

# CHƯƠNG I: KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

## BÀI 1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

### A. LÝ THUYẾT

#### I – KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI CHÓP

Khối lăng trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ kể cả hình lăng trụ ấy.

Khối chóp là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp kể cả hình chóp ấy.

Khối chóp cắt là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp cắt kể cả hình chóp cắt ấy.

#### II – KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

##### 1. Khái niệm về hình đa diện

Hình đa diện là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

- Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
- Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Mỗi đa giác như trên được gọi là một mặt của hình đa diện.

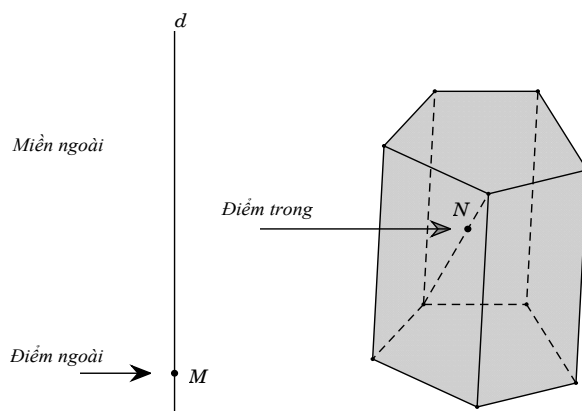
Các đỉnh, các cạnh của đa giác ấy theo thứ tự gọi là các đỉnh, các cạnh của hình đa diện.

##### 2. Khái niệm về khối đa diện

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện. Tập hợp các điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện ứng với đa diện ấy được gọi là điểm trong của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong của khối đa diện.

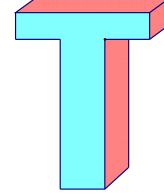
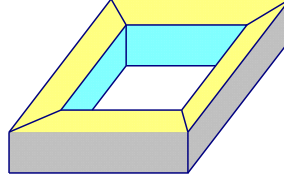
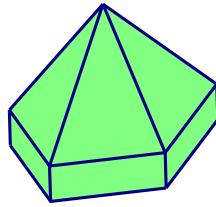
Mỗi khối đa diện được xác định bởi một hình đa diện ứng với nó. Ta cũng gọi đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của một khối đa diện theo thứ tự là đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài... của hình đa diện tương ứng.



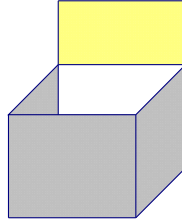
#### Ví dụ

- Các hình dưới đây là những khối đa diện:

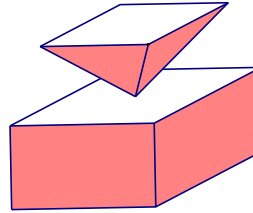
---



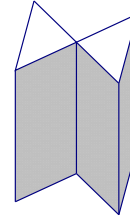
- Các hình dưới đây không phải là những khối đa diện:



Hình a



Hình b



Hình c

Giải thích: Hình a không phải là hình đa diện vì tồn tại cạnh không phải là cạnh chung của hai mặt; Hình b không phải là hình đa diện vì có một điểm đặc biệt trong hình, điểm đó không phải là đỉnh chung của hai đa giác; Hình c không phải là hình đa diện vì tồn tại một cạnh là cạnh chung của bốn đa giác.

### III – HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

#### 1. Phép dời hình trong không gian

Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm  $M$  với điểm  $M'$  xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.

Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

**a) Phép tịnh tiến theo vector  $\vec{v}$** , là phép biến hình biến mỗi điểm  $M$  thành điểm  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ . Kí hiệu là  $T_{\vec{v}}$ .

**b) Phép đối xứng qua mặt phẳng  $(P)$**  là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc  $(P)$  thành chính nó, biến mỗi điểm  $M$  không thuộc  $(P)$  thành điểm  $M'$  sao cho  $(P)$  là mặt phẳng trung trực của  $MM'$ .

Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng  $(P)$  biến hình  $(\mathcal{H})$  thành chính nó thì  $(P)$  được gọi là mặt phẳng đối xứng của  $(\mathcal{H})$ .

**c) Phép đối xứng tâm  $O$**  là phép biến hình biến điểm  $O$  thành chính nó, biến mỗi điểm  $M$  khác  $O$  thành điểm  $M'$  sao cho  $O$  là trung điểm của  $MM'$ .

Nếu phép đối xứng tâm  $O$  biến hình  $(\mathcal{H})$  thành chính nó thì  $O$  được gọi là tâm đối xứng của  $(\mathcal{H})$ .

**d) Phép đối xứng qua đường thẳng  $\Delta$**  là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng  $\Delta$  thành chính nó, biến mỗi điểm  $M$  không thuộc  $\Delta$  thành điểm  $M'$  sao cho  $\Delta$  là đường trung trực của  $MM'$ .

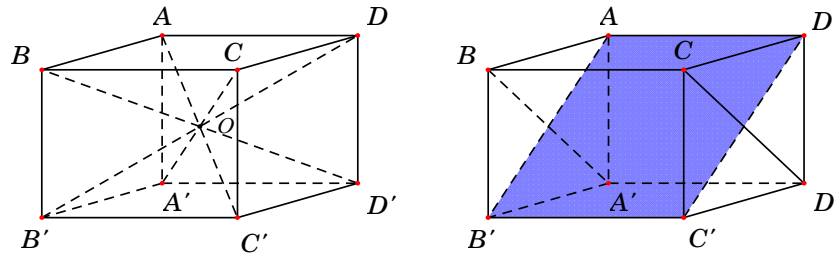
Nếu phép đối xứng qua đường thẳng  $\Delta$  biến hình  $(\mathcal{H})$  thành chính nó thì  $\Delta$  được gọi là trục đối xứng của  $(\mathcal{H})$ .

### Nhận xét

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến đa diện  $(\mathcal{H})$  thành đa diện  $(\mathcal{H}')$ , biến đỉnh, cạnh, mặt của  $(\mathcal{H})$  thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của  $(\mathcal{H}')$ .

**Ví dụ:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Khi đó:

- Các hình chóp  $A.A'B'C'D'$  và  $C'.ABCD$  bằng nhau (vì qua phép đối xứng tâm O hình chóp  $A.A'B'C'D'$  biến thành hình chóp  $C'.ABCD$ ).
- Các hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  và  $AA'D'.BB'C'$  bằng nhau (vì qua phép đối xứng qua mặt phẳng  $(AB'C'D)$  thì hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  biến thành hình lăng trụ  $AA'D'.BB'C'$ ).



## 2. Hai hình bằng nhau

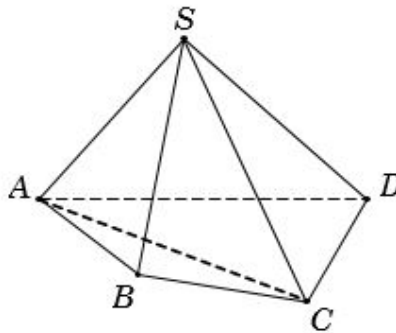
Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Đặc biệt, hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến đa diện này thành đa diện kia.

## IV – PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

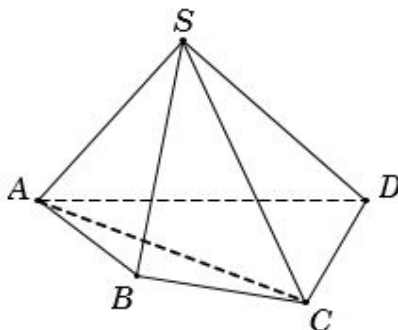
Nếu khối đa diện  $(\mathcal{H})$  là hợp của hai khối đa diện  $(\mathcal{H}_1)$  và  $(\mathcal{H}_2)$  sao cho  $(\mathcal{H}_1)$  và  $(\mathcal{H}_2)$  không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể phân chia được khối đa diện  $(\mathcal{H})$  thành hai khối đa diện  $(\mathcal{H}_1)$  và  $(\mathcal{H}_2)$ . Khi đó ta cũng nói có thể ghép hai khối đa diện  $(\mathcal{H}_1)$  và  $(\mathcal{H}_2)$  để được khối đa diện  $(\mathcal{H})$ .

**Ví dụ 1.** Với khối chóp tứ giác  $S.ABCD$ , xét hai khối chóp tam giác  $S.ABC$  và  $S.ACD$ .

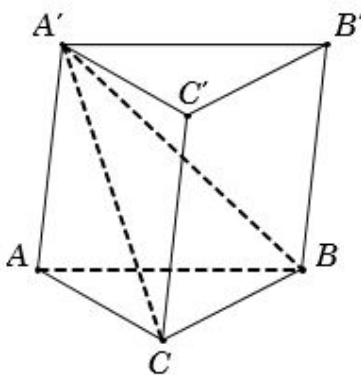


Ta thấy rằng:

- Hai khối chóp  $S.ABC$  và  $S.ACD$  không có điểm trong chung (tức là không tồn tại điểm trong của khối chóp này là điểm trong của khối chóp kia và ngược lại).
- Hợp của hai khối chóp  $S.ABC$  và  $S.ACD$  chính là khối chóp  $S.ABCD$ . Vậy khối chóp  $S.ABCD$  được phân chia thành hai khối chóp  $S.ABC$  và  $S.ACD$  hay hai khối chóp  $S.ABC$  và  $S.ACD$  được ghép lại thành khối chóp  $S.ABCD$ .



**Ví dụ 2.** Cắt khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  bởi mặt phẳng  $(A'BC)$ .



Khi đó, khối lăng trụ được phân chia thành hai khối đa diện  $A'ABC$  và  $A'BCC'B'$ .

Nếu ta cắt khối chóp  $A'BCC'B'$  bởi mặt phẳng  $(A'B'C)$  thì ta chia khối chóp  $A'BCC'B'$  thành hai khối chóp  $A'BCB'$  và  $A'CC'B'$ .

Vậy khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  được chia thành ba khối tứ diện là  $A'ABC$ ,  $A'BCB'$  và  $A'CC'B'$ .

### MỘT SỐ KẾT QUẢ QUAN TRỌNG

- +) Kết quả 1: Một khối đa diện bất kì có ít nhất 4 mặt.
- +) Kết quả 2: Mỗi hình đa diện có ít nhất 4 đỉnh.
- +) Kết quả 3: Cho  $(H)$  là đa diện mà tất các mặt của nó là những đa giác có  $p$  cạnh. Nếu số mặt của  $(H)$  là lẻ thì  $p$  phải là số chẵn.
- +) Kết quả 4: Cho  $(H)$  là đa diện có  $m$  mặt, mà các mặt của nó là những đa giác có  $p$  cạnh. Khi đó số cạnh của  $(H)$  là  $c = \frac{pm}{2}$ .
- +) Kết quả 5: Mỗi khối đa diện có các mặt là các tam giác thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn.

- +) Kết quả 6: Mỗi khối đa diện bất kì luôn có thể được phân chia thành những khối tứ diện
- +) Kết quả 7: Mỗi đỉnh của một đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh.
- +) Kết quả 8: Nếu khối đa diện có mỗi đỉnh là đỉnh chung của 3 cạnh thì số đỉnh phải là số chẵn.

**Tổng quát:** Một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của một số lẻ mặt thì tổng đỉnh là một số chẵn.

- +) Kết quả 9: Mỗi hình đa diện có ít nhất 6 cạnh.
- +) Kết quả 10: Không tồn tại hình đa diện có 7 cạnh.
- +) Kết quả 11: Với mỗi số nguyên  $k \geq 3$  luôn tồn tại một hình đa diện có  $2k$  cạnh.
- +) Kết quả 12: Với mỗi số nguyên  $k \geq 4$  luôn tồn tại một hình đa diện có  $2k + 1$  cạnh.
- +) Kết quả 13: Không tồn tại một hình đa diện có
  - +) Số mặt lớn hơn hoặc bằng số cạnh;
  - +) Số đỉnh lớn hơn hoặc bằng số cạnh.
- +) Kết quả 14: Tồn tại khối đa diện có  $2n$  mặt là những tam giác đều.

## II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

### Dạng 1. Điều kiện để một hình là hình đa diện – khối đa diện.

#### 1. Phương pháp giải

Hình đa diện là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

+) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.

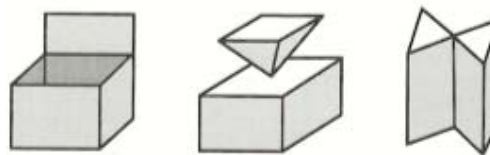
+) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

**Ví dụ:**

Các hình dưới đây là những khối đa diện :

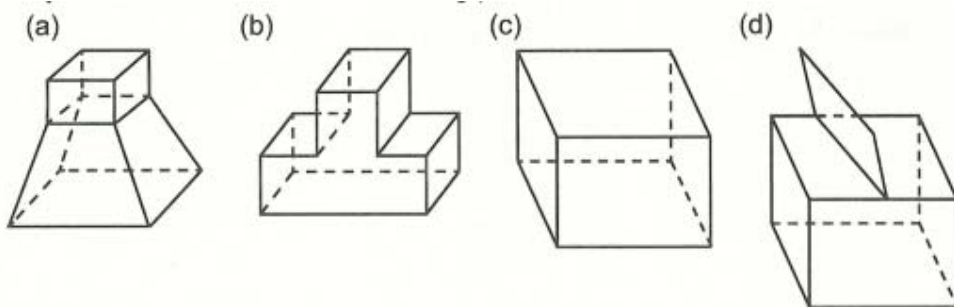


Các hình dưới đây không phải là khối đa diện:



#### 2. Bài tập

**Bài tập 1:** Cho các hình sau. Hình không phải hình đa diện là



A. Hình (a).

B. Hình (b).

C. Hình (c).

D. Hình (d).

### Hướng dẫn giải

**Chọn D.**

Áp dụng các tính chất của hình đa diện:

Mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt;

Hai mặt bất kì hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung, hoặc không có điểm chung nào.

Hình d vi phạm quy tắc: có cạnh trên cùng chỉ là cạnh của một mặt.

**Bài tập 2:** Trong các hình dưới đây, hình nào là hình đa diện?

Hình 1



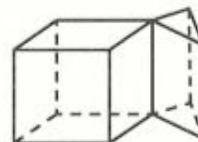
Hình 2



Hình 3



Hình 4



A. Hình 1.

B. Hình 2.

C. Hình 3.

D. Hình 4.

### Hướng dẫn giải

**Chọn C.**

Hình 1 không phải là hình đa diện vì có một cạnh là cạnh chung của 4 đa giác, loại A.

Hình 2 không phải là hình đa diện vì có một cạnh là cạnh chung của 3 đa giác, loại B.

Hình 4 không phải là hình đa diện vì có một cạnh là cạnh chung của 4 đa giác, loại D.

Hình 3 là hình đa diện vì nó thỏa mãn khái niệm hình đa diện.

## Dạng 2. Xác định số đỉnh, cạnh, mặt của một khối đa diện

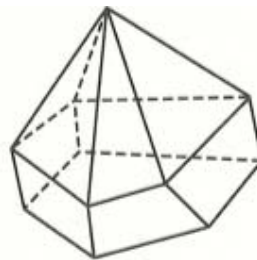
### 1. Phương pháp giải

Mỗi đa giác gọi là một mặt của hình đa diện.

**Ví dụ:**

Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện.

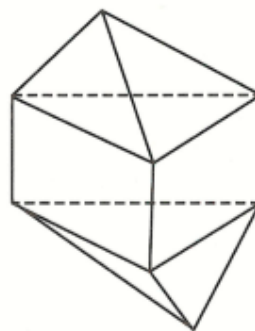
Hình sau đây có 11 đỉnh, 20 cạnh, 11 mặt



## 2. Bài tập

**Bài tập 1.** Số mặt của hình đa diện ở hình vẽ dưới đây là ?

- A. 11.                      B. 10.  
C. 12.                      D. 9.

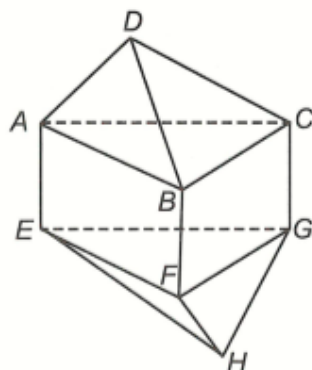


**Hướng dẫn giải**

**Chọn D**

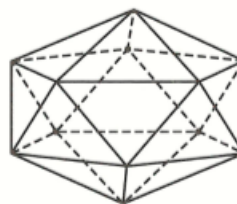
Hình đa diện trên có 9 mặt là

$(ABD); (BDC); (ADC); (ABFE); (BFGC); (ACGE);$   
 $(HFE); (HFG); (EHG).$



**Bài tập 2:** Cho hình đa diện như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nối 2 đỉnh của hình đa diện nhưng không là cạnh của hình đa diện?

- A. 66.                      B. 30.  
C. 36.                      D. 102.



**Chú ý:**

Hình đa diện có  $n$  đỉnh thì sẽ có  $C_n^2$  cạnh nối 2 đỉnh của hình đa diện

### Hướng dẫn giải

#### Chọn C

Ta có khối đa 20 mặt có 12 đỉnh.

Số đoạn thẳng được tạo thành 12 đỉnh trên là  $C_{12}^2$  cạnh.

Số cạnh của khối 20 mặt trên là 30 cạnh.

Vậy số đoạn thẳng nối hai đỉnh của hình đa diện nhưng không phải là cạnh của hình đa diện là  $C_{12}^2 - 30 = 36$ .

nhưng  
không là  
cạnh của  
hình đa  
diện là  
hiệu của  
 $C_n^2$  và số  
cạnh khối  
đa diện.

**Bài tập 3.** Cho một hình chóp có số đỉnh là 2018, số cạnh của hình chóp đó là

A. 2019.. B. 1009.

C. 4036. D. 4034.

#### Hướng dẫn giải

#### Chọn D

Hình chóp có 2018 đỉnh thì đa giác đáy có 2017 đỉnh, nên có 2017 cạnh đáy và 2017 cạnh bên.

Vậy hình chóp có  $2017 + 2017 = 4034$  cạnh

#### Chú ý:

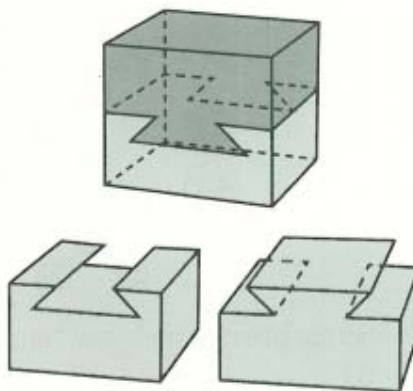
+ Hình chóp có  $n$  đỉnh thì sẽ có  $2.(n-1)$  cạnh.

+ Hình chóp có  $n$  đỉnh thì sẽ có  $n$  mặt.

### Dạng 3. Phân chia, lắp ghép các khối đa diện

#### 1. Phương pháp giải

Nếu khối đa diện  $(H)$  là hợp của hai khối đa diện  $(H_1), (H_2)$  sao cho  $(H_1)$  và  $(H_2)$  không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể chia được khối đa diện  $(H)$  thành hai khối đa diện  $(H_1)$  và  $(H_2)$ , hay có thể lắp ghép hai khối đa diện  $(H_1)$  và  $(H_2)$  với nhau để được khối đa diện  $(H)$ .



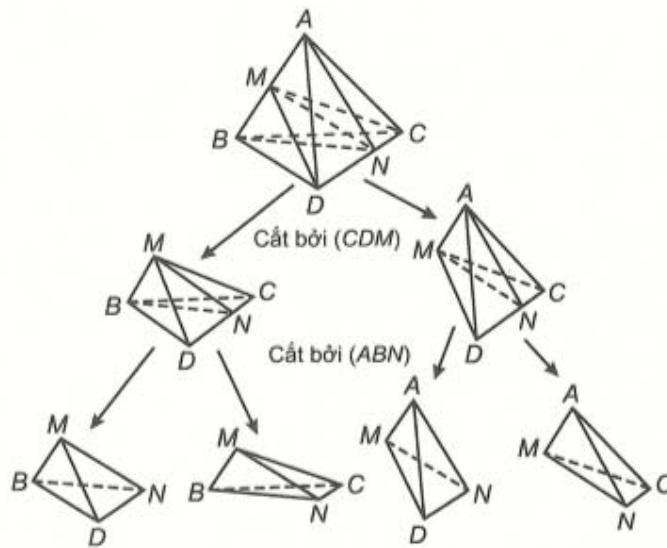
#### 2. Bài tập

**Bài tập 1.** Cho khối tứ diện  $ABCD$ . Lấy điểm  $M$  nằm giữa  $A$  và  $B$ , điểm  $N$  nằm giữa  $C$  và  $D$ . Bằng hai mặt phẳng  $(CDM)$  và  $(ABN)$ , ta chia khối tứ diện đó thành bốn khối tứ diện nào sau đây ?

- A.  $MANC, BCDN, AMND, ABND$ .
- B.  $NACB, BCMN, ABND, MBND$ .
- C.  $ABCN, ABND, AMND, MBND$ .
- D.  $MBND, MBNC, AMDN, AMNC$ .

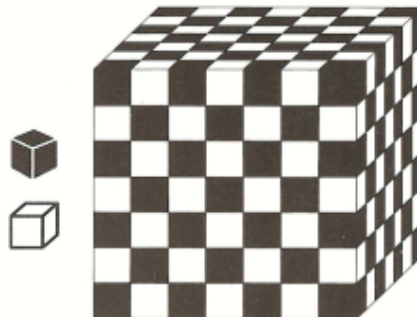
### Hướng dẫn giải

Chọn D.



Dựa vào hình vẽ, ta thấy hai mặt phẳng  $(CDM)$  và  $(ABN)$  chia khối tứ diện  $ABCD$  thành bốn khối tứ diện là  $MBDN, MBNC, AMDN, AMNC$ .

**Bài tập 2.** Các khối lập phương đen và trắng xếp chồng lên nhau xen kẽ màu tạo thành một khối rubik  $7 \times 5 \times 7$  (như hình vẽ).



Gọi  $x$  là số khối lập phương nhỏ màu đen,  $y$  khối lập phương nhỏ màu trắng. Giá trị  $x - y$  là

- A.  $-1$ .
- B.  $0$ .
- C.  $1$ .
- D.  $2$ .

### Hướng dẫn giải

---

**Chọn C.**

Có 7 lớp hình vuông xếp chồng lên nhau. Mỗi lớp có  $7 \times 5 = 35$  khối nhỏ.

Ta thấy hai lớp dưới đáy, một khối đen chồng lên một khối trắng (hay ngược lại) nên số lượng khối đen, trắng bằng nhau.

Tương tự 6 lớp bên dưới có số lượng khối đen, trắng bằng nhau.

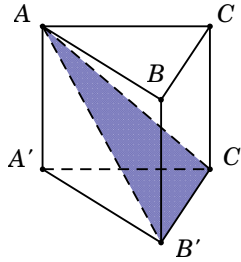
Ta xét lớp trên cùng có  $4 + 3 + 4 + 3 + 4 = 18$  khối màu đen và có  $3 + 4 + 3 + 4 + 3 = 17$  khối màu trắng  $\Rightarrow x - y = 1$ .

**Bài tập 3.** Mặt phẳng  $(AB'C')$  chia khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  thành các khối đa diện nào?

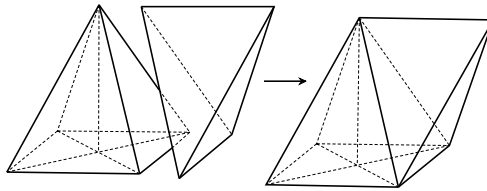
- A. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.
- B. Hai khối chóp tam giác.
- C. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.
- D. Hai khối chóp tứ giác.

**Hướng dẫn giải****Chọn A**

Dựa vào hình vẽ, ta thấy mặt phẳng  $(AB'C')$  chia khối lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  thành khối chóp tam giác  $A.A'B'C'$  và khối chóp tứ giác  $A.BCC'B'$ .



**Bài tập 4.** Lắp ghép hai khối đa diện  $(\mathcal{H}_1)$ ,  $(\mathcal{H}_2)$  để tạo thành khối đa diện  $(\mathcal{H})$ , trong đó  $(\mathcal{H}_1)$  là khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng  $a$ ,  $(\mathcal{H}_2)$  là khối tứ diện đều cạnh  $a$  sao cho một mặt của  $(\mathcal{H}_1)$  trùng với một mặt của  $(\mathcal{H}_2)$  như hình vẽ. Hỏi khối đa diện  $(\mathcal{H})$  có tất cả bao nhiêu mặt?



A. 5.

B. 7.

C. 8.

D. 9.

**Hướng dẫn giải****Chọn A**

Khối đa diện  $(\mathcal{H})$  có đúng 5 mặt.

Sai lầm hay gặp: Khối chóp tứ giác đều có 5 mặt. Khối tứ diện đều có 4 mặt.

Ghép hai hình lại như hình vẽ ta được khối đa diện  $(\mathcal{H})$  có 8 mặt.

**Bài tập 5.** Có thể chia một hình lập phương thành bao nhiêu khối tứ diện bằng nhau?

---

A. 2.

B. 4.

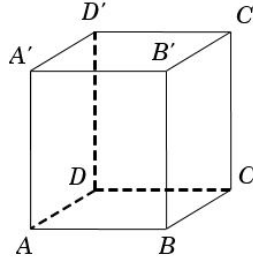
C. 6.

D. 8.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn C

Lần lượt dùng mặt phẳng  $(BDD'B')$  ta chia thành hai khối lập phương thành hai khối lăng trụ  $ABD.A'B'D'$  và  $BCD.B'C'D'$ .



● Với khối  $ABD.A'B'D'$  ta lần lượt dùng các mặt phẳng  $(AB'D')$  và  $(AB'D)$  chia thành ba khối tứ diện bằng nhau.

● Tương tự với khối  $BCD.B'C'D'$ .

Vậy có tất cả 6 khối tứ diện bằng nhau.

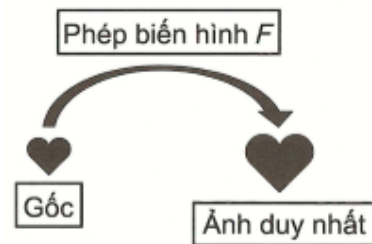
### Dạng 4: Phép biến hình trong không gian

#### 1. Phương pháp giải

Phép biến hình  $F$  biến điểm  $M$  thành điểm  $M'$  duy nhất và kí hiệu

$$M' = F(M).$$

Qua phép biến hình  $F$ , mỗi hình  $(H)$  được biến thành hình  $(H')$  gồm tất cả các ảnh của các điểm thuộc hình  $(H)$ .



Hai hình  $(H)$  và  $(H')$  gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

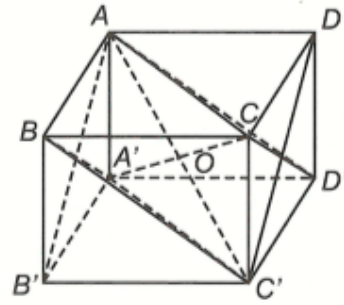
**Ví dụ:** Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ .

Khi đó:

+ Các hình chóp  $AA'B'C'D'$  và  $C'.ABCD$  bằng nhau (vì qua phép đối xứng tâm  $O$  hình chóp  $AA'B'C'D'$  biến thành hình chóp  $C'.ABCD$ ).

+ Các hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  và  $AA'D'.BB'C'$  bằng nhau (qua phép đối xứng qua mặt phẳng  $(AB'C'D)$  thì hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  biến thành hình lăng trụ

$$AA'D'D'.BB'C'C'.$$



+ Hai hình tứ diện  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$  bằng nhau nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau, nghĩa là:

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CD = C'D', \quad DA = D'A', \\ AC = A'C', \quad BD = B'D'.$$

Hình  $(H)$  được gọi là đồng dạng với hình  $(H')$  nếu có phép vị tự biến hình  $(H)$  thành hình  $(H_1)$  mà hình  $(H_1)$  bằng hình  $(H')$ .

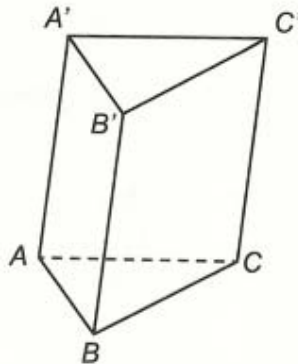
## 2. Bài tập

**Bài tập 1:** Cho hình lăng trụ  $ABCD.A'B'C'D'$ . Ảnh của đoạn thẳng  $AB$  qua phép tịnh tiến theo vector  $\overrightarrow{CC'}$  là:

- A. Đoạn thẳng  $C'D'$ .
- B. Đoạn thẳng  $DD'$ .
- C. Đoạn thẳng  $CD$ .
- D. Đoạn thẳng  $A'B'$ .

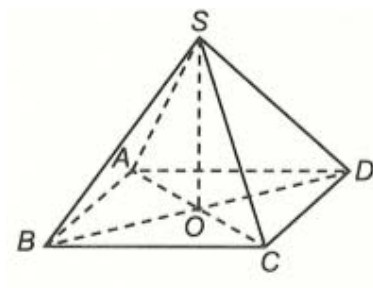
**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**



$$\text{Ta có } \begin{cases} T_{\overline{CC'}}(A) = A' \\ T_{\overline{CC'}}(B) = B' \end{cases} \Rightarrow T_{\overline{CC'}}(AB) = AB'.$$

**Bài tập 2:** Cho hình chóp đều  $S.ABCD$  như hình vẽ. Phép đối xứng qua mặt phẳng  $(SAC)$  biến hình chóp  $S.ABD$  thành hình chóp nào sau đây?



- A.  $S.ABC$ .
- B.  $S.ABD$ .
- C.  $S.ABO$ .
- D.  $S.ADC$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \begin{cases} D_{(SAC)}(S) = S \\ D_{(SAC)}(A) = A \\ D_{(SAC)}(B) = D \\ D_{(SAC)}(D) = B \end{cases} \Rightarrow D_{(SAC)}(S.ABD) = S.ADB.$$

.

**Bài tập 3.** Cho hai đường thẳng song song  $d, d'$  và một điểm  $O$  không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm  $O$  biến  $d$  thành  $d'$ ?

- A. Có một.
- B. Không có.
- C. Có hai.
- D. Có một hoặc không có.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

+ Trong trường hợp  $O, d, d'$  đồng phẳng thì tồn tại duy nhất phép vị tự tâm  $O$  biến  $d$  thành  $d'$ .

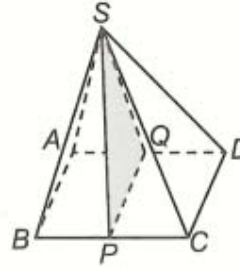
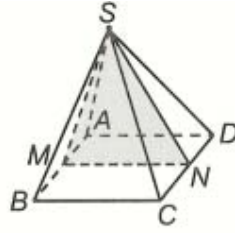
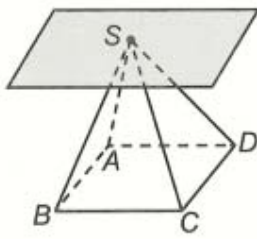
+ Trong trường hợp  $O \notin (d, d')$  thì không tồn tại phép vị tự tâm  $O$  biến  $d$  thành  $d'$ .

**Bài tập 4.** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ . Số mặt phẳng qua điểm  $S$  và cách đều các điểm  $A, B, C, D$  là

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 5.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C.**



Có ba mặt phẳng gồm:

+ Một mặt phẳng qua đỉnh hình chóp và song song với  $(ABCD)$ .

+ Hai mặt phẳng qua đỉnh hình chóp và qua hai trung điểm của cặp cạnh đối của hình vuông  $ABCD$ .

**Bài tập 5.** Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 5.

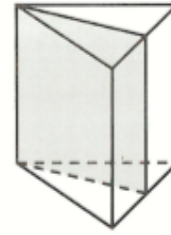
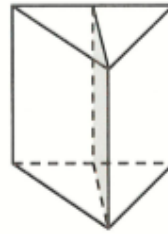
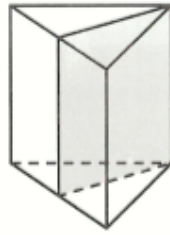
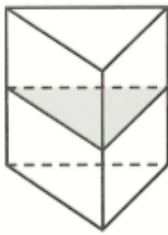
B. 6.

C. 3.

D. 4.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**



Hình lăng trụ tam giác đều có bốn mặt đối xứng gồm:

Ba mặt là mặt phẳng chứa một cạnh bên và hai trung điểm của hai cạnh đáy không chung đỉnh với cạnh bên đó.

Một mặt phẳng chứa trung điểm của ba cạnh bên của hình lăng trụ.

**Bài tập 6.** Gọi  $n_1, n_2, n_3$  lần lượt là số trục đối xứng của khối tứ diện đều, khối chóp tứ giác đều và khối lập phương. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A.  $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 6$ .

B.  $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 9$ .

C.  $n_1 = 3, n_2 = 1, n_3 = 9$ .

D.  $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 3$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C**

Khối tứ diện đều có 3 trục đối xứng (đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối diện). Khối chóp tứ giác đều có 1 trục đối xứng (đi qua đỉnh và tâm của mặt tứ giác). Khối lập phương có 9 trục đối xứng (Loại 1: đi qua tâm của các mặt đối diện; Loại 2: đi qua trung điểm các cặp cạnh đối diện).

**Bài tập 7.** Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng.

B. 1 mặt phẳng.

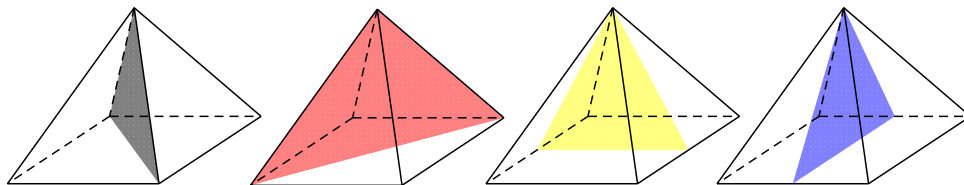
C. 2 mặt phẳng.

D. 3 mặt phẳng.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn A

Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng bao gồm:



- 2 mặt phẳng đi qua đỉnh hình chóp và chứa đường trung bình của đáy.
- 2 mặt phẳng đi qua đỉnh hình chóp và chứa đường chéo của đáy.

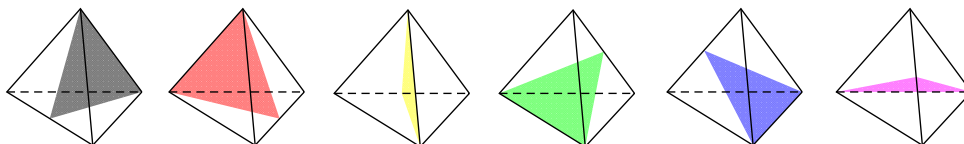
**Bài tập 8.** Số mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là:

- A. 4 mặt phẳng.      B. 6 mặt phẳng.      C. 8 mặt phẳng.      D. 10 mặt phẳng.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn B

Các mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là các mặt phẳng chứa một cạnh và qua trung điểm cạnh đối diện.



Vậy hình tứ diện đều có 6 mặt phẳng đối xứng.

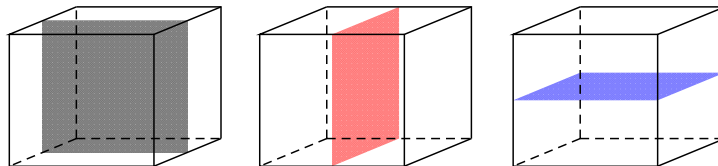
**Bài tập 9.** Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 4 mặt phẳng.      B. 6 mặt phẳng.      C. 9 mặt phẳng.      D. 3 mặt phẳng.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn D

Hình hộp chữ nhật (không phải là hình lập phương) có các mặt phẳng đối xứng là các mặt phẳng trung trực của các cặp cạnh đối.



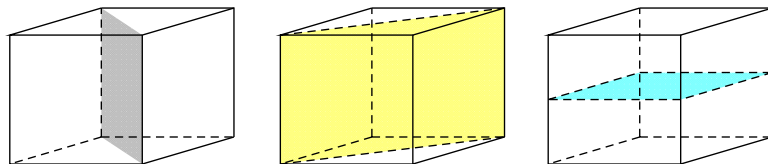
**Bài tập 10.** Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 4 mặt phẳng.      B. 1 mặt phẳng.      C. 2 mặt phẳng.      D. 3 mặt phẳng.

### Hướng dẫn giải

#### Chọn D

Hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình chữ nhật) có 3 mặt phẳng đối xứng bao gồm:



- 2 mặt phẳng chứa đường chéo của đáy và vuông góc với đáy.
- Một mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của cạnh bên.

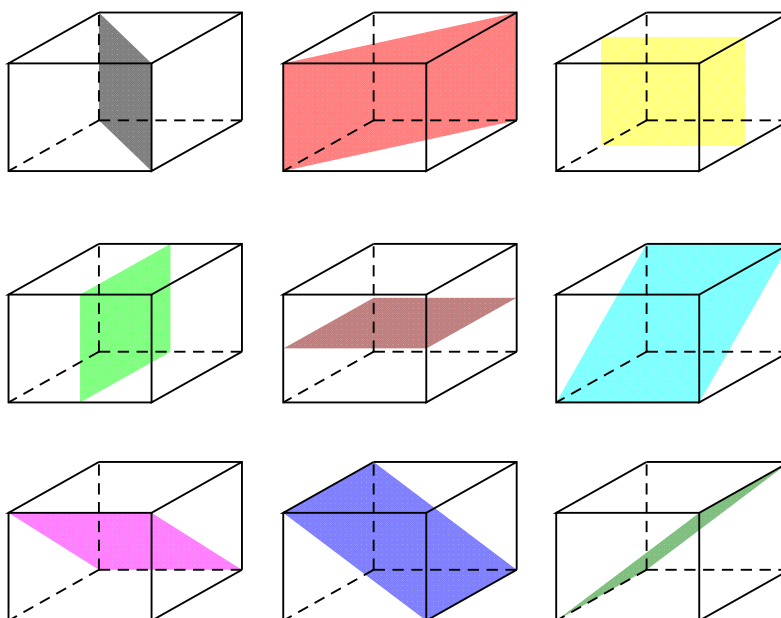
**Bài tập 11.** Hình lập phương có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

- A. 8 mặt phẳng.                      B. 9 mặt phẳng.  
C. 10 mặt phẳng.                    D. 12 mặt phẳng.

### Hướng dẫn giải

**Chọn B**

Có 9 mặt đối xứng (như hình vẽ sau).



**Bài tập 12.** Số mặt phẳng đối xứng của hình bát diện đều là:

- A. 4 mặt phẳng.                      B. 9 mặt phẳng.  
C. 6 mặt phẳng.                      D. 12 mặt phẳng.

### Hướng dẫn giải

**Chọn B**

Gọi bát diện đều  $ABCDEF$ . Có 9 mặt phẳng đối xứng, bao gồm: 3 mặt phẳng  $(ABCD)$ ,  $(BEDF)$ ,  $(AECF)$  và 6 mặt phẳng mà mỗi mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của hai cạnh song song (chẳng hạn  $AB$  và  $CD$ ).

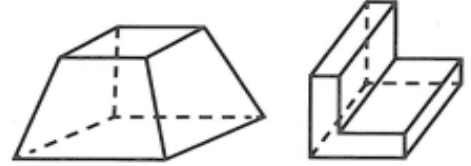
Nhận xét. Loại này ta thấy có 2 điểm nằm khác phía với 2 điểm còn lại.

## BÀI 2: KHỐI ĐA DIỆN LỖI – KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

### A. LÝ THUYẾT

#### 1. Khối đa diện lồi

Khối đa diện được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của khối đa diện thuộc khối đa diện.

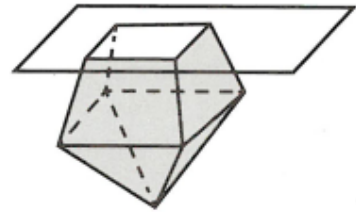


Khối đa diện lồi

Khối đa diện

không lồi

**Lưu ý:** Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng đi qua một mặt của nó.

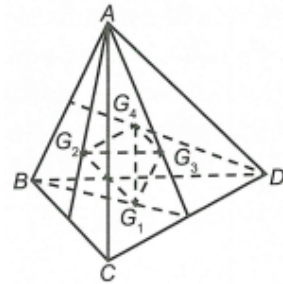


#### Một số kết quả quan trọng về khối đa diện lồi

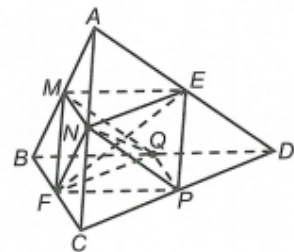
Cho một khối tứ diện đều: Khi đó:

+) Các trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều.

**Bài tập:**

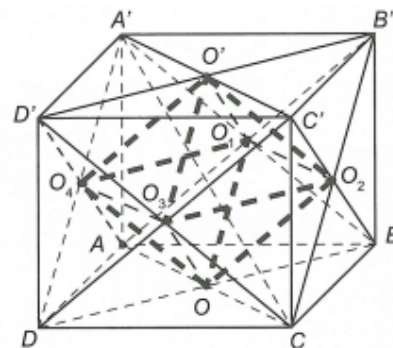


+) Các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối bát diện đều (khối tám mặt đều).



Tâm của các mặt của một khối lập phương là các đỉnh của một khối bát diện đều.

Tâm của các mặt của một khối bát diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.



Hai đỉnh của một khối bát diện đều được gọi là hai đỉnh đối diện nếu chúng không cùng thuộc một cạnh của khối đó. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là đường chéo của khối bát diện đều. Khi đó:

- +) Ba đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
- +) Ba đường chéo đôi một vuông góc với nhau.
- +) Ba đường chéo bằng nhau.

## 2. Khối đa diện đều

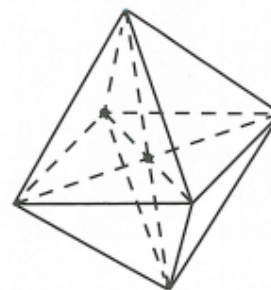
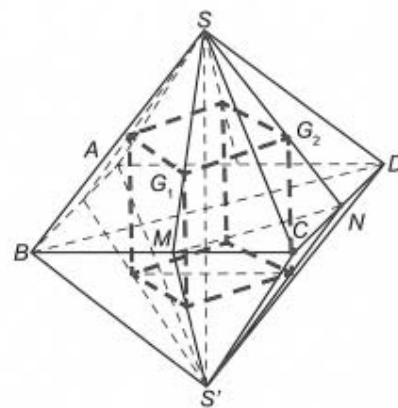
Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có tính chất sau đây:

- +) Mỗi mặt của nó là một đa giác đều  $n$  cạnh.
- +) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng  $p$  mặt.

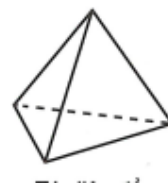
Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại  $\{n; p\}$ .

**Định lý:** Chỉ có năm loại khối đa diện đều.

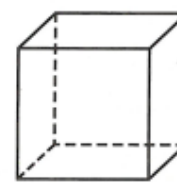
Đó là loại  $\{3; 3\}, \{4; 3\}, \{3; 4\}, \{5; 3\}$  và  $\{3; 5\}$ .



Các khối đa diện đều:



Tứ diện đều



Khối lập phương



Khối bát diện đều



Khối 12 mặt đều



Khối 20 mặt đều

Bảng tóm tắt năm loại khối đa diện đều

| Khối đa diện đều | Số đỉnh | Số cạnh | Số mặt | Loại      | Số MPĐX |
|------------------|---------|---------|--------|-----------|---------|
| Tứ diện đều      | 4       | 6       | 4      | $\{3;3\}$ | 6       |
| Khối lập phương  | 8       | 12      | 6      | $\{4;3\}$ | 9       |
| Bát diện đều     | 6       | 12      | 8      | $\{3;4\}$ | 9       |
| Mười hai mặt đều | 20      | 30      | 12     | $\{5;3\}$ | 15      |
| Hai mươi mặt đều | 12      | 30      | 20     | $\{3;5\}$ | 15      |

**Chú ý:** Giả sử khối đa diện đều loại  $\{n; p\}$  có  $D$  đỉnh,  $C$  cạnh và  $M$  mặt. Khi đó:  $p.D = 2C = n.M$ .

**Công thức O-ler:** Trong một đa diện lồi nếu gọi  $D$  là số đỉnh,  $C$  là số cạnh,  $M$  là số mặt thì ta có:  $D - C + M = 2$ .

**Tâm đối xứng của một hình:** Nếu phép đối xứng qua tâm  $I$  biến hình  $(H)$  thành chính nó thì  $I$  là tâm đối xứng của hình  $(H)$ .

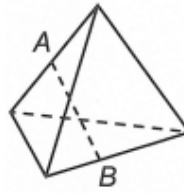
**Mặt phẳng đối xứng của một hình:** Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng  $(P)$  biến hình  $(H)$  thành chính nó thì  $(P)$  là mặt phẳng đối xứng qua hình  $(H)$ .

## B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

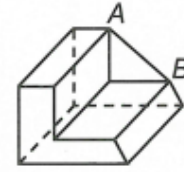
### Dạng 1: Nhận diện đa diện lồi, đa diện đều

#### 1. Phương pháp giải

Khối đa diện được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của khối đa diện thuộc khối đa diện.



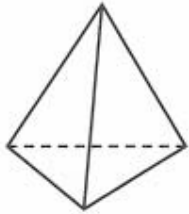
Khối đa diện lồi



Khối đa diện không lồi

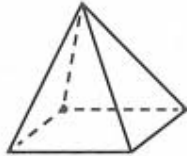
## 2. Bài tập

**Bài tập 1:** Trong các hình dưới đây hình nào không phải khối đa diện lồi?



Hình 1

A. Hình 1.



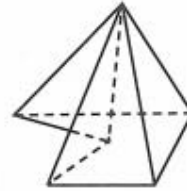
Hình 2

B. Hình 2.



Hình 3

C. Hình 3.



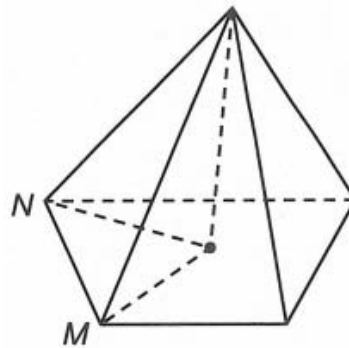
Hình 4

D. Hình 4.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn D.**

Đường nối đoạn  $MN$  không thuộc khối hình 4 nên hình 4 không phải khối đa diện lồi.



**Bài tập 2:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Hình hộp là đa diện lồi.
- B. Tứ diện là đa diện lồi.
- C. Hình tạo bởi hai tứ diện đều ghép vào nhau là một hình đa diện lồi.
- D. Hình lập phương là đa diện lồi.

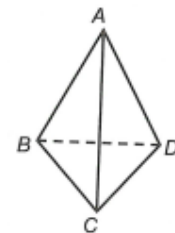
**Hướng dẫn giải**

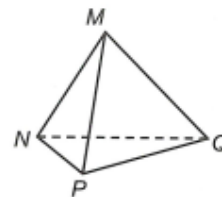
**Chọn C.**

Các đáp án A, B, D đều đúng dựa vào khái niệm hình đa diện lồi.

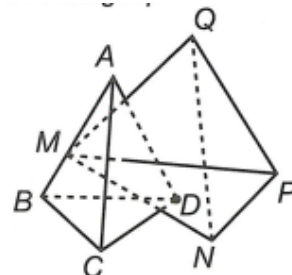
Hai tứ diện đều ghép vào nhau có thể không tạo thành một hình đa diện lồi.

Hai tứ diện (đều là các đa diện lồi) nhưng khi ghép với nhau có thể không tạo thành một hình đa diện lồi.





Hai tứ diện  $ABCD$  và  $MNPQ$  trước khi ghép.



Sau khi ghép hai tứ diện  $ABCD$  và  $MNPQ$  ta được hình mới không phải hình đa diện lồi.

## Dạng 2: Các đặc điểm của khối đa diện đều

### 1. Phương pháp giải

Chỉ có năm loại khối đa diện đều. Đó là loại  $\{3;3\}$ ,  $\{4;3\}$ ,  $\{3;4\}$ ,  $\{5;3\}$  và  $\{3;5\}$ .

Dựa vào bảng tóm tắt phần lý thuyết các thông số: Đỉnh cạnh mặt của các khối đa diện để giải toán.

Dựa vào tính chất phép biến hình để tìm mặt phẳng đối xứng, tâm đối xứng, trục đối xứng,... của các loại khối đa diện.

Công thức Ô-le: Trong một đa diện lồi nếu gọi  $D$  là số đỉnh,  $C$  là số cạnh,  $M$  là số mặt thì ta có công thức  $D - C + M = 2$ .

### 2. Bài tập

**Bài tập 1:** Hình bát diện đều có tất cả bao nhiêu cạnh?

A. 6

B. 8

C. 12

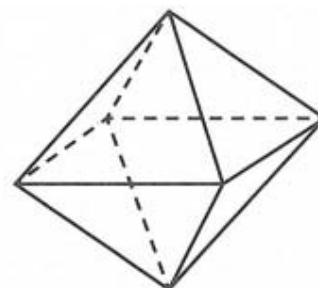
D. 20

Hình bát diện đều

*Hướng dẫn giải*

**Chọn C.**

Hình bát diện đều có 12 cạnh.



**Bài tập 2:** Khối mười hai mặt đều có bao nhiêu đỉnh?

Khối mười hai mặt đều

A. 12

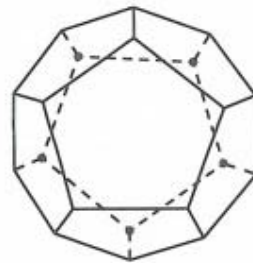
B. 16

C. 20

D. 36

**Hướng dẫn giải****Chọn C.**

Khối mười hai mặt đều có 20 đỉnh.



**Bài tập 3:** Cho khối đa diện đều loại  $\{3;4\}$ . Tổng các góc phẳng tại một đỉnh của khối đa diện đó bằng

A.  $180^\circ$ B.  $240^\circ$ C.  $324^\circ$ D.  $360^\circ$ **Hướng dẫn giải****Chọn B.**

Khối đa diện đều loại  $\{3;4\}$  là khối bát diện đều. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của 4 mặt.

Vậy tổng các góc phẳng tại một đỉnh của khối đa diện đó bằng

$$60^\circ \cdot 4 = 240^\circ.$$

**Bài tập 4:** Cho hình đa diện đều loại  $\{4;3\}$  cạnh  $a$ . Gọi  $S$  là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $S = 4a^2$ .B.  $S = 6a^2$ .C.  $S = 8a^2$ .**Hướng dẫn giải****Chọn B**

Đa diện đều loại  $\{4;3\}$  là khối lập phương nên có 6 mặt là các hình vuông cạnh  $a$ . Vậy hình lập phương có tổng diện tích tất cả các mặt là  $S = 6a^2$ .

**Bài tập 5:** Cho hình bát diện đều cạnh  $a$ . Gọi  $S$  là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A.  $S = 4\sqrt{3}a^2$ .B.  $S = \sqrt{3}a^2$ .C.  $S = 2\sqrt{3}a^2$ .**Hướng dẫn giải****Chọn C**

Hình bát diện đều là hình có tám mặt bằng nhau và mỗi mặt là một tam giác đều. Gọi  $S_0$  là diện tích tam giác đều cạnh

$$a \longrightarrow S_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

---

Vậy diện tích  $S$  cần tính là  $S = 8.S_0 = 8.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}a^2$ .

**Bài tập 6:** Cho hình 20 mặt đều có cạnh bằng 2. Gọi  $S$  là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.**  $S = 10\sqrt{3}$ .

**B.**  $S = 20\sqrt{3}$ .

**C.**  $S = 20$ .

**Hướng dẫn giải**

**Chọn B**

Hình 20 đều là hình có 20 mặt bằng nhau và mỗi mặt là một tam giác đều.

Gọi  $S_0$  là diện tích tam giác đều cạnh bằng

$$2 \longrightarrow S_0 = \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}.$$

Vậy diện tích  $S$  cần tính là  $S = 20.S_0 = 20\sqrt{3}$ .