Là hàm số lẻ ;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π .

Sau đây, ta sẽ khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = \sin x$.

a) Sự biến thiên và đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$

Xét các số thực x_1, x_2 , trong đó $0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$. Đặt $x_3 = \pi - x_2, x_4 = \pi - x_1$.

Biểu diễn chúng trên đường tròn lượng giác và xét $\sin x_i$ tương ứng ($i = 1, 2, 3, 4$) (h.3a).



Hình 3

Trên Hình 3 ta thấy, với x_1, x_2 tùy ý thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và $x_1 < x_2$ thì $\sin x_1 < \sin x_2$.

Khi đó x_3, x_4 thuộc đoạn $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ và $x_3 < x_4$ nhưng $\sin x_3 > \sin x_4$.

Vậy hàm số $y = \sin x$ *đồng biến* trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và *nghịch biến* trên $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Bảng biến thiên :

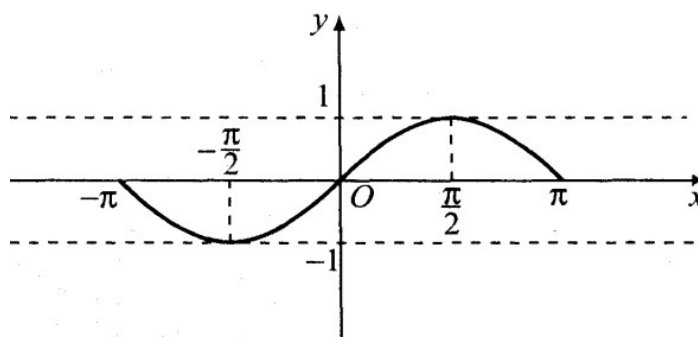
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = \sin x$	0	1	0

Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$ đi qua các điểm $(0; 0)$, $(x_1; \sin x_1)$, $(x_2; \sin x_2)$, $\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$, $(x_3; \sin x_3)$, $(x_4; \sin x_4)$, $(\pi; 0)$ (h.3b).

CHÚ Ý

Vì $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên lấy đối xứng đồ thị hàm số trên đoạn $[0; \pi]$ qua gốc tọa độ O , ta được đồ thị hàm số trên đoạn $[-\pi; 0]$.

Đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ được biểu diễn trên Hình 4.



Hình 4

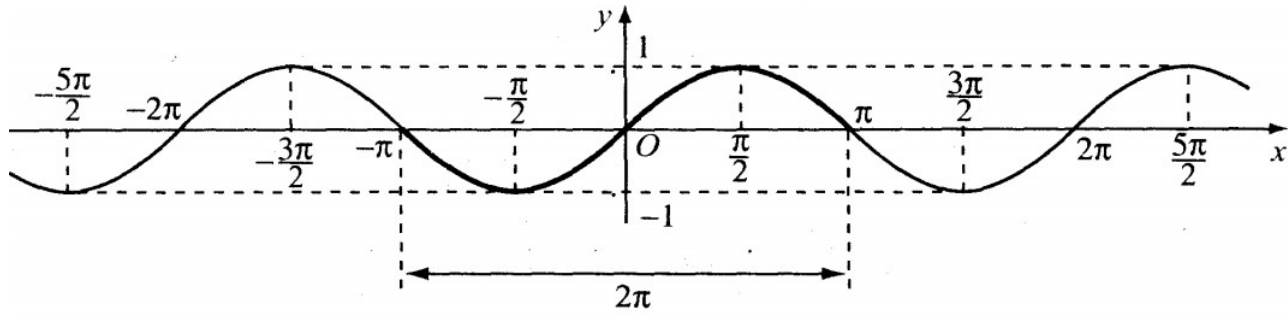
b) Đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$

Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn chu kì 2π nên với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có

$$\sin(x + k2\pi) = \sin x, k \in \mathbb{Z}.$$

Do đó, muốn có đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên toàn bộ tập xác định $\mathbb{R}$, ta tịnh tiến liên tiếp đồ thị hàm số trên đoạn $[-\pi; \pi]$ theo các vectơ $\vec{v} = (2\pi; 0)$ và $-\vec{v} = (-2\pi; 0)$, nghĩa là tịnh tiến song song với trục hoành từng đoạn có độ dài 2π .

Hình 5 dưới đây là đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$.



Hình 5

c) Tập giá trị của hàm số $y = \sin x$

Từ đồ thị ta thấy tập hợp mọi giá trị của hàm số $y = \sin x$ là đoạn $[-1; 1]$. Ta nói **tập giá trị** của hàm số này là $[-1; 1]$.

2. Hàm số $y = \cos x$

Từ định nghĩa ta thấy hàm số $y = \cos x$:

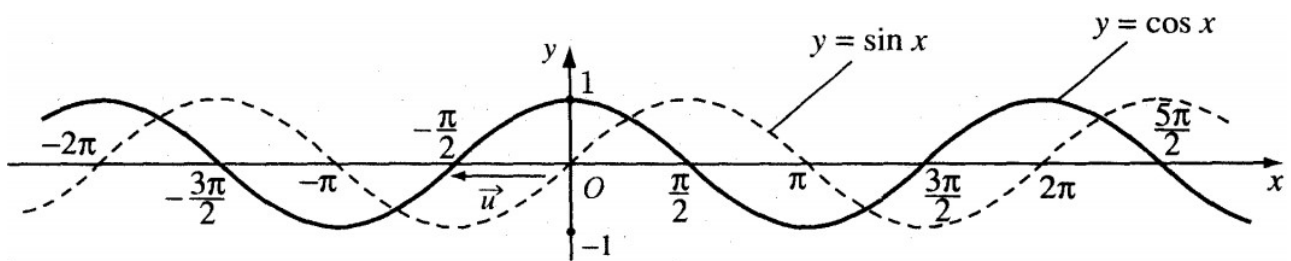
- Xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $-1 \leq \cos x \leq 1$;
- Là hàm số chẵn ;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì 2π .

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có đẳng thức

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

Từ đó, bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ theo vectơ $\vec{u} = \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ (sang trái một đoạn có

độ dài bằng $\frac{\pi}{2}$, song song với trục hoành), ta được đồ thị của hàm số $y = \cos x$ (h.6).



Hình 6

Từ đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên Hình 6, ta suy ra :

Hàm số $y = \cos x$ *đồng biến* trên đoạn $[-\pi; 0]$ và *nghịch biến* trên đoạn $[0; \pi]$.

Bảng biến thiên :

x	$-\pi$	0	π
$y = \cos x$	-1	1	-1

Tập giá trị của hàm số $y = \cos x$ là $[-1; 1]$.

Đồ thị của các hàm số $y = \cos x, y = \sin x$ được gọi chung là các *đường hình sin*.

3. Hàm số $y = \tan x$

Từ định nghĩa ta thấy hàm số $y = \tan x$:

- Có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$;
- Là hàm số lẻ ;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì π .

Vì vậy, để xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \tan x$, ta chỉ cần xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số này trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2} \right)$, sau đó lấy đối xứng qua gốc toạ độ O , ta được đồ thị

hàm số trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$.

Cuối cùng, do tính tuần hoàn với chu kì π nên đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên D thu được từ đồ thị hàm số trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ bằng cách tịnh tiến song song với trục hoành từng đoạn có độ dài bằng π .

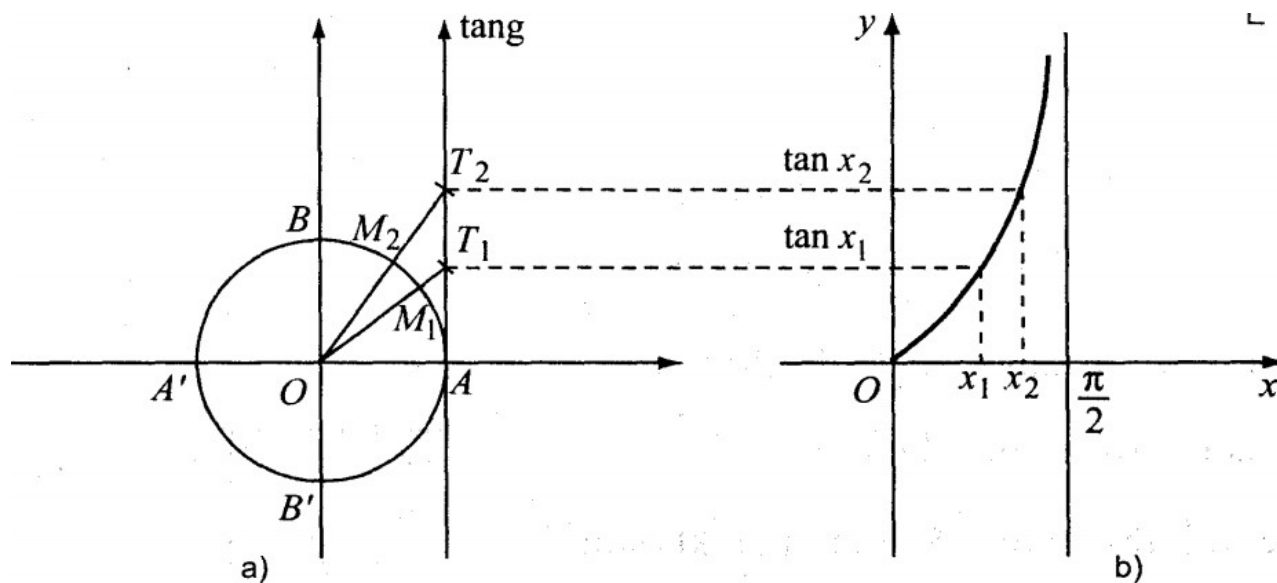
a) Sự biến thiên và đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2} \right)$

Từ biểu diễn hình học của $\tan x$ (h.7a), với $x_1, x_2 \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right)$, $\widehat{AM}_1 = x_1$, $\widehat{AM}_2 = x_2$, $\overline{AT_1} = \tan x_1$,

$\overline{AT_2} = \tan x_2$, ta thấy :

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \tan x_1 < \tan x_2.$$

Điều đó chứng tỏ rằng, hàm số $y = \tan x$ *đồng biến* trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.



Hình 7

Bảng biến thiên :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan x$	0	1	$+\infty$

Để vẽ đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta làm như sau :

Tính giá trị của hàm số $y = \tan x$ tại một số điểm đặc biệt như $x = 0, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{3}, \dots$ rồi

xác định các điểm $\left(0; \tan 0\right), \left(\frac{\pi}{6}; \tan \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{\pi}{4}; \tan \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{3}; \tan \frac{\pi}{3}\right), \dots$. Ta có bảng sau :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	...
$y = \tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	...

Đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ đi qua các điểm tìm được.

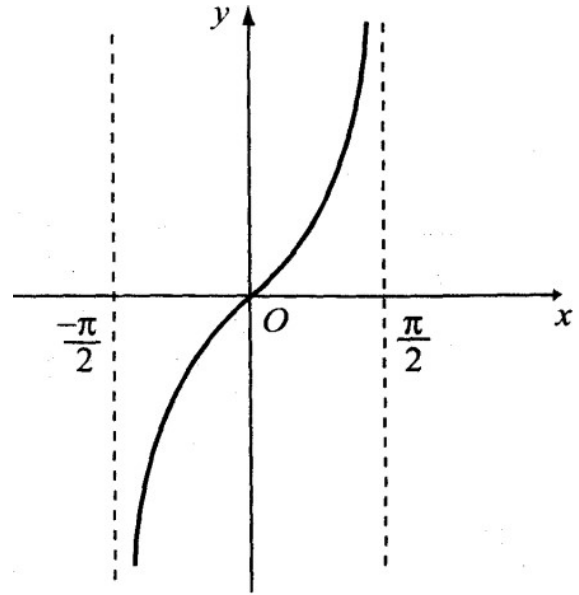
Nhận xét rằng khi x càng gần $\frac{\pi}{2}$ thì đồ thị hàm số $y = \tan x$ càng gần đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$ (h.7b).

b) Đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên D

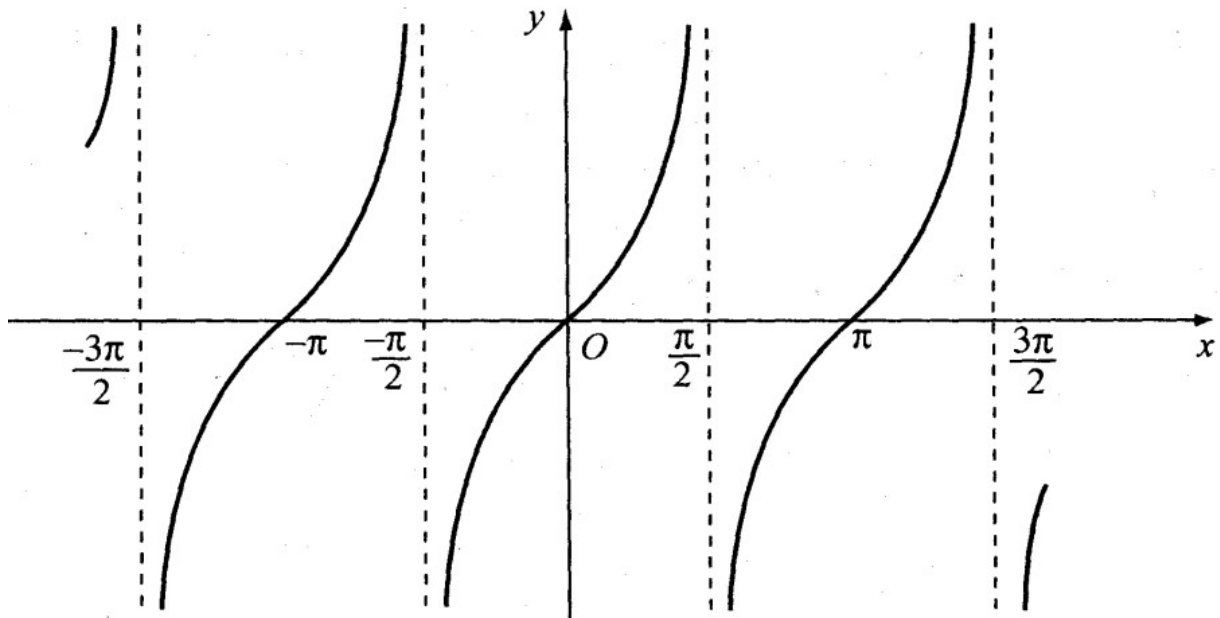
Vì $y = \tan x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số có tâm đối xứng là gốc tọa độ O . Lấy đối xứng qua tâm O đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta được đồ thị hàm số trên nửa khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Từ đó, ta được đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Ta thấy trên khoảng này, hàm số $y = \tan x$ đồng biến (h.8).

Vì hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π nên tịnh tiến đồ thị hàm số trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ song song với trục hoành từng đoạn có độ dài π , ta được đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên D (h.9).



Hình 8



Hình 9

- Tập giá trị của hàm số $y = \tan x$ là khoảng $(-\infty; +\infty)$.

4. Hàm số $y = \cot x$

Từ định nghĩa ta thấy hàm số $y = \cot x$:

- Có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
- Là hàm số lẻ ;
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

Sau đây, ta xét sự biến thiên và đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0; \pi)$, rồi từ đó suy ra đồ thị của hàm số trên D .

a) Sự biến thiên và đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0; \pi)$

Với hai số x_1 và x_2 sao cho $0 < x_1 < x_2 < \pi$, ta có $0 < x_2 - x_1 < \pi$. Do đó

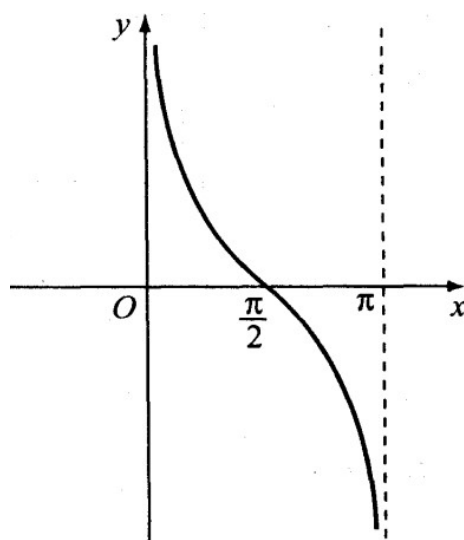
$$\begin{aligned}\cot x_1 - \cot x_2 &= \frac{\cos x_1}{\sin x_1} - \frac{\cos x_2}{\sin x_2} \\ &= \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1}{\sin x_1 \sin x_2} \\ &= \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\sin x_1 \sin x_2} > 0\end{aligned}$$

hay $\cot x_1 > \cot x_2$.

Bảng biến thiên :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = \cot x$	$+\infty$	0	$-\infty$

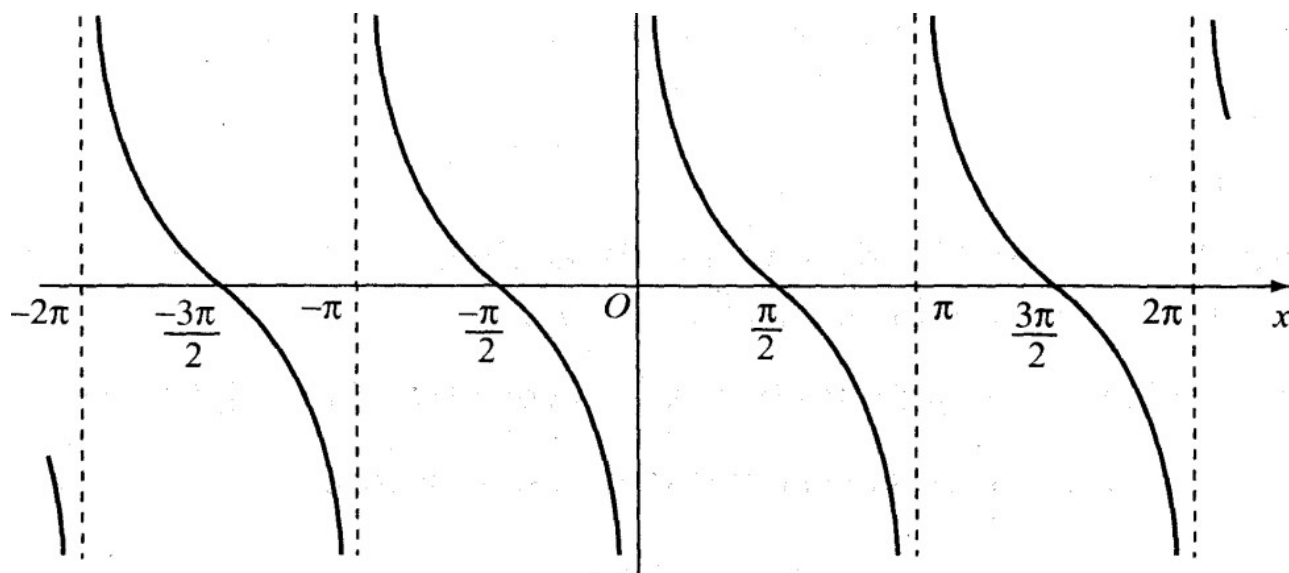
Hình 10 biểu diễn đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0; \pi)$.



Hình 10

b) Đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên D

Đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên D được biểu diễn trên Hình 11.



Hình 11

- Tập giá trị của hàm số $y = \cot x$ là khoảng $(-\infty; +\infty)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Tìm tập xác định của hàm số

- ① Hàm số $y = \tan u(x)$ có điều kiện xác định $\cos u(x) \neq 0 \Leftrightarrow u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ② Hàm số $y = \cot u(x)$ có điều kiện xác định $\sin u(x) \neq 0 \Leftrightarrow u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- ③ Hàm số $y = \sqrt[n]{u(x)}, n \in \mathbb{N}^*$ có điều kiện xác định $u(x) \geq 0$.
- ④ Hàm số $y = \frac{1}{\sqrt[n]{u(x)}}, n \in \mathbb{N}^*$ có điều kiện xác định $u(x) > 0$.
- ⑤ Chú ý $-1 \leq \sin u(x), \cos u(x) \leq 1$ và $u(x) \cdot v(x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) \neq 0 \\ v(x) \neq 0 \end{cases}$.

1. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Tìm tập xác định của hàm số

$$y = \cot \left(x + \frac{\pi}{6} \right).$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Tìm tập xác định của hàm số

$$y = \tan \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. Tìm tập xác định của hàm số

$$y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}.$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Dựa vào tập giá trị của các hàm số lượng giác

- ① $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin^{2n} x \leq 1, n \in \mathbb{N}^* \\ 0 \leq |\sin x| \leq 1 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}.$
- ② $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \cos^{2n} x \leq 1, n \in \mathbb{N}^* \\ 0 \leq |\cos x| \leq 1 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}.$
- ③ Trên đoạn $[\alpha; \beta] \subset \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (nửa bên phải đường tròn lượng giác) thì $\begin{cases} \sin \alpha \leq \sin x \leq \sin \beta \\ \tan \alpha \leq \tan x \leq \tan \beta \end{cases}.$
- ④ Trên đoạn $[\alpha; \beta] \subset \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (nửa bên trái đường tròn lượng giác) thì $\begin{cases} \sin \beta \leq \sin x \leq \sin \alpha \\ \tan \beta \leq \tan x \leq \tan \alpha \end{cases}.$
- ⑤ Trên đoạn $[\alpha; \beta] \subset [0; \pi]$ (nửa bên trên đường tròn lượng giác) thì $\begin{cases} \cos \beta \leq \cos x \leq \cos \alpha \\ \cot \beta \leq \cot x \leq \cot \alpha \end{cases}.$
- ⑥ Trên đoạn $[\alpha; \beta] \subset [\pi; 2\pi]$ (nửa bên dưới đường tròn lượng giác) thì $\begin{cases} \cos \alpha \leq \cos x \leq \cos \beta \\ \cot \alpha \leq \cot x \leq \cot \beta \end{cases}.$

Biến đổi về dạng $m \leq y \leq M$. Kết luận $\min y = m, \max y = M$

- 1.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin x - 2$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 3.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin^4 x + \cos 2x$.

.....

.....

.....

.....

.....

- 2.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{5 - 4 \cos^2 x}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 4.** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -2 \tan x + 1$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right]$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

Dạng 3 : Xét tính chẵn, lẻ

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số lượng giác.
Nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D \Rightarrow D$ là tập đối xứng và chuyển sang bước 2.
- **Bước 2.** $\forall x \in D$, tính $f(-x)$, nghĩa là sẽ thay x bằng $-x$, sẽ có 2 kết quả thường gặp sau:
 - Nếu $f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số chẵn trên D .
 - Nếu $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm số lẻ trên D .

Lưu ý:

- Nếu không là tập đối xứng ($\forall x \in D \Rightarrow -x \notin D$) hoặc $f(-x)$ không bằng $f(x)$ hoặc $-f(x)$ ta sẽ kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.
- Nếu D là tập đối xứng và tồn tại x_0 sao cho $f(-x_0) \neq f(x_0)$ thì hàm số không chẵn.
- Nếu D là tập đối xứng và tồn tại x_0 sao cho $f(-x_0) \neq -f(x_0)$ thì hàm số không lẻ.

1. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số

$$f(x) = x - \sin 3x.$$

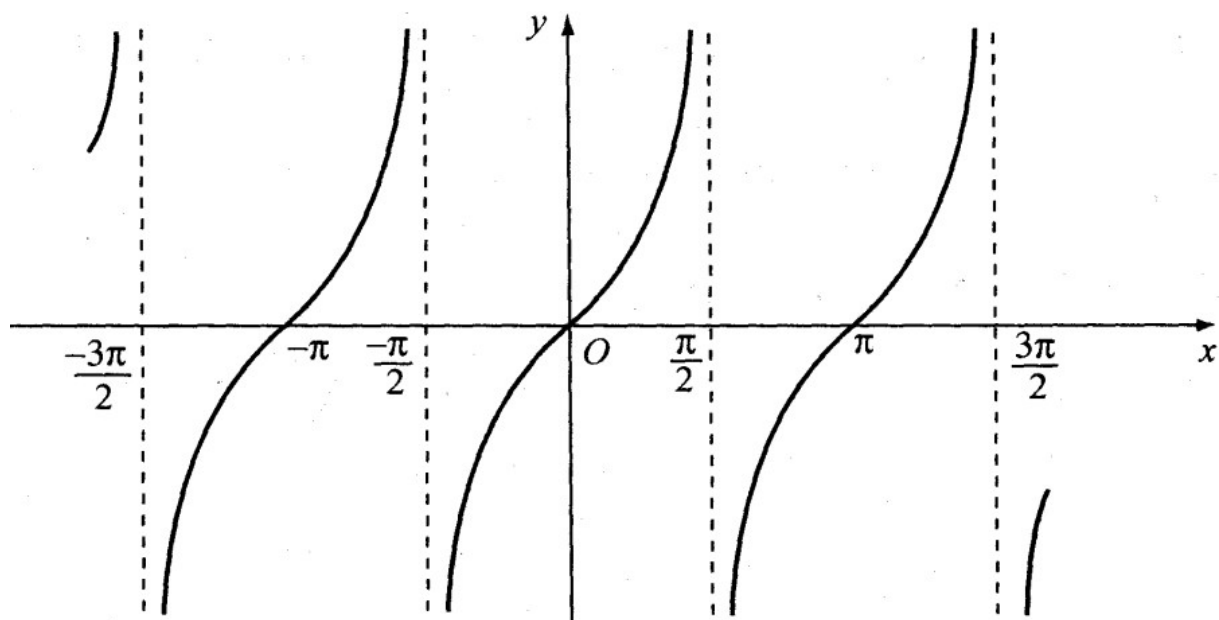
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $g(x) = \frac{3 \cos x}{x^2}$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Dạng 4 : Đồ thị

1. Dựa vào đồ thị hàm số, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số $y = \tan x$:



Hình 9

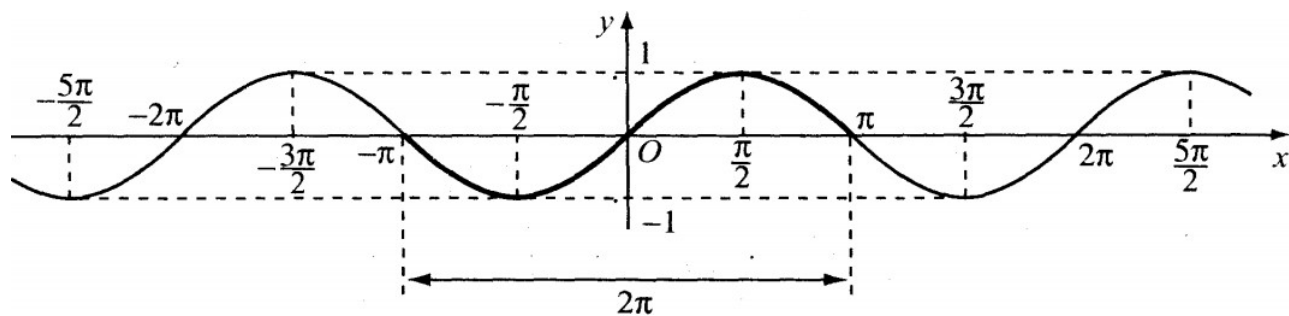
a) Nhận giá trị bằng 0 ;

b) Nhận giá trị bằng 1 ;

c) Nhận giá trị dương ;

d) Nhận giá trị âm.

2. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \sin x$, hãy vẽ đồ thị của hàm số $y = |\sin x|$.



Hình 5

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$;

d) $y = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{2 - \sin x}}$;

g) $y = \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin 2x + 2 \cos x}$;

b) $y = \tan x + 2 \cot x$;

e) $y = \sin 2x + \cos \frac{3}{x}$;

h) $y = \frac{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{\cos x}$.

c) $y = \frac{\cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 + \tan x}$;

f) $y = \tan 2x + 2 \cot x$;

BT 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $y = 2 - \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

h) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \forall x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

b) $y = \sqrt{3 + 2 \sin x}$;

i) $y = \sin^4 x + \cos^4 x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

c) $y = \cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

j) $y = 2 \sin^2 x - \cos 2x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

d) $y = \sin^2 x - \cos 2x$;

e) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

k) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \forall x \in \left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$.

f) $y = \sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{1 + \sin x}$;

g) $y = \sin 2x, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

BT 3. Xác định tính chẵn- lẻ của các hàm số sau :

a) $y = \sin x \cdot \cos 3x$;

c) $y = \frac{\cos x + \sin^2 x}{x}$;

d) $y = \sqrt{1 - \cos x}$;

b) $y = \tan x - 2x$;

BT 4. Chứng minh rằng $\sin 2(x + k\pi) = \sin 2x$ với mọi số nguyên k . Từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = \sin 2x$.

BT 5. Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$, tìm các giá trị của x để $\cos x = \frac{1}{2}$.

BT 6. Dựa vào đồ thị hàm số $y = \sin x$, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số đó nhận giá trị dương.

BT 7. Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos x$, tìm các khoảng giá trị của x để hàm số đó nhận giá trị âm.

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ là

A. $x \neq k\pi$.

B. $x \neq k2\pi$.

C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

D. $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - 3 \cos x}{\sin x}$ là

A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

B. $x \neq k2\pi$.

C. $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

D. $x \neq k\pi$.

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = \frac{3}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

D. $\mathbb{R}$

Câu 5. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2\sin x + 1}{1 - \cos x}$ là

A. $x \neq k2\pi$

B. $x \neq k\pi$

C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

D. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là

A. $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$

B. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\pi$

C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

D. $x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$

Câu 7. Tập xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là

A. $x \neq \frac{-\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

B. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

C. $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

D. $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

Câu 8. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\sin x + 1}$ là

A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

B. $x \neq k2\pi$.

C. $x \neq \frac{3\pi}{2} + k2\pi$.

D. $x \neq \pi + k2\pi$.

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = \cos \sqrt{x}$ là

A. $x > 0$.

B. $x \geq 0$.

C. $\mathbb{R}$.

D. $x \neq 0$.

Câu 10. Hàm số $y = \cot 2x$ có tập xác định là

A. $k\pi$

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y = \tan x + \cot x$ là

A. $\mathbb{R}$

B. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2x}{1 - \sin^2 x}$ là

A. $-\frac{5}{2}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $y = |\sin x - x| - |\sin x + x|$.

D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$.

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\cot x}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2} \right\}.$

Câu 14. Tập xác định của hàm số: $y = \frac{x+1}{\tan 2x}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 15. Tập xác định của hàm số $y = \frac{3x+1}{1-\cos^2 x}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{ \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}.$

D. $D = \emptyset.$

Câu 16. Tập xác định của hàm số: $y = \frac{x+1}{\cot x}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 17. Tập xác định của hàm số $y = \tan(3x-1)$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 18. Tập xác định của hàm số $y = \sin(x-1)$ là

A. $\mathbb{R}.$

B. $\mathbb{R} \setminus \{1\}.$

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}.$

Câu 19. Tập xác định của hàm số $y = \sin \frac{x-1}{x+1}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

B. $(-1; 1).$

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 20. Hàm số nào sau đây có tập xác định $\mathbb{R}.$

A. $y = \sqrt{\frac{2+\cos x}{2-\sin x}}.$

B. $y = \tan^2 x + \cot^2 x.$

C. $y = \frac{1+\sin^2 x}{1+\cot^2 x}.$

D. $y = \frac{\sin^3 x}{2\cos x + \sqrt{2}}.$

Câu 21. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos^2 x}}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

Câu 22. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x}$ là

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

B. $x = k2\pi$.

C. $x = k\pi$.

D. $x \neq \frac{k\pi}{2}$.

Câu 23. Chọn khẳng định **sai**

A. Tập xác định của hàm số $y = \sin x$ là $\mathbb{R}$.

B. Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. Tập xác định của hàm số $y = \cos x$ là $\mathbb{R}$.

D. Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 24. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $y = \tan x$ là hàm lẻ.

B. $y = \cot x$ là hàm lẻ.

C. $y = \cos x$ là hàm lẻ.

D. $y = \sin x$ là hàm lẻ.

Câu 25. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn

A. $y = \sin 3x$.

B. $y = x \cdot \cos x$.

C. $y = \cos x \cdot \tan 2x$.

D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$ và $g(x) = \tan 3x$, chọn mệnh đề **đúng**

A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.

C. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.

D. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.

Câu 27. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số $y = x^2 + \cos x$ là hàm số chẵn.

B. Hàm số $y = |\sin x - x| - |\sin x + x|$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $y = \frac{\sin x}{x}$ là hàm số chẵn.

D. Hàm số $y = \sin x + 2$ là hàm số không chẵn, không lẻ.

Câu 28. Trong các hàm số sau:

(1) $y = \cot 2x$; (2) $y = \cos(x + \pi)$; (3) $y = 1 - \sin x$; (4) $y = \tan^{2016} x$.

Có bao nhiêu hàm số là **hàm chẵn** trên tập xác định của nó?

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Câu 29. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A. $y = 2x + \cos x$.

B. $y = \cos 3x$.

C. $y = x^2 \sin(x + 3)$.

D. $y = \frac{\cos x}{x^3}$.

Câu 30. Hàm số nào sau đây không chẵn, không lẻ?

A. $y = \frac{\sin x + \tan x}{2 \cos^2 x}$.

B. $y = \tan x - \cot x$.

C. $y = \sin 2x + \cos 2x$.

D. $y = \sqrt{2 - \sin^2 3x}$.

Câu 31. Trong các hàm số dưới đây:

(1) $y = \cos 3x$; (2) $y = \sin(x^2 + 1)$; (3) $y = \tan^2 x$; (4) $y = \cot x$.

Có bao nhiêu hàm số là **hàm số chẵn**?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 32. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

- A. $y = \sin x$. B. $y = x + 1$. C. $y = x^2$. D. $y = \frac{x-1}{x+2}$.

Câu 33. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

- A. $y = \sin x - x$. B. $y = \cos x$. C. $y = x \sin x$ D. $y = \frac{x^2+1}{x}$.

Câu 34. Chu kỳ của hàm số $y = \sin x$ là

- A. $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. π . D. 2π .

Câu 35. Chu kỳ của hàm số $y = \cos x$ là

- A. $k2\pi$. B. $\frac{2\pi}{3}$. C. π . D. 2π .

Câu 36. Chu kỳ của hàm số $y = \tan x$ là

- A. 2π . B. $\frac{\pi}{4}$. C. $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. π .

Câu 37. Chu kỳ của hàm số $y = \cot x$ là

- A. 2π . B. $\frac{\pi}{2}$. C. π . D. $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 38. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên đoạn nào dưới đây:

- A. $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. B. $[\pi; 2\pi]$. C. $[-\pi; \pi]$. D. $[0; \pi]$.

Câu 39. Hàm số nào sau đây có tính đơn điệu trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khác với các hàm số còn lại ?

- A. $y = \sin x$. B. $y = \cos x$. C. $y = \tan x$. D. $y = -\cot x$.

Câu 40. Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên khoảng:

- A. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. B. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$. C. $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$. D. $\left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 41. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

- A. $y = \sin x$. B. $y = \cos x$. C. $y = \tan x$. D. $y = -\cot x$.

Câu 42. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

- A. $y = \sin x$. B. $y = \cos x$. C. $y = \cot x$. D. $y = \tan x$.

Câu 43. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3 \sin 2x - 5$ lần lượt là

- A. -8 và -2 . B. 2 và 8 . C. -5 và 2 . D. -5 và 3 .

Câu 44. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4\sqrt{\sin x + 3} - 1$ lần lượt là

- A. $\sqrt{2}$ và 2 . B. 2 và 4 . C. $4\sqrt{2}$ và 8 . D. $4\sqrt{2} - 1$ và 7 .

Câu 45. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4 \sin x - 5$ là

- A. -20 . B. -8 . C. 0 . D. 9 .

Câu 46. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 1 - 2 \cos x - \cos^2 x$ là

- A. 2 . B. 5 . C. 0 . D. 3 .

Câu 47. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2 + 3 \sin 3x$

- A. $\min y = -2; \max y = 5$ B. $\min y = -1; \max y = 4$
C. $\min y = -1; \max y = 5$ D. $\min y = -5; \max y = 5$

Câu 48. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 - 4 \sin^2 2x$

A. $\min y = -2$; $\max y = 1$

C. $\min y = -5$; $\max y = 1$

B. $\min y = -3$; $\max y = 5$

D. $\min y = -3$; $\max y = 1$

Câu 49. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2 \cos(3x - \frac{\pi}{3}) + 3$

A. $\min y = 2$, $\max y = 5$

C. $\min y = 1$, $\max y = 5$

B. $\min y = 1$, $\max y = 4$

D. $\min y = 1$, $\max y = 3$

Câu 50. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{3 - 2 \sin^2 2x} + 4$

A. $\min y = 6$, $\max y = 4 + \sqrt{3}$

C. $\min y = 5$, $\max y = 4 + 3\sqrt{3}$

B. $\min y = 5$, $\max y = 4 + 2\sqrt{3}$

D. $\min y = 5$, $\max y = 4 + \sqrt{3}$.

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC

I. Phương trình $\sin x = m$ (1)

☒ Nếu $|m| > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm

☒ Nếu $|m| \leq 1$, đặt $m = \sin \alpha$.

Khi đó : $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \alpha + k360^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$

(nếu α được cho bằng độ)

hay $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$

(nếu α được cho bằng radian)

Lưu ý : Với $|m| \leq 1$ thì $\sin x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin(m) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin(m) + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$

II. Phương trình $\cos x = m$ (2)

☒ Nếu $|m| > 1$ thì phương trình (2) vô nghiệm

☒ Nếu $|m| \leq 1$, đặt $m = \cos \alpha$.

Khi đó : $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k360^\circ \\ x = -\alpha + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

(nếu α được cho bằng độ)

hay $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

(nếu α được cho bằng radian)

Lưu ý : Với $|m| \leq 1$ thì $\cos x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos(m) + k2\pi \\ x = -\arccos(m) + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$

III. Phương trình $\tan x = m$

Điều kiện : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

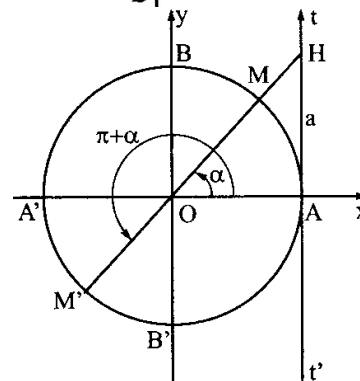
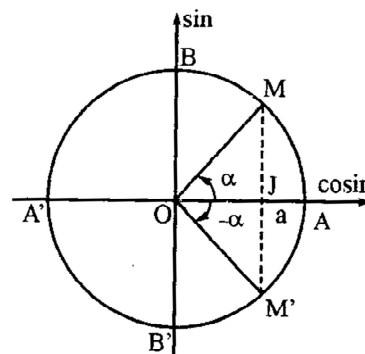
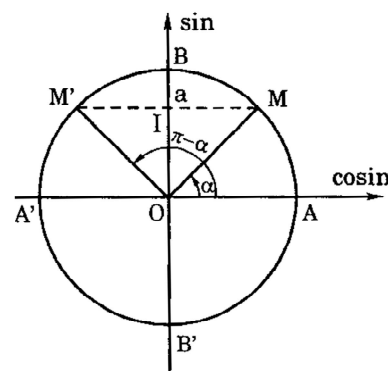
$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

(nếu α được cho bằng radian)

Hay : $\tan x = \tan \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$

Lưu ý : Với $m \in \mathbb{R}$ thì $\tan x = m \Leftrightarrow x = \arctan(m) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

IV. Phương trình $\cot x = m$



Điều kiện : $x \neq k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$

$$\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

(nếu α được cho bằng radian)

$$\text{Hay : } \cot x = \cot \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$$

Lưu ý : Với $m \in \mathbb{R}$ thì $\cot x = m \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot}(m) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

☒ Các giá trị $\arcsin(m)$, $\arccos(m)$ (với $|m| \leq 1$), $\arctan(m)$ và $\operatorname{arccot}(m)$ là những số thực. Do vậy ta không viết $\arctan 1 = 45^\circ$

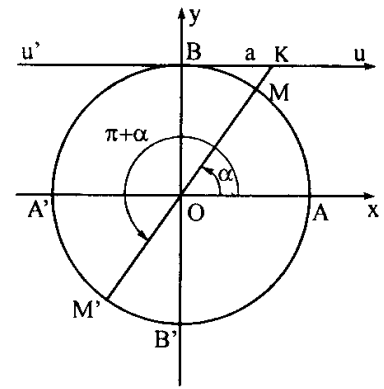
mà nên viết $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

☒ Khi giải phương trình lượng giác, ẩn x có thể là số đo radian hoặc số đo độ. Do vậy sử dụng kí hiệu số đo trong "công thức nghiệm" nên thống nhất.

Chẳng hạn, phương trình $\sin(x + 20^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ có nghiệm $x = 40^\circ + k360^\circ$, chứ không nên viết

$$x = 40^\circ + k2\pi$$

☒ Quy ước rằng nếu không có giải thích gì thêm hoặc trong phương trình lượng giác không sử dụng số đo là độ thì mặc nhiên ẩn số là số đo radian của góc lượng giác.



B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Phương trình cơ bản và các phương trình đặc biệt

Các phương trình cơ bản

$$\textcircled{1} \sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}. \quad \textcircled{2} \cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{3} \tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ với điều kiện } u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ hoặc } v \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{4} \cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ với điều kiện } u \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ hoặc } v \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Các phương trình đặc biệt

$$\textcircled{5} \sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{8} \cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{6} \sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{9} \cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{7} \sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{10} \cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Chú ý nếu phương trình cho đơn vị độ thì đổi π là 180° .

1. Giải phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

.....
.....
.....

2. Giải phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

.....
.....
.....

3. Giải phương trình $\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Giải phương trình $\sqrt{3} \cot\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

5. Giải phương trình $\cos(2x + 15^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Giải phương trình $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -1$.

7. Giải phương trình $\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -2$.

8. Giải phương trình $\sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos x$.

9. Giải phương trình $\cos 3x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

10. Giải phương trình $\tan 2x \cdot \cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

11. Giải phương trình $\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$.

12. Giải phương trình $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}$.

13. Giải phương trình $\cos^2 2x = \frac{1}{2}$.

14. Giải phương trình $\left| \sin(2x - 1) \right| = \frac{1}{2}$.

15. Giải phương trình $\sin 3x \cot x = 0$.

16. Giải phương trình $\frac{2 \cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Giải các phương trình sau :

$$a) \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right);$$

$$b) \sin(x + 20^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$c) \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x;$$

$$d) \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

BT 2. Giải các phương trình sau :

$$a) \tan 2x = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$b) \tan x + \cot x = -2;$$

$$c) \cos^3 x \cdot \sin x - \sin^3 x \cdot \cos x = \frac{1}{8};$$

$$d) (1 - \cos 4x)(\tan x + \cot x) = 4;$$

$$e) \tan 2x + \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

BT 3. Giải các phương trình sau :

$$a) \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0;$$

$$b) \tan 2x + \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0;$$

$$c) \tan x + \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ có nghiệm thỏa mãn $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ là

A. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

B. $x = \frac{\pi}{6}.$

C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

D. $x = \frac{\pi}{3}.$

Câu 2. Số nghiệm của phương trình $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ trong khoảng $(0; 3\pi)$ là

A. 1.

B. 2 .

C. 6 .

D. 4 .

Câu 3. Số nghiệm của phương trình: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ với $\pi \leq x \leq 5\pi$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Câu 4. Phương trình $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thỏa $0 < x < \pi$.

A. 1.

B. 3.

C. 2 .

D. 4 .

Câu 5. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ với $\pi \leq x \leq 3\pi$ là

A. 1.

B. 0 .

C. 2 .

D. 3.

Câu 6. Phương trình $2 \sin(2x - 40^\circ) = \sqrt{3}$ có số nghiệm thuộc $(-180^\circ; 180^\circ)$ là

A. 2 .

B. 4 .

C. 6 .

D. 7 .

Câu 7. Số nghiệm của phương trình: $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ với $0 \leq x \leq 2\pi$ là

A. 0 .

B. 2 .

C. 1.

D. 3.

Câu 8. Số nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ thuộc khoảng $(\pi, 8\pi)$ là

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 9. Tìm tổng các nghiệm của phương trình: $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ trên $(-\pi; \pi)$

- A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{4\pi}{3}$ D. $\frac{7\pi}{3}$

Câu 10. Phương trình $m\cos x + 1 = 0$ có nghiệm khi m thỏa điều kiện

- A. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{cases}$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq -1$. D. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq -1 \end{cases}$

Câu 11. Phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm khi m là

- A. $-1 \leq m \leq 1$. B. $m \leq 0$. C. $m \geq -2$. D. $-2 \leq m \leq 0$.

Câu 12. Cho phương trình: $\sqrt{3}\cos x + m - 1 = 0$. Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm

- A. $m < 1 - \sqrt{3}$. B. $m > 1 + \sqrt{3}$.
C. $1 - \sqrt{3} \leq m \leq 1 + \sqrt{3}$. D. $-\sqrt{3} \leq m \leq \sqrt{3}$.

Câu 13. Cho phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$. Tìm m để phương trình có nghiệm?

- A. Không tồn tại m . B. $m \in [-1; 3]$.
C. $m \in [-3; -1]$. D. mọi giá trị của m .

Câu 14. Để phương trình $\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = m$ có nghiệm, ta chọn

- A. $m \leq 1$. B. $0 \leq m \leq 1$. C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $m \geq 0$.

Câu 15. Nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ của phương trình $\sin 4x + \cos 5x = 0$ theo thứ tự là

- A. $x = -\frac{\pi}{18}$; $x = \frac{\pi}{2}$. B. $x = -\frac{\pi}{18}$; $x = \frac{2\pi}{9}$.
C. $x = -\frac{\pi}{18}$; $x = \frac{\pi}{6}$. D. $x = -\frac{\pi}{18}$; $x = \frac{\pi}{3}$.

Câu 16. Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên $[0; \pi]$

- A. $\frac{7\pi}{18}$ B. $\frac{4\pi}{18}$ C. $\frac{47\pi}{8}$ D. $\frac{47\pi}{18}$

Câu 17. Trong nửa khoảng $[0; 2\pi)$, phương trình $\cos 2x + \sin x = 0$ có tập nghiệm là

- A. $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right\}$. B. $\left\{-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$. C. $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$. D. $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$.

Câu 18. Số nghiệm của phương trình $\sin x = \cos x$ trong đoạn $[-\pi; \pi]$ là

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 19. Nghiệm của phương trình $3\tan\frac{x}{4}-\sqrt{3}=0$ trong nửa khoảng $[0;2\pi)$ là

A. $\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$.

B. $\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.

C. $\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$.

D. $\left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$.

Câu 20. Nghiệm của phương trình $\tan(2x-15^0)=1$, với $-90^0 < x < 90^0$ là

A. $x = -30^0$

B. $x = -60^0$

C. $x = 30^0$

D. $x = -60^0, x = 30^0$

Câu 21. Số nghiệm của phương trình $\tan x = \tan\frac{3\pi}{11}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};2\pi\right)$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 22. Phương trình nào tương đương với phương trình $\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0$.

A. $\cos 2x = 1$.

B. $\cos 2x = -1$.

C. $2\cos^2 x - 1 = 0$.

D. $(\sin x - \cos x)^2 = 1$.

Câu 23. Phương trình $3 - 4\cos^2 x = 0$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A. $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

B. $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

C. $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

D. $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

Câu 24. Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ thuộc đoạn $[2\pi;4\pi]$ là

A. 2.

B. 6.

C. 5.

D. 4.

Câu 25. Tìm số nghiệm $x \in [0;14]$ nghiệm đúng phương trình: $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

§ 3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

A. KIẾN THỨC

I – PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Định nghĩa

Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng
 $at + b = 0$, (1) trong đó a, b là các hằng số ($a \neq 0$) và t là một trong các hàm số lượng giác.

2. Cách giải

Chuyển vế rồi chia hai vế của phương trình (1) cho a , ta đưa phương trình (1) về phương trình lượng giác cơ bản.

II – PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI ĐỐI VỚI MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Định nghĩa

Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng
 $at^2 + bt + c = 0$, trong đó a, b, c là các hằng số ($a \neq 0$) và t là một trong các hàm số lượng giác.

2. Cách giải

Đặt biểu thức lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ (nếu có) rồi giải phương trình theo ẩn phụ này. Cuối cùng, ta đưa về việc giải các phương trình lượng giác cơ bản.

3. Phương trình đưa về dạng phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Hãy nhắc lại :

- a) Các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản ;
- b) Công thức cộng ;
- c) Công thức nhân đôi ;
- d) Công thức biến đổi tích thành tổng và tổng thành tích.

III - PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI $\sin u$ và $\cos u$

1. Công thức biến đổi biểu thức $a \sin u + b \cos u$

Trong trường hợp tổng quát, với $a^2 + b^2 \neq 0$, ta có

$$a \sin u + b \cos u = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin u + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos u \right).$$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$ nên có một góc α sao cho

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha.$$

Khi đó $a \sin u + b \cos u = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin u \cos \alpha + \cos u \sin \alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(u + \alpha)$ (*)

Đặc biệt, $\sin u + \cos u = \sqrt{2} \sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right)$ và $\sin u - \cos u = \sqrt{2} \sin\left(u - \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Phương trình dạng $a \sin u + b \cos u = c$

Xét phương trình $a \sin u + b \cos u = c$ (4.0) với $a, b, c \in \mathbb{R}; a, b$ không đồng thời bằng 0 ($a^2 + b^2 \neq 0$).

Nếu $a = 0, b \neq 0$ hoặc $a \neq 0, b = 0$, phương trình (4.0) có thể đưa ngay về phương trình lượng giác cơ bản. Nếu $a \neq 0, b \neq 0$, ta áp dụng công thức (*).

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Phương trình bậc nhất và phương trình đưa được bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

$$A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \text{ trong đó } A, B \text{ là các phương trình bậc nhất theo một hàm số lượng giác.}$$

1. Giải phương trình $3 \cos x + 5 = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Giải phương trình $\sqrt{3} \cot x - 3 = 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Giải phương trình $5 \cos x - 2 \sin 2x = 0$.

4. Giải phương trình $8 \sin x \cos x \cos 2x = -1$.

Dạng 2 : Phương trình bậc hai và phương trình được về bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Với $u = u(x)$.

① Đặt $t = \sin u$ hoặc $t = \cos u$ thì $-1 \leq t \leq 1$.

② Phương trình dạng $a \tan u + b \cot u + c = 0$ (2)

Điều kiện của phương trình (2) là $\cos u \neq 0$ và $\sin u \neq 0$.

Vì $\cot u = \frac{1}{\tan u}$ nên phương trình (2) có thể viết dưới dạng

$$a \tan u + \frac{b}{\tan u} + c = 0 \Leftrightarrow a \tan^2 u + c \tan u + b = 0.$$

Ta đưa được phương trình (2) về phương trình bậc hai theo hàm số $\tan u$.

③ Phương trình đẳng cấp bậc hai (toàn phương) đối với $\sin u$ và $\cos u$ là phương trình có dạng

$$a \sin^2 u + b \sin u \cdot \cos u + c \cos^2 u = d \quad (3)$$

CHÚ Ý : $\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \tan^2 u; \frac{\sin u \cos u}{\cos^2 u} = \tan u; \frac{d}{\cos^2 u} = d(1 + \tan^2 u).$

Nếu $\cos u = 0$ thì phương trình (3) có hai khả năng sau :

- Khả năng 1 : $a = d$ đúng thì $u = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thỏa phương trình (2). Giải tìm nghiệm x .
- Khả năng 2 : $a = d$ sai thì $\cos u \neq 0$.

Xét $\cos u \neq 0$, chia hai vế phương trình (3) cho $\cos^2 u$, ta được

$$a \tan^2 u + b \tan u + c = \frac{d}{\cos^2 u} \Leftrightarrow a \tan^2 u + b \tan u + c = d(1 + \tan^2 u).$$

Ta đưa được phương trình (3) về phương trình bậc hai theo $\tan u$.

LƯU Ý :

Ta có thể đưa phương trình (2) về dạng bậc nhất đối với $\sin 2x$ và $\cos 2x$ như sau :

$$\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}; \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}; \sin u \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u.$$

Khi đó phương trình (2) trở thành

$$A \sin 2u + B \cos 2u = C.$$

Đây là dạng phương trình cổ điển ta xét ở phần tiếp theo.

④ Các phương trình dạng

$$a \sin u + b \cos u = c \quad (4.0)$$

$$a \sin u + b \cos u = \sqrt{a^2 + b^2} \sin v \text{ hoặc } a \sin u + b \cos u = \sqrt{a^2 + b^2} \cos v \quad (4.1)$$

$$a \sin u + b \cos u = a \sin v + b \cos v \quad (4.2)$$

Dùng công thức $a \sin u + b \cos u = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin u \cos \alpha + \cos u \sin \alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(u + \alpha)$ để biến đổi các phương trình.

1. Giải phương trình

$$2\sin^2\frac{x}{2} + \sqrt{2}\sin\frac{x}{2} - 2 = 0.$$

2. Giải phương trình $2 \tan x + \cot x = 3$.

3. Giải phương trình $4 \sin^2 x + 8 \cos x - 7 = 0$.

4. Giải phương trình $\cos 2x - \sin x + 2 = 0$.

5. Giải phương trình $\frac{4}{\cos^2 x} + \tan x = 7$.

6. Giải phương trình $3 \sin^4 x + \cos 2x = 2$.

7. Giải phương trình

$$\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}.$$

9. Giải phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$.

8. Giải phương trình

$$\sin^4 x + 2\cos^4 x + \sin x \cdot \cos^3 x = 1.$$

10. Giải phương trình $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin 2x$.

11. Giải phương trình

$$\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 2 \cos x.$$

12. Giải phương trình

$$\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0.$$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Giải các phương trình sau :

a) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$;

a) $\sin^2 x + 3 \cos^2 x - 3 \sin x = 1$

Đáp số : $\left\{ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi ; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right\}$

b) $\cos 2x + 3 \sin x + 1 = 0$

Đáp số : $\left\{ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi ; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \right\}$

c) $4 \cos^2 x - 2 \cos 2x - 1 = \cos 4x$

Đáp số : $\left\{ x = k \frac{\pi}{2} \right\}$

d) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

Đáp số : $\left\{ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi ; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$

BT 2. Giải các phương trình sau :

a) $\sin^2 x - \cos^4 x = \frac{1}{4}$

Đáp số : $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \right\}$

b) $\cos^4 x - \cos 2x + 2 \sin^6 x = 0$

Đáp số : $\{ x = k\pi \}$

c) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$

Đáp số : $\left\{ x = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{4} \right\}$

d) $(\sin^4 x + \cos^4 x)(\sin^6 x + \cos^6 x) = \frac{2 + \cos 4x}{8}$

Đáp số : $\left\{ x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right\}$

BT 3. Giải các phương trình sau :

a) $\sin^2 x - 2 \sin 2x + 3 \cos^2 x = 1$

Đáp số : $\left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi ; x = \arctan \frac{1}{2} + k\pi \right\}$

b) $4 \sin^2 x - \sin 2x + 2\sqrt{3} \cos^2 x = 3$

Đáp số : $\left\{ x = \frac{\pi}{3} + k\pi ; x = \frac{\pi}{12} + k\pi \right\}$

c) $2 \cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$

Đáp số : $\left\{ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi ; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$

d) $\sqrt{3} \sin x \cos x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

e) $3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x - 2 \cos 2x - 4 \sin 2x = 0.$

Đáp số : $\left\{ x = \frac{\pi}{24} + k\pi ; x = \frac{7\pi}{24} + k\pi \right\}$

BT 4. Giải các phương trình sau :

a) $\cos 7x \cdot \cos 5x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 - \sin 7x \cdot \sin 5x$

Đáp số : $\left\{ x = k\pi ; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \right\}$

b) $\sin 4x - \cos 3x = \sqrt{3}(\sin 3x + \cos 4x)$

Đáp số : $\left\{ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi ; x = \frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{7} \right\}$

c) $\sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x + 3 \cos^2 x = 2(1 - \sin 4x)$

Đáp số : $\left\{ x = \frac{\pi}{36} + k \frac{\pi}{3} ; x = -\frac{7\pi}{12} - k\pi \right\}$

d) $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3} \sin 4x = 2$

Đáp số : $\left\{ x = -\frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{2} ; x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right\}$

e) $\sin 4x + 8 \cos^4 x - 4 \cos 2x = 4$

Đáp số : $\left\{ x = k \frac{\pi}{2} ; x = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2} \right\}$

BT 5. Giải các phương trình sau :

a) $(1 + \sqrt{2})(\cos x + \sin x) - \sin 2x - 1 - \sqrt{2} = 0$

Đáp số : $\left\{ x = k2\pi ; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$

b) $\sin 2x + \sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

Đáp số : $\left\{ x = \frac{\pi}{4} + k\pi ; x = \pi + k2\pi \right\}$

c) $\sin^2 x \cos x + 12(\sin x - \cos x + \sin 2x) - \sin x \cos^2 x = 12$ Đáp số : $\left\{ x = \frac{\pi}{4} + k\pi ; x = \frac{k\pi}{2} \right\}$

$$d) \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{2 - \sin 2x} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sin 4x \quad \text{Đáp số : } \left\{ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$$

BT 6. Giải các phương trình sau :

$$a) \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 \quad \text{Đáp số : } \left\{ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}$$

$$b) 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0 \quad \text{Đáp số : } \left\{ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}; x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

$$c) \sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x \quad \text{Đáp số : } \left\{ x = k\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \right\}$$

$$d) \sin 3x \sin^3 x - \cos 3x \cos^3 x = \frac{3\sqrt{2} - 2}{8} \quad \text{Đáp số : } \left\{ x = \pm \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2} \right\}$$

$$e) 2\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \cos x = 1 \quad \text{Đáp số : } \left\{ x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\pi \right\}$$

TRÍCH MỘT SỐ CÂU ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG

Câu 1: (A_2014) Giải phương trình : $\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x$ ĐS : $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \right\}$

Câu 2: (B_2014) Giải phương trình : $\sqrt{2}(\sin x - 2 \cos x) = 2 - \sin 2x$ ĐS : $\left\{ x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi \right\}$

Câu 3: (A_2013) Giải phương trình : $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
ĐS : $\left\{ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \right\}$

Câu 4: (B_2013) Giải phương trình : $\sin 5x + 2 \cos^2 x = 1$ ĐS : $\left\{ x = -\frac{\pi}{6} - \frac{k2\pi}{3}; x = -\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \right\}$

Câu 5: (D_2013) Giải phương trình : $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$
ĐS : $\left\{ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \right\}$

Câu 6: (A_2012) Giải phương trình : $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1$
ĐS : $\left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = k2\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \right\}$

Câu 7: (B_2012) Giải phương trình : $2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1$
ĐS : $\left\{ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = k\frac{2\pi}{3} \right\}$

Câu 8: (D_2012) Giải phương trình : $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x$
ĐS : $\left\{ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \right\}$

Câu 9: (CĐ_2012) Giải phương trình : $2 \cos 2x + \sin x = \sin 3x$ ĐS : $\left\{ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$

Câu 10: (A_2011) Giải phương trình : $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \sin 2x$ ĐS :

$$\left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \right\}$$

Câu 11: (B_2011) Giải phương trình : $\sin 2x \cos x + \sin x \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$

$$\text{ĐS : } \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pi + k2\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \right\}$$

Câu 12: (D_2011) Giải phương trình : $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$ ĐS : $\left\{ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \right\}$

Câu 13: (CĐ_2011) Giải phương trình : $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$ ĐS : $\{x = k\pi\}$

Câu 14: (A_2010) Giải phương trình : $\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$

$$\text{ĐS : } \left\{ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \right\}$$

Câu 15: (B_2010) Giải phương trình : $(\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0$ ĐS :

$$\left\{ x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right\}$$

Câu 16: (D_2010) Giải phương trình : $\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0$

$$\text{ĐS : } \left\{ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right\}$$

Câu 17: (CĐ_2010) Giải phương trình : $4 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2(8 \sin x - 1) \cos x = 5$

$$\text{ĐS : } \left\{ x = \frac{\pi}{12} + k\pi; x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \right\}$$

Câu 18: (A_2009) Giải phương trình : $\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$ ĐS : $\left\{ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \right\}$

Câu 19: (B_2009) Giải phương trình : $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$

$$\text{ĐS : } \left\{ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{\pi}{42} + k \frac{2\pi}{7} \right\}$$

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 CỦA MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 1. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x - \sin x = 0$ thỏa điều kiện: $0 < x < \pi$.

- A. $x = \frac{\pi}{2}$. B. $x = \pi$. C. $x = 0$. D. $x = -\frac{\pi}{2}$.

Câu 2. Nghiệm của phương trình lượng giác: $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ thỏa điều kiện $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ là

- A. $x = \frac{\pi}{3}$ B. $x = \frac{\pi}{2}$ C. $x = \frac{\pi}{6}$ D. $x = \frac{5\pi}{6}$

Câu 3. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sin x = 0$ thỏa điều kiện: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

- A. $x = 0$. B. $x = \pi$. C. $x = \frac{\pi}{3}$. D. $x = \frac{\pi}{2}$.

Câu 4. Trong $[0; 2\pi)$, phương trình $\sin x = 1 - \cos^2 x$ có tập nghiệm là

- A. $\left\{\frac{\pi}{2}; \pi; 2\pi\right\}$. B. $\{0; \pi\}$. C. $\left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi\right\}$. D. $\left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; 2\pi\right\}$.

Câu 5. Nghiệm của phương trình $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ thỏa điều kiện: $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

- A. $x = \frac{\pi}{6}$. B. $x = \frac{\pi}{4}$. C. $x = \frac{\pi}{2}$. D. $x = -\frac{\pi}{2}$.

Câu 6. Nghiệm của phương trình lượng giác: $2\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$ thỏa điều kiện $0 < x < \frac{\pi}{2}$ là

- A. $x = \frac{\pi}{3}$. B. $x = \frac{\pi}{2}$. C. $x = \frac{\pi}{6}$. D. $x = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 7. Nghiệm của phương trình $\sin^2 2x + 2\sin 2x + 1 = 0$ trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là

- A. $\left\{-\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\}$. B. $\left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$. C. $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$. D. $\left\{\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\}$.

Câu 8. Giải phương trình lượng giác $4\sin^4 x + 12\cos^2 x - 7 = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 9. Phương trình $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$.

Câu 10. Tìm m để phương trình $2\sin^2 x - (2m + 1)\sin x + m = 0$ có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

- A. $-1 < m < 0$. B. $1 < m < 2$. C. $-1 < m < 0$. D. $0 < m < 1$.

Câu 11. Nghiệm của phương trình $\cos^2 x + \cos x = 0$ thỏa điều kiện: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

- A. $x = \pi$. B. $x = \frac{\pi}{3}$. C. $x = \frac{3\pi}{2}$. D. $x = -\frac{3\pi}{2}$.

Câu 12. Phương trình $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$.
C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$. D. Vô nghiệm.

Câu 13. Họ nghiệm của phương trình $3\tan 2x + 2\cot 2x - 5 = 0$ là

- A. $-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}\arctan\frac{2}{3}+k\frac{\pi}{2}.$

D. $\frac{1}{2}\arctan\frac{2}{3}+k\frac{\pi}{2}.$

Câu 14. Trong các nghiệm sau, nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2\tan^2 x + 5\tan x + 3 = 0$ là

A. $-\frac{\pi}{3}.$

B. $-\frac{\pi}{4}.$

C. $-\frac{\pi}{6}.$

D. $-\frac{5\pi}{6}.$

Câu 15. Số nghiệm của phương trình $2\tan x - 2\cot x - 3 = 0$ trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ là

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VỚI SIN VÀ COSIN

Câu 1. Nghiệm của phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ là

A. $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi.$

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi.$

C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$

D. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi; x = -\frac{5\pi}{4} + k2\pi.$

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$ là

A. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi.$

B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$

D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$

Câu 3. Số nghiệm của phương trình $\sin x + \cos x = 1$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 4. Nghiệm của phương trình $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$ là

A. $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi.$

B. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$

C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi.$

D. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi.$

Câu 5. Phương trình: $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = -1$ tương đương với phương trình nào sau đây:

A. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

B. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$

C. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

D. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

Câu 6. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m+1)\sin x + \cos x = \sqrt{5}$ có nghiệm.

A. $-3 \leq m \leq 1.$

B. $0 \leq m \leq 2.$

C. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -3 \end{cases}.$

D. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}.$

Câu 7. Điều kiện để phương trình $m\sin x - 3\cos x = 5$ có nghiệm là

A. $m \geq 4.$

B. $-4 \leq m \leq 4.$

C. $m \geq \sqrt{34}.$

D. $\begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{cases}.$

Câu 8. Cho phương trình: $(m^2 + 2)\cos^2 x - 2m\sin 2x + 1 = 0$. Để phương trình có nghiệm thì giá trị thích hợp của tham số m là

A. $-1 \leq m \leq 1.$

B. $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}.$

C. $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{4}.$

D. $|m| \geq 1.$

Câu 9. Tìm m để pt $\sin 2x + \cos^2 x = \frac{m}{2}$ có nghiệm là

A. $1 - \sqrt{3} \leq m \leq 1 + \sqrt{3}.$ B. $1 - \sqrt{2} \leq m \leq 1 + \sqrt{2}.$ C. $1 - \sqrt{5} \leq m \leq 1 + \sqrt{5}.$ D. $0 \leq m \leq 2.$

Câu 10. Điều kiện có nghiệm của pt $a\sin 5x + b\cos 5x = c$ là

- A. $a^2 + b^2 < c^2$. B. $a^2 + b^2 \leq c^2$. C. $a^2 + b^2 \geq c^2$. D. $a^2 + b^2 > c^2$.
- Câu 11.** Điều kiện để phương trình $m \sin x + 8 \cos x = 10$ vô nghiệm là
- A. $m > 6$. B. $\begin{cases} m \leq -6 \\ m \geq 6 \end{cases}$. C. $m < -6$. D. $-6 < m < 6$.
- Câu 12.** Điều kiện để phương trình $12 \sin x + m \cos x = 13$ có nghiệm là
- A. $m > 5$. B. $\begin{cases} m \leq -5 \\ m \geq 5 \end{cases}$. C. $m < -5$. D. $-5 < m < 5$.
- Câu 13.** Tìm điều kiện để phương trình $m \sin x + 12 \cos x = -13$ vô nghiệm.
- A. $m > 5$. B. $\begin{cases} m \leq -5 \\ m \geq 5 \end{cases}$. C. $m < -5$. D. $-5 < m < 5$.
- Câu 14.** Tìm điều kiện để phương trình $6 \sin x - m \cos x = 10$ vô nghiệm.
- A. $\begin{cases} m \leq -8 \\ m \geq 8 \end{cases}$. B. $m > 8$. C. $m < -8$. D. $-8 < m < 8$.
- Câu 15.** Tìm m để phương trình $5 \cos x - m \sin x = m + 1$ có nghiệm
- A. $m \leq -13$. B. $m \leq 12$. C. $m \leq 24$. D. $m \geq 24$.
- Câu 16.** Tìm m để phương trình $2 \sin x + m \cos x = 1 - m$ (1) có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- A. $-3 \leq m \leq 1$ B. $-2 \leq m \leq 6$ C. $1 \leq m \leq 3$ D. $-1 \leq m \leq 3$
- Câu 17.** Tìm m để phương trình $m \sin x + 5 \cos x = m + 1$ có nghiệm.
- A. $m \leq 12$ B. $m \leq 6$ C. $m \leq 24$ D. $m \leq 3$
- Câu 18.** Phương trình $m \cos 2x + \sin 2x = m - 2$ có nghiệm khi và chỉ khi
- A. $m \in \left(-\infty; \frac{3}{4}\right]$. B. $m \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right]$. C. $m \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$. D. $m \in \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$.
- Câu 19.** Phương trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x$ có nghiệm là
- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
- C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 20.** Phương trình $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$ có các họ nghiệm là
- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{7} \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{7} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}$.
- Câu 21.** Phương trình: $3 \sin 3x + \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4 \sin^3 3x$ có các nghiệm là
- A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{6} + k\frac{2\pi}{9} \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{9} + k\frac{2\pi}{9} \end{cases}$.

$$\text{C. } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\frac{2\pi}{9} \end{cases}.$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{54} + k\frac{2\pi}{9} \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9} \end{cases}.$$

Câu 22. Phương trình $8\cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ có nghiệm là

$$\text{A. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{4\pi}{3} + k\pi \end{cases}.$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}.$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}.$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}.$$

PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP VỚI SIN VÀ COSIN

Câu 1. Phương trình $2\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$ có nghiệm là

$$\text{A. } \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{B. } \frac{\pi}{4} + k\pi, \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{C. } -\frac{\pi}{4} + k\pi, \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{D. } -\frac{\pi}{4} + k2\pi, \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 2. Trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, phương trình $\sin^2 4x + 3\sin 4x \cos 4x - 4\cos^2 4x = 0$ có:

A. Ba nghiệm.

B. Một nghiệm.

C. Hai nghiệm.

D. Bốn nghiệm.

Câu 3. Phương trình $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2 x = -4$ có họ nghiệm là

$$\text{A. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{B. } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{C. } x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{D. } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 4. Giải phương trình $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x$

$$\text{A. } \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = k\frac{1}{2}\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{1}{2}\pi \end{cases}$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = k\frac{2}{3}\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Câu 5. Giải phương trình $2\cos^2 x + 6\sin x \cos x + 6\sin^2 x = 1$

$$\text{A. } x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k2\pi$$

$$\text{B. } x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{2}{3}\pi; x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\frac{2}{3}\pi$$

$$\text{C. } x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{1}{4}\pi; x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\frac{1}{4}\pi$$

$$\text{D. } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan\left(-\frac{1}{5}\right) + k\pi$$

PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG VỚI SIN VÀ COSIN

Câu 1. Phương trình $\sin x + \cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$ có nghiệm là

$$\text{A. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \\ x = k\frac{\pi}{4} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 2. Giải phương trình $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$

$$\text{A. } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = -\pi + k2\pi$$

$$\text{B. } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\pi + k\frac{2}{3}\pi$$

$$\text{C. } x = \frac{\pi}{2} + k\frac{1}{3}\pi, x = -\pi + k\frac{2}{3}\pi$$

$$\text{D. } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\pi + k2\pi$$

Câu 3. Giải phương trình $\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\text{A. } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pi + k2\pi$$

$$\text{B. } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{1}{2}\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\frac{1}{2}\pi, x = \pi + k\frac{1}{2}\pi$$

$$\text{C. } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2}{3}\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\frac{2}{3}\pi, x = \pi + k2\pi$$

$$\text{D. } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \pi + k2\pi$$

Câu 4. Giải phương trình $|\cos x - \sin x| + 2 \sin 2x = 1$

$$\text{A. } x = \frac{k3\pi}{2}$$

$$\text{B. } x = \frac{k5\pi}{2}$$

$$\text{C. } x = \frac{k7\pi}{2}$$

$$\text{D. } x = \frac{k\pi}{2}$$

Câu 5. Giải phương trình $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$

$$\text{A. } x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, x = k\pi$$

$$\text{B. } x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{2}{3}\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, x = k\pi$$

$$\text{C. } x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{1}{3}\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k\frac{2}{3}\pi, x = k2\pi$$

$$\text{D. } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi$$

Câu 6. Giải phương trình $\cos^3 x + \sin^3 x = 2 \sin 2x + \sin x + \cos x$

$$\text{A. } x = \frac{k3\pi}{2}$$

$$\text{B. } x = \frac{k5\pi}{2}$$

$$\text{C. } x = k\pi$$

$$\text{D. } x = \frac{k\pi}{2}$$

Câu 7. Cho phương trình $\sin x \cos x - \sin x - \cos x + m = 0$, trong đó m là tham số thực. Để phương trình có nghiệm, các giá trị thích hợp của m là

$$\text{A. } -2 \leq m \leq -\frac{1}{2} - \sqrt{2}.$$

$$\text{B. } -\frac{1}{2} - \sqrt{2} \leq m \leq 1.$$

$$\text{C. } 1 \leq m \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2}.$$

$$\text{D. } \frac{1}{2} + \sqrt{2} \leq m \leq 2.$$

Câu 8. Phương trình $2 \sin 2x - 3\sqrt{6} |\sin x + \cos x| + 8 = 0$ có nghiệm là

$$\text{A. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = 5\pi + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐƯA VỀ TÍCH

Câu 1. Phương trình $1 + \cos x + \cos^2 x + \cos 3x - \sin^2 x = 0$ tương đương với phương trình.

- A. $\cos x(\cos x + \cos 3x) = 0$.
 B. $\cos x(\cos x - \cos 2x) = 0$.
 C. $\sin x(\cos x - \cos 2x) = 0$.
 D. $\cos x(\cos x + \cos 2x) = 0$.

Câu 2. Số nghiệm thuộc $\left[\frac{\pi}{14}; \frac{69\pi}{10}\right)$ của phương trình $2 \sin 3x(1 - 4 \sin^2 x) = 0$ là

- A. 40. B. 34. C. 41. D. 46.

Câu 3. Nghiệm dương nhỏ nhất của pt $(2 \sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$ là

- A. $x = \frac{\pi}{6}$ B. $x = \frac{5\pi}{6}$ C. $x = \pi$ D. $x = \frac{\pi}{12}$

Câu 4. Nghiệm dương nhỏ nhất của pt $2 \sin x + 2\sqrt{2} \sin x \cos x = 0$ là

- A. $x = \frac{3\pi}{4}$ B. $x = \frac{\pi}{4}$ C. $x = \frac{\pi}{3}$ D. $x = \pi$

Câu 5. Tìm số nghiệm trên khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình:

$$2(\sin x + 1)(\sin^2 2x - 3 \sin x + 1) = \sin 4x \cdot \cos x$$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 6. Phương trình $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x \cos 2x$ tương đương với phương trình

- A. $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$. B. $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 7. Giải phương trình $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos 2x$.

- A. $x = k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
 B. $x = k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$.
 C. $x = k2\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
 D. $x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 8. Giải phương trình $1 + \sin x + \cos x + \tan x = 0$.

- A. $x = \pi + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \pi + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \pi + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \pi + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 9. Phương trình $2 \sin x + \cot x = 1 + 2 \sin 2x$ tương đương với phương trình

- A. $\begin{cases} 2 \sin x = -1 \\ \sin x - \cos x - 2 \sin x \cos x = 0 \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} 2 \sin x = 1 \\ \sin x + \cos x - 2 \sin x \cos x = 0 \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} 2 \sin x = -1 \\ \sin x + \cos x - 2 \sin x \cos x = 0 \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} 2 \sin x = 1 \\ \sin x - \cos x - 2 \sin x \cos x = 0 \end{cases}$.

Câu 10. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2 \cos^2 x$ là

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{2\pi}{3}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

Câu 11. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2 \cos^2 x + \cos x = \sin x + \sin 2x$ là?

- A. $x = \frac{\pi}{6}$. B. $x = \frac{\pi}{4}$. C. $x = \frac{\pi}{3}$. D. $x = \frac{2\pi}{3}$.

Câu 12. Phương trình $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x \cos 2x$ tương đương với phương trình:

- A. $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$. D. $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 13. Phương trình $\cos^4 x - \cos 2x + 2\sin^6 x = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. C. $x = k\pi$. D. $x = k2\pi$.

Câu 14. Phương trình: $(\sin x - \sin 2x)(\sin x + \sin 2x) = \sin^2 3x$ có các nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = k\frac{\pi}{3} \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = k\frac{\pi}{6} \\ x = k\frac{\pi}{4} \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = k\frac{2\pi}{3} \\ x = k\pi \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = k3\pi \\ x = k2\pi \end{cases}$.

Câu 15. Phương trình $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$ có các nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = k\frac{\pi}{12} \\ x = k\frac{\pi}{4} \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = k\frac{\pi}{9} \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = k\frac{\pi}{6} \\ x = k\pi \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = k\frac{\pi}{3} \\ x = k2\pi \end{cases}$.

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC TỔNG HỢP

Câu 1. Số nghiệm phương trình $\sin^2(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) \cdot \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$ với $x \in [0; \pi]$ là

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 2. Cho phương trình: $\sin x + \sin 2x = \cos x + 2\cos 2x$ nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{2\pi}{3}$.

Câu 3. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình: $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2} \sin 4x$ là

- A. $-\frac{\pi}{2}$. B. $-\frac{\pi}{3}$. C. $-\frac{\pi}{6}$. D. $-\frac{\pi}{8}$.

Câu 4. Phương trình $(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$ có nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{n}$ ($k \in \mathbb{Z}$), $n \in \mathbb{R}$.

Khi đó giá trị n là

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 8.

Câu 5. Số nghiệm trên $[0; 2\pi]$ của phương trình: $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 6. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\cos^2 x + \cos x = \sin x + \sin 2x$ là?

- A. $x = \frac{\pi}{6}$. B. $x = \frac{\pi}{3}$. C. $x = \frac{\pi}{4}$. D. $x = \frac{2\pi}{3}$.

Câu 7. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2\cos^2 x + \cos x = \sin x + \sin 2x$ là?

- A. $x = \frac{\pi}{6}$. B. $x = \frac{\pi}{3}$. C. $x = \frac{\pi}{4}$. D. $x = \frac{2\pi}{3}$.

TỔ HỢP – XÁC SUẤT

Chương này cung cấp những kiến thức cơ bản nhất về *Đại số tổ hợp* và *Lí thuyết xác suất*.

Phần thứ nhất bao gồm *quy tắc cộng* và *quy tắc nhân*, các khái niệm, các công thức về *hoán vị*, *chỉnh hợp* và *tổ hợp*. Các bài toán này thường gặp trong Toán ứng dụng. Ngoài ra, công thức *khai triển nhị thức Niu-tơn* và các áp dụng của nó cũng được trình bày.

Phần tiếp theo cung cấp những khái niệm mở đầu và các công thức đơn giản nhất của *Lí thuyết xác suất*, một lĩnh vực quan trọng của Toán học, có nhiều ứng dụng thực tế.

§ 1. QUY TẮC ĐẾM

A. KIẾN THỨC

Số phần tử của tập hợp hữu hạn A được kí hiệu là $n(A)$. Người ta cũng dùng kí hiệu $|A|$ để chỉ số phần tử của tập A .

a) Nếu $A = \{a, b, c\}$ thì số phần tử của tập hợp A là 3, ta viết $n(A) = 3$ hay $|A| = 3$.

b) Nếu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$,

thì $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

- Số phần tử của tập hợp A là $n(A) = 9$.
- Số phần tử của tập hợp B là $n(B) = 4$.
- Số phần tử của tập hợp $A \setminus B$ là $n(A \setminus B) = 5$.

I – QUY TẮC CỘNG

QUY TẮC

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

Quy tắc cộng được phát hiện ở trên thực chất là quy tắc đếm số phần tử của hợp hai tập hợp hữu hạn không giao nhau, được phát biểu như sau :

Nếu A và B là các tập hợp hữu hạn không giao nhau, thì

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

CHÚ Ý

Quy tắc cộng có thể mở rộng cho nhiều hành động.

II – QUY TẮC NHÂN

QUY TẮC

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m.n$ cách hoàn thành công việc.

CHÚ Ý

Quy tắc nhân có thể được mở rộng cho nhiều hành động liên tiếp.

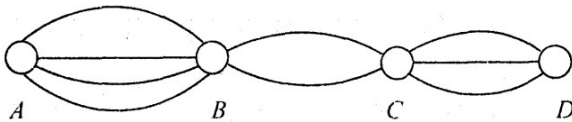
B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Dùng các quy tắc cộng và nhân

1. Các thành phố A, B, C, D được nối với nhau bởi các con đường như hình dưới. Hỏi :

a) Có bao nhiêu cách đi từ A đến D mà qua B và C chỉ một lần ?

b) Có bao nhiêu cách đi từ A đến D rồi quay lại A ?



2. Có bao nhiêu số tự nhiên :

a) có ba chữ số bất kì ;

b) có ba chữ số khác nhau đôi một ;

c) có ba chữ số khác nhau đôi một và số đó là số chẵn ;

d) có ba chữ số khác nhau đôi một và số đó chia hết cho 5.

3. Có bao nhiêu số điện thoại gồm bảy chữ số bất kì ?

4. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 1000 ?

- BT 6.** Trên giá sách có 9 quyển sách tiếng Việt (khác nhau), 5 quyển sách tiếng Hoa (khác nhau) và 16 quyển sách tiếng Anh (khác nhau). Hỏi có bao nhiêu cách chọn
- a/ Một quyển sách ?
b/ Ba quyển sách với ba thứ tiếng khác nhau ? Đáp số: a/ 30, b/ 720
- BT 7.** Có 10 cặp vợ chồng dự tiệc. Tính số cách chọn ra một người đàn ông và một người đàn bà trong bữa tiệc để phát biểu ý kiến, sao cho :
- a/ Hai người đó là một cặp vợ chồng ?
b/ Hai người đó không là vợ chồng ? Đáp số: a/10, b/90
- BT 8.** Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số của nó đều chẵn ? Đáp số:20
- BT 9.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, có thể tạo nên bao nhiêu số tự nhiên
- a/ Có hai chữ số ?
b/ Có hai chữ số khác nhau ? Đáp số:a/ 42, b/ 36
- BT 10.** Từ các chữ số 2, 3, 4, 6, 7, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên bé hơn 100 ?
Đáp số:30
- BT 11.** Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Từ các phần tử của tập X có thể lập bao nhiêu số tự nhiên trong các trường hợp sau :
- a/.Số đó có 3 chữ số.
b/ Số đó có 4 chữ số khác nhau từng đôi một.
c/ Số đó là số chẵn và có 4 chữ số khác nhau từng đôi một. Đáp số:a/ 512, b/ 1680, c/840
- BT 12.** Giữa hai thành phố A và B có 5 con đường đi. Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến B rồi trở về A mà không có đường nào đi hai lần ? Đáp số : 20
- BT 13.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau
Đáp số : 3024
- BT 14.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 9 chữ số khác nhau, trong đó phải có mặt cả 2 chữ số 0 và 1?
Đáp số : 2580480
- BT 15.** Từ 5 chữ số 0, 1, 3, 5, 7 có thể lập được bao nhiêu số gồm 4 chữ số khác nhau và không chia hết cho 5. Đáp số : 54
- BT 16.** Có bao nhiêu ước nguyên dương của 360 ? Đáp số : 24
- BT 17.** Trong 100 000 số nguyên dương đầu tiên, có bao nhiêu số chứa một chữ số 3, một chữ số 4, và một chữ số 5 ? Đáp số : 2940

§ 2. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

A. KIẾN THỨC

I – HOÁN VỊ

1. Định nghĩa

ĐỊNH NGHĨA

Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$).

Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một **hoán vị** của n phần tử đó.

NHẬN XÉT

Hai hoán vị của n phần tử chỉ khác nhau ở thứ tự sắp xếp.

2. Số các hoán vị

Kí hiệu P_n là số các hoán vị của n phần tử. Ta có định lí sau đây.

ĐỊNH LÍ

$$P_n = n(n-1)\dots 2.1.$$

Chứng minh. Để lập được mọi hoán vị của n phần tử, ta tiến hành như sau :

Chọn một phần tử cho vị trí thứ nhất. Có n cách.

Sau khi chọn một phần tử cho vị trí thứ nhất, có $n-1$ cách chọn một phần tử cho vị trí thứ hai.

...

Sau khi đã chọn $n-2$ phần tử cho $n-2$ vị trí đầu tiên, có hai cách chọn một trong hai phần tử còn lại để xếp vào vị trí thứ $n-1$.

Phần tử còn lại sau cùng được xếp vào vị trí thứ n .

Như vậy, theo quy tắc nhân, có $n.(n-1)\dots 2.1$ kết quả sắp xếp thứ tự n phần tử đã cho.

Vậy $P_n = n(n-1)\dots 2.1$

■

CHÚ Ý

Kí hiệu $n(n-1)\dots 2.1$ là $n!$ (đọc là n giai thừa), ta có $P_n = n!$

II – CHỈNH HỢP

1. Định nghĩa

Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$).

Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một **chỉnh hợp chập k của n phần tử** đã cho.

2. Số các chỉnh hợp

Kí hiệu A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$).

ĐỊNH LÍ

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

Chứng minh. Để tạo nên mọi chỉnh hợp chập k của n phần tử, ta tiến hành như sau :

Chọn một trong n phần tử đã cho vào vị trí thứ nhất. Có n cách.

Khi đã có phần tử thứ nhất, chọn tiếp một trong $n-1$ phần tử còn lại xếp vào vị trí thứ hai. Có $n-1$ cách.

...

Sau khi đã chọn $k-1$ phần tử rồi, chọn một trong $n-(k-1)$ phần tử còn lại xếp vào vị trí thứ k .

Có $n-k+1$ cách.

Từ đó theo quy tắc nhân, ta được

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

■

CHÚ Ý

a) Với quy ước $0! = 1$, ta có

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

b) Mỗi hoán vị của n phần tử cũng chính là một chỉnh hợp chập n của n phần tử đó. Vì vậy

$$P_n = A_n^n.$$

III – TỔ HỢP

1. Định nghĩa

ĐỊNH NGHĨA

Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$).

Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một **tổ hợp chập k của n phần tử** đã cho.

CHÚ Ý

Số k trong định nghĩa cần thoả mãn điều kiện $1 \leq k \leq n$. Tuy vậy, tập hợp không có phần tử nào là tập rỗng nên ta quy ước gọi tổ hợp chập 0 của n phần tử là tập rỗng.

2. Số các tổ hợp

Kí hiệu C_n^k là số các tổ hợp chập k của n phần tử ($0 \leq k \leq n$).

ĐỊNH LÝ

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Chứng minh. Với $k = 0$, công thức hiển nhiên đúng.

Với $k \geq 1$, ta thấy một chỉnh hợp chập k của n phần tử được thành lập như sau :

- Chọn một tập con k phần tử của tập hợp gồm n phần tử. Có C_n^k cách chọn.
- Sắp thứ tự k phần tử chọn được. Có $k!$ cách.

Vậy theo quy tắc nhân, ta có số các chỉnh hợp chập k của n phần tử là

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!$$

$$\text{Từ đó } C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

■

3. Tính chất của các số C_n^k

a) Tính chất 1

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n).$$

b) Tính chất 2 (công thức Pa-xcan)

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k \quad (1 \leq k < n).$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Hoán vị - chỉnh hợp – tổ hợp

- 1.** a) Hãy liệt kê 5 hoán vị của tập hợp $A = \{a ; b ; c ; d\}$.
 b) Hãy liệt kê 5 chỉnh hợp chập 3 của các phần tử $\{a ; b ; c ; d\}$.
 c) Hãy viết tất cả các tổ hợp chập 2 của tập hợp $A = \{a ; b ; c ; d\}$.

- 3.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 lập các số tự nhiên gồm sáu chữ số khác nhau. Hỏi :
 a) Có tất cả bao nhiêu số ?
 b) Có bao nhiêu số chẵn, bao nhiêu số lẻ ?
 c) Có bao nhiêu số bé hơn 432 000 ?

- 2.** Có bao nhiêu cách sắp xếp chỗ ngồi cho mười người khách vào mười ghế kê thành một dãy ?

- 4.** Có bao nhiêu cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau ?

- 5.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm :
 a) 5 chữ số khác nhau đôi một ?
 b) 5 chữ số khác nhau đôi một và là số chẵn

- 6.** Một tổ có 10 người gồm 6 nam và 4 nữ. Cần lập một đoàn đại biểu gồm 5 người. Hỏi :
 a) Có tất cả bao nhiêu cách lập ?
 b) Có tất cả bao nhiêu cách lập đoàn đại biểu, trong đó có ba nam, hai nữ ?
 c) Có tất cả bao nhiêu cách lập đoàn đại biểu, trong đó có ít nhất một nữ ?

$$P_n = A_n^n.$$

$$\textcircled{3} \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$\textcircled{4} \quad C_n^k = C_n^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n).$$

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k \quad (1 \leq k < n).$$

1. Không dùng máy tính, tính và thu gọn các biểu thức sau với điều kiện xác định của nó:

a) $\frac{10!}{8!}$; b) $\frac{n!}{(n-2)!}$;

c) A_n^3 ; d) C_n^3 .

3. Giải phương trình $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{7}{2}x$.

2. Giải phương trình $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$.

4. Giải phương trình $A_{n+3}^2 = C_{n+2}^3 + 20$.

b/ Có bao nhiêu đoạn thẳng có hai đầu mút thuộc về tập hợp điểm đã cho?

Đáp số : a) 30 ; b) 15

BT 3. Xét các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau lập nên từ các chữ số 1, 2, 3, 4. Hỏi có bao nhiêu số:

- a) Được tạo thành
- b) Bắt đầu bởi chữ số 1?
- c) Không bắt đầu bằng chữ số 2?

Đáp số : a) 24 ; b) 6 ; c) 182

BT 4. Xét các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau lập nên từ các chữ số 1, 3, 5, 7, 9. Hỏi trong các số đó có bao nhiêu số:

- a) Bắt đầu bởi 19?
- b) Không bắt đầu bởi 135?

Đáp số : a) 6 ; b) 118

BT 5. Cho 6 chữ số : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

- a) Từ các chữ số trên, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau?
- b) Trong các số nói trên có bao nhiêu số lẻ?
- c) Trong các số nói trên có bao nhiêu số trong đó có mặt 2 chữ số 1 và 2?

Đáp số : a) $A_6^5 = 720$; b) $A_5^4 \cdot 3 = 360$; c) $4 \cdot 5! = 480$

BT 6. Cho 7 chữ số : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

- a) Từ 7 chữ số trên, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau?
- b) Trong các số nói ở a), có bao nhiêu số chẵn?
- c) Trong các số nói ở a), có bao nhiêu số trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 7 ?

Đáp số : a) $A_7^5 = 2520$; b) 1080 ; c) $5 \cdot A_6^4 = 1800$

BT 7. Cho 5 chữ số 0, 1, 3, 6, 9.

- d) Từ 5 chữ số ấy, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau?
- e) Trong các số nói trên có bao nhiêu số lẻ?
- f) Trong các số nói trên có bao nhiêu số chẵn?
- g) Trong các số nói trên có bao nhiêu số chia hết cho 3?

Đáp số : a) $4 \cdot A_4^3 = 96$; b) 54 ; c) $A_4^3 \cdot 1 + 3 \cdot A_3^2 \cdot 1 = 42$; d) $3 \cdot A_3^3 = 3 \cdot 3! = 18$

BT 8. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau lập nên từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6

và lớn hơn 300.000.

Đáp số: $4 \cdot 5! = 480$

BT 9. Từ tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ có thể lập được bao nhiêu số mà mỗi số có 5 chữ số khác nhau

và trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5? Đáp số: $6 \cdot A_6^4 - 5 \cdot A_5^4 = 1560$

BT 10. Từ 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau, trong đó:

- a) hai chữ số 1 và 2 đứng cạnh nhau?
- b) hai chữ số 1 và 2 không đứng cạnh nhau?

Đáp số: 48

Đáp số: 72

BT 11. Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số trong đó chữ số 1 có mặt

2 lần, mỗi chữ số khác có mặt đúng một lần? Đáp số: $A_6^4 \cdot 1 = 360$

BT 12. Từ 4 chữ số 0,1,2,3 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số , trong đó chữ số 3 xuất hiện 4 lần, các chữ số 0, 1, 2 chỉ xuất hiện 1 lần. Đáp số: $6.6.5.1 = 180$

BT 13. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số sao cho không có chữ số nào lặp lại đúng 3 lần?
Đáp số: 8676

BT 14. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5,6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số và thoả mãn điều kiện: sáu chữ số của mỗi số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của 3 chữ số đầu nhỏ hơn tổng của 3 chữ số cuối một đơn vị.
Đáp số: 108

BT 15. Lúc khai mạc một hội nghị có 5 đại biểu. Các đại biểu đều lần lượt bắt tay nhau.
Hỏi có tất cả bao nhiêu cái bắt tay?
Đáp số: 24

BT 16. Nhân ngày sinh nhật, các bạn tặng Hồng Nhung 1 bó hoa gồm 10 bông hồng trắng và 1 bó hoa gồm 10 bông hồng nhung. Hồng Nhung muốn chọn ra 5 bông để cắm bình.

Hỏi Hồng Nhung có bao nhiêu cách chọn nếu trong 5 bông ấy phải có ít nhất

a) 2 bông trắng và 2 bông nhung . Đáp số: 10800

b) 1 bông trắng và 1 bông nhung . Đáp số: 15000

BT 17. Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư khác nhau. Chọn từ đó ra 3 tem thư, 3 bì thư và dán 3 tem thư ấy lên 3 bì thư đã chọn, mỗi bì thư chỉ dán 1 tem thư.

Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy. Đáp số: $C_6^3.C_5^3.3! = C_6^3.A_5^3$

BT 18. Lớp học có 40 học sinh (25 nam và 15 nữ) . Cần chọn một nhóm gồm 3 học sinh .

Hỏi có bao nhiêu cách :

a) Chọn 3 học sinh bất kỳ . Đáp số: $C_{40}^3 = 9880$

b) Chọn 3 học sinh gồm 1 nam và hai nữ . Đáp số: 2625

c) Chọn 3 học sinh trong đó có ít nhất 1 nam. Đáp số: 9425

BT 19. Trong số 16 học sinh có 3 học sinh giỏi, 5 khá, 8 trung bình. Hỏi có bao nhiêu cách chia số học sinh đó thành 2 tổ, mỗi tổ có 8 người sao cho ở mỗi tổ đều có học sinh giỏi và mỗi tổ có ít nhất 2 học sinh khá.
Đáp số: 3780

BT 20. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho 4 bạn nữ và 6 bạn nam vào 10 ghế mà không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau, trong các trường hợp sau :

a) Ghế sắp thành hàng ngang Đáp số: 604800

b) Ghế sắp quanh một bàn tròn Đáp số: 43200

BT 21. Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 6 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên.

Hỏi có bao nhiêu cách xếp trong mỗi trường hợp sau:

a) Bất cứ 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường với nhau.

b) Bất cứ 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường với nhau.

Đáp số: a) $2.6!6!$; b) $2^6.6!.6!$

BT 22. Một Hội nghị bàn tròn có các doanh nhân từ các nước, gồm có 3 người Việt Nam, 5 người Lào, 2 người Campuchia, 3 người Thái Lan, 4 người Trung Quốc. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho các thành viên này , sao cho người cùng quốc tịch ngồi cạnh nhau ?

Đáp số: 4976640

BT 23. Chuẩn bị cho ngày khai giảng cần chọn 7 bạn trong 50 bạn vào đội vệ sinh. Trong đó có 4 bạn nhỏ cở và 3 bạn sơn ghế. Hỏi có bao nhiêu cách phân công.

Xét các số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau lập nên từ các phần tử của tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Hỏi có bao nhiêu số:

a) Được tạo thành?

b) Bắt đầu bởi hai chữ số 12?

c) Không bắt đầu bằng hai chữ số 12?

d) Trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 1?

e) Trong đó hai chữ số 23 đứng cạnh nhau?

BT 24. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số trong đó chữ số 1 có mặt 3 lần, mỗi chữ số khác có mặt một lần?

BT 25. Một tổ có 7 nam và 3 nữ. Người ta cần chọn ra 5 em để tham gia đồng diễn thể dục, yêu cầu không có quá một em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

BT 26. Giải các phương trình sau :

(trong đó C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử và A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử).

a) $\frac{P_n - P_{n-1}}{P_{n+1}} = \frac{1}{6}$	d) $3C_n^3 + 2C_n^2 = 3A_n^2$	h) $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$
b) $\frac{P_{n+2}}{P_3 A_{n-1}^{n-4}} = 210$	e) $A_n^3 - 2C_n^4 = 3A_n^2$	i) $\frac{A_n^4}{A_{n+1}^3 - C_n^{n-4}} = \frac{24}{23}$
c) $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$	f) $A_n^2 \cdot C_n^{n-1} = 48$	j) $\frac{1}{C_4^n} - \frac{1}{C_5^n} = \frac{1}{C_6^n}$
	g) $C_n^4 + C_n^5 = 3C_{n+1}^6$	

Đáp số : a) $n = 2$ hay $n = 3$; b) $n = 5$; c) $n = 5$; d) $n = 6$; e) $n = 6$ hay $n = 11$; f) $n = 4$; g) $n = 6$;
h) $n = 12$; i) $n = 5$; j) $n = 2$;

BT 27. Giải các phương trình : (với $x \in \mathbb{N}$)

a) $P_2 \cdot x^2 - P_3 \cdot x = 8$	d) $A_{2x}^2 - A_x^2 = C_x^3 + 40$	g) $\frac{1}{C_x^1} - \frac{1}{C_{x+1}^2} = \frac{7}{6C_{x+4}^1}$
b) $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x$	e) $2A_x^2 + 50 = A_{2x}^2$	h) $C_{14}^x + C_{14}^{x+2} = 2C_{14}^{x+1}$
c) $A_x^{10} + A_x^9 = 9A_x^8$	f) $C_{x-1}^3 - C_{x-1}^2 = \frac{2}{3}A_{x-2}^2$	

Đáp số : a) $x = -1$ hay $x = 4$; b) $x = 4$; c) $x = 11$; d) $n = 4$ hay $n = 20$; e) $x = 5$; f) $x = 9$;
g) $x = 3$ hay $x = 8$; h) $x = 4, x = 8$

BT 28. Giải bất phương trình sau

a) $A_{n+1}^3 + C_{n+1}^{n-1} < 14(n+1)$ b) $(n^2 - 5)C_n^4 + 2C_n^3 \leq 2A_n^3$ c) $14P_3 \cdot C_{n-1}^{n-3} > A_{n+1}^4$

Đáp số: a) $n = 2, n = 3$; b) $n = 5$; c) $n = 3, n = 4, n = 5$

BT 29. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 là hai đường thẳng song song. Trên d_1 lấy 5 điểm và trên d_2 lấy n điểm . Tìm n để số tam giác lập từ (n+5) điểm đó là 45

Đáp số : $n = 3$

BT 30. (B_2002) Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong 2n điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$, tìm n?

Đáp số : $n = 8$

BT 31. (B_2004) Thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau : Có 5 câu khó ; 10 câu trung bình ; 15 câu dễ . Hỏi từ 30 câu hỏi trên lập được bao nhiêu đề kiểm tra sao cho mỗi đề có 5 câu hỏi khác nhau trong đó mỗi đề nhất thiết phải có 3 loại câu hỏi : khó ; trung bình ; dễ và câu dễ không ít hơn hai .

Đáp số : 56.875

BT 32. (B_2006) Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $k \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

Đáp số: $k = 9$

BT 33. (D_2006) Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

Đáp số: 225

BT 34. (*D_2014*) Cho một đa giác đều n đỉnh, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Tìm n biết đa giác đã cho có 27 đường chéo.

Đáp số: $n = 9$

§ 3. NHỊ THỨC NIU-TƠN

A. KIẾN THỨC

I – CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU-TƠN

Ta có :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3.$$

Tổng quát, ta thừa nhận công thức khai triển biểu thức $(a + b)^n$ thành tổng các đơn thức như sau :

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n. \quad (1)$$

Công thức (1) được gọi là **công thức nhị thức Niu-tơn**.

HỆ QUẢ

Với $a = b = 1$, ta có $2^n = (1 + 1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$.

Với $a = 1; b = -1$, ta có $0 = (1 - 1)^n = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$.

CHÚ Ý:

Trong biểu thức ở vế phải của công thức (1) :

- Số các hạng tử là $n + 1$;
- Các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0, các số mũ của b tăng dần từ 0 đến n , nhưng có tổng số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n (quy ước $a^0 = b^0 = 1$) ;
- Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Khai triển, tìm số hạng, tính tổng các hệ số

Xét khai triển của nhị thức $(a + b)^n$:

Số hạng tổng quát thứ $k + 1$ là : $C_n^k a^{n-k} b^k$, $(0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N})$.

CHÚ Ý

$$(x^k)^l = x^{kl}; x^k x^l = x^{k+l}; \frac{x^k}{x^l} = x^{k-l}.$$

1. Viết khai triển theo công thức nhị thức Niu- tơn :

- $(a + 2b)^5$;
- $(a - \sqrt{2})^6$;
- $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$.

4. Biết hệ số của x^2 trong khai triển của $(1 - 3x)^n$ là 90. Tìm n .

5. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của $x(1 - 2x)^5 + x^2(1 + 3x)^{10}$.

6. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $A_n^3 - 2C_n^2 = 4C_{n+1}^3$.

7. Tính giá trị của biểu thức $C_{2020}^0 + 2C_{2020}^1 + 2^2 C_{2020}^2 + \dots + 2^{2020} C_{2020}^{2020}$.

8. Chứng tỏ rằng với $n \geq 2$, ta có

$$C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \dots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}.$$

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Khai triển nhị thức $(x - 2)^5$, và cho biết hệ số của x^2 trong khai triển đó.

BT 2. Tìm số hạng không chứa ẩn x trong khai triển nhị thức $\left(\frac{1}{x} + x^2\right)^{12}$

BT 3. Tìm hệ số a^5b^3 trong khai triển $(a + b)^8$.

Đáp số: 56

BT 4. Xét khai triển của: $(x^3 + xy)^{15}$. Tính hệ số của hạng tử chứa $x^{21}y^{12}$.

Đáp số: 455

BT 5. Tìm hệ số của $x^{11}y^9$ trong khai triển $(2x - 3y)^{20}$

Đáp số: $C_{20}^9 \cdot 2^{11} \cdot 3^9$

BT 6. Tìm hệ số $x^{25} \cdot y^{10}$ trong khai triển $(x^3 + xy)^{15}$

Đáp số: $C_{15}^{10} = 3003$

BT 7. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của: $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{10}$

Đáp số: -8064

BT 8. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển: $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^{10}$

Đáp số: 210

BT 9. Tìm n biết trong khai triển $\left(x + \frac{1}{2}\right)^n$, hệ số của x^6 bằng bốn lần hệ số của x^4 . **Đáp số:** $n = 10$

BT 10. Biết rằng hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm n

Đáp số: $n = 32$

BT 11. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển $(2x - 3)(x + 2)^3$

Đáp số: 9

BT 12. Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển $(x^2 - x + 2)^5$

Đáp số: -200

BT 13. Cho khai triển: $(1+x)^9 + (1+x)^{10} + \dots + (1+x)^{14} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{14}x^{14}$. Tìm giá trị a_9 .

Đáp số: 3003

BT 14. (D_{2003}) Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2 + 1)^n (x + 2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$.

Đáp số: $n = 5$

BT 15. (A_{2004}) Tìm hệ số của x^8 trong khai triển: $[1 + x^2(1-x)]^8$

Đáp số: 238

BT 16. Không dùng máy tính, hãy tính các biểu thức sau:

$$A = C_9^0 + C_9^1 + C_9^2 + \dots + C_9^9$$

$$B = C_{30}^{15} - C_{30}^{16} + C_{30}^{17} - C_{30}^{18} + \dots - C_{30}^{30}$$

BT 17. (CD_{2005}) Cho $(1-x)^n + x(1+x)^{n-1} = P_x$. Khai triển $P_x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

Biết: $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 512$. Tìm a_3 ?

Đáp số: $a_3 = -84$

BT 18. (A_{2006}) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$,

$$\text{biết rằng: } C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$$

Đáp số: $C_{10}^4 = 210$

BT 19. (B_{2007}) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Newton của $(2+x)^n$, biết:

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048$$

Đáp số: 22

BT 20. (A_{2008}) Cho khai triển $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$ và các hệ số

$a_0, a_1, \dots, a_n$ thỏa mãn hệ thức $a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 4096$. Tìm số lớn nhất trong các số

$a_0, a_1, \dots, a_n$.

Đáp số: $a_8 = 126720$

BT 21. (A_{2012}) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai

triển nhị thức Niu-tơn $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n$, $x \neq 0$.

BT 22. Tìm số hạng chứa x^{19} trong khai triển của biểu thức $P = (2x - 1)^9 (x + 2)^n$.

Biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2048$

§ 4. PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

A. KIẾN THỨC

I – PHÉP THỬ, KHÔNG GIAN MẪU

1. Phép thử

Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể của phép thử đó.

Để đơn giản, từ nay phép thử ngẫu nhiên được gọi tắt là phép thử. Trong Toán học phổ thông, ta chỉ xét các phép thử có một số hữu hạn kết quả.

2. Không gian mẫu

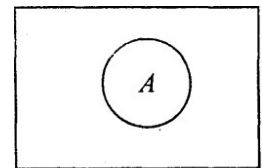
Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và kí hiệu là Ω (đọc là ô-mê-ga).

II – BIẾN CỐ

Biến cố là một tập con của không gian mẫu.

Một biến cố liên quan đến phép thử là một tập hợp bao gồm các kết quả nào đó của phép thử.

Người ta thường kí hiệu các biến cố bằng các chữ in hoa $A, B, C, \dots$. Từ nay về sau, khi nói cho các biến cố $A, B, \dots$ mà không nói gì thêm thì ta hiểu chúng cùng liên quan đến một phép thử.



Hình 30

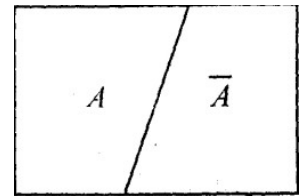
Tập $\emptyset$ được gọi là **biến cố không thể** (gọi tắt là **biến cố không**). Còn tập Ω được gọi là **biến cố chắc chắn**.

Ta nói rằng **biến cố A xảy ra** trong một phép thử nào đó khi và chỉ khi kết quả của phép thử đó là một phần tử của A (hay thuận lợi cho A).

Như vậy, biến cố không thể (tức là $\emptyset$) không bao giờ xảy ra, trong khi đó, biến cố chắc chắn Ω luôn luôn xảy ra.

III – PHÉP TOÁN TRÊN CÁC BIẾN CỐ

Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử.



Hình 31

Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là **biến cố đối** của biến cố A , kí hiệu là $\bar{A}$ (h.31).

Do $\omega \in \bar{A} \Leftrightarrow \omega \notin A$, nên $\bar{A}$ xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra.

Giả sử A và B là hai biến cố liên quan đến một phép thử. Ta có định nghĩa sau :

Tập $A \cup B$ được gọi là **hợp** của các biến cố A và B .

Tập $A \cap B$ được gọi là **giao** của các biến cố A và B .

Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì ta nói A và B **xung khắc**.

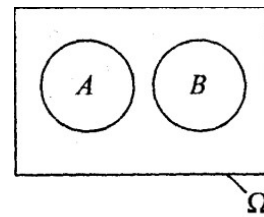
Theo định nghĩa, $A \cup B$ xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra hoặc B xảy ra ; $A \cap B$ xảy ra khi và chỉ khi A và B đồng thời xảy ra.

Biến cố $A \cap B$ còn được viết là $A.B$.

A và B xung khắc khi và chỉ khi chúng không khi nào cùng xảy ra (h. 32).

Ta có bảng sau :

Kí hiệu	Ngôn ngữ biến cố
$A \subset \Omega$	A là biến cố
$A = \emptyset$	A là biến cố không
$A = \Omega$	A là biến cố chắc chắn
$C = A \cup B$	C là biến cố : “ A hoặc B ”
$C = A \cap B$	C là biến cố : “ A và B ”
$A \cap B = \emptyset$	A và B xung khắc
$B = \overline{A}$	A và B đối nhau



Hình 32

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Mô tả không gian mẫu, xác định các biến cố

9. Gieo một đồng tiền ba lần (quy ước : mặt ghi số là mặt ngửa, viết tắt là N và mặt kia là mặt sấp, viết tắt là S).



a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố :

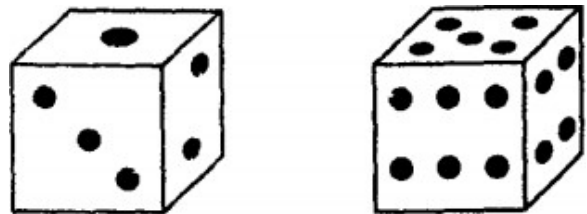
A : “Lần đầu xuất hiện mặt sấp” ;

B : “Mặt sấp xuất hiện đúng một lần”;

C : “Mặt ngửa xảy ra ít nhất một lần”;

D : là biến cố đối của biến cố “mặt ngửa xuất hiện ít nhất một lần”.

10. Gieo một con súc sắc hai lần.



a) Mô tả không gian mẫu.

b) Phát biểu các biến cố sau dưới dạng mệnh đề :

$$A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} ;$$

$$B = \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\} ;$$

$$C = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

c) Xác định biến cố $\overline{A}$ là biến cố đối của biến cố A ở câu b).

11. Một hộp chứa bốn cái thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau :

A : “Tổng các số trên hai thẻ là số chẵn” ;

B : “Tích các số trên hai thẻ là số chẵn”.

12. Hai xạ thủ cùng bắn vào bia. Kí hiệu A_k là biến cố : “Người thứ k bắn trúng”, $k = 1, 2$.

a) Hãy biểu diễn các biến cố sau qua các biến cố A_1, A_2 :

A : “Không ai bắn trúng” ;

B : “Cả hai đều bắn trúng” ;

C : “Có đúng một người bắn trúng” ;

D : “Có ít nhất một người bắn trúng”.

b) Chứng tỏ rằng $A = \overline{D}$; B và C xung khắc.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Từ một cái hộp chứa 10 cái thẻ, trong đó các thẻ đánh số 1, 2, 3, 4, 5 màu đỏ, thẻ đánh số 6 màu xanh và các thẻ đánh số 7, 8, 9, 10 màu trắng. Lấy ngẫu nhiên một thẻ.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Kí hiệu A, B, C là các biến cố sau :

A : “Lấy được thẻ màu đỏ” ;

B : “Lấy được thẻ màu trắng” ;

C : “Lấy được thẻ ghi số chẵn”.

Hãy biểu diễn các biến cố A, B, C bởi các tập con tương ứng của không gian mẫu.

BT 2. Gieo một đồng tiền liên tiếp cho đến khi lần đầu tiên xuất hiện mặt sấp hoặc cả bốn lần ngửa thì dừng lại.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố :

A : “Số lần gieo không vượt quá ba” ;

B : “Số lần gieo là bốn”.

BT 3. Từ một hộp chứa năm quả cầu được đánh số 1, 2, 3, 4, 5, lấy ngẫu nhiên liên tiếp hai lần mỗi lần một quả và xếp theo thứ tự từ trái sang phải.

a) Mô tả không gian mẫu.

b) Xác định các biến cố sau :

A : “Chữ số sau lớn hơn chữ số trước” ;

B : “Chữ số trước gấp đôi chữ số sau” ;

C : “Hai chữ số bằng nhau”.

§ 5. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A. KIẾN THỨC

I – ĐỊNH NGHĨA CỔ ĐIỂN CỦA XÁC SUẤT

1. Định nghĩa

Một đặc trưng định tính quan trọng của biến cố liên quan đến một phép thử là nó có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi phép thử được tiến hành. Một câu hỏi được đặt ra là nó có xảy ra không ? Khả năng xảy ra của nó là bao nhiêu ? Như vậy, nảy sinh một vấn đề là cần phải gán cho biến cố đó một con số hợp lí để đánh giá khả năng xảy ra của nó. Ta gọi số đó là *xác suất của biến cố*.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa sau đây.

ĐỊNH NGHĨA

Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Ta gọi tỉ số $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ là *xác suất của biến cố* A , kí hiệu là $P(A)$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

CHÚ Ý

$n(A)$ là số phần tử của A hay cũng là số các kết quả thuận lợi cho biến cố A , còn $n(\Omega)$ là số các kết quả có thể xảy ra của phép thử.

II – TÍNH CHẤT CỦA XÁC SUẤT

Giả sử A và B là các biến cố liên quan đến một phép thử có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện.

ĐỊNH LÝ

- a) $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1.$
- b) $0 \leq P(A) \leq 1$, với mọi biến cố A .
- c) Nếu A và B xung khắc, thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (công thức cộng xác suất)

HỆ QUẢ

Với mọi biến cố A , ta có $P(\bar{A}) = 1 - P(A).$

Chứng minh. Vì $A \cup \bar{A} = \Omega$ và $A \cap \bar{A} = \emptyset$ nên theo công thức cộng xác suất ta có

$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A}).$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh. ■

III – CÁC BIẾN CỐ ĐỘC LẬP, CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

Nếu sự xảy ra của một biến cố không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của một biến cố khác thì ta nói hai biến cố đó *độc lập*.

Tổng quát, đối với hai biến cố bất kì ta có mối quan hệ sau :

A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $P(A.B) = P(A).P(B).$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Tính xác suất của các biến cố

- ① $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$
- ② Nếu A và B xung khắc, thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (công thức cộng xác suất).
- ③ Với mọi biến cố A , ta có $P(\bar{A}) = 1 - P(A).$
- ④ A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $P(A.B) = P(A).P(B).$

1. Gieo ngẫu nhiên một đồng tiền cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất của các biến cố sau :
 - a) A : “Mặt sấp xuất hiện hai lần” ;
 - b) B : “Mặt sấp xuất hiện đúng một lần” ;
 - c) C : “Mặt sấp xuất hiện ít nhất một lần”.

2. Trong một lớp học gồm có 17 học sinh nam và 13 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi :
 - a) có tất cả đều là nam ;
 - b) có 1 nam và 3 nữ ;
 - c) có cả nam và nữ ;
 - d) có ít nhất một nữ.

5. Gọi S là tập hợp tất cả số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của S . Chọn ngẫu nhiên một số từ S , tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6. Ba xạ thủ bắn súng độc lập vào bia. Xác suất trúng đích của người thứ nhất là 0,9, của người thứ hai là 0,7, của người thứ ba là 0,5. Tính xác suất sao cho :

- a) Cả ba xạ thủ cùng bắn trúng ;
- b) Có đúng một xạ thủ bắn trúng ;
- c) Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. Một đề thi Toán có 50 câu hỏi trắc nghiệm khách quan, mỗi câu hỏi có bốn đáp án và chỉ có duy nhất một đáp án đúng. Học sinh A không biết câu trả lời và lựa chọn ngẫu nhiên các đáp án, mỗi câu được chọn một đáp án duy nhất. Biết mỗi câu đúng được 0,2 điểm và không bị trừ điểm khi lựa chọn đáp án sai. Tính xác suất để học sinh A được :

- a) 0 điểm ; b) 10 điểm ; c) 5 điểm ; d) 7 điểm.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Gieo hai con súc sắc cân đối đồng chất. Tính xác suất của biến cố:

- a) Có đúng một mặt 6 chấm xuất hiện
- b) Tổng số chấm trên các mặt xuất hiện nhỏ hơn 10
- c) Tổng số chấm trên các mặt xuất hiện hoặc là số lẻ hoặc chia hết cho 3

BT 2. Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 6 quả màu trắng và 4 quả màu đen. Hộp thứ hai chứa 4 quả màu trắng và 6 quả màu đen. Lấy ngẫu nhiên một quả từ mỗi hộp.

Gọi A là biến cố : “Quả lấy từ hộp thứ nhất màu trắng”

Gọi B là biến cố : “Quả lấy từ hộp thứ hai màu trắng”

- a) A và B có phải là hai biến cố độc lập không ?
- b) Tính xác suất để hai quả lấy ra cùng màu
- c) Tính xác suất để hai quả lấy ra khác màu

BT 3. Gieo đồng thời bốn đồng xu cân đối đồng chất. Tính xác suất của biến cố:

- a) Cả 4 đồng xu đều ngửa.
- b) Có đúng 3 đồng xu lật ngửa.
- c) Có ít nhất hai đồng xu lật ngửa.

Đáp số: a) $\frac{1}{16}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{11}{16}$

BT 4. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất của biến cố sau:

- a) Lần thứ nhất xuất hiện mặt 6 chấm.
- b) Lần thứ hai xuất hiện mặt 6 chấm.
- c) Ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm.
- d) Không lần nào xuất hiện mặt 6 chấm.

Đáp số: a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{6}$; c) $\frac{11}{36}$; d) $\frac{25}{36}$

BT 5. Gieo hai con súc sắc cân đối đồng chất. Tính xác suất của biến cố:

- a) Tổng hai mặt xuất hiện bằng 7.
- b) Các mặt xuất hiện có số chấm bằng nhau.

Đáp số: a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{6}$

BT 6. Một bình chứa 6 viên bi gồm 2 xanh, 2 vàng, 2 đỏ. (các viên bi này chỉ khác nhau về màu)

Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất để được :

- a) Hai viên màu xanh.
- b) Hai viên khác màu.

Đáp số: a) $\frac{1}{15}$; b) $\frac{4}{5}$

BT 7. Một bình đựng 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ và 2 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất để được:

- a) Hai viên cùng màu
- b) Hai viên khác màu.

Đáp số: a) $\frac{5}{18}$; b) $\frac{13}{18}$

BT 8. Một bình đựng 8 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ, các viên bi này chỉ khác nhau về màu.

Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để được :

- a) 3 viên xanh
- b) 3 viên đỏ
- c) 3 viên cùng màu
- d) ít nhất 2 viên xanh

Đáp số: a) $\frac{14}{55}$; b) $\frac{1}{55}$; c) $\frac{3}{11}$; d) $\frac{42}{55}$

BT 9. Một bình đựng 7 viên bi chỉ khác nhau về màu, trong đó có 4 viên bi xanh, 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để được :

- a) 2 viên bi đỏ và 1 viên bi xanh. b) Tất cả là bi xanh.

Đáp số: a) $\frac{12}{35}$; b) $\frac{4}{35}$

BT 10. Một hộp kín có chứa 10 quả cầu trắng, 8 quả cầu đen, có kích thước, trọng lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên 5 quả cầu. Tìm xác suất của biến cố trong 5 quả cầu có đúng 3 quả cầu đỏ. Đáp số:

$\frac{5}{17}$

BT 11. Một tổ sinh viên có 6 nam, 5 nữ.

- a) Tìm xác suất lấy 4 sinh viên lao động trong đó có 1 nữ.
b) Tìm xác suất lấy 4 sinh viên lao động trong đó có không quá 3 nữ.

Đáp số: a) $\frac{10}{33}$; b) $\frac{65}{66}$

BT 12. Một tổ gồm 9 nam và 3 nữ.

- a) Có bao nhiêu cách chọn 1 nhóm có 4 người để trực nhật.
b) Tính xác suất để khi chọn ngẫu nhiên 1 nhóm có 4 người có đúng một nữ.
c) Cần chia tổ làm 3 nhóm, mỗi nhóm 4 người để đi làm 3 công việc khác nhau.
Tính xác suất để mỗi nhóm có đúng một nữ.

Đáp số: a) 495 ; b) $\frac{29}{55}$; c) $\frac{16}{55}$

BT 13. Một đề thi gồm 100 câu hỏi khác nhau. Mỗi đề thi có 5 câu hỏi, một học sinh thuộc 80 câu hỏi. Tính xác suất để học sinh đó rút ngẫu nhiên một đề thi trong đó có 4 câu hỏi mà mình học thuộc.

Đáp số: $\frac{5135}{12222} \approx 0,4201$

BT 14. Một đợt xổ số phát hành 20.000 vé trong đó có 1 giải nhất, 100 giải nhì, 200 giải ba, 1000 giải tư, 5000 giải khuyến khích. Tìm xác suất để một người mua 3 vé, trúng 1 giải nhì và 2 giải khuyến khích.

Đáp số: $\frac{124,975}{133313}$

BT 15. Chọn ngẫu nhiên 5 quân bài trong cỗ bài tú-lơ-khơ, ta được một xấp bài. Tính xác suất để trong xấp bài này chứa hai bộ đôi (Tức là có 2 con cùng thuộc một bộ; 2 con thuộc bộ thứ hai; con thứ 5 thuộc bộ khác).

Đáp số: $\frac{198}{4165}$

BT 16. Hai người đi săn độc lập với nhau và cùng bắn một con thú. Xác suất bắn trúng của người thứ nhất là $\frac{3}{5}$, của người thứ hai là $\frac{1}{2}$. Tính xác suất để con thú bị bắn trúng. Đáp số: $\frac{4}{5}$

BT 17. Hai cầu thủ bóng đá sút phạt đền. Mỗi người đá một lần, với xác suất làm bàn của người thứ nhất là 0,8 và xác suất làm bàn của người thứ hai là 0,6. Tính xác suất :

- a) Người thứ nhất sút hỏng
b) Cả hai cùng sút trúng
c) Cả hai cùng sút trượt
d) Có ít nhất một người sút trúng
e) Có đúng một người sút trúng

Đáp số: a) 0,2 ; b) 0,48 ; c) 0,08 ; d) 0,92 ; e) 0,44

BT 18. Một đơn vị vận tải có 10 xe ô tô, có 6 xe tốt. Điều ngẫu nhiên 3 xe đi công tác.

Tính xác suất để trong 3 xe đó có ít nhất một xe tốt.

Đáp số: $\frac{29}{30}$

BT 19. Một hộp bóng đèn có 12 bóng, trong đó có 8 bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng.

Tính xác suất để lấy được:

a) ít nhất 2 bóng tốt

b) ít nhất 1 bóng tốt.

Đáp số: a) $\frac{28}{55}$

b) $\frac{54}{55}$

BT 20. Một máy bay được trang bị 4 động cơ, trong đó 2 động cơ ở cánh phải và 2 động cơ ở cánh trái và các động cơ này hoạt động độc lập. Biết rằng ở cánh phải, xác suất mỗi động cơ bị hỏng lần lượt là 0,1 và 0,2. Ở cánh trái, xác suất mỗi động cơ bị hỏng lần lượt là 0,1 và 0,3.

a) Tính xác suất để máy bay hoạt động an toàn, nếu mỗi cánh máy bay có ít nhất 1 động cơ hoạt động.

b) Tính xác suất để máy bay có thể đáp xuống, nếu có ít nhất 1 động cơ hoạt động.

Đáp số: a) 0,9506 ; b) 0,9994

BT 21. Một bà mẹ mong sinh bằng được con gái (sinh được rồi thì không sinh nữa, chưa sinh được thì sẽ sinh nữa), xác suất sinh con gái trong một lần là 0,486. Tính xác suất sao cho bà mẹ đạt được mong muốn ở lần sinh thứ 2.

Đáp số: 0,249804

BT 22. Xác suất sinh con trai trong mỗi lần sinh là 0,51. Tính xác suất sao cho sinh 3 lần thì có ít nhất 1 trai (Chỉ xét 1 lần sinh 1 con)

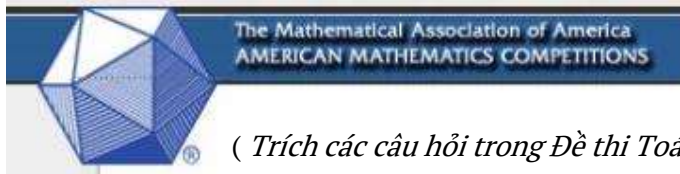
Đáp số: 0,882351

BT 23. (B_2015) Có hai chiếc hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi, tính xác suất để 2

viên bi được lấy ra có cùng màu.

Đáp số: $\frac{10}{21}$

D. NHÌN RA THẾ GIỚI



(Trích các câu hỏi trong Đề thi Toán AMC)

1) Two real numbers are selected independently at random from the interval $[-20, 10]$

What is the probability that the product of those numbers is greater than zero?

- (A) $\frac{1}{9}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{5}{9}$ (E) $\frac{2}{3}$

2) Positive integers a , b and c are randomly and independently selected with replacement from the set $\{1, 2, 3, \dots, 2010\}$. What is the probability that $abc + ab + c$ is divisible by 3?

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{29}{81}$ (C) $\frac{31}{81}$ (D) $\frac{11}{27}$ (E) $\frac{13}{27}$

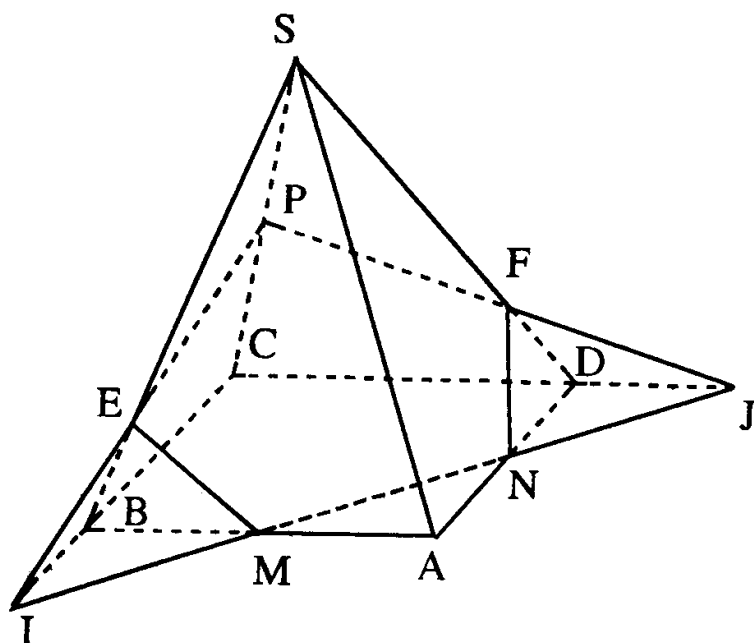
3) A palindrome between 1000 and 10,000 is chosen at random. What is the probability that it is divisible by 7?

- (A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{5}$

- 4) Bernardo randomly picks 3 distinct numbers from the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ and arranges them in descending order to form a 3-digit number. Silvia randomly picks 3 distinct numbers from the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ and also arranges them in descending order to form a 3-digit number. What is the probability that Bernardo's number is larger than Silvia's number ?
- (A) $\frac{47}{72}$ (B) $\frac{37}{56}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{49}{72}$ (E) $\frac{39}{56}$
- 5) Professor Gamble buys a lottery ticket, which requires that he picks six different integers from 1 through 46, inclusive. He chooses his numbers so that the sum of the base-ten logarithms of his six numbers is an integer. It so happens that the integers on the winning ticket have the same property – the sum of the base-ten logarithms is an integer. What is the probability that Professor Gamble holds the winning ticket ?
- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 1
- 6) The state income tax where Kristin lives is levied at the rate of $p\%$ of the first \$28000 of annual income plus $(p + 2)\%$ of any amount above \$28000. Kristin noticed that the state income tax she paid amounted to $(p + 0.25)\%$ of her annual income. What was her annual income ?
- (A) \$28000 (B) \$32000 (C) \$35000 (D) \$42000 (E) \$56000

HÌNH HỌC

11

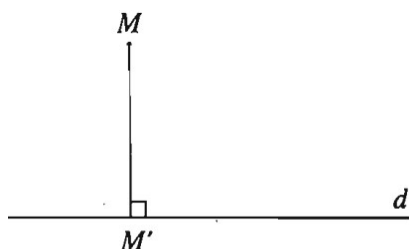


PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẪNG

§ 1. PHÉP BIẾN HÌNH

A. KIẾN THỨC

Ta đã biết rằng với mỗi điểm M có một điểm M' duy nhất là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng d cho trước (h.1.1).



Hình 1.1

ĐỊNH NGHĨA

Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M' của mặt phẳng đó được gọi là **phép biến hình** trong mặt phẳng.

Nếu kí hiệu phép biến hình là F thì ta viết $F(M) = M'$ hay $M' = F(M)$ và gọi điểm M' là ảnh của điểm M qua phép biến hình F .

Nếu $\mathcal{H}$ là một hình nào đó trong mặt phẳng thì ta kí hiệu $\mathcal{H}' = F(\mathcal{H})$ là tập các điểm

$M' = F(M)$, với mọi điểm M thuộc $\mathcal{H}$. Khi đó ta nói F biến hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}'$, hay hình $\mathcal{H}'$ là ảnh của hình $\mathcal{H}$ qua phép biến hình F .

Phép biến hình biến mỗi điểm M thành chính nó được gọi là **phép đồng nhất**.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Xác định các phép biến hình

- Trong mặt phẳng, cho đường thẳng d và điểm M không thuộc d . Gọi điểm M' sao cho d là đường trung trực của đoạn MM' . Quy tắc đặt tương ứng điểm M với điểm M' nêu trên có phải là một phép biến hình không ?

- Trong mặt phẳng, cho điểm I và M phân biệt. Gọi điểm M' sao cho I là trung điểm của đoạn MM' . Quy tắc đặt tương ứng điểm M với điểm M' nêu trên có phải là một phép biến hình không ?

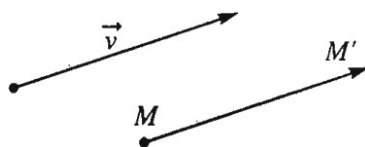
3. Cho trước số a dương, với mỗi điểm M trong mặt phẳng, gọi M' là điểm sao cho $MM' = a$. Quy tắc đặt tương ứng điểm M với điểm M' nêu trên có phải là một phép biến hình không ?

§ 2. PHÉP TỊNH TIẾN

A. KIẾN THỨC

I – ĐỊNH NGHĨA

Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là **phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$** .

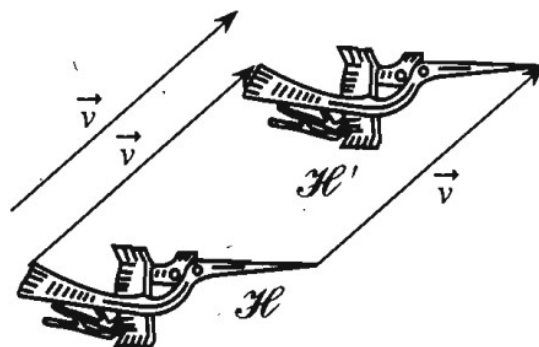


Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ thường được kí hiệu là là $T_{\vec{v}}$, $\vec{v}$ được gọi là **vectơ tịnh tiến**.

Như vậy $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Phép tịnh tiến theo vectơ – không chính là **phép đồng nhất**.

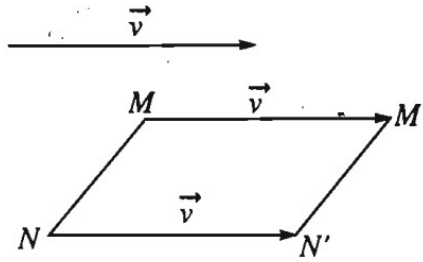
Phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến hình $\mathcal{H}$ thành hình $\mathcal{H}'$.



II – TÍNH CHẤT

TÍNH CHẤT 1

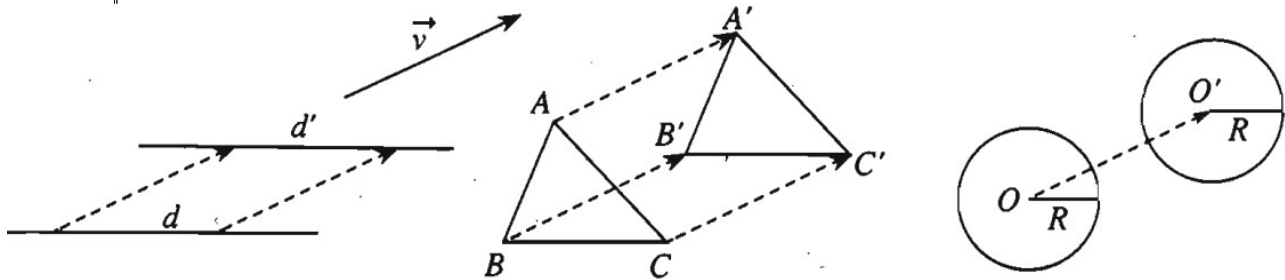
Nếu $T_{\vec{v}}(M) = M', T_{\vec{v}}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ và từ đó suy ra $M'N' = MN$.



Phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

TÍNH CHẤT 2

Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.



III – BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho $\vec{v} = (a; b)$. Với mỗi điểm $M(x; y)$, gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của của M qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$. Ta có

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Xác định các yếu tố và tập hợp điểm qua phép tịnh tiến

① Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho $\vec{v} = (a; b)$. Với mỗi điểm $M(x; y)$, gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của của M qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$. Ta có

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$$

② Nếu $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ với $\vec{v}$ là vectơ không đổi, thì tồn tại một phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến M thành M' .

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho vectơ $\vec{v} = (-1; 2)$, điểm $A(3; 5)$, đường thẳng d có phương trình $x - 2y + 3 = 0$ và đường tròn (C) có phương trình $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 8$.

2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hình bình hành $ABCD$ với $B(1; -2), C(5; 1)$. Biết A di chuyển trên đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$. Chứng minh tập

- a) Tìm tọa độ của điểm A' là ảnh của A qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.
- b) Tìm tọa độ của điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.
- c) Tìm phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.
- d) Tìm phương trình của đường thẳng (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

hợp điểm D là một đường tròn. Viết phương trình đường tròn đó.

3. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho

vectơ $\vec{v} = (-1; 3)$, hai đường thẳng

$$d : x + 2y - 4 = 0 \text{ và } d' : 2x + 3y + 2 = 0.$$

Tìm tọa độ điểm $M \in d$ và $N \in d'$ sao cho $T_{\vec{v}}(M) = N$.

BT 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: 3x - y + 5 = 0$ và vectơ $\vec{v} = (-2; 3)$. Tìm ảnh của d qua $T_{\vec{v}}$. **ĐS:** $3x - y + 14 = 0$

BT 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ và vectơ $\vec{v} = (-3; -1)$. Tìm ảnh của (C) qua $T_{\vec{v}}$. **ĐS:** $(x + 5)^2 + y^2 = 9$

BT 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho vectơ $\vec{v} = (-2; 3)$. Hãy tìm các điểm A', B' lần lượt là ảnh của các điểm $A(1; -1), B(4; 3)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. **ĐS:** $A'(-1; 2), B'(2; 6)$

BT 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{v} = (1; -3)$ và đường thẳng $d: 2x - 3y + 5 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$. **ĐS:** $2x - 3y - 6 = 0$

BT 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2; -3)$. **ĐS:** $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$

BT 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): x + y + 3 = 0$, đường tròn $(T): x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$ và vectơ $\vec{v} = (1, 2)$. Tìm tọa độ điểm $M \in (d)$ và $N \in (T)$ sao cho $T_{\vec{v}}(M) = N$.

$$\text{ĐS: } \begin{cases} M(3, -6) \\ N(4, -4) \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} M(-4, 1) \\ N(3, -3) \end{cases}$$

BT 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng có phương trình: $(d): 2x - 3y + 3 = 0$, $(d_1): 2x - 3y - 5 = 0$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{w}$ có giá vuông góc với đường thẳng (d) để (d_1) là ảnh của (d) qua $T_{\vec{w}}$. **ĐS:** $\vec{w} = \left(\frac{16}{13}, -\frac{24}{13}\right)$

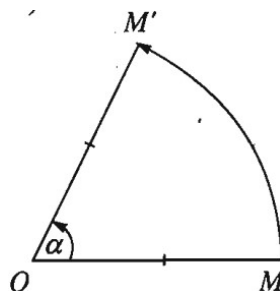
BT 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-1, 2), B(6, 0)$. Điểm C di động trên đường tròn (C) tâm $I(1, 3)$, bán kính $R = 4$. Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng D di động trên một đường tròn cố định. Tìm phương trình đường tròn này. **ĐS:** $(x + 6)^2 + (y - 5)^2 = 16$

§ 2. PHÉP QUAY

A. KIẾN THỨC

I – ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm O và góc lượng giác α . Phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM')$ bằng α được gọi là **phép quay tâm O góc α** .

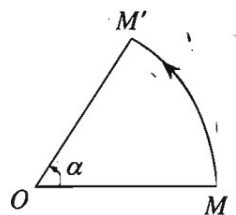


Điểm O được gọi là *tâm quay* còn α được gọi là *góc quay* của phép quay đó.

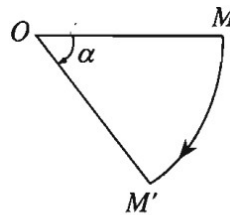
Phép quay tâm O góc α thường được kí hiệu là $Q_{(O,\alpha)}$.

NHẬN XÉT

1) Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác nghĩa là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.



Chiều quay dương

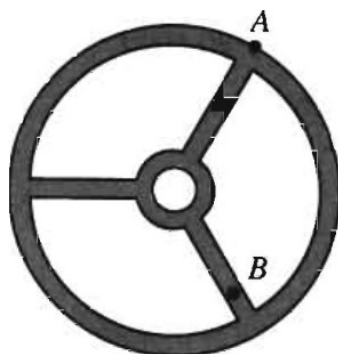


Chiều quay âm

2) Với k là số nguyên ta luôn có phép quay $Q_{(O,2k\pi)}$ là phép đồng nhất.

II – TÍNH CHẤT

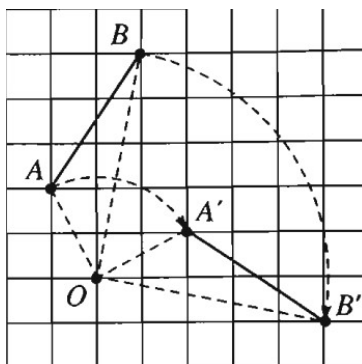
Quan sát chiếc tay lái (vô-lăng) trên tay người lái xe ta thấy khi người lái xe quay tay lái một góc nào đó thì hai điểm A và B trên tay lái cũng quay theo. Tuy vị trí A và B thay đổi nhưng khoảng cách giữa chúng không thay đổi. Điều đó được thể hiện trong tính chất sau của phép quay.



TÍNH CHẤT 1

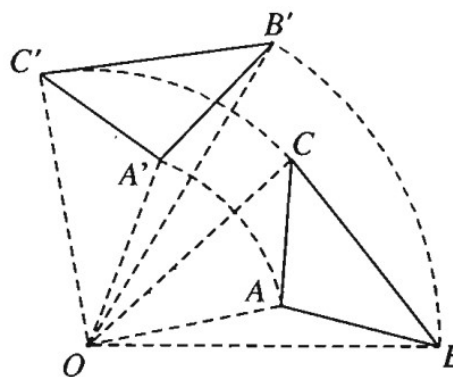
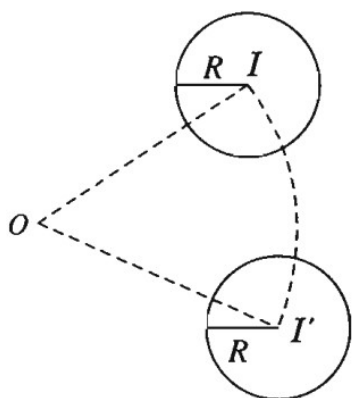
Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Phép quay tâm O , góc $(OA; OA')$ biến điểm A thành A' , B thành B' . Khi đó ta có $A'B' = AB$.



TÍNH CHẤT 2

Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.



NHẬN XÉT

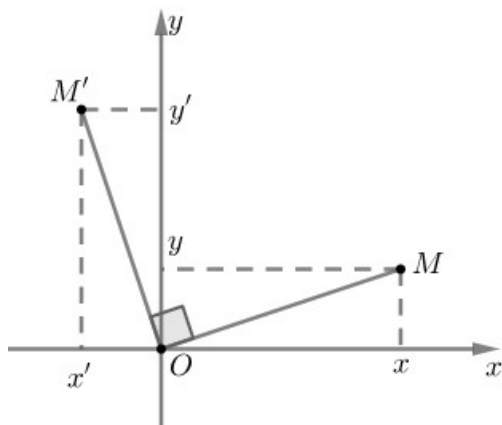
Phép quay góc α với $0 < \alpha < \pi$, biến đường thẳng d thành đường thẳng d' sao cho góc giữa d và d' bằng α (nếu $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$), hoặc bằng $\pi - \alpha$ (nếu $\frac{\pi}{2} \leq \alpha < \pi$).

Phép quay góc $\alpha = 90^\circ$ hoặc $\alpha = -90^\circ$, biến đường thẳng d thành đường thẳng d' thì d' vuông góc với d .

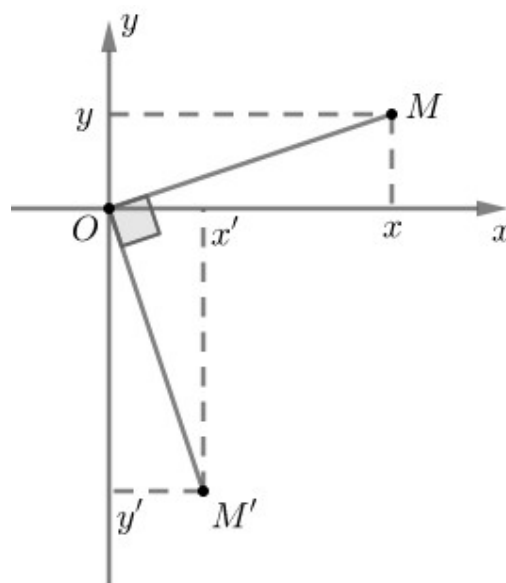
III – BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , với mỗi điểm $M(x; y)$, gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của của M qua phép quay $Q_{(0, \alpha)}$. Ta chỉ xét hai phép quay sau :

$$1) Q_{(0, \alpha=90^\circ)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}.$$



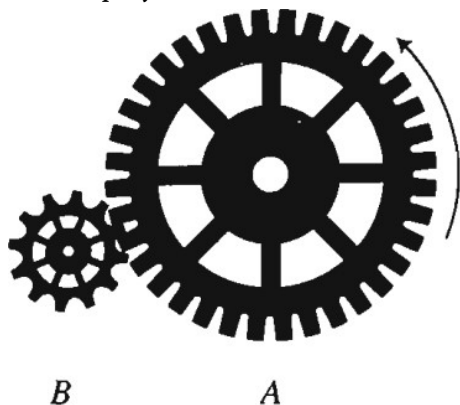
$$2) Q_{(0, \alpha=-90^\circ)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}.$$



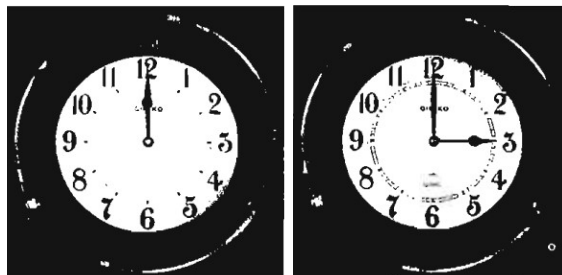
B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Xác định ảnh của phép quay

1. Khi bánh xe A quay theo chiều dương thì bánh xe B quay theo chiều nào ?



2. Trên một chiếc đồng hồ từ lúc 12 giờ đến 15 giờ, kim giờ và kim phút đã quay một góc bao nhiêu độ ?



Dạng 2 : Tìm tọa độ, phương trình ảnh qua phép quay

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , với mỗi điểm $M(x; y)$, gọi $M'(x'; y')$ là ảnh của của M qua phép quay $Q_{(0, \alpha)}$.

$$\textcircled{1} \quad Q_{(0, \alpha=90^\circ)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}.$$

$$\textcircled{2} \quad Q_{(0, \alpha=-90^\circ)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}.$$

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy điểm $A(2; 0)$, đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$ và đường tròn (C) có phương trình $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

- a) Tìm tọa độ của điểm A' là ảnh của A qua phép quay tâm O góc 90° .
b) Tìm phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép quay tâm O góc 90° .

2. Qua phép quay $Q_{(0, -90^\circ)}$, tìm :

- a) tọa độ ảnh của điểm $A(3; 4)$.
b) phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng $d : 2x - y + 4 = 0$.
c) phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$.

c) Tìm phương trình của đường thẳng (C') là ảnh của (C) qua phép quay tâm O góc 90° .

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Cho tam giác đều ABC tâm O . Tìm ảnh của tam giác ABC qua phép quay

a) $Q_{(O, 120^\circ)}$.

b) $Q_{(B, -60^\circ)}$.

BT 2. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Tìm ảnh của hình vuông qua phép quay

a) $Q_{(O, -90^\circ)}$.

b) $Q_{(B, 90^\circ)}$.

BT 3. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC . Điểm A chạy trên nửa đường tròn đó. dựng về phía ngoài của $\triangle ABC$ hình vuông $ABEF$. Chứng minh rằng E chạy trên nửa đường tròn cố định.

BT 4. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , M là trung điểm AB , N là trung điểm OA . Tìm ảnh của $\triangle AMN$ qua phép quay tâm O góc quay 90° .

BT 5. Trong mặt phẳng Oxy , tìm ảnh của điểm $M(-5; 2)$ qua phép quay tâm O góc quay 90° .

BT 6. Qua phép quay $Q_{(O, -90^\circ)}$, tìm ảnh của đường thẳng $(d): 3x + 4y - 12 = 0$.

$$\text{ĐS: } 3x - 4y + 12 = 0$$

BT 7. Trong mặt phẳng Oxy , tìm ảnh của đường thẳng $d: 3x - 2y + 6 = 0$ qua phép quay tâm O góc quay -90° .

BT 8. Trong mặt phẳng Oxy , tìm ảnh của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ qua phép quay tâm O góc quay 90° .

BT 9. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(T): (x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$. Viết phương trình đường tròn (C) là ảnh của (T) qua phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(O, 90^\circ)}$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v} = (2, -4)$

$$\text{ĐS: } (x+2)^2 + (y+6)^2 = 25$$

BT 10. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(T): (x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$. Viết phương trình đường tròn (C) là ảnh của (T) qua phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay $Q_{(O, 90^\circ)}$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ với $\vec{v} = (-2, 5)$

$$\text{ĐS: } (x+6)^2 + (y-2)^2 = 25$$

BT 11. Trong mặt phẳng Oxy , cho $\vec{v}(2; 5)$ và đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$, (C'') là ảnh của (C') qua phép quay $Q_{(O, 90^\circ)}$. Viết phương trình (C'') .

BT 12. Cho đường tròn tâm O , đường kính BC . Điểm A chạy trên đường tròn đó. Dựng về phía ngoài của tam giác ABC hình vuông $ABEF$. Chứng minh rằng điểm E chạy trên một đường tròn cố định.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(2; -4)$. Điểm A là ảnh của điểm nào sau đây qua phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{2}$?

A. $E(4; -2)$

B. $B(4; -2)$

C. $C(4; 2)$

D. $F(-4; -2)$

Câu 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d: 3x - 4y = 0$. Phương trình ảnh của d qua phép quay tâm O góc quay 180° là

A. $3x - 4y = 0$

B. $4x - 3y + 2 = 0$

C. $4x + 3y + 2 = 0$

D. $3x + 4y + 2 = 0$

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $\Delta: x - 2y + 3 = 0$. Phương trình ảnh của d qua phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{2}$ là

A. $2x + y - 1 = 0$

B. $2x - y + 3 = 0$

C. $x + 2y + 3 = 0$

D. $2x + y + 3 = 0$

Câu 4. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $\Delta: y + 3 = 0$. Phương trình ảnh của d qua phép quay tâm O góc quay $-\frac{\pi}{2}$ là

A. $x + 3 = 0$

B. $x - 3 = 0$

C. $x - y + 3 = 0$

D. $y - 3 = 0$

Câu 5. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 9$. Phương trình ảnh của (C) qua phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{4}$ là

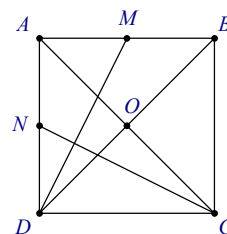
A. $x^2 + y^2 = 9$

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$

C. $(x-1)^2 + y^2 = 9$

D. $(x-1)^2 + y^2 = 9$

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD (hình bên). Theo hình bên thì khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**



A. Góc giữa DM và CN bằng 90°

B. Tam giác ODC là ảnh của tam giác OAB qua phép quay tâm O góc quay 180°

C. Đường thẳng DM là ảnh của đường thẳng CN qua phép quay tâm O góc quay -90°

D. Tam giác OBC là ảnh của tam giác OAB qua phép quay tâm O góc quay 90°

Câu 7. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(2; -4)$. Ảnh của điểm A qua phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{2}$ có tọa độ là

A. $A'(4; 2)$

B. $A'(-4; -2)$

C. $A'(4; -2)$

D. $A'(-2; 4)$

Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + (y-1)^2 = 4$. Phương trình ảnh của (C) qua phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{2}$ là

A. $(x-1)^2 + y^2 = 4$

B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$

C. $(x+1)^2 + y^2 = 4$

D. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$

Câu 9. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(0; 1)$. Ảnh của điểm A qua phép quay tâm O góc quay $-\frac{\pi}{2}$ có tọa độ là

A. $A'(-1; 0)$

B. $A'(1; 0)$

C. $A'(0; -1)$

D. $A'(-1; 1)$

Câu 10. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , góc giữa $\overline{AB}$ và $\overline{AD}$ bằng -90° . Gọi M, N, K, Q lần lượt là trung điểm của AD, DC, CB, BA . Khi đó, phép quay tâm O góc quay -90° sẽ biến tam giác ODN thành tam giác nào dưới đây?

A. OBQ

B. OAM

C. OCK

D. KNO

Câu 11. Cho phép quay tâm O góc quay 120° biến đường thẳng d thành d' . Khi đó, góc giữa hai đường thẳng d và d' bằng

A. 60°

B. 120°

C. 90°

D. -60°

§ 4. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

A. KIẾN THỨC

I – KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH

ĐỊNH NGHĨA

|| **Phép dời hình** là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Nếu phép dời hình F biến các điểm M, N lần lượt thành các điểm M', N' thì $M'N' = MN$.

NHẬN XÉT

- 1) Các phép đồng nhất, tịnh tiến và phép quay đều là những phép dời hình.
- 2) Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình là một phép dời hình.

II – TÍNH CHẤT

Phép dời hình :

- 1) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ;
- 2) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó ;
- 3) Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó ;
- 4) Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

III – KHÁI NIỆM HAI HÌNH BẰNG NHAU

ĐỊNH NGHĨA

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Xác định tọa độ ảnh, phương trình qua phép dời hình

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{v} = (2; -1)$, điểm $A(3; 5)$. Tìm tọa độ điểm ảnh của A lần lượt liên tiếp qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ và phép quay $Q_{(O, 90^\circ)}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy vectơ $\vec{v} = (3; 1)$ và đường tròn (C) có phương trình $x^2 + (y + 2)^2 = 9$. Viết phương trình đường tròn ảnh lần lượt liên tiếp qua $Q_{(O, -90^\circ)}$ và $T_{\vec{v}}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x - y - 3 = 0$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm $I(1;2)$ và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2;1)$ biến đường thẳng d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

- A. $3x - y + 1 = 0$. B. $3x - y - 8 = 0$. C. $3x - y + 3 = 0$. D. $3x - y + 8 = 0$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$. Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục Oy và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2;3)$ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn có phương trình sau?

- A. $x^2 + y^2 = 4$. B. $(x-2)^2 + (y-6)^2 = 4$.
C. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$. D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Câu 3. Hợp thành của hai phép tịnh tiến là phép nào trong các phép dưới đây?

- A. Phép đối xứng trục. B. Phép đối xứng tâm.
C. Phép tịnh tiến. D. Phép quay.

Câu 4. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ và phép đối xứng tâm I là phép nào trong các phép sau đây?

- A. Phép đối xứng trục. B. Phép đối xứng tâm.
C. Phép đồng nhất. D. Phép tịnh tiến.

Câu 5. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua hai đường thẳng song song là phép nào trong các phép dưới đây?

- A. Phép đối xứng trục. B. Phép đối xứng tâm.
C. Phép tịnh tiến. D. Phép quay, góc quay khác π .

Câu 6. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua hai đường thẳng vuông góc với nhau là phép nào trong các phép dưới đây?

- A. Phép đối xứng trục. B. Phép đối xứng tâm.
C. Phép tịnh tiến. D. Phép quay, góc quay khác π .

Câu 7. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng qua hai đường thẳng cắt nhau (không vuông góc) là phép nào trong các phép dưới đây?

- A. Phép đối xứng trục. B. Phép đối xứng tâm.
C. Phép tịnh tiến. D. Phép quay, góc quay khác π .

Câu 8. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép đối xứng tâm là phép nào trong các phép dưới đây?

- A. Phép đối xứng trục. B. Phép đối xứng tâm.
C. Phép tịnh tiến. D. Phép quay, góc

Câu 9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O với M, N lần lượt là trung điểm AB và CD . Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ và phép đối xứng trục BC là phép nào trong các phép sau đây?

- A. Phép đối xứng tâm M . B. Phép đối xứng tâm N .
C. Phép đối xứng tâm O . D. Phép đối xứng trục MN .

Câu 10. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Gọi Q là phép quay tâm A biến B thành D , D là phép đối xứng trục AD . Hỏi phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay Q và phép đối xứng trục AD là phép nào trong các phép sau đây?

- A. Phép đối xứng tâm D . B. Phép đối xứng trục AC .

C. Phép đối xứng tâm O .

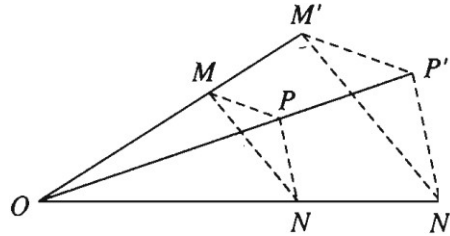
D. Phép đối xứng trục AB .

§ 5. PHÉP VỊ TỰ

A. KIẾN THỨC

I – ĐỊNH NGHĨA

Cho điểm O và số $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O , tỉ số k .



Phép vị tự tâm O , tỉ số k thường được kí hiệu là $V_{(O,k)}$.

NHẬN XÉT

- 1) Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.
- 2) Khi $k = 1$, phép vị tự là đồng nhất.
- 3) $M' = V_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{\left(O, \frac{1}{k}\right)}(M')$.

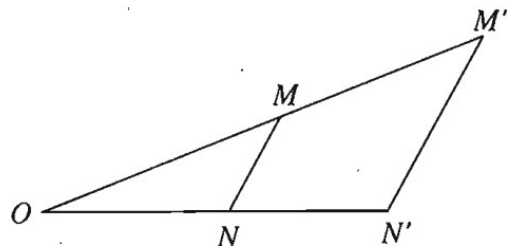
II – TÍNH CHẤT

TÍNH CHẤT 1

Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tùy ý theo thứ tự thành M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k \cdot \overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k| \cdot MN$.

Chứng minh. Gọi O là tâm của phép vị tự tỉ số k . Theo định nghĩa của phép vị tự ta có : $\overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON'} = k \overrightarrow{ON}$. Do đó :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{ON} - k \overrightarrow{OM} \\ &= k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = k \overrightarrow{MN}.\end{aligned}$$



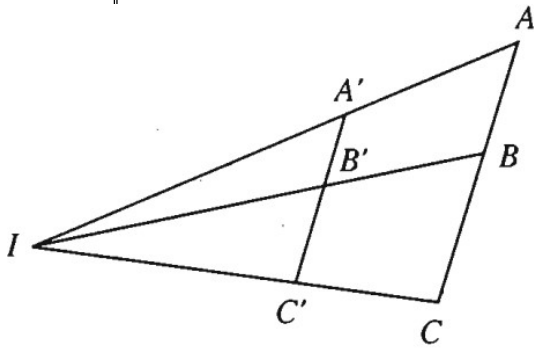
Từ đó suy ra $M'N' = |k| \cdot MN$.

TÍNH CHẤT 2

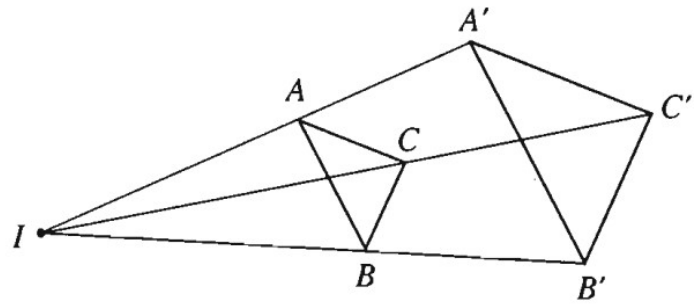
Phép vị tự tỉ số k :

- a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy (h.1.53).
- b) Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

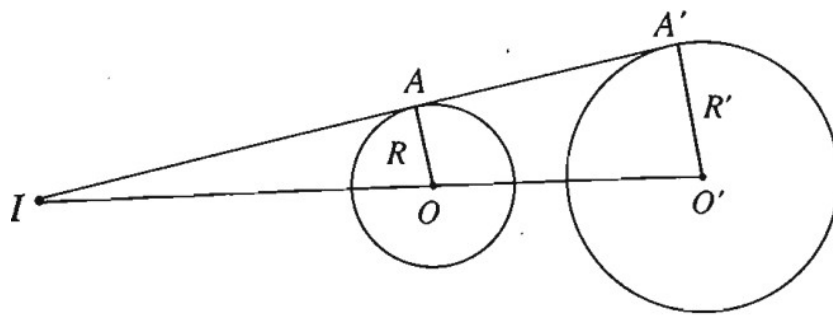
- c) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó (h.1.54).
d) Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|R$ (h.1.55).



Hình 1.53



Hình 1.54



Hình 1.55

III – BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $I(a;b)$ và số $k \neq 0$. Với mỗi điểm $M(x;y)$, gọi $M'(x';y')$ là ảnh của của M qua phép vị tự tâm I tỉ số k . Ta có

$$\overrightarrow{IM'} = k \cdot \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - a = k(x - a) \\ y' - b = k(y - b) \end{cases}.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Xác định các yếu tố và tập hợp điểm qua phép vị tự

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $I(a;b)$ và số $k \neq 0$. Với mỗi điểm $M(x;y)$, gọi $M'(x';y')$ là ảnh của của M qua phép vị tự tâm I tỉ số k . Ta có

$$\overrightarrow{IM'} = k \cdot \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - a = k(x - a) \\ y' - b = k(y - b) \end{cases}.$$

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho vectơ $I(-1;2)$, điểm $A(3;5)$, đường thẳng d có

2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 = 4$ và hai điểm $A(-4;3), B(6;5)$. Gọi M là một điểm

phương trình $x - 2y + 3 = 0$ và đường tròn (C) có phương trình $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 8$.

a) Tìm tọa độ của điểm A' là ảnh của A qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = -2$.

b) Tìm tọa độ của điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = -2$.

c) Tìm phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = -2$.

d) Tìm phương trình của đường thẳng (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = -2$.

di chuyển trên đường tròn (C) . Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác MAB di chuyển trên một đường tròn. Tìm phương trình đường tròn đó.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Dựng ảnh của hình vuông qua phép vị tự tâm O tỉ số $\frac{1}{2}$.

BT 2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, xét phép vị tự $V_{(O,k=-2)}$. Qua phép $V_{(O,k=-2)}$, tìm ảnh của :

- a) Điểm $M(2, -1)$ **ĐS :** $M'(-4, 2)$
 b) Đường thẳng $(d): 3x + 2y - 6 = 0$ **ĐS :** $(d'): 3x + 2y + 12 = 0$
 c) Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ **ĐS :** $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 16$

BT 3. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm $I(1, 2)$, tỷ số $k = -2$.

ĐS : $(x+3)^2 + (y-8)^2 = 36$

BT 4. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường thẳng $(d): 3x + 4y - 12 = 0$. Viết phương trình đường thẳng (d') là ảnh của (d) qua phép vị tự tâm $I(1, 2)$, tỷ số $k = -2$.

ĐS : $3x + 4y - 9 = 0$

BT 5. Trong mặt phẳng Oxy, cho elip $(E): 9x^2 + 16y^2 = 144$. Tìm ảnh của elip (E) qua phép vị tự tâm $A(-2, 5)$, tỷ số 3.

ĐS : $\frac{(x-4)^2}{144} + \frac{(y+10)^2}{81} = 1$

BT 6. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $d: 2x + y - 4 = 0$.

- a) Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O tỉ số $k = 3$.
 b) Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm $I(-1; 2)$ tỉ số $k = -2$.

BT 7. Trong mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng $d: 3x + 2y - 6 = 0$. Hãy viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự tâm $I(1; 2)$ tỉ số vị tự $k = -2$

BT 8. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$. Hãy viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm $I(1; 2)$ tỉ số $k = -2$.

BT 9. Cho nửa đường tròn đường kính AB . Hãy dựng hình vuông có hai đỉnh nằm trên nửa đường tròn, hai đỉnh còn lại nằm trên đường kính AB của đường tròn đó.

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d' . Có bao nhiêu phép vị tự biến d thành đường thẳng d' ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 2. Cho hai đường thẳng song song d và d' . Có bao nhiêu phép vị tự với tỉ số $k = 20$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d' ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 3. Cho hai đường thẳng song song d và d' và một điểm O không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến đường thẳng d thành đường thẳng d' ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 4. Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d' . Có bao nhiêu phép vị tự biến mỗi đường thẳng thành chính nó.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 5. Cho hai đường tròn bằng nhau $(O; R)$ và $(O'; R')$ với tâm O và O' phân biệt. Có bao nhiêu phép vị tự biến $(O; R)$ thành $(O'; R')$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 6. Cho đường tròn $(O; R)$. Có bao nhiêu phép vị tự với tâm O biến $(O; R)$ thành chính nó?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 7. Cho đường tròn $(O; R)$. Có bao nhiêu phép vị tự biến $(O; R)$ thành chính nó?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 8. Có bao nhiêu phép vị tự biến đường tròn $(O; R)$ thành đường tròn $(O; R')$ với $R \neq R'$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 9. Phép vị tự tâm O tỉ số $k=1$ là phép nào trong các phép sau đây?

- A. Phép đối xứng tâm. B. Phép đối xứng trục.
C. Phép quay một góc khác $k\pi$. D. Phép đồng nhất.

Câu 10. Phép vị tự tâm O tỉ số $k=-1$ là phép nào trong các phép sau đây?

- A. Phép đối xứng tâm. B. Phép đối xứng trục.
C. Phép quay một góc khác $k\pi$. D. Phép đồng nhất.

Câu 11. Phép vị tự không thể là phép nào trong các phép sau đây?

- A. Phép đồng nhất. B. Phép quay.
C. Phép đối xứng tâm. D. Phép đối xứng trục.

Câu 12. Phép vị tự tâm O tỉ số k ($k \neq 0$) biến mỗi điểm M thành điểm M' . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{k} \overrightarrow{OM'}$. B. $\overrightarrow{OM} = k \overrightarrow{OM'}$. C. $\overrightarrow{OM} = -k \overrightarrow{OM'}$. D. $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM'}$.

Câu 13. Phép vị tự tâm O tỉ số -3 lần lượt biến hai điểm A, B thành hai điểm C, D . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{BD}$. B. $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. C. $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

Câu 14. Cho phép vị tự tỉ số $k=2$ biến điểm A thành điểm B , biến điểm C thành điểm D . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$. B. $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. C. $2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BD}$.

Câu 15. Cho tam giác ABC với trọng tâm G , D là trung điểm BC . Gọi V là phép vị tự tâm G tỉ số k biến điểm A thành điểm D . Tìm k .

- A. $k = \frac{3}{2}$ B. $k = -\frac{3}{2}$ C. $k = \frac{1}{2}$ D. $k = -\frac{1}{2}$

Câu 16. Cho tam giác ABC với trọng tâm G . Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB của tam giác ABC . Khi đó, phép vị tự nào biến tam giác $A'B'C'$ thành tam giác ABC ?

- A. Phép vị tự tâm G , tỉ số $k=2$. B. Phép vị tự tâm G , tỉ số $k=-2$.
C. Phép vị tự tâm G , tỉ số $k=-3$. D. Phép vị tự tâm G , tỉ số $k=3$.

Câu 17. Cho hình thang $ABCD$ có hai cạnh đáy là AB và CD thỏa mãn $AB=3CD$. Phép vị tự biến điểm A thành điểm C và biến điểm B thành điểm D có tỉ số k là

- A. $k=3$. B. $k=-\frac{1}{3}$. C. $k=\frac{1}{3}$. D. $k=-3$.

Câu 18. Cho hình thang $ABCD$, với $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD .

Xét phép vị tự tâm I tỉ số k biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{CD}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $k = -\frac{1}{2}$.

B. $k = \frac{1}{2}$.

C. $k = -2$.

D. $k = 2$.

Câu 19. Xét phép vị tự $V_{(I,3)}$ biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Hỏi chu vi tam giác $A'B'C'$ gấp mấy lần chu vi tam giác ABC .

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 6.

Câu 20. Một hình vuông có diện tích bằng 4. Qua phép vị tự $V_{(I,-2)}$ thì ảnh của hình vuông trên có diện tích tăng gấp mấy lần diện tích ban đầu.

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2.

C. 4.

D. 8.

Câu 21. Cho đường tròn $(O;3)$ và điểm I nằm ngoài (O) sao cho $OI = 9$. Gọi $(O';R')$ là ảnh của $(O;3)$ qua phép vị tự $V_{(I,5)}$. Tính R' .

A. $R' = 9$.

B. $R' = \frac{5}{3}$.

C. $R' = 27$.

D. $R' = 15$.

Câu 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự tâm $I(2;3)$ tỉ số $k = -2$ biến điểm $M(-7;2)$ thành điểm M' có tọa độ là

A. $(-10;2)$

B. $(20;5)$

C. $(18;2)$

D. $(-10;5)$

Câu 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho phép vị tự V tỉ số $k = 2$ biến điểm $A(1;-2)$ thành điểm $A'(-5;1)$. Hỏi phép vị tự V biến điểm $B(0;1)$ thành điểm có tọa độ nào sau đây?

A. $(0;2)$.

B. $(12;-5)$.

C. $(-7;7)$.

D. $(11;6)$.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $M(4;6)$ và $M'(-3;5)$. Phép vị tự tâm I , tỉ số $k = \frac{1}{2}$ biến điểm M thành M' . Tìm tọa độ tâm vị tự I .

A. $I(-4;10)$.

B. $I(11;1)$.

C. $I(1;11)$.

D. $I(-10;4)$.

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $I(-2;-1)$, $M(1;5)$ và $M'(-1;1)$. Phép vị tự tâm I tỉ số k biến điểm M thành M' . Tìm k .

A. $k = \frac{1}{3}$.

B. $k = \frac{1}{4}$.

C. $k = 3$.

D. $k = 4$.

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: 2x + y - 3 = 0$. Phép vị tự tâm O , tỉ số $k = 2$ biến d thành đường thẳng nào trong các đường thẳng có phương trình sau?

A. $2x + y + 3 = 0$.

B. $2x + y - 6 = 0$.

C. $4x - 2y - 3 = 0$.

D. $4x + 2y - 5 = 0$.

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: x + 2y - 1 = 0$ và điểm $I(1;0)$. Phép vị tự tâm I tỉ số k biến đường thẳng Δ thành Δ' có phương trình là

A. $x - 2y + 3 = 0$.

B. $x + 2y - 1 = 0$.

C. $2x - y + 1 = 0$.

D. $x + 2y + 3 = 0$.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có phương trình $x - 2y + 1 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$ và điểm $I(2;1)$. Phép vị tự tâm I tỉ số k biến đường thẳng Δ_1 thành Δ_2 . Tìm k .

A. $k = 1$.

B. $k = 2$.

C. $k = 3$.

D. $k = 4$.

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-5)^2 = 4$ và điểm $I(2;-3)$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm I tỉ số $k = -2$. Khi đó (C') có phương trình là

A. $(x-4)^2 + (y+19)^2 = 16$.

B. $(x-6)^2 + (y+9)^2 = 16$.

C. $(x+4)^2 + (y-19)^2 = 16$.

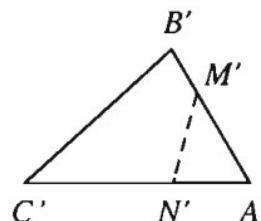
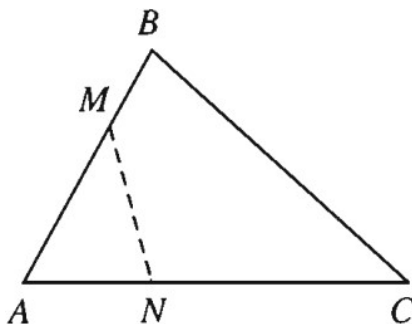
D. $(x+6)^2 + (y+9)^2 = 16$.

§ 6. PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC

I – ĐỊNH NGHĨA

Phép biến hình F được gọi là **phép đồng dạng tỉ số k** ($k > 0$), nếu với hai điểm M, N bất kì và ảnh M', N' tương ứng của chúng, ta luôn có $M'N' = kMN$.



NHẬN XÉT

- 1) Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số 1.
- 2) Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.
- 3) Nếu thực hiện liên tiếp phép đồng dạng tỉ số k và phép đồng dạng tỉ số p , ta được phép đồng dạng tỉ số pk .

II – TÍNH CHẤT

Phép đồng dạng tỉ số k :

- a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.
- b) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- c) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.
- d) Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính kR .

III – HÌNH ĐỒNG DẠNG

ĐỊNH NGHĨA

Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Xác định ảnh qua phép đồng dạng

1. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $I(1;1)$ và đường tròn (C) có tâm I bán kính 2. Qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O , góc quay 90° và phép vị tự tâm O , tỉ số $\sqrt{2}$, tìm :
- Tìm tọa độ ảnh của điểm I .
 - Viết phương trình đường tròn ảnh của (C) .

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- | | |
|-------------------------------------|--|
| A. Phép dời hình là phép đồng dạng. | B. Phép vị tự là phép đồng dạng. |
| C. Phép đồng dạng là phép dời hình. | D. Phép vị tự không phải là phép dời hình. |

Câu 2. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- | | |
|---|---|
| A. Hai đường thẳng bất kì luôn đồng dạng. | B. Hai đường tròn bất kì luôn đồng dạng. |
| C. Hai hình vuông bất kì luôn đồng dạng. | D. Hai hình chữ nhật bất kì luôn đồng dạng. |

Câu 3. Cho tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng với nhau theo tỉ số k . Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- | | |
|--|---|
| A. k là tỉ số hai trung tuyến tương ứng | B. k là tỉ số hai đường cao tương ứng |
| C. k là tỉ số hai góc tương ứng | |
| D. k là tỉ số hai bán kính đường tròn ngoại tiếp tương ứng | |

Câu 4. Mọi phép dời hình cũng là phép đồng dạng với tỉ số k bằng:

- | | | | |
|--------------|---------------|--------------|--------------|
| A. $k = 1$. | B. $k = -1$. | C. $k = 0$. | D. $k = 2$. |
|--------------|---------------|--------------|--------------|

Câu 5. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số $k = 1$.
- Phép đồng dạng biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
- Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.
- Phép đồng dạng bảo toàn độ lớn góc.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(2;4)$. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép đối xứng qua trục Oy sẽ biến M thành điểm nào trong các điểm sau:

- A. $(1;2)$ B. $(-2;4)$ C. $(-1;2)$ D. $(1;-2)$

Câu 7. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(-1;-1)$ tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc -45° .

- A. $y = 0$. B. $x = 0$. C. $y = x$. D. $y = -x$.

Câu 8. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp các phép vị tự có tâm O tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc 90° sẽ biến (C) thành đường tròn nào trong các đường tròn sau?

- A. $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$. B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$. D. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Câu 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-2;-3)$ và $B(4;1)$. Phép đồng dạng tỉ số $k = \frac{1}{2}$ biến điểm A thành A' , biến điểm B thành B' . Tính độ dài $A'B'$.

- A. $A'B' = \frac{\sqrt{52}}{2}$. B. $A'B' = \sqrt{52}$. C. $A'B' = \frac{\sqrt{50}}{2}$. D. $A'B' = \sqrt{50}$.

Câu 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường tròn (C) và (C') có phương trình $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ và $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$. Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng tỉ số k , khi đó giá trị k là

- A. $k = \frac{4}{3}$. B. $k = \frac{3}{4}$. C. $k = \frac{9}{16}$. D. $k = \frac{16}{9}$.

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

§ 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

A. KIẾN THỨC

I – KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1. Mặt phẳng

Mặt bảng, mặt bàn, mặt hồ nước yên lặng cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn.

- Để biểu diễn mặt phẳng ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn.
- Để kí hiệu mặt phẳng, ta thường dùng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hi Lạp đặt trong dấu ngoặc $()$: $(P), (Q), \dots, (\alpha), (\beta), \dots$



2. Điểm thuộc mặt phẳng

Cho điểm A và mặt phẳng (α) .

Khi điểm A thuộc mặt phẳng (α) ta nói A nằm trên (α) hay (α) chứa A , hay (α) đi qua A và kí hiệu là $A \in (\alpha)$.

Khi điểm A không thuộc mặt phẳng (α) ta nói điểm A nằm ngoài (α) hay (α) không chứa A và kí hiệu là $A \notin (\alpha)$.

3. Hình biểu diễn của một hình trong không gian

Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian người ta dựa vào những quy tắc sau đây :

- Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
- Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.
- Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.
- Dùng nét vẽ liền để biểu diễn những đường nhìn thấy và nét đứt để biểu diễn cho đường bị che khuất.

Các quy tắc khác sẽ được học ở phần sau.

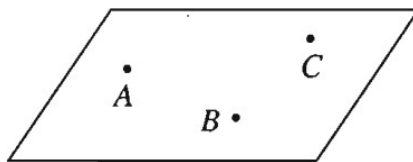
II – CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN

TÍNH CHẤT 1

|| Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

TÍNH CHẤT 2

|| Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.



TÍNH CHẤT 3

|| Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Nếu mọi điểm của đường thẳng d đều thuộc mặt phẳng (α) thì ta nói đường thẳng d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.

TÍNH CHẤT 4

|| Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

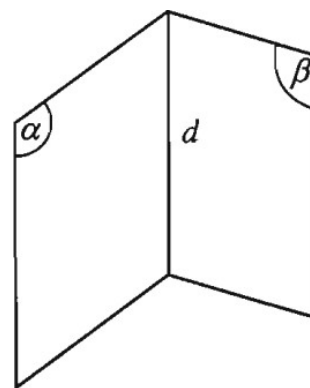
Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó *đồng phẳng*, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói rằng chúng *không đồng phẳng*.

TÍNH CHẤT 5

|| Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Từ đó suy ra : Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy.

Đường thẳng chung d của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) được gọi là *giao tuyến* của (α) và (β) và kí hiệu là $d = (\alpha) \cap (\beta)$.



TÍNH CHẤT 6

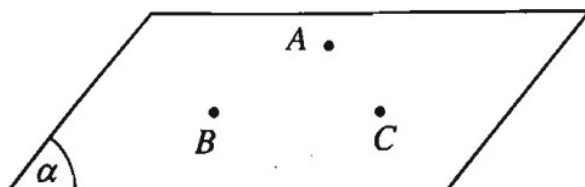
|| Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

III – CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẪNG

Dựa vào các tính chất thừa nhận trên, ta có ba cách xác định một mặt phẳng sau đây :

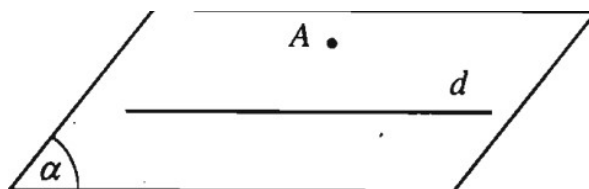
a) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Ba điểm A, B, C không thẳng hàng xác định một mặt phẳng.



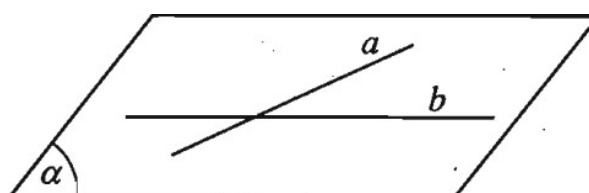
b) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

Cho đường thẳng d và điểm A không thuộc d . Khi đó điểm A và đường thẳng d xác định một mặt phẳng, kí hiệu là (A, d) hoặc (d, A) .



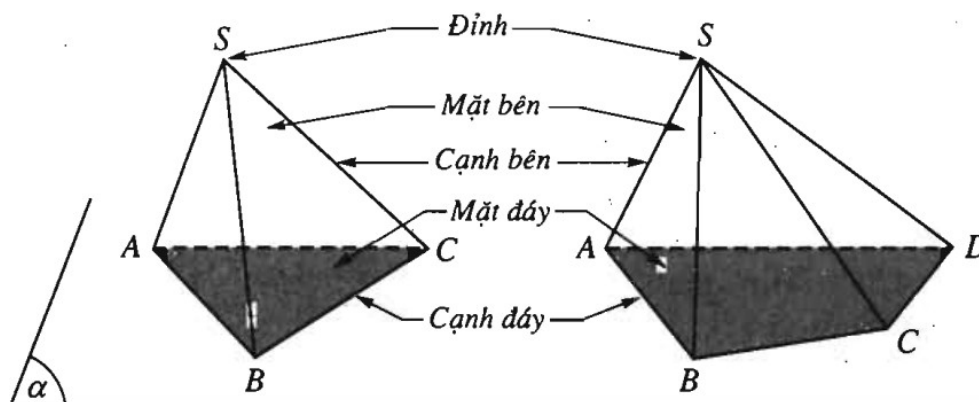
c) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Cho hai đường thẳng cắt nhau a và b . Khi đó hai đường thẳng a và b xác định một mặt phẳng và kí hiệu (a, b) hoặc (b, a) .



IV – HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

1) Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (α) . Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$ gọi là *hình chóp*, kí hiệu là $S.A_1A_2 \dots A_n$. Ta gọi S là *đỉnh* và đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ là *mặt đáy*. Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$ được gọi là các *mặt bên*; các đoạn $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ là các *cạnh bên*; các cạnh của đa giác đáy gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp. Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... lần lượt là *hình chóp tam giác*, *hình chóp tứ giác*, *hình chóp ngũ giác*, ...



2) Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là *hình tứ diện* (hay ngắn gọn là *tứ diện*) và được kí hiệu là $ABCD$. Các điểm A, B, C, D gọi là

các *đỉnh* của tứ diện. Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, BD gọi là các *cạnh* của tứ diện. Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là hai *cạnh đối diện*. Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các *mặt* của tứ diện. Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là *đỉnh đối diện* với mặt đó.

Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều gọi là *hình tứ diện đều*.

3) *Thiết diện* (hay *mặt cắt*) của hình $\mathcal{H}$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) là phần chung của $\mathcal{H}$ và (α) .

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, chứng minh ba điểm thẳng hàng

① Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng thì ta tìm hai điểm chung phân biệt của chúng.

Trình bày điểm chung của hai mặt phẳng :

$$A \in (\alpha) \text{ hoặc } \begin{cases} A \in a \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha)$$

$$\text{và } A \in (\beta) \text{ hoặc } \begin{cases} A \in b \\ b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow A \in (\beta)$$

Suy ra A là điểm chung của (α) và (β) hay $A \in (\alpha) \cap (\beta)$.

② Để chứng minh ba điểm thẳng hàng ta có thể chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt.

1. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D .

Trên hai đoạn AB và AC lấy hai điểm M

và N sao cho $\frac{AM}{BM} = 1$ và $\frac{AN}{NC} = 2$. Hãy xác

định các giao tuyến sau :

a) $(DMN) \cap (ABD)$;

b) $(DMN) \cap (ACD)$;

c) $(DMN) \cap (ABC)$;

d) $(DMN) \cap (BCD)$.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song với nhau, điểm M thuộc cạnh SA . Tìm các giao tuyến sau :

a) $(SAC) \cap (SBD)$;

b) $(SAB) \cap (SCD)$;

c) $(SAD) \cap (SBC)$;

d) $(SAC) \cap (MBD)$;

e) $(SAD) \cap (SBC)$.

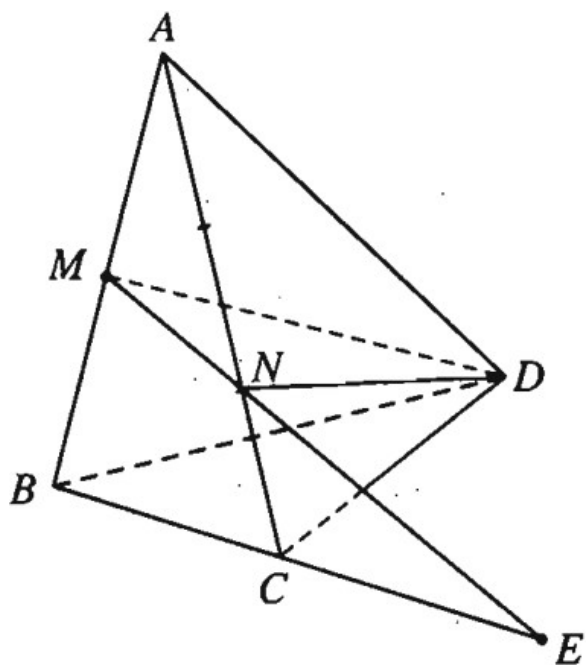
.....

.....

.....

.....

.....



3. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$. Trên SB, SC lần lượt lấy các điểm I và J sao cho IJ không song song với BC . Trong miền trong tam giác ABC lấy điểm K . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng sau :

- a) (IJK) và (ABC) .
- b) (IJK) và (SAC) .
- c) (IJK) và (SAB) .

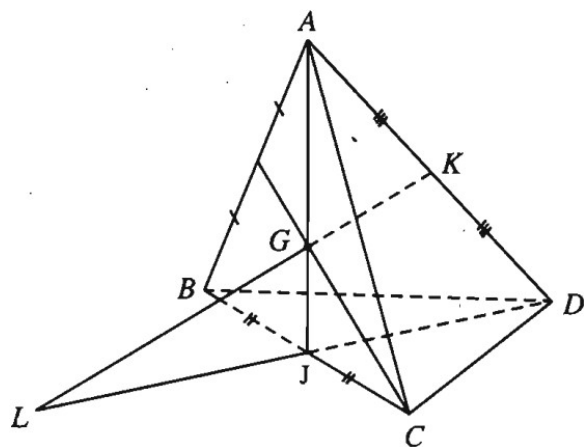
4. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D . Trên ba cạnh AB, AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N và K sao cho đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại H , đường thẳng NK cắt đường thẳng CD tại I , đường thẳng KM cắt đường thẳng BD tại J . Chứng minh ba điểm H, I, J thẳng hàng.

Bước 3. Trong (β) , gọi A là giao điểm của d và a . Ta có

$$\begin{cases} A \in a \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \in (\alpha).$$

Do đó A là giao điểm của d và (α) .

1. Cho tam giác BCD và điểm A không thuộc mặt phẳng (BCD) . Gọi K là trung điểm của đoạn AD và G là trọng tâm của tam giác ABC . Tìm giao điểm của đường thẳng GK và mặt phẳng (BCD) .



2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC . Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Tìm giao điểm của :

- CD và (MNP) .
- AD và (MNP) .

- b) Chứng minh ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.
 c) Chứng minh ba đường thẳng AM, BN, SO đồng quy.

Dạng 4: Tìm thiết diện (hay mặt cắt) của hình chóp khi cắt bởi một mặt phẳng

Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) .

Bước 1. Tìm tất cả các giao điểm của các cạnh của hình chóp với (α) .

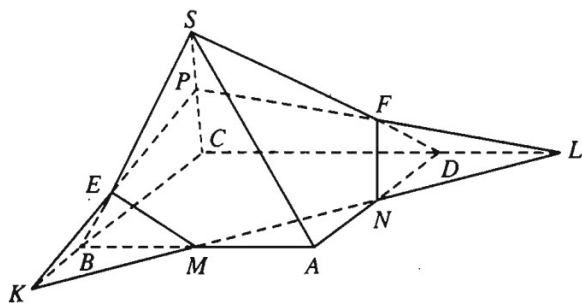
Bước 2. Tìm tất cả các giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp.

Bước 3. Nối các đoạn giao tuyến đóng và kính ta được thiết diện cần tìm.

- 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung

điểm của AB, AD, SC . (tham khảo hình vẽ dưới)

- Tìm giao điểm của (MNP) với các cạnh của hình chóp ;
- Tìm giao tuyến của (MNP) với các mặt của hình chóp ;
- Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP) .



C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Cho hình chóp $S.ABCD$. Giả sử các cạnh đối của tứ giác $ABCD$ không song song nhau. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng sau :

- (SAC) và (SBD) .
- (SAB) và (SCD) .

BT 2. Cho tứ diện $SABC$. Trên SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho: $MN \cap AB = I, NP \cap BC = K$ và $PM \cap AC = E$. Chứng minh ba điểm I, K, E thẳng hàng.

BT 3. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng thuộc một mặt phẳng. Trên các đoạn thẳng AB, AC, BD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho MN không song song với BC . Tìm giao tuyến của (BCD) và (MNP) .

BT 4. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm bên trong tam giác ABD , N là một điểm bên trong tam giác ACD . Tìm giao tuyến của các cặp mp sau

- a) (AMN) và (BCD) b) (DMN) và (ABC)

BT 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và BC .

- a) Tìm giao tuyến hai mp (IBC) và (JAD) .
b) Gọi M và N là hai điểm trên AB và AC sao cho MN không song song BC . Tìm giao tuyến hai mp (IBC) và (DMN) .

BT 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB .

- a) Tìm giao tuyến của hai mp (SAD) và (SBC) .
b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và SC . Tìm giao tuyến của (AMN) và (SAD) .

BT 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và AB , K là điểm nằm trên BD sao cho $BK = 2KD$. Tìm giao tuyến của hai mp :

- a) (IJK) và (ACD) .
b) (IJK) và (ABN) với N là điểm tùy ý trên cạnh CD .

BT 8. Cho tam giác BCD và A là điểm nằm ngoài mp chứa tam giác. Gọi I là trung điểm của AB , K là điểm trong tam giác BCD . Xác định giao điểm của :

- a) IK với (ACD) . b) AC với (IKD) .

BT 9. Cho tứ diện $SABC$. Gọi I là trung điểm SA , H là trung điểm AB . Trên SC lấy điểm K sao cho $CK = 3KS$. Tìm giao điểm của BC với (IHK) .

BT 10. Cho tứ diện $ABCD$. Trên hai đoạn AB và AC lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{AM}{BM} = 1$ và $\frac{AN}{NC} = 2$.
. Hãy xác định giao điểm của đường thẳng BC và mặt phẳng (DMN) .

BT 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC và G là trọng tâm tam giác ABC . Giao điểm của đường thẳng GM và mặt phẳng (BCD)

BT 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC . Gọi I là giao điểm của AM với mặt phẳng (SBD) .

BT 13. Cho hình chóp $S.ABCD$. Điểm C' nằm trên cạnh SC . Tìm thiết diện của hình chóp với (ABC') .

BT 14. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm của AC, BC và I là điểm trên BD sao cho $IB = 2ID$. Tìm thiết diện tạo bởi (IMN) với tứ diện.

BT 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh SB và SC .

- a) Tìm $(SAD) \cap (SBC)$.
b) Tìm $SD \cap (AMN)$.
c) Tìm thiết diện của hình chóp với (AMN) .

BT 16. Cho hình chóp $S.ABCD$. Trong tam giác SCD ta lấy điểm M .

- a) Tìm $(SBM) \cap (SAC)$.
b) Tìm $BM \cap (SAC)$.
c) Tìm thiết diện của hình chóp với (ABM) .

BT 17. Cho hình chóp $S.ABCD$, M là một điểm trên BC , N là một điểm trên SD .

- a) Tìm $I = BN \cap (SAC)$, $J = MN \cap (SAC)$.
b) DM cắt AC tại K . Chứng minh S, K, J thẳng hàng.

c) Xác định thiết diện của hình chóp với (BCN).

BT 18. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD hình bình hành và I là trung điểm SC.

a) Tìm giao tuyến của hai mp (SAC) và (SBD).

b) Tìm giao điểm G của AI và (SBD). Chứng minh G là trọng tâm tam giác SAC.

c) Gọi H là trung điểm CD. Tìm thiết diện tạo bởi (IAH) và hình chóp S.ABCD.

BT 19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm cạnh SA, N là điểm trên cạnh SB sao cho : $MA = 2MS$, $SN = 2NB$. Gọi I là trung điểm của CD.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

b) Tìm giao điểm $H = (IMN) \cap AB$ và $K = (IMN) \cap BC$. Tính tỷ số $\frac{HB}{HA}$ và $\frac{KB}{KC}$

c) Xác định thiết diện tạo bởi (IMN) và hình chóp.

BT 20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SD, I là điểm trên cạnh SA sao cho $AI = 2IS$.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

b) Tìm K là giao điểm của IM với (ABCD). Tính tỷ số $\frac{KD}{KA}$.

c) Gọi N là trung điểm của BC. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (AMN).

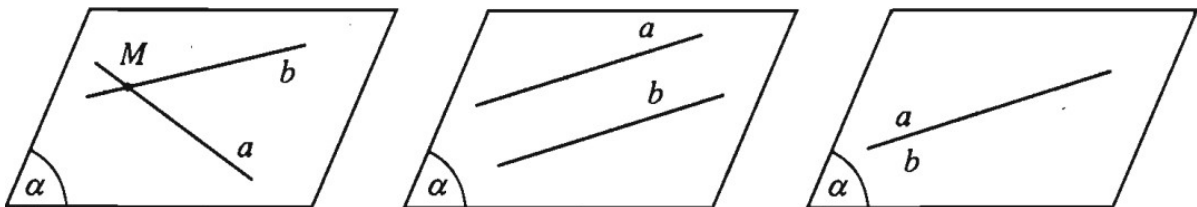
§ 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC

I – VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Trường hợp 1. Có một mặt phẳng chứa a và b .

Khi đó ta nói a và b *đồng phẳng*. Theo kết quả của hình học phẳng có ba khả năng sau đây xảy ra :



i) a và b có điểm chung duy nhất M . Ta nói a và b *cắt nhau* tại M và kí hiệu là $a \cap b = \{M\}$. Ta còn có thể viết $a \cap b = M$.

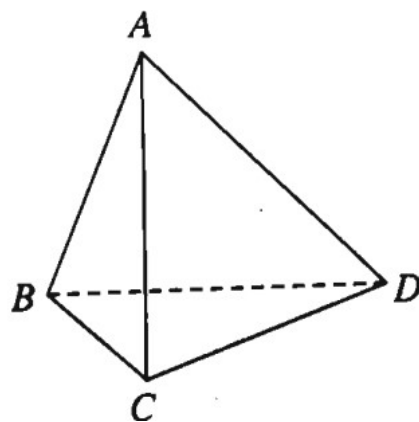
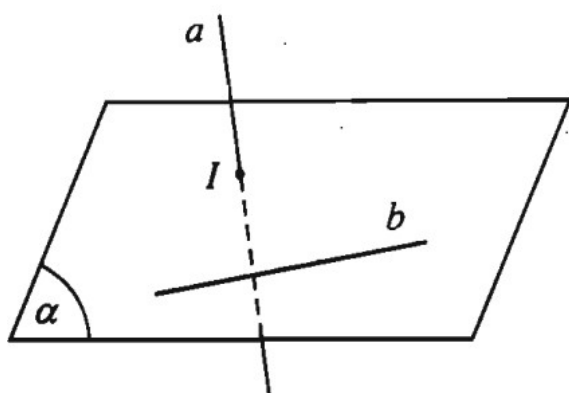
ii) a và b không có điểm chung. Ta nói a và b *song song với nhau* và kí hiệu là $a // b$.

iii) a *trùng* b , kí hiệu là $a \equiv b$.

Như vậy, *hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung*.

Trường hợp 2. Không có mặt phẳng nào chứa a và b .

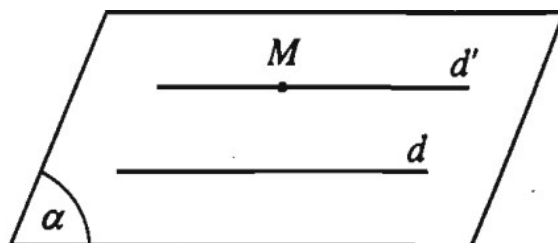
Khi đó ta nói a và b *chéo nhau* hay a *chéo* với b .



II – TÍNH CHẤT

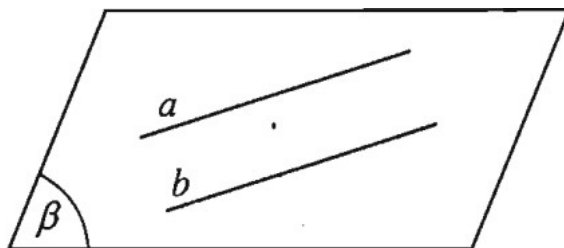
ĐỊNH LÝ 1

Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.



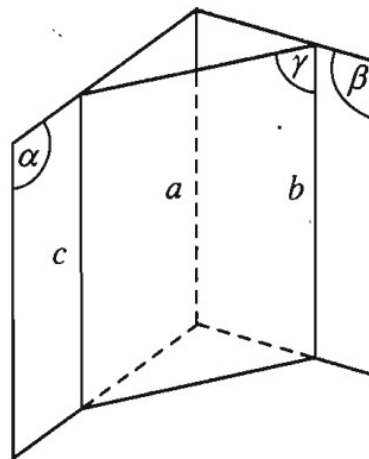
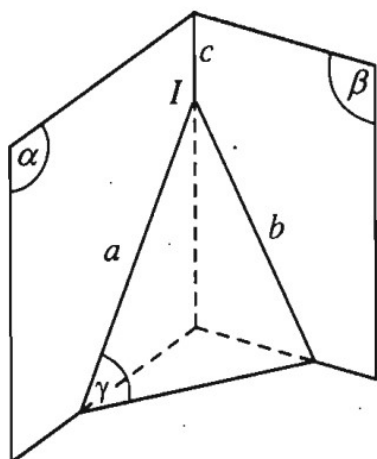
NHẬN XÉT

Hai đường thẳng song song a và b xác định một mặt phẳng, kí hiệu là (a, b) .



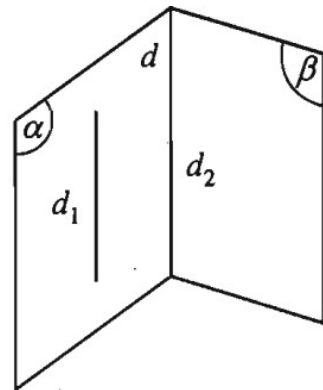
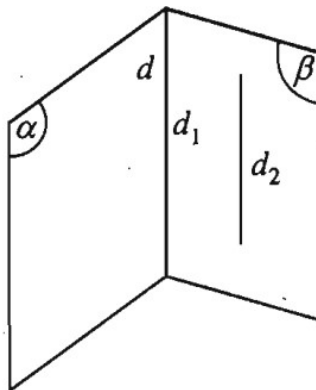
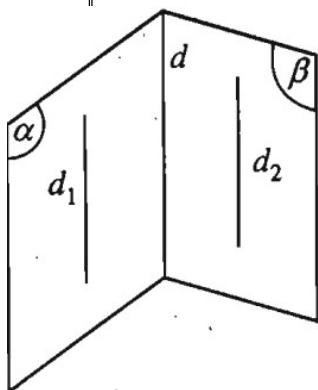
ĐỊNH LÝ 2 (về giao tuyến của ba mặt phẳng)

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.



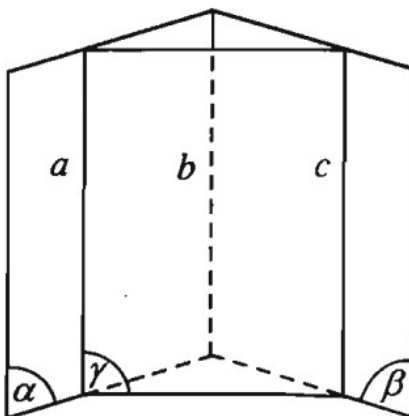
HỆ QUẢ

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



ĐỊNH LÝ 3

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song nhau. Khi hai đường thẳng a và b cùng song song với đường thẳng c , ta kí hiệu $a // b // c$ và gọi là *ba đường thẳng song song*.



B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng có chứa hai đường thẳng song song với nhau, chứng minh hai đường thẳng song song

$$\textcircled{1} \text{ Ta có } \begin{cases} a // b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Mx // a // b. \\ M \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases}$$

$\textcircled{2}$ Sử dụng các tính chất của hình học để chứng minh hai đường thẳng song song với nhau.

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Xác định giao tuyến của các mặt phẳng :

a) (SAB) và (SCD) ;

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi M là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng SD . Tìm giao tuyến của các mặt phẳng :

b) (SAD) và (SBC) .

a) $d_1 = (SAB) \cap (SCD)$;

b) $d_2 = (MAB) \cap (SCD)$;

c) Chứng minh $d_1 \parallel d_2$.

3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J là trọng tâm các tam giác ABC và ABD . Chứng minh IJ song song với CD .

5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB .

- Chứng minh MN song song với CD .
- Tìm $P = SC \cap (AND)$.
- Gọi $I = AN \cap DP$. Chứng minh $SI // AB$.

4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của BC và BD . (P) là mặt phẳng qua IJ và cắt AC, AD lần lượt tại M, N . Chứng minh rằng tứ giác $IJNM$ là hình thang. Nếu M là trung điểm của AC thì tứ giác $IJNM$ là hình gì?

BT 10. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN (khi đó ta còn nói G là trọng tâm của tứ diện).

a) Chứng minh rằng AG đi qua trọng tâm A' của tam giác BCD.

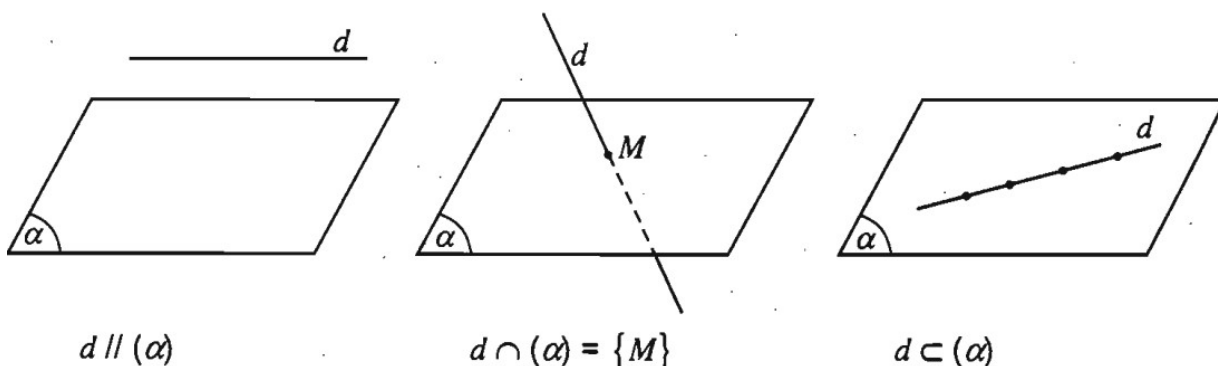
b) Chứng minh $GA = 3GA'$.

§ 3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC

I – VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) . Tùy theo số điểm chung của d và (α) , ta có ba trường hợp sau :

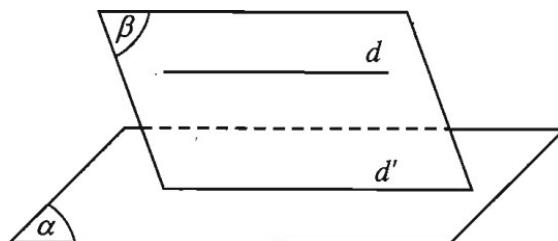


- d và (α) không có điểm chung. Khi đó ta nói d song song với (α) hay (α) song song với d và kí hiệu là $d // (\alpha)$ hay $(\alpha) // d$.
- d và (α) có một điểm chung duy nhất M . Khi đó ta nói d và (α) cắt nhau tại điểm M và kí hiệu là $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.
- d và (α) có từ hai điểm chung trở lên. Khi đó d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.

II – TÍNH CHẤT

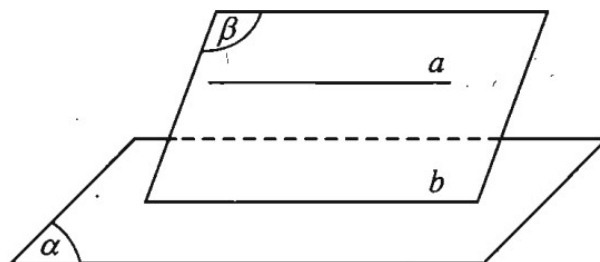
ĐỊNH LÝ 1

Nếu đường thẳng d không nằm trên mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α) .



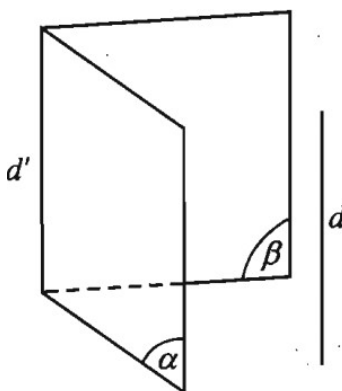
ĐỊNH LÝ 2

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a .



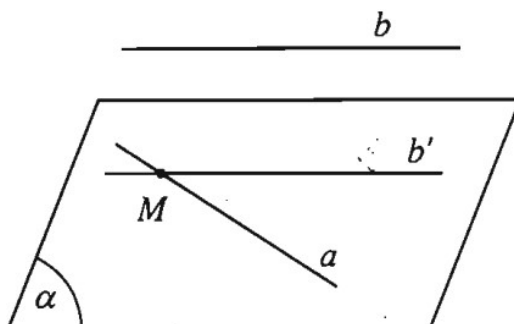
HỆ QUẢ

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



ĐỊNH LÝ 3

Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Ta có $\begin{cases} a \parallel b \\ a \subset (\alpha), b \not\subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \parallel (\alpha).$

- Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M và N trung điểm các cạnh AB và CD .

a) Chứng minh $MN \parallel (SBC)$;

$MN \parallel (SAD)$.

b) Gọi P là trung điểm cạnh SA . Chứng minh rằng $SB \parallel (MNP)$; $SC \parallel (MNP)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2 : Tìm giao tuyến, thiết diện có đường thẳng song song với mặt phẳng

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng biết mặt phẳng chứa đường thẳng song song với mặt phẳng kia,

$$\text{a) } \begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ M \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Mx \parallel a.$$

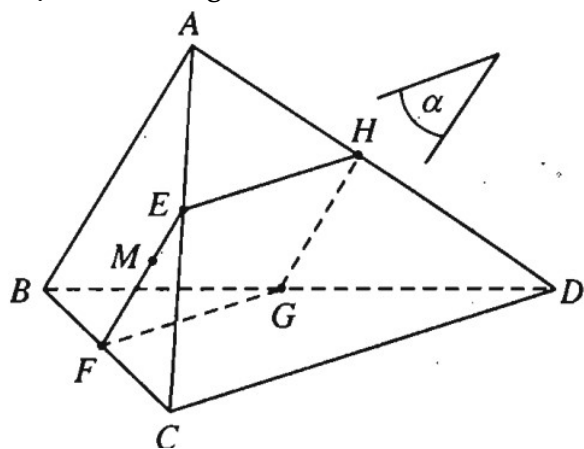
$$\text{b) } \begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ a \parallel (\beta) \\ M \in (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Mx \parallel a.$$

② Chứng minh hai đường thẳng song song

$$\text{a) } \begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ d = (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow d \parallel a.$$

$$\text{b) } \begin{cases} a // (\alpha) \\ a // (\beta) \\ d = (\alpha) \cap (\beta) \end{cases} \Rightarrow d // a.$$

1. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M là điểm thuộc miền trong của tam giác ABC . Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với các đường thẳng AB và CD . Xác định thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện $ABCD$. Thiết diện đó là hình gì ?



2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của CD và (α) là mặt phẳng qua M và song song với SA, BC .

- a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với $(ABCD)$ và (SAB) .
b) Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) . Thiết diện này là hình gì ?
c) Tìm giao tuyến của (α) và (SAD) .

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BT 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD và M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng : MG song song với (ACD).

BT 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD và ACD. Chứng minh rằng

- a) MN song song (BCD). b) MN song song (ABC).

BT 3. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không nằm trong cùng một mặt phẳng .

- a) Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình bình hành. Chứng minh : $OO' \parallel (ADF)$ và (BCE).
b) Gọi M và N là trọng tâm hai tam giác ABD và ABE. Chứng minh $MN \parallel (CED)$.

BT 4. Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trung điểm của AD và N là điểm tùy ý trên BC. α là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song CD.

- a) Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng α .
b) Xác định vị trí của điểm N trên BC sao cho thiết diện là hình bình hành.

ĐS : a) Hình thang ; b) N là trung điểm BC.

BT 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng α đi qua O song song với AB, SC. Thiết diện đó là hình gì? **ĐS :** Hình thang.

BT 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng α qua trung điểm M của AB , song song với BD và SA .

ĐS : Thiết diện là ngũ giác $MNPQR$

BT 7. Cho hình chóp $S.ABCD$, K là điểm nằm trên cạnh bên SD , N là điểm nằm trên cạnh đáy AB . Dựng thiết diện của mặt phẳng (P) đi qua K , N và song song AC .

BT 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AD . Gọi M là một điểm bất kỳ trên cạnh AB , α là mặt phẳng qua M và song song với AD , SB .

- Mặt phẳng α cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì ?
- Chứng minh rằng SC song song α .
- Chứng minh giao điểm hai cạnh bên của thiết diện luôn di động trên một đường thẳng cố định khi M di động trên AB .

BT 9. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M , N là hai điểm trên SB , CD và (P) là mặt phẳng qua MN và song song với SC .

- Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt phẳng (SCD) , (SBC) , (SAC) .
- Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (P) .

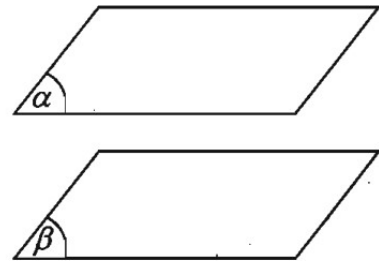
§ 4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC

I – ĐỊNH NGHĨA

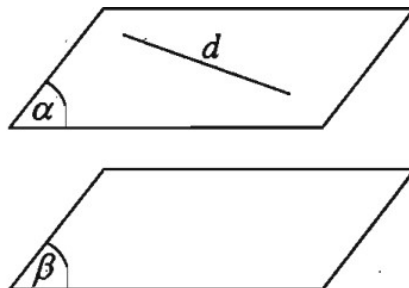
Hai mặt phẳng (α) , (β) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Khi đó ta kí hiệu $(\alpha) // (\beta)$ hay $(\beta) // (\alpha)$.



NHẬN XÉT

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β) . Nếu đường thẳng d nằm trong (α) , thì đường thẳng d song song với (β) .



II – TÍNH CHẤT

ĐỊNH LÝ 1

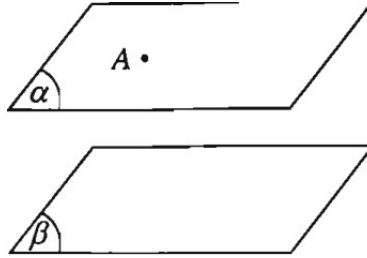
Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β) .

HỆ QUẢ 1

Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b lần lượt song song với hai đường thẳng chứa trong mặt phẳng (β) thì hai mặt phẳng (α) và (β) song song nhau.

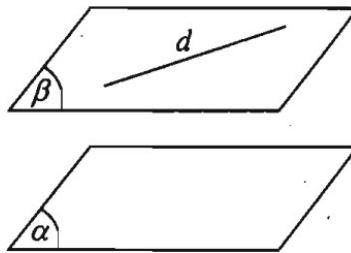
ĐỊNH LÝ 2

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.



HỆ QUẢ 2

Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α) .

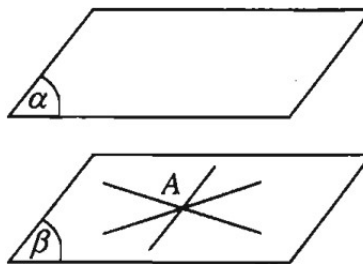


HỆ QUẢ 3

Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song nhau.

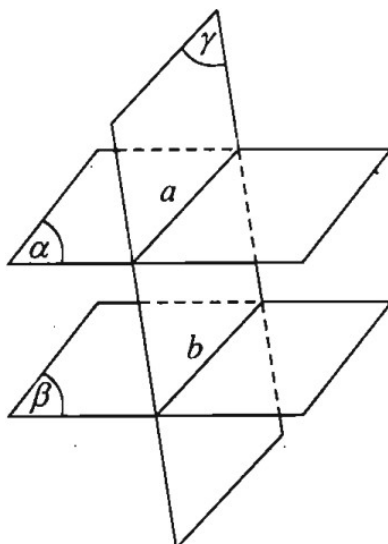
HỆ QUẢ 4

Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) . Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α) .



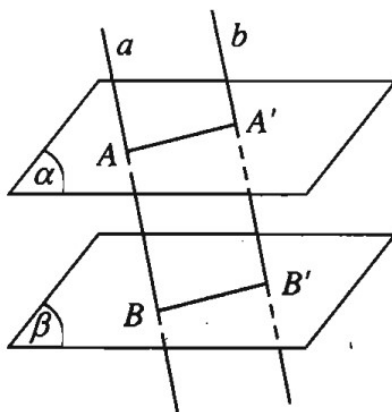
ĐỊNH LÝ 3

Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



HỆ QUẢ 5

Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.



III – ĐỊNH LÝ TA-LÉT (THALÈS)

ĐỊNH LÝ 4 (Định lý Ta-lét)

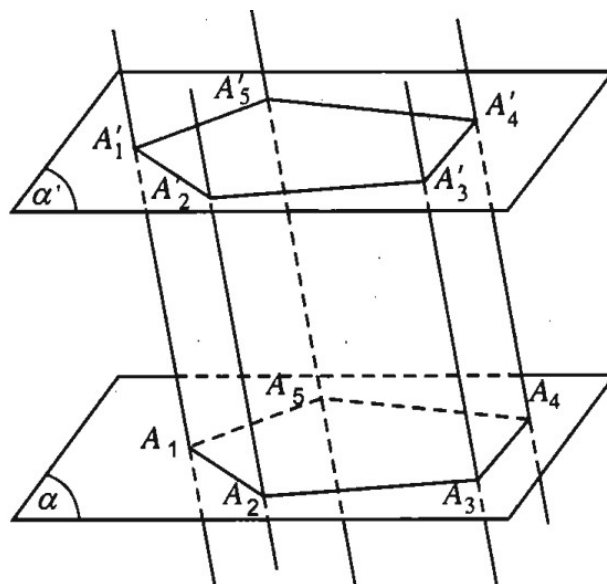
Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

IV – HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α') . Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$. Qua các đỉnh

$A_1, A_2, \dots, A_n$ ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (α') lần lượt tại $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$.

Hình gồm hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$ và các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, \dots, A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là *hình lăng trụ* và được kí hiệu là $A_1A_2 \dots A_n.A'_1A'_2 \dots A'_n$.

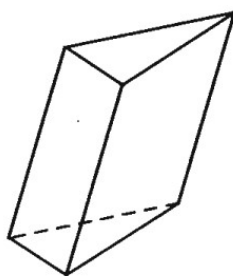


- Hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và $A'_1A'_2 \dots A'_n$ được gọi là hai *mặt đáy* của hình lăng trụ.
- Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_nA'_n$ được gọi là các *cạnh bên* của hình lăng trụ.
- Các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2, A_2A'_2A'_3A_3, \dots, A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.
- Các đỉnh của hai đa giác được gọi là các *đỉnh* của hình lăng trụ.

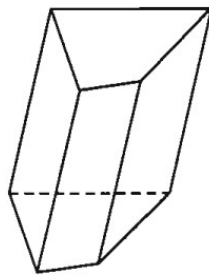
NHẬN XÉT

- Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.
- Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.
- Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

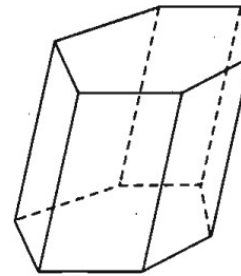
Người ta gọi tên của hình lăng trụ dựa vào tên của đa giác đáy.



Hình lăng trụ tam giác

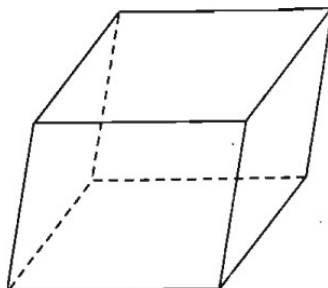


Hình lăng trụ tứ giác



Hình lăng trụ lục giác

- Hình lăng trụ có đáy là hình tam giác được gọi là *hình lăng trụ tam giác*.
- Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp*.



B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dạng 1 : Chứng minh mặt phẳng song song với mặt phẳng, đường thẳng song song với mặt phẳng

① Chứng minh hai mặt phẳng song song với nhau

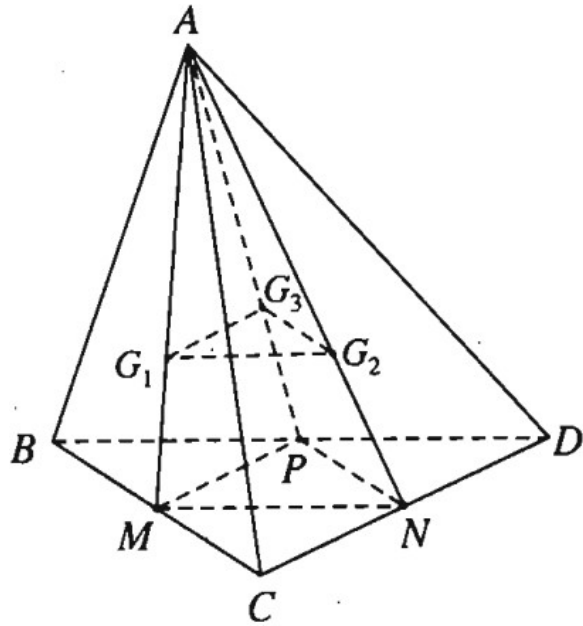
$$\left\{ \begin{array}{l} a, b // (\beta) \\ a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = A \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) // (\beta) \text{ hoặc } \left\{ \begin{array}{l} a // c, b // d \\ a, b \subset (\alpha) \\ c, d \subset (\beta) \\ a \cap c = A \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) // (\beta).$$

② Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha) // (\beta) \\ d \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow d // (\beta).$$

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD . Chứng minh $(OMN) // (SBC)$.

2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ABD . Chứng minh $(G_1G_2G_3) // (BCD)$.



3. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$ và điểm $S \notin (ABCD)$. Trên SA, BD lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{DN}{DB} = \frac{2}{3}$. Lấy điểm I thuộc đoạn AB sao cho $NI \parallel AB$. Chứng minh $MN \parallel (SCD)$.

Dạng 2 : Tìm giao tuyến, thiết diện có mặt phẳng song song với mặt phẳng, chứng minh đường thẳng song song với đường thẳng

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng biết mặt phẳng chứa đường thẳng song song với mặt phẳng kia,

$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ (\beta) \cap (\gamma) = a \Rightarrow (\alpha) \cap (\gamma) = Mx // a. \\ M \in (\alpha) \cap (\gamma) \end{cases}$$

② Chứng minh hai đường thẳng song song

$$\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ (\beta) \cap (\gamma) = a \Rightarrow a // b. \\ (\alpha) \cap (\gamma) = b \end{cases}$$

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB . Gọi M là điểm trên cạnh BC . Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) , biết (α) qua M và $(\alpha) // (SAB)$.

Dạng 3 : Hình lăng trụ, hình hộp

- 1.** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và $B'C'$.
- Chứng minh AM song song với $A'M'$.
 - Tìm giao điểm của mặt phẳng $(AB'C')$ với đường thẳng $A'M$.
 - Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.
 - Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng $(AM'M)$. Chứng minh G là trọng tâm tam giác $AB'C'$.

- 2.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.
- Chứng minh hai mặt phẳng (BDA') và $(B'D'C)$ song song với nhau.
 - Chứng minh rằng đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1 và G_2 của hai tam giác BDA' và $B'D'C$.
 - Chứng minh G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.
 - Gọi O và I lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABCD$ và $AA'C'C$. Xác định thiết diện của mặt phẳng $(A'IO)$ với hình hộp đã cho.

BT 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O , các tam giác SAD và ABC đều cân tại A . Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB . Chứng minh $EF \parallel (SAD)$.

BT 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ABD . Chứng minh rằng mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ song song với mặt phẳng (BCD) .

BT 4. Hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N' .

- a) Chứng minh $(BCE) \parallel (ADF)$. b) Chứng minh $(DEF) \parallel (MNN'M')$.

BT 5. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh AB chung nhưng không nằm trong cùng một mặt phẳng. Trên hai đường chéo AC và BF theo thứ tự lấy hai điểm M và N sao cho: $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF}$. Vẽ từ

M và N hai đường thẳng song song với AB , cắt AD tại Q và AF tại P . Chứng minh $(MNPQ) \parallel (DEF)$.

BT 6. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm cạnh $A'B'$.

- a) Chứng minh: $CB' \parallel (AHC')$.
b) Tìm giao tuyến (d) của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$. Chứng minh: $(d) \parallel (BB'C'C)$.
c) Xác định thiết diện của mặt phẳng (H, d) với lăng trụ đã cho.

BT 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh bên AA' và CC' . Gọi P là một điểm nằm trên cạnh bên DD' .

- a) Tìm $Q = BB' \cap (MNP)$.
b) Mặt phẳng (MNP) cắt hình hộp theo một thiết diện. Thiết diện là hình gì?
c) Tìm giao tuyến của (MNP) và $(ABCD)$.

§ 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

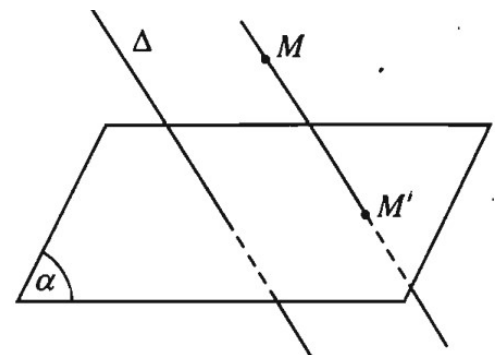
A. KIẾN THỨC

I – PHÉP CHIẾU SONG SONG

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α) . Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với Δ sẽ cắt (α) tại điểm M' xác định. Điểm M' được gọi là *hình chiếu song song* của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương của đường thẳng Δ hoặc nói gọn là theo phương Δ .

Mặt phẳng (α) gọi là *mặt phẳng chiếu*. Phương Δ gọi là *phương chiếu*.

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên mặt phẳng (α) được gọi là *phép chiếu song song lên (α) theo phương Δ* .



Nếu $\mathcal{H}$ là một hình nào đó thì tập hợp $\mathcal{H}'$ các hình chiếu M' của tất cả những điểm M thuộc $\mathcal{H}$ được gọi là hình chiếu của $\mathcal{H}$ qua phép chiếu song song nói trên.

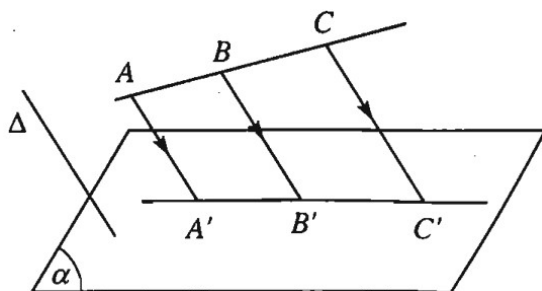
CHÚ Ý

Nếu một đường thẳng có phương trùng với phương chiếu thì hình chiếu của đường thẳng đó là một điểm. Sau đây ta chỉ xét các hình chiếu của các đường thẳng có phương không trùng với phương chiếu.

II – CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIẾU SONG SONG

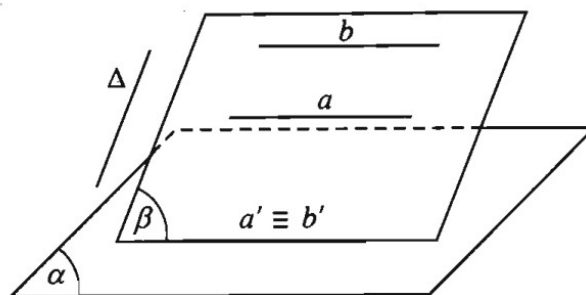
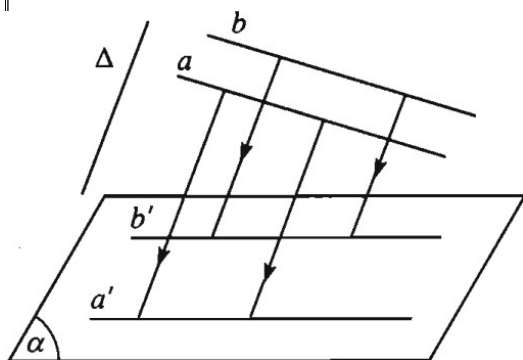
ĐỊNH LÝ 1

- a) Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.

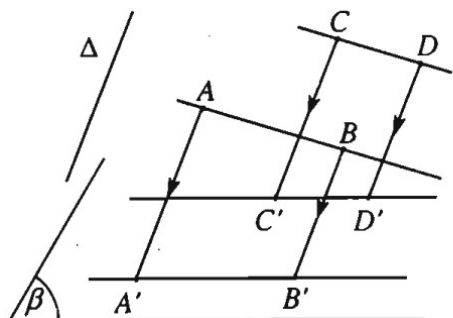


- b) Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

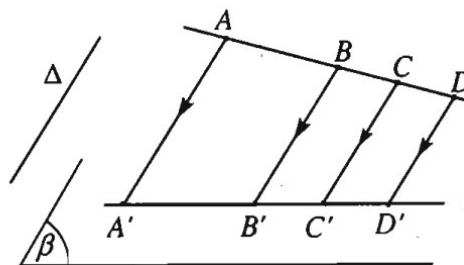
- c) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.



- d) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$



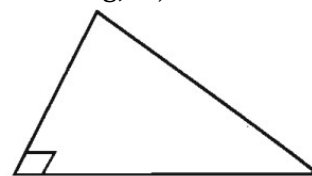
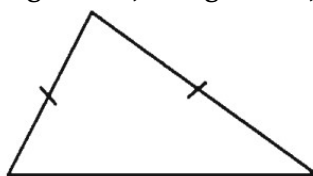
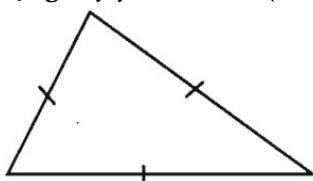
$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

III – HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN TRÊN MẶT PHẪNG

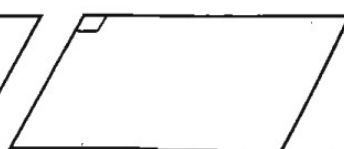
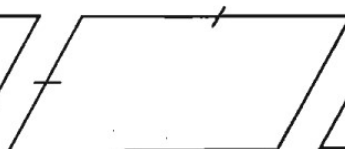
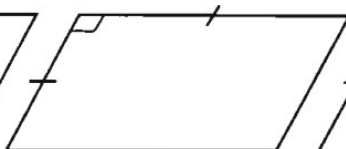
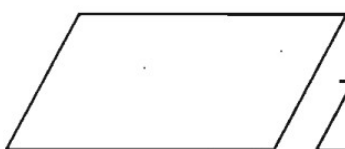
Hình biểu diễn của một hình $\mathcal{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của hình $\mathcal{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Hình biểu diễn các hình thường gặp

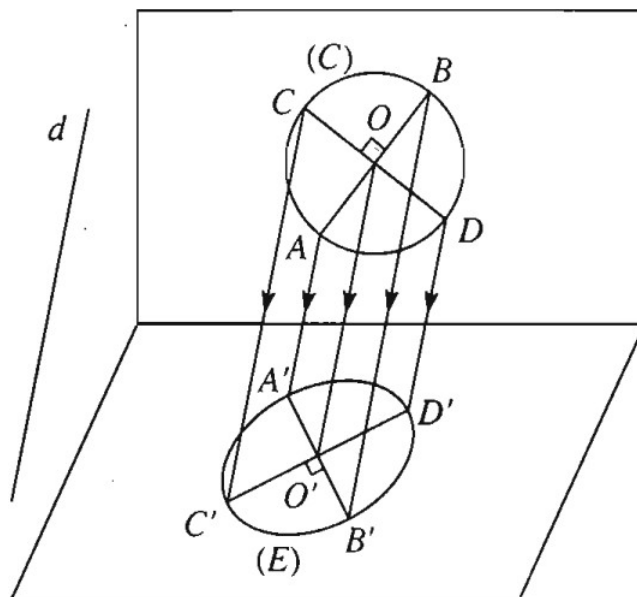
- *Tam giác.* Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình chiếu của một tam giác có dạng tùy ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, ...).



- *Hình bình hành.* Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tùy ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình thoi, hình chữ nhật, ...).



- *Hình thang.* Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tùy ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.
- *Hình tròn.* Người ta thường dùng hình elip để biểu diễn cho hình tròn.



ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ 1

ĐỀ 1 : KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ 1 NĂM HỌC 2020 – 2021

Bài 1: (4,0 điểm). Giải các phương trình sau:

- $\cos x + \sin^2 x - 1 = 0.$
- $3\sin^2 x + 2\sin 2x - \cos^2 x = 3.$
- $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x - 2 = 0.$
- $\sin 2x + 2\sin^2 x = 4\cos 2x.$

Bài 2: (1,0 điểm). Tìm tập xác định của hàm số: $f(x) = \frac{2 \tan x + 3}{\sin x}.$

Bài 3: (1,0 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4\sin^2 2x + 1.$

Bài 4: (2,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;1)$, $B(-3;1)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0.$

- Tìm tọa độ điểm M là ảnh của điểm A qua phép vị tự tâm B có tỉ số $k = 2.$
- Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O góc 90° .

Bài 5: (2,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{v} = (1;2)$, đường thẳng $\Delta: 2x + y - 2 = 0$ và parabol $(P): y = x^2 - 2x + 2.$

- Viết phương trình Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}.$

- b) Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng Δ và điểm N nằm trên parabol (P) sao cho N là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

----- Hết -----

ĐỀ 2 : KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ NĂM HỌC 2019 – 2020

Bài 1: (5,0 điểm). Giải các phương trình sau:

- e) $\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$;
 f) $\sqrt{3} \sin x + \cos x - 2 = 0$;
 g) $4 \sin^2 2x - 3\sqrt{3} \sin 4x - 2 \cos^2 2x = 4$;
 h) $\sin 2x - 2 \sin^2 x = 4 \cos 2x$.

Bài 2: (1,0 điểm). Xét tính chẵn, lẻ của hàm số: $f(x) = \frac{\cos x + x^2}{x}$.

Bài 3: (1,0 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $y = 2 \cos 2x + 1$.

Bài 4: (2,0 điểm). Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(1;2)$, $B(-2;1)$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$

- c) Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O và góc quay 90° ;
 d) Cho biết A', B' lần lượt là ảnh của A và B qua phép vị tự tâm O có tỉ số $k = 2$. Tính độ dài đoạn thẳng $A'B'$.

Bài 5: (1,0 điểm). Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường thẳng $\Delta: x + y = 0$ và $\Delta': x + y + 2 = 0$. Biết Δ' là ảnh của Δ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (a; b)$. Tìm vectơ $\vec{v}$ có độ dài ngắn nhất.

----- Hết -----

ĐỀ 3 : KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ NĂM HỌC 2016 – 2017

Câu 1 (6 điểm): Giải các phương trình lượng giác sau :

- a) $2 \cos 2x + 1 = 0$ Đs: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$
 b) $(\sin x + 3)(\tan x + 1) = 0$ Đs: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
 c) $\cos 2x + \sin^2 x + 2 \cos x + 1 = 0$ Đs: $x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$
 d) $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x - 2 \cos 3x = 0$ Đs: $x = \frac{\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}, x = -\frac{\pi}{3} - k2\pi$
 e) $2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ Đs: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Câu 2 (1 điểm): Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 3 - 2 \sin 3x$

Đs: GTLN của hàm số bằng 5 khi $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$; GTNN của hàm số bằng 1 khi $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$

Câu 3 (3 điểm): Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $A(1;2)$, phương trình đường thẳng $\Delta: x + 2y - 3 = 0$ và phương trình đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$

- Viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của phương trình Δ qua phép quay tâm O góc quay 90°
- Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (2; -1)$
- Cho biết phương trình đường thẳng $d: x + 2y + 1 = 0$ là ảnh của phương trình Δ qua phép vị tự tâm A tỷ số k. Tìm số k trong phép vị tự đó.

Đs: a) $\Delta': 2x - y + 3 = 0$ b) $(C'): x^2 + y^2 - 1 = 0$ c) $k = 3$

ĐỀ 4 : KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ NĂM HỌC 2015 - 2016

Bài 1: (5.5 điểm). Giải các phương trình sau:

- $6\sin^2 x + 5\cos 2x - 10\cos x + 3 = 0$ **Đs:** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = \sin 4x + \sqrt{3}\cos 4x$ **Đs:** $x = \frac{-\pi}{42} - \frac{k2\pi}{7}, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
- $2\cos^2 x - \sin 2x + 4\sin^2 x = 4$ **Đs:** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$ **Đs:** $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, x = k\frac{\pi}{2}$

Bài 2: (1.5 điểm). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4\cos^2 x + \sqrt{5}\sin 2x + 2$

Đs: GTLN của y là 7; GTNN của y là 1

Bài 3: (3.0 điểm).

- Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ qua phép vị tự tâm $K(1; 2)$ tỷ số -2 .
- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): 3x - y + 5 = 0$, đường thẳng $(D): 3x - y - 15 = 0$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{v}$ có giá vuông góc với đường thẳng (d) sao cho (D) là ảnh của (d) qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

Đs: a) $(C'): (x-5)^2 + (y-2)^2 = 16$; b) $\vec{v} = (6; -2)$

ĐỀ 5 : KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ NĂM HỌC 2014 – 2015

Bài 1: Giải các phương trình sau:

- $3\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}$ **Đs:** $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $2\tan^2 x - 2\tan x - \frac{1}{\cos^2 x} + 2 = 0$ **Đs:** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$3. \cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0 \quad \text{Đs: } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$4. \frac{(\sin x - \cos x)(1 + 2\cos 3x)}{1 - \tan x} = \cos x \quad \text{Đs: } x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (2\sin x + \cos x)(3\sin x - \cos x) - 3$

$$\text{Đs: } \min y = \frac{-5\sqrt{2}-1}{2}; \max y = \frac{5\sqrt{2}-1}{2}$$

Bài 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d: x - 2y + 1 = 0$, $\Delta: x - 2y - 4 = 0$, đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ và vectơ $\vec{v} = (1; -2)$.

- Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$
- Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O, góc quay 90° , với O là gốc tọa độ.
- Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}$ sao cho đường thẳng Δ là ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ và độ dài của vectơ $\vec{u}$ bằng $\sqrt{5}$.

Đs: 1) (C'): $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 9$; 2) $d': 2x + y + 1 = 0$; 3) $\vec{u} = (1; -2)$

ĐỀ 6 : KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ NĂM HỌC 2013 – 2014

Bài 1. (1 điểm) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos x(\sin x + \cos x) - 2$

Đs: Giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{2} - 1$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\sqrt{2} - 1$

Bài 2. (5 điểm) Giải các phương trình sau:

$$1) \sqrt{3}\cos x + \sin x = 2 \quad \text{Đs: } x = \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$2) \cos 4x + 6\sin^2 x - 7 = 0 \quad \text{Đs: } x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$3) 3\cos^2 x - 6\sin x \cdot \cos x + 2\sin^2 x = 2 \quad \text{Đs: } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \arctan \frac{1}{6}$$

$$4) \frac{\sin 2x - 3\cos 2x + 1}{\tan x - \sqrt{3}} = 0 \quad \text{Đs: } x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 3. (4.0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 3x - y + 3 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$.

- Tìm phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép quay tâm O góc quay 90° .
- Viết phương trình đường tròn (C') sao cho đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (2; -1)$.

3) Tìm tọa độ điểm E sao cho đường tròn (T): $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 24 = 0$ là ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng tâm E.

4) Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường tròn $(K): x^2 + y^2 = 25$ sao cho điểm D(3; 2) là ảnh của điểm M qua phép đối xứng trục với trục là đường thẳng d.

Đs: 1) d': $x + 3y + 3 = 0$; 2) $(C'): (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 1$; 3) $E(-1; 1)$; 4) $M(-3; 4)$

ĐỀ 7 : KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ NĂM HỌC 2017 – 2018

Bài 1: (1.0 điểm) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos^2 x - \sin^2 x + 1$.

Đs: $\text{Min} y = 0$ khi $x = \frac{\pi}{2}$; $\text{Max} y = 2$ khi $x = 0$

Bài 2: (6.0 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 2$. **Đs:** $x = \frac{\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

b) $\cos 8x + 6 \sin^2 2x - 4 = 0$. **Đs:** $x = \pm \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2}$

c) $\sin x - \sin 2x + \sin 3x = 0$. **Đs:**
$$\begin{cases} x = k \frac{\pi}{2} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

d) $\frac{\frac{1}{2} \sin 2x + \cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin x + \cos x)}{2 \sin x - 1} = 0$. **Đs:**
$$\begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

Bài 3: (3.0 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d: $x + 2y + 1 = 0$, đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ và $(C'): (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 36$.

a) Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (-1; 2)$. **Đs:** $d': x + 2y - 2 = 0$

b) Viết phương trình đường tròn (T) là ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O góc quay 90° , với O là gốc tọa độ. **Đs:** $(T): x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$

c) Phép vị tự tâm E tỉ số k biến (C) thành (C') . Tìm tọa độ điểm E và tỉ số k.

Đs: $k = -2 \Rightarrow E\left(1; \frac{5}{3}\right)$; $k = 2 \Rightarrow E(-7; 3)$

ĐỀ 8 : KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ NĂM HỌC 2018 – 2019

Bài 1: (4.0 điểm) Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$; **Đs:** $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$
- b) $\cos 4x - \cos 2x + 1 = 0$; **Đs:** $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$
- c) $\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = 2$; **Đs:** $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}$
- d) $2 \sin^2 x + \sin 2x + \cos^2 x = 2$. **Đs:** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \arctan \frac{1}{2} + k\pi$

Bài 2: (1.0 điểm) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x + 2$.

Đs: GTLN của hàm số $y = 4$ khi $s x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$; GTNN của hàm số $y = 0$ khi $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$

Bài 3: (2.0 điểm) Số giờ có ánh sáng của thành phố A ở vĩ độ 50° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $A(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] + 13$, với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$

- a) Thành phố A có đúng 13 giờ có ánh sáng vào ngày nào trong năm? **Đs:** 80 và 262
- b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất? **Đs:** $t = 353$

Bài 4: (3.0 điểm) Trong mặt phẳng hệ trục tọa độ Oxy

- a) Tìm tọa độ E' là ảnh của $E(1; -2)$ qua phép quay tâm O một góc quay 90° ; **Đs:** $E'(2; 1)$
- b) Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 3$ qua phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (3; 1)$; **Đs:** $(C'): (x-4)^2 + (y+1)^2 = 3$
- c) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng $d: y = x - 1$ và parabol $(P): y = x^2 - x - 1$. Gọi A' và B' lần lượt là ảnh của A và B qua phép vị tự tâm $I(1; -1)$ tỷ số $k = -2$. Tính độ dài đoạn thẳng $A'B'$. **Đs:** $A'B' = 4\sqrt{2}$

ĐỀ KIỂM TRA HỌC KỲ I

ĐỀ 1 : ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ 1 NĂM HỌC 2020 - 2021

Bài 1. (2.0 điểm) Giải các phương trình sau:

- a) $\sin^2 x + 3 \sin x + 2 = 0$.
- $\sqrt{}$
- b) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$.

Bài 2. (1.0 điểm) Giải phương trình: $A_n^2 + 16 = C_{2n}^2$.

Bài 3. (1.0 điểm) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x^2 - \frac{2}{x^2} \right)^{10}$.

Bài 4. (2.0 điểm) Một hộp có 9 quả cầu khác nhau, trong đó có 2 quả cầu màu đỏ; 3 quả cầu màu vàng và 4 quả cầu màu xanh. Chọn ngẫu nhiên 3 quả cầu trong hộp, tính xác suất của các biến cố sau:

- A: " 3 quả cầu được chọn có đủ 3 màu".
- B: " 3 quả cầu được chọn có đúng 1 màu".

Bài 5. (3.0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang và đáy lớn $AB = 2CD$. Gọi M, I, J lần lượt là trung điểm cạnh SC, SB, SA .

- Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (SAD) và (SBC) , (SAB) và (SCD) .
- Tìm giao điểm K của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) .
- Gọi G là trọng tâm tam giác SAD . Chứng minh DG song song mặt phẳng (SBC) .

Bài 6. (1.0 điểm) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là giao điểm giữa AC và BD , O' là giao điểm giữa $A'C'$ và $B'D'$. Chứng minh mặt phẳng (ABO') song song với mặt phẳng $(OC'D')$.

--Hết--

ĐỀ 2 : ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ 1 NĂM HỌC 2019 - 2020

Bài 1: (2.0 điểm) Giải các phương trình sau:

- $\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$.
- $\sin x - \sqrt{3} \cos x + 1 = 0$.

Bài 2: (1.0 điểm) Giải phương trình $4C_n^2 + 50 = A_{2n}^2$.

Bài 3: (1.0 điểm) Đoàn trường THPT Nguyễn Du có 14 đoàn viên ưu tú, trong đó có 6 đoàn viên nam và 8 đoàn viên nữ. Hãy cho biết đoàn trường có bao nhiêu cách chọn ra 6 đoàn viên đi dự hội trại sao cho có ít nhất hai đoàn viên nữ và hai đoàn viên nam.

Bài 4: (1.0 điểm) Tìm hệ số của x^3 trong khai triển biểu thức $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^{12}$.

Bài 5: (1.0 điểm) Trong giờ học môn giáo dục quốc phòng tại trường THPT Nguyễn Du, thầy giáo yêu cầu ba học sinh A_1, A_2, A_3 độc lập với nhau cùng nổ súng bắn vào mục tiêu. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của ba em học sinh A_1, A_2, A_3 tương ứng là $0,7$; $0,6$ và $0,5$. Tính xác suất để có ít nhất một em học sinh bắn trúng mục tiêu.

Bài 6: (2.0 điểm) Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $BM = 2MC$, N là trung điểm của BD và G là trọng tâm của $\triangle ABD$.

- Tìm giao tuyến của cặp mặt phẳng (AMN) và (ACD) .
- Chứng minh đường thẳng MG song song với mặt phẳng (ACD) .

Bài 7: (2.0 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD , M là trung điểm trên cạnh SA .

- Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (SAC) và (SBD) ; (SAD) và (SBC) .
- Tìm giao điểm N của mặt phẳng (MCD) và SB . Từ đó suy ra thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi của mặt phẳng (MCD) là hình gì?

----- Hết -----

ĐỀ 3 : ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ 1 NĂM HỌC 2014 – 2015

Bài 1: (3 điểm) Giải các phương trình sau:

- $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 1$ Đs: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = \pi + k\pi$
- $\cos 4x - \cos 2x = 2$ Đs: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- $\frac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$ Đs: $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Bài 2: (1 điểm) Lớp 11B có 30 học sinh, trong đó có 14 nam và 16 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 4 bạn để dự hội trại truyền thống sao cho 4 bạn được chọn có cả nam và nữ? Đs: 24584

Bài 3: (1 điểm) Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{10}$. Đs: $8064x^5$

Bài 4: (1 điểm) Một hộp có 4 quả cầu trắng, 3 quả cầu xanh, 5 quả cầu đỏ. Chọn ra ngẫu nhiên cùng lúc 3 quả cầu từ hộp đó. Tính xác suất để 3 quả cầu chọn ra có đúng một màu. Đs: $\frac{3}{44}$

Bài 5: (1 điểm) Trong số 16 học sinh có 3 học sinh giỏi, 5 học sinh khá và 8 học sinh trung bình. Có bao nhiêu cách chia số học sinh đó thành 2 tổ, biết mỗi tổ có 8 học sinh sao cho mỗi tổ đều có học sinh giỏi và mỗi tổ có ít nhất hai học sinh khá. Đs: 7560

Bài 6: (3 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB và $AB = 2CD$. Gọi M là trung điểm SA , O là giao điểm của AC và BD .

- Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) ; (SAC) và (SBD) .
- Tìm giao điểm N của (MBC) và SD . Chứng minh $ON \parallel SB$.
- Gọi J là giao điểm của SO và NB . Chứng minh $M; J; C$ thẳng hàng. Tính tỉ số $\frac{OJ}{OS}$. Đs: $\frac{1}{4}$

ĐỀ 4 : ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ 1 NĂM HỌC 2015 – 2016

Bài 1: (4.0 điểm) Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{6}$. Đs: $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

b) $6\sin^2 3x + \cos 12x = 7$. Đs: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

c) $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$. Đs: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, x = \frac{k\pi}{3}$

d) $1 + \cot 2x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 2x}$. Đs: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Bài 2:(2.0 điểm)

a) Giải phương trình : $C_{n+1}^{n-3} - C_{n+1}^3 = \frac{11}{6}A_n^2$. Đs: $n = 10$

b) Tìm hệ số của x^3 trong khai triển của biểu thức $A = (x + 3)^4 + (x + 2)^5$. Đs: 52

Bài 3:(1.0 điểm) Trong giờ học Giáo dục quốc phòng. Thầy giáo mời 7 học sinh nam và 5 học sinh nữ, sau đó thầy yêu cầu các học sinh này xếp thành một hàng ngang và thực hiện những động tác mà thầy đã dạy để cho các học sinh ở dưới theo dõi. Hãy tính xác suất để sắp xếp không có học sinh nữ nào đứng gần nhau. Đs: $\frac{7}{99}$

Bài 4:(3.0 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC.

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD); (SAC) và (SBD).

b) Tìm giao điểm I của AM với mặt phẳng (SBD). Tính tỷ số : $\frac{IM}{IA}$. Đs: $\frac{1}{2}$

c) Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD bị cắt bởi mặt phẳng (ABM). Thiết diện này là hình gì?
Đs: Thiết diện là hình thang

ĐỀ 5 : ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ 1 NĂM HỌC 2016 – 2017

Bài 1:(4.0 điểm) Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$. Đs: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

b) $\sin x = \frac{1}{3}(\sqrt{6} - \sqrt{3}\cos x)$. Đs: $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi$

c) $2\sin^2 x + (3 + \sqrt{3})\sin x \cdot \cos x + (\sqrt{3} - 1)\cos^2 x = -1$. Đs: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$

d) $\frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{1}{\sin^2 2x} = \frac{8}{3}$. Đs: $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$

Bài 2:(2.0 điểm)

a) Giải phương trình: $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$. Đs: $n = 5$

b) Tìm hệ số của x^3 trong khai triển nhị thức Newton $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{12}$, $x \neq 0$. **Đs:** 220

Bài 3:(1.0 điểm) Trường THPT Nguyễn Du có 16 học sinh là đoàn viên ưu tú, trong đó khối 12 có 7 học sinh, khối 11 có 6 học sinh và khối 10 có 3 học sinh. Văn phòng Đoàn cần chọn ra 1 nhóm gồm 5 học sinh là đoàn viên ưu tú để tham gia xây nhà tình thương. Tính xác suất để chọn được 5 học sinh có đủ 3 khối. **Đs:** $\frac{5}{8}$

Bài 4:(2.0 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với AD là đáy lớn .

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) ; (SAD) và (SBC).

b) Gọi M là trung điểm của cạnh SD và N, P lần lượt là điểm nằm trên cạnh AB, CD sao cho $AN = 2NB$, $CP = 2DP$. Tìm giao điểm của SA và (MNP).

Bài 5:(1.0 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O . Gọi I , K , M lần lượt là trung điểm của các cạnh SA , SC , OD. Chứng minh: SD song song (IKM).

ĐỀ 6 : ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ 1 NĂM HỌC 2017 – 2018

Bài 1. (2.0 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2 x + \frac{5}{2} \cos x - 2 = 0$. **Đs:** $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

b) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x$. **Đs:** $\begin{cases} x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Bài 2. (1.0 điểm) Tìm số nguyên dương n thỏa: $A_n^1 + C_n^2 = 78$. **Đs:** $n = 12$

Bài 3. (1.5 điểm) Cho tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số được lấy từ tập hợp A sao cho:

a) Các chữ số này đôi một khác nhau. **Đs:** 720

b) Chữ số liền sau lớn hơn chữ số liền trước . **Đs:** 15

Bài 4. (1.0 điểm) Tìm hệ số của x^3 trong khai triển biểu thức $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^{12}$. **Đs:** -112640

Bài 5. (1.5 điểm) Trong chuyến đi học tập tham quan ngoại khóa ở Đà Lạt của Trường THPT Nguyễn Du, bạn An vào một cửa hàng bán hoa để mua hoa tặng mẹ. Bạn An chọn ngẫu nhiên 5 bông hoa hồng từ một chậu hoa có 10 bông hồng nhung và 7 bông hồng trắng. Tính xác suất để mẹ bạn An nhận được:

a) 5 bông hoa cùng màu. **Đs:** $\frac{3}{68}$

b) 5 bông hoa có đủ hai màu. **Đs:** $\frac{65}{68}$

Bài 6. (3.0 điểm) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang đáy lớn AB, và $AB = 3a, CD = 2a$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, M là điểm trên cạnh SA sao cho $AM = \frac{3}{5}SA$.

- c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).
 d) Tìm giao điểm N của mặt phẳng (MCD) và SB. Chứng minh $ON \parallel (SAD)$.
 e) Gọi $I = SO \cap MC$. Tính $\frac{OI}{SI}$. **Đs:** $\frac{3}{5}$

ĐỀ 7 : ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ 1 NĂM HỌC 2018 – 2019

Bài 1: (2.0 điểm) Giải các phương trình lượng giác sau:

- a) $\cos^2 x + 3\sin x - 3 = 0$. **Đs:** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$
 b) $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x - 1 = 0$. **Đs:** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

Bài 2: (1.0 điểm) Tìm hệ số của x^{11} trong khai triển nhị thức Newton $(x - 2x^2)^8$. **Đs:** -448

Bài 3: (1.0 điểm) Tìm số tự nhiên n thỏa mãn : $A_n^2 - C_n^2 + C_{2n}^1 = 65$. **Đs:** $n = 10$

Bài 4: (1.0 điểm) Trước Tết Nguyên đán Kỷ Hợi năm 2019, Ban Giám Hiệu Trường THPT Nguyễn Du sẽ tổ chức chương trình “**Tình ca mùa xuân**” tại trường, Ban Giám Hiệu dự định mời các ca sĩ được học sinh yêu thích gồm : Mỹ Tâm, Đông Nhi, Hồ Ngọc Hà, Hương Tràm, Bích Phương, Tóc Tiên (6 ca sĩ nữ), Đan Trường, Đàm Vĩnh Hưng, Noo Phước Thịnh, Hà Anh Tuấn (4 ca sĩ nam). Hiện tại Ban Giám Hiệu đã mời được 2 ca sĩ là Mỹ Tâm và Đan Trường, trong các ca sĩ còn lại Ban Giám Hiệu chọn ngẫu nhiên 3 ca sĩ. Tính xác suất để Ban Giám Hiệu chọn được ít nhất hai ca sĩ nữ. **Đs:** $\frac{5}{7}$

Bài 5: (2.0 điểm) Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

- a) Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số được thành lập từ các số trong tập A. **Đs:** 625
 b) Tính tổng của tất cả các số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau đôi một được tạo thành từ các số trong tập A. **Đs:** 3.999.960

Bài 6: (3.0 điểm) Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O . Gọi M là trung điểm của SD.

- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).
 b) Tìm giao điểm N của đường thẳng SA và mặt phẳng (BCM).
 c) Gọi E là giao điểm của đường thẳng CN và mặt phẳng (SBD). Tính $\frac{CE}{NE}$. **Đs:** 2

ĐỀ 8 :

Bài 1. Giải các phương trình sau:

- 1) $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} = 4 \tan x$.
 2) $2 \sin^2 x - \sin x = 1 - \sin 3x$.

$$3) \frac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x - \sqrt{3}} = 0.$$

Bài 2. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x + \frac{5}{x^3}\right)^8$ ($x \neq 0$)

Bài 3. Một hộp chứa 4 quả cầu màu đỏ, 5 quả cầu màu xanh, 7 quả cầu màu vàng. Lấy ngẫu nhiên cùng lúc 4 quả cầu từ hộp đó. Tính xác suất sao cho 4 quả cầu chọn được chỉ có một màu.

Bài 4. Từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau từng đôi một.

Bài 5. Tìm số tự nhiên x thỏa phương trình $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là các điểm trên cạnh SA và SB sao cho $SA = 4SI$, $SB = 4JB$, K là trung điểm cạnh CD.

1) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Tìm giao điểm E của BC với mặt phẳng (IJK).

2) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (IJK) và (SCD). Gọi M là giao điểm của d với SD. Tính tỉ số

$$\frac{SM}{SD}.$$

ĐỀ 9 :

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $\cos^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 0$

b) $6\sin^2 3x + \cos 12x = 7$

c) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$

Bài 2: Cho tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Từ các phần tử của tập X có thể lập bao nhiêu số tự nhiên biết:

a) Số đó có 4 chữ số khác nhau từng đôi một.

b) Số đó là số chẵn và có 4 chữ số khác nhau từng đôi một.

Bài 3: Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức

$$\text{Newton} \left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x} \right)^n.$$

Bài 4: Chứng minh rằng: $C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \dots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1}$

Bài 5: Một lớp có 30 học sinh, gồm 8 học sinh giỏi, 15 học sinh khá và 7 học sinh trung bình. Chọn ngẫu nhiên 3 em để dự đại hội. Tính xác suất để:

a) Ba học sinh được chọn đều là học sinh giỏi.

b) Có ít nhất một học sinh giỏi.

c) Không có học sinh trung bình.

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M là điểm trên đoạn SC sao cho $SC = 4SM$, N là trung điểm BC. Gọi K là điểm đối xứng của C qua B, L là điểm đối xứng của C qua D.

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD); (SAC) và (SBD).

b) Tìm thiết diện của hình chóp với (OMN). Thiết diện là hình gì ?

c) Gọi E là giao điểm của MK và SB; F là giao điểm của ML và SD. Chứng minh rằng $EF \parallel BD$.

d) Chứng minh K; A; L thẳng hàng và $KL = 5EF$.

ĐỀ 10 :

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a) $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} = 4 \tan x$

b) $2\sin^2 x - \sin x = 1 - \sin 3x$

c) $\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$

d) $\frac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x - \sqrt{3}} = 0$

Bài 2: Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(x - \frac{5}{x^3}\right)^8$; ($x \neq 0$).

Bài 3: Một hộp chứa 4 quả cầu màu đỏ, 5 quả cầu màu xanh, 7 quả cầu màu vàng. Lấy ngẫu nhiên cùng lúc 4 quả cầu từ hộp đó. Tính xác suất sao cho 4 quả cầu chọn được:

- a) Chỉ có một màu.
- b) Có đúng hai màu.
- c) Có đủ cả ba màu.

Bài 4: Tìm số nguyên dương n thỏa: $C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = 9n^2 - 14n$

Bài 5: Hai xạ thủ cùng bắn mỗi người một phát đạn vào bia. Xác suất để người thứ nhất bắn trúng bia là 0.9, và của người thứ hai là 0.7. Tính xác suất để:

- a) Cả hai cùng bắn trúng bia.
- b) Ít nhất một người bắn trúng bia.
- c) Chỉ một người bắn trúng bia.

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I; J lần lượt là các điểm trên cạnh SA và SB sao cho $SA = 4SI$; $SB = 4JB$. K là trung điểm cạnh CD.

- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Tìm giao điểm E của BC với mặt phẳng (IJK).
- b) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (IJK) và (SCD). Gọi M là giao điểm của d với SD. Tính tỉ số $\frac{SM}{SD}$.