

Chủ đề 1:

NGUYÊN HÀM

I. LÝ THUYẾT

1. Nguyên hàm của một hàm số

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên một khoảng K (hoặc một đoạn, hoặc một nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K .

Chú ý.

Trường hợp $K = [a; b]$ thì các đẳng thức $F'(a) = f(a)$ và $F'(b) = f(b)$ được hiểu là đạo hàm bên phải tại điểm $x = a$ và đạo hàm bên trái tại điểm $x = b$ của hàm số $F(x)$, tức là:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = f(a) \text{ và } \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{F(x) - F(b)}{x - b} = f(b).$$

Nhận biết họ nguyên hàm của một hàm số

Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K . Khi đó:

- Với mỗi hằng số C , hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K ;
- Nếu hàm số $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in K$.

Như vậy, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, C là hằng số. Ta gọi $F(x) + C$, ($C \in \mathbb{R}$) là họ các nguyên hàm của $f(x)$ trên K , kí hiệu bởi: $\int f(x) dx$

Chú ý.

- Để tìm họ các nguyên hàm (gọi tắt là tìm nguyên hàm) của hàm số $f(x)$ trên K , ta chỉ cần tìm một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ trên K và khi đó: $\int f(x) dx = F(x) + C$ với C là hằng số.
- Người ta chứng minh được rằng, nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng K thì $f(x)$ có nguyên hàm trên khoảng đó.
- Biểu thức $f(x) dx$ được gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$, kí hiệu $kaf \, dF(x)$. Vậy $dF(x) = F'(x) dx = f(x) dx$.
- Khi đi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K , ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

2. Tính chất cơ bản của nguyên hàm

- Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên K , k là hằng số khác 0. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Lúc đó: $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$, ($k \neq 0$).
- Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K . Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x)$ trên K .

Lúc đó:

$$\begin{cases} \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx \\ \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx \end{cases}$$

3. Nguyên hàm của một số hàm số thường gặp

a) Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

Hàm số $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ tùy thuộc vào giá trị của α :

- +) Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$;
- +) Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- +) Với α không nguyên, tập xác định là $(0; +\infty)$.

Đạo hàm hàm số lũy thừa: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, (\forall x > 0)$

Nguyên hàm của hàm số lũy thừa:

$$\begin{cases} \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1) \\ \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \end{cases}$$

b. Nguyên hàm của hàm số lượng giác

$$\begin{cases} \int \cos x dx = \sin x + C \\ \int \sin x dx = -\cos x + C \end{cases} \quad \begin{cases} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \end{cases}$$

c. Nguyên hàm của hàm số mũ

$$\begin{cases} \int e^x dx = e^x + C \\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1) \end{cases}$$

BẢNG TỔNG KẾT NGUYÊN HÀM CỦA MỘT SỐ NGUYÊN HÀM THƯỜNG GẶP

$\int 0 dx = C$	$\int 1 dx = x + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1)$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Số nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là

- A. Vô số. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 2. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $F(x) = f(x), \forall x \in K$. B. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.
 C. $F'(x) = f'(x), \forall x \in K$. D. $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.

- Câu 3.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khẳng định nào dưới đây đúng?
- A. $\int f(x)dx = F'(x) + C.$ B. $\int F(x)dx = f(x) + C.$
 C. $\int f(x)dx = F(x) + C.$ D. $\int F(x)dx = f'(x) + C.$
- Câu 4.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khẳng định nào dưới đây đúng?
- A. $\int 2f(x)dx = 2F'(x) + C.$ B. $\int 2f(x)dx = 2f(x) + C.$
 C. $\int 2f(x)dx = 2F(x) + C.$ D. $\int 2f(x)dx = F(2x) + C.$
- Câu 5.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
- A. $\int f'(x)dx = f(x).$ B. $\int f'(x)dx = f'(x) + C.$
 C. $\int f'(x)dx = f'(x).$ D. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$
- Câu 6.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
- A. $\int f''(x)dx = f'(x).$ B. $\int f''(x)dx = f'(x) + C.$
 C. $\int f''(x)dx = f''(x).$ D. $\int f''(x)dx = f''(x) + C.$
- Câu 7.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
- A. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$ B. $\left(\int f(x)dx\right)' = f'(x).$
 C. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) + C.$ D. $\left(\int f(x)dx\right)' = f'(x) + C.$
- Câu 8.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
- A. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, k \in \mathbb{R}.$ B. $\int xf(x)dx = x\int f(x)dx.$
 C. $\int f(kx)dx = k\int f(x)dx, k \in \mathbb{R}.$ D. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$
- Câu 9.** Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
- A. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$ B. $\int f(x).g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$
 C. $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}.$ D. $\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$
- Câu 10.** Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng liên tục trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$ B. $\int \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]dx = \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}.$
 C. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \forall k \in \mathbb{R}.$ D. $\int [f(x).g(x)]dx = \left(\int f(x)dx\right).\left(\int g(x)dx\right).$
- Câu 11.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và k là một số thực. Khẳng định nào sau đây sai?
- A. $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x).$ B. $\int [f(x)]'dx = f(x) + C.$
 C. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$ D. $\int [f(x) + k]dx = \int f(x)dx + \int kdx.$
- Câu 12.** Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$. B. $\int [f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$.
 C. $\int 2f(x) dx = 2 \int f(x) dx$. D. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.
- Câu 13.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Tìm $G(x) = \int [f(x) - 1] dx$.
 A. $G(x) = xF(x) - x + C$. B. $G(x) = F(x) - x + C$.
 C. $G(x) = xF(x) - 1 + C$. D. $G(x) = F(x) - 1 + C$.
- Câu 14.** Cho biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và có một nguyên hàm là $F(x)$. Tìm $I = \int [2f(x) + f'(x) + 1] dx$.
 A. $I = 2F(x) + f(x) + x + C$. B. $I = 2F(x) + xf(x) + C$.
 C. $I = 2xF(x) + x + 1$. D. $I = 2xF(x) + f(x) + x + C$.
- Câu 15.** Mệnh đề nào sau đây **sai**?
 A. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$, (k là hằng số và $k \neq 0$).
 B. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x)$.
 C. Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f(u) du = F(u) + C$.
 D. $\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$.
- Câu 16.** Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**?
 A. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$. B. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.
 C. $\int f'(x) dx = f(x) + C$. D. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$, $\forall k \in \mathbb{R}$.
- Câu 17.** Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K , với mỗi hằng số C . Trong các mệnh đề sau:
 (I). $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .
 (II). $G(x) = C \cdot F(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .
 (III). $G(x) = F(x) - C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .
 Khẳng định nào dưới đây đúng?
 A. Chỉ (I) đúng. B. (I), (II), (III) đúng.
 C. (I), (II) đúng. D. (I), (III) đúng.
- Câu 18.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$. Biểu thức $F'(25)$ bằng
 A. 5. B. 625. C. 25. D. 125.
- Câu 19.** Khẳng định nào dưới đây đúng?
 A. $\int 1 dx = 0$. B. $\int x^2 dx = 2x$. C. $\int x dx = x^2 + C$ D. $\int 1 dx = x + C$.
- Câu 20.** Khẳng định nào dưới đây **sai**?
 A. $\int 0 dx = C$. B. $\int x^2 dx = 2x + C$. C. $\int 2x dx = x^2 + C$ D. $\int 1 dx = x + C$.
- Câu 21.** Khẳng định nào dưới đây **sai**?
 A. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. B. $\int e^x dx = e^x + C$. C. $\int 1 dx = x + C$. D. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.
- Câu 22.** Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$

B. $\int e^x dx = e^x + C.$

C. $\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + C.$

D. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

Câu 23. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

B. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$

C. $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$

D. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

Câu 24. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int \sin x dx = \cos x + C.$

B. $\int \sin x dx = \sin x + C.$

C. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

D. $\int \sin x dx = -\sin x + C.$

Câu 25. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int \sin x dx = \cos x + C.$

B. $\int \cos x dx = -\sin x + C.$

C. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

D. $\int \cos x dx = -\cos x + C.$

Câu 26. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ là

A. $F(x) = \sin x + \cos x + C.$

B. $F(x) = \sin x - \cos x + C.$

C. $F(x) = -\sin x + \cos x + C.$

D. $F(x) = -\sin x - \cos x + C.$

Câu 27. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int \sin x dx = \cos x + C.$

B. $\int \cos x dx = -\sin x + C.$

C. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + C.$

D. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$

Câu 28. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1.$

B. $\int e^x dx = e^x + C.$

C. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C.$

D. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

Câu 29. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\int f'(x) dx = f(x) + C.$

B. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

C. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \forall \alpha \neq -1.$

D. $\int a^x dx = a^x \ln a + C \ (0 < a \neq 1).$

Câu 30. Hàm số nào dưới đây **không** phải nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$?

A. $y = x^3.$

B. $y = x^3 + 1.$

C. $y = x^3 - 1.$

D. $y = 6x.$

Câu 31. Hàm số $y = \sin 2x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $y = \cos 2x.$

B. $y = -\frac{\cos 2x}{2}.$

C. $y = \frac{\cos 2x}{2}.$

D. $y = 2 \cos 2x.$

Câu 32. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + 2$ là

A. $F(x) = 2x.$

B. $F(x) = x^3 + 2x + C.$

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x + C.$

D. $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2 + C.$

Câu 33. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(4x^2 + 2)$ là

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} \left(\frac{4x^3}{3} + 2x \right) + C.$

B. $F(x) = x^4 + 2x^2 + C.$

C. $F(x) = 4x^4 + x^2 + C.$

D. $F(x) = x^4 + x^2 + C.$

Câu 34. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}, x > 0$ là

A. $F(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C.$

B. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{4}x\sqrt[3]{x} + C.$

C. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} + C.$

D. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C.$

Câu 35. Trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{e^x}{2} + C.$ B. $\int f(x)dx = e^{2x} + C.$ C. $\int f(x)dx = \frac{e^{2x}}{2} + C.$ D. $\int f(x)dx = 2e^{2x} + C.$

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = e^{2x} + \sin 3x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = e^{2x} - \frac{1}{3}\cos 3x + C.$

B. $\int f(x)dx = e^{2x} - \cos 3x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{\cos 3x}{3} + C.$

Câu 37. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{5^{x+1}}{x+1} + C.$

B. $\int f(x)dx = 5^x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C.$

D. $\int f(x)dx = 5^x \ln 5 + C.$

Câu 38. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{4x}$ là

A. $\int f(x)dx = e^{4x} + C.$

B. $\int f(x)dx = 4e^{4x} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{e^{4x}}{4} + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{e^{4x}}{4} + C.$

Câu 39. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(2e^{2x} - 3)$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{2e^{3x}}{3} - 3e^x + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{2e^{3x}}{3} + 3e^x + C.$

C. $\int f(x)dx = e^x(e^{2x} - 3) + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{e^{3x}}{3} + 3e^x + C.$

Câu 40. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4e^{3x} - 2e^{2x} + 5}{e^x}$ là

A. $\int f(x)dx = 2e^{2x} - 2e^x - \frac{5}{e^x} + C.$

B. $\int f(x)dx = 4e^{2x} - 2e^x - \frac{5}{e^x} + C.$

C. $\int f(x)dx = 2e^{2x} - e^x - \frac{5}{e^x} + C.$

D. $\int f(x)dx = 4e^{2x} + 2e^x - \frac{5}{e^x} + C.$

Câu 41. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ là

A. $\int f(x)dx = -\cos 3x + C.$

B. $\int f(x)dx = 3\sin 3x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\cos 3x}{3} + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C.$

Câu 42. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{\sin 3x}{3} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C.$

C. $\int f(x)dx = \sin 3x + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C.$

Câu 43. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$ là

A. $F(x) = 2\cos 2x - 3\sin 3x + C.$

B. $F(x) = -\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + C.$

C. $F(x) = \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} + C.$

D. $F(x) = \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + C.$

Câu 44. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4\sin^2 x$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{4\sin^3 x}{3} + C.$

B. $\int f(x)dx = 2x - \sin 2x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\cos 2x}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = 2x - 2\sin 2x + C.$

Câu 45. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{\sin 2x}{2} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{\sin 2x}{2} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\cos 2x}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C.$

Câu 46. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{\sin 2x}{2} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{\sin 2x}{2} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\cos 2x}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C.$

Câu 47. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4\sin x \cos 3x$ là

A. $\int f(x)dx = -\frac{\cos 4x}{2} + \cos 2x + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{\cos 4x}{2} - \cos 2x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\cos 4x}{2} - \cos 2x + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{\cos 4x}{2} + \cos 2x + C.$

Câu 48. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4\sin x \cos^2 3x$ là

A. $\int f(x)dx = -\frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 5x}{5} - 2\cos x + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 5x}{5} + 2\cos x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 5x}{5} - 2\cos x + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 5x}{5} + 2\cos x + C.$

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = 2\cos[2(x+\pi)] - 3x^2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = 2\sin[2(x+\pi)] - x^3 + C.$

B. $\int f(x)dx = \sin 2x - x^3 + C.$

C. $\int f(x)dx = -\sin[2(x+\pi)] - x^3 + C$. D. $\int f(x)dx = -4\sin[2(x+\pi)] - 6x + C$.

Câu 50. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 + 5}{x}, x \neq 0$ là

A. $F(x) = x^3 + 2x^2 + 5\ln|x| + C$. B. $F(x) = x^3 + x^2 + 5\ln x + C$.
C. $F(x) = x^3 + x^2 + 5\ln|x| + C$. D. $x^3 + 2x^2 + 5\ln x + C$.

Câu 51. Trên khoảng $(0; +\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{x^3}$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-2} + C$. B. $\int f(x)dx = -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-2} + C$.
C. $\int f(x)dx = -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} + 2x^{-2} + C$. D. $\int f(x)dx = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-2} + C$.

Câu 52. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ là

A. $F(x) = -\frac{2}{(2x+3)^2} + C$. B. $F(x) = \ln(2x+3) + C$.
C. $F(x) = \ln|2x+3| + C$. D. $F(x) = \frac{\ln|2x+3|}{2} + C$.

Câu 53. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-3x}$ là

A. $F(x) = \frac{3}{(1-3x)^2} + C$. B. $F(x) = \ln(1-3x) + C$.
C. $F(x) = \ln|1-3x| + C$. D. $F(x) = -\frac{\ln|1-3x|}{3} + C$.

Câu 54. Xác định $F(x) = \int \frac{6x+2}{3x-1} dx$.

A. $F(x) = 2x + \frac{4}{3}\ln|3x-1| + C$. B. $F(x) = 2x + 4\ln|3x-1| + C$
C. $F(x) = \frac{4}{3}\ln|3x-1| + C$ D. $F(x) = 2x + 4\ln(3x-1) + C$

Câu 55. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$. B. $\int f(x)dx = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$.
C. $\int f(x)dx = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$. D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + C$.

Câu 56. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

A. $2\ln|x^2-4| + C$. B. $\frac{1}{2(x^2-4)} + C$. C. $\frac{-1}{4(x^2-4)^2} + C$. D. $\frac{1}{2}\ln|x^2-4| + C$.

Câu 57. Xác định $\int \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} dx$.

A. $x^2 + \ln|x - 1| + C$.

B. $\frac{x^2}{2} + \ln|x - 1| + C$.

C. $1 - \frac{1}{(x - 1)^2} + C$.

D. $x + \frac{1}{x - 1} + C$.

Câu 58. Họ các nguyên hàm $\int \frac{1}{(2x - 1)^2} dx$ là

A. $\frac{-1}{4x - 2} + C$.

B. $\frac{1}{2x - 1} + C$.

C. $\frac{-1}{2x - 1} + C$.

D. $\frac{1}{4x - 2} + C$.

Câu 59. Cho $\int \frac{2x + 1}{x - 2} dx = ax + b \ln|x - 2| + C$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của $S = a + b$ là:

A. $S = 4$.

B. $S = 7$.

C. $S = 1$.

D. $S = 2$.

Câu 60. Xác định $F(x) = \int \frac{2x^2 - 7x + 5}{x - 3} dx$.

A. $F(x) = x^2 - x + 2 \ln|x - 3| + C$.

B. $F(x) = x^2 - x - 2 \ln|x - 3| + C$.

C. $F(x) = 2x^2 - x + 2 \ln|x - 3| + C$.

D. $F(x) = 2x^2 - x - 2 \ln|x - 3| + C$.

Câu 61. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$.

A. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 3}{x + 1} \right| + C$.

B. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + 3}{x + 1} \right| + C$.

C. $-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 3}{x - 1} \right| + C$.

D. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 3}{x - 1} \right| + C$.

Câu 62. Biết $\int \frac{x + 1}{-x^2 + 3x - 2} dx = a \ln|x - 1| + b \ln|x - 2| + C$. Tính $a + b$.

A. $a + b = 1$.

B. $a + b = 5$.

C. $a + b = -5$.

D. $a + b = -1$.

Câu 63. Cho biết $\int \frac{2x + 7}{x^2 + 5x + 6} dx = a \ln|x + 2| + b \ln|x + 3| + C$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Tính $P = a^2 + ab + b^2$.

A. $P = 3$.

B. $P = 12$.

C. $P = 7$.

D. $P = 13$.

Câu 64. Cho biết $\int \frac{2x - 13}{x^2 - x - 2} dx = a \ln|x + 1| + b \ln|x - 2| + C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a + 2b = 8$.

B. $a + b = 8$.

C. $2a - b = 8$.

D. $a - b = 8$.

Câu 65. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x - 2}{(x - 2)^2}$ trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A. $3 \ln(x - 2) + \frac{2}{x - 2} + C$.

B. $3 \ln(x - 2) - \frac{2}{x - 2} + C$.

C. $3 \ln(x - 2) - \frac{4}{x - 2} + C$.

D. $3 \ln(x - 2) + \frac{4}{x - 2} + C$.

Câu 66. Biết $\int \frac{x}{x^2 - 4x + 4} dx = a \ln|x - 2| + \frac{b}{x - 2} + C$; $a, b \in \mathbb{Q}, C \in \mathbb{R}$. Giá trị $a + b$ bằng

A. 1.

B. -1.

C. 2.

D. 0.

Câu 67. Biết $\int \frac{4x + 1}{x^2 - 2x + 1} dx = a \ln|x - 1| + \frac{b}{x - 1} + C$; $a, b \in \mathbb{Q}, C \in \mathbb{R}$. Tính $a + b$.

- A. 1. B. -1. C. 2. D. 3.
- Câu 68.** Biết $\int \frac{2x+3}{x^3-4x} dx = a \ln|x| + b \ln|x-2| + c \ln|x+2| + C; a; b; c \in \mathbb{Q}; C \in \mathbb{R}$. Giá trị $4a - b + c$ bằng
- A. -3. B. 4. C. 2. D. -4.
- Câu 69.** Biết $\int (3 \sin 2x + 2 \cos 3x) dx = a \cos 2x + b \sin 3x + C; a; b \in \mathbb{Q}; C \in \mathbb{R}$. Giá trị $2a + 3b$ bằng
- A. 5. B. 1. C. 2. D. -1.
- Câu 70.** Biết $\int 4 \sin x \cos 3x dx = a \cos 2x + b \cos 4x + C; a; b \in \mathbb{Q}; C \in \mathbb{R}$. Giá trị $a + 2b$ bằng
- A. -2. B. 1. C. 2. D. 0.
- Câu 71.** Cho hàm số $y = f(x)$ có $\int f(x) dx = x \sin x + C$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
- A. $1 + \frac{\pi}{2}$. B. 0. C. 1. D. $1 - \frac{\pi}{2}$.
- Câu 72.** Gọi $F(x)$ là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 8 \sin 3x \cos x$. Biết rằng $F(x)$ có dạng $F(x) = a \cos 4x + b \cos 2x + C$. Khi đó, $a - b$ bằng
- A. 5. B. 1. C. 3. D. -1.
- Câu 73.** Cho $\int f(x) dx = x^2 - 3x + C$. Tìm $\int f(e^{-x}) dx$.
- A. $\int f(e^{-x}) dx = e^{-2x} - 3e^{-x} + C$. B. $\int f(e^{-x}) dx = 2e^{-x} - 3x + C$.
C. $\int f(e^{-x}) dx = -2e^{-x} - 3x + C$. D. $\int f(e^{-x}) dx = -2e^{-x} - 3e^{-x} + C$.
- Câu 74.** Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $F(x) = x^3 + 2x^2 + (m^2 - 1)x + C$ (C là hằng số) là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 4x + 3$ trên $\mathbb{R}$.
- A. $m = 2$. B. $m = \pm 4$. C. $m = 4$. D. $m = \pm 2$.
- Câu 75.** Biết $F(x) = ax^2 + bx + 1, (a; b \in \mathbb{R})$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$. Tổng $a + b$ bằng
- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.
- Câu 76.** Biết $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1, (a; b; c \in \mathbb{R})$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 6x^2 + 2x + 1$. Tổng $a + b + c$ bằng
- A. 2. B. 4. C. 3. D. 5.
- Câu 77.** Biết $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$ thỏa mãn $F(1) = 2$. Giá trị $F(2)$ bằng
- A. 6. B. 8. C. 3. D. 2.
- Câu 78.** Biết $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Giá trị $F(2) + F(3)$ bằng
- A. 67. B. 70. C. 45. D. 90.
- Câu 79.** Biết $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin 2x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Giá trị $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng
- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.
- Câu 80.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng
- A. 2. B. 6. C. 8. D. 4.

- Câu 81.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^3-12x}(x^4 - 4x^2)$. Hàm số $F(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?
A. $(-\infty; 0)$. **B.** $(2; +\infty)$. **C.** $(-2; 0)$. **D.** $(0; +\infty)$.
- Câu 82.** Cho hai hàm số $F(x) = (x^2 + ax + b)e^x$, $f(x) = (x^2 + 3x + 4)e^x$. Biết a, b là các số thực để $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tính $S = a + b$.
A. $S = 12$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = -6$. **D.** $S = 4$.
- Câu 83.** Gọi $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^3 + 9x^2 - 2x + 5)e^x$. Tính $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.
A. 245. **B.** 246. **C.** 248. **D.** 249.
- Câu 84.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ thỏa mãn $F(5) = 2$ và $F(0) = 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $F(-1) = 2 - \ln 2$. **B.** $F(2) = 2 - 2\ln 2$. **C.** $F(3) = 1 + \ln 2$. **D.** $F(-3) = 2$.
- Câu 85.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{2x-3}{x-2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $f(3) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(0) + 2f(4)$ bằng
A. 3. **B.** 5. **C.** $7 + 3\ln 2$. **D.** $-5 + 7\ln 2$.
- Câu 86.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ đồng thời thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{2x+1}$ ($\forall x \neq -\frac{1}{2}$), và $f(-1) + 2f(0) = 2\ln 674$. Giá trị của biểu thức $S = f(-2) + f(1) + f(4)$ bằng
A. $2\ln 3 - \ln 674$. **B.** $\ln 2022$. **C.** $2\ln 2022$. **D.** $3\ln 3$.
- Câu 87.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng
A. 27. **B.** 29. **C.** 12. **D.** 33.
- Câu 88.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $F(-2) + 2F(3)$.
A. 60. **B.** 28. **C.** -1. **D.** -48.
- Câu 89.** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng
A. $-\frac{391}{400}$. **B.** $-\frac{1}{40}$. **C.** $-\frac{41}{400}$. **D.** $-\frac{1}{10}$.
- Câu 90.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và khác không với mọi x thỏa mãn $f(0) = -1$ và $f'(x) = e^x \cdot f^2(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(-1)$ bằng

- A. -1 . B. $-e$. C. e . D. $-\frac{1}{e}$.

Câu 91. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1)=3$ và $x(4-f'(x))=f(x)-1$ với mọi $x>0$. Giá trị $f(2)$ bằng
A. 6. B. 2. C. 5. D. 3.

Câu 92. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)+2x.f(x)=e^x f(x)$ với $f(x)\neq 0, \forall x$ và $f(0)=1$. Khi đó $|f(1)|$ bằng
A. $e+1$. B. e^{e-2} . C. $e-1$. D. e^{e+1} .

Câu 93. Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1, f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$ với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $4 < f(5) < 5$. B. $1 < f(5) < 2$. C. $3 < f(5) < 4$. D. $2 < f(5) < 3$.

Câu 94. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x(x+1)f'(x)+(2x+1)f(x)=\frac{1}{x}-1$ và $f(1)=1$. Biết $f(2)=a+b\ln 2$. Khi đó, $a+b$ bằng
A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

III. LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Số nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là
A. Vô số. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải:

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì có vô số nguyên hàm trên $\mathbb{R}$.

Câu 2. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $F(x)=f(x), \forall x \in K$. B. $F'(x)=f(x), \forall x \in K$.
C. $F'(x)=f'(x), \forall x \in K$. D. $f'(x)=F(x), \forall x \in K$.

Câu 3. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $\int f(x)dx = F'(x) + C$. B. $\int F(x)dx = f(x) + C$.
C. $\int f(x)dx = F(x) + C$. D. $\int F(x)dx = f'(x) + C$.

Câu 4. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $\int 2f(x)dx = 2F'(x) + C$. B. $\int 2f(x)dx = 2f(x) + C$.
C. $\int 2f(x)dx = 2F(x) + C$. D. $\int 2f(x)dx = F(2x) + C$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $\int f'(x)dx = f(x)$. B. $\int f'(x)dx = f'(x) + C$.
C. $\int f'(x)dx = f'(x)$. D. $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 2 liên tục trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $\int f''(x)dx = f'(x)$. B. $\int f''(x)dx = f'(x) + C$.
C. $\int f''(x)dx = f''(x)$. D. $\int f''(x)dx = f''(x) + C$.

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

B. $\left(\int f(x)dx\right)' = f'(x).$

C. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) + C.$

D. $\left(\int f(x)dx\right)' = f'(x) + C.$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, k \in \mathbb{R}.$

B. $\int xf(x)dx = x \int f(x)dx.$

C. $\int f(kx)dx = k \int f(x)dx, k \in \mathbb{R}.$

D. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Câu 9. Cho các hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

B. $\int f(x).g(x)dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx.$

C. $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}.$

D. $\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cùng liên tục trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

B. $\int \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]dx = \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}.$

C. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, \forall k \in \mathbb{R}.$

D. $\int [f(x).g(x)]dx = \left(\int f(x)dx\right) \cdot \left(\int g(x)dx\right).$

Lời giải:

Nhận định đúng là $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và k là một số thực. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\left[\int f(x)dx\right]' = f(x).$

B. $\int [f(x)]'dx = f(x) + C.$

C. $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$

D. $\int [f(x) + k]dx = \int f(x)dx + \int kdx.$

Lời giải:

Theo tính chất của nguyên hàm thì khẳng định $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ là sai vì thiếu điều kiện $k \neq 0$.

Câu 12. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$

B. $\int [f(x).g(x)]dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx.$

C. $\int 2f(x)dx = 2 \int f(x)dx.$

D. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Lời giải:

$\int [f(x).g(x)]dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$ sai vì không đúng tính chất.

Câu 13. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Tìm $G(x) = \int [f(x) - 1]dx$.

A. $G(x) = xF(x) - x + C.$

B. $G(x) = F(x) - x + C.$

C. $G(x) = xF(x) - 1 + C.$

D. $G(x) = F(x) - 1 + C.$

Lời giải:

Ta có $G(x) = \int [f(x) - 1]dx = F(x) - x + C.$

Câu 14. Cho biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ và có một nguyên hàm là $F(x)$. Tìm $I = \int [2f(x) + f'(x) + 1] dx$.

A. $I = 2F(x) + f(x) + x + C$.

B. $I = 2F(x) + xf(x) + C$.

C. $I = 2xF(x) + x + 1$.

D. $I = 2xF(x) + f(x) + x + C$.

Lời giải:

Ta có $I = \int [2f(x) + f'(x) + 1] dx = 2 \int f(x) dx + \int f'(x) dx + \int dx = 2F(x) + f(x) + x + C$.

Câu 15. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$, (k là hằng số và $k \neq 0$).

B. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x) = G(x)$.

C. Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f(u) du = F(u) + C$.

D. $\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx$.

Lời giải:

Chọn $f(x) = x$ ta thấy:

$\int f(x) dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1 = F(x)$.

$\int f(x) dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_2 = G(x)$.

Khi $C_1 \neq C_2$ thì $F(x) \neq G(x)$.

Câu 16. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào **sai**?

A. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$. **B.** $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$.

C. $\int f'(x) dx = f(x) + C$.

D. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx, \forall k \in \mathbb{R}$.

Lời giải:

$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx, \forall k \neq 0$.

Câu 17. Nếu hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K , với mỗi hằng số C . Trong các mệnh đề sau:

(I). $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

(II). $G(x) = C.F(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

(III). $G(x) = F(x) - C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K .

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Chỉ (I) đúng.

B. (I), (II), (III) đúng.

C. (I), (II) đúng.

D. (I), (III) đúng.

Lời giải:

Theo định nghĩa về nguyên hàm thì (I) và (III) là đúng, (II) sai.

Câu 18. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$. Biểu thức $F'(25)$ bằng

A. 5.

B. 625.

C. 25.

D. 125.

Lời giải:

+) Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2$ nên
 $F'(x) = f(x) = x^2 \Rightarrow F'(25) = 25^2 = 625$.

Câu 19. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int 1dx = 0$. B. $\int x^2 dx = 2x$. C. $\int x dx = x^2 + C$ D. $\int 1dx = x + C$.

Câu 20. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $\int 0dx = C$. B. $\int x^2 dx = 2x + C$. C. $\int 2x dx = x^2 + C$ D. $\int 1dx = x + C$.

Câu 21. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. B. $\int e^x dx = e^x + C$. C. $\int 1dx = x + C$. D. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Câu 22. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$. B. $\int e^x dx = e^x + C$.
 C. $\int \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + C$. D. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Câu 23. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$. B. $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$.
 C. $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C$. D. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$.

Lời giải:

Ta có: $\int e^x dx = e^x + C$ nên C sai.

Câu 24. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int \sin x dx = \cos x + C$. B. $\int \sin x dx = \sin x + C$.
 C. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. D. $\int \sin x dx = -\sin x + C$.

Câu 25. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int \sin x dx = \cos x + C$. B. $\int \cos x dx = -\sin x + C$.
 C. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. D. $\int \cos x dx = -\cos x + C$.

Câu 26. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ là

- A. $F(x) = \sin x + \cos x + C$. B. $F(x) = \sin x - \cos x + C$.
 C. $F(x) = -\sin x + \cos x + C$. D. $F(x) = -\sin x - \cos x + C$.

Câu 27. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int \sin x dx = \cos x + C$. B. $\int \cos x dx = -\sin x + C$.
 C. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \cot x + C$. D. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.

Câu 28. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$. B. $\int e^x dx = e^x + C$.
 C. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$. D. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Câu 29. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\int f'(x)dx = f(x) + C.$

B. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

C. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \forall \alpha \neq -1.$

D. $\int a^x dx = a^x \ln a + C \ (0 < a \neq 1).$

Lời giải:

Ta có $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$ nên phương án $\int a^x dx = a^x \ln a + C \ (0 < a \neq 1)$ sai.

Câu 30. Hàm số nào dưới đây **không** phải nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2$?

A. $y = x^3.$

B. $y = x^3 + 1.$

C. $y = x^3 - 1.$

D. $y = 6x.$

Câu 31. Hàm số $y = \sin 2x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $y = \cos 2x.$

B. $y = -\frac{\cos 2x}{2}.$

C. $y = \frac{\cos 2x}{2}.$

D. $y = 2 \cos 2x.$

Câu 32. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + 2$ là

A. $F(x) = 2x.$

B. $F(x) = x^3 + 2x + C.$

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x + C.$

D. $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2 + C.$

Câu 33. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(4x^2 + 2)$ là

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} \left(\frac{4x^3}{3} + 2x \right) + C.$

B. $F(x) = x^4 + 2x^2 + C.$

C. $F(x) = 4x^4 + x^2 + C.$

D. $F(x) = x^4 + x^2 + C.$

Lời giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int (4x^3 + 2x)dx = x^4 + x^2 + C.$

Câu 34. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}, x > 0$ là

A. $F(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C.$

B. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{4}x\sqrt[3]{x} + C.$

C. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{2}x\sqrt[3]{x} + C.$

D. $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C.$

Lời giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} \right) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C.$

Câu 35. Trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{e^x}{2} + C.$

B. $\int f(x)dx = e^{2x} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{e^{2x}}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = 2e^{2x} + C.$

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = e^{2x} + \sin 3x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = e^{2x} - \frac{1}{3}\cos 3x + C.$

B. $\int f(x)dx = e^{2x} - \cos 3x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{\cos 3x}{3} + C.$

Lời giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int (e^{2x} + \sin 3x)dx = \frac{e^{2x}}{2} - \frac{\cos 3x}{3} + C.$

Câu 37. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5^x$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{5^{x+1}}{x+1} + C.$

B. $\int f(x)dx = 5^x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C.$

D. $\int f(x)dx = 5^x \ln 5 + C.$

Câu 38. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{4x}$ là

A. $\int f(x)dx = e^{4x} + C.$

B. $\int f(x)dx = 4e^{4x} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{e^{4x}}{4} + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{e^{4x}}{4} + C.$

Câu 39. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(2e^{2x} - 3)$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{2e^{3x}}{3} - 3e^x + C.$

B. $\int f(x)dx = \frac{2e^{3x}}{3} + 3e^x + C.$

C. $\int f(x)dx = e^x(e^{2x} - 3) + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{e^{3x}}{3} + 3e^x + C.$

Lời giải:

Ta có: $f(x) = e^x(2e^{2x} - 3) = 2e^{3x} - 3e^x$

Lúc đó: $\int f(x)dx = \int (2e^{3x} - 3e^x)dx = \frac{2e^{3x}}{3} - 3e^x + C.$

Câu 40. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4e^{3x} - 2e^{2x} + 5}{e^x}$ là

A. $\int f(x)dx = 2e^{2x} - 2e^x - \frac{5}{e^x} + C.$

B. $\int f(x)dx = 4e^{2x} - 2e^x - \frac{5}{e^x} + C.$

C. $\int f(x)dx = 2e^{2x} - e^x - \frac{5}{e^x} + C.$

D. $\int f(x)dx = 4e^{2x} + 2e^x - \frac{5}{e^x} + C.$

Lời giải:

Ta có: $f(x) = \frac{4e^{3x} - 2e^{2x} + 5}{e^x} = 4e^{2x} - 2e^x + \frac{5}{e^x} = 4e^{2x} - 2e^x + 5e^{-x}.$

Lúc đó: $\int f(x)dx = \int (4e^{2x} - 2e^x + 5e^{-x})dx = \frac{4e^{2x}}{2} - 2e^x + \frac{5e^{-x}}{-1} + C = 2e^{2x} - 2e^x - \frac{5}{e^x} + C.$

Câu 41. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ là

A. $\int f(x)dx = -\cos 3x + C.$

B. $\int f(x)dx = 3\sin 3x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\cos 3x}{3} + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C.$

Câu 42. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{\sin 3x}{3} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C.$

C. $\int f(x)dx = \sin 3x + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{\cos 3x}{3} + C.$

Câu 43. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$ là

A. $F(x) = 2\cos 2x - 3\sin 3x + C.$

B. $F(x) = -\frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + C.$

C. $F(x) = \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} + C.$

D. $F(x) = \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + C.$

Câu 44. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4\sin^2 x$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{4\sin^3 x}{3} + C.$

B. $\int f(x)dx = 2x - \sin 2x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\cos 2x}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = 2x - 2\sin 2x + C.$

Lời giải:

Ta có: $f(x) = 4\sin^2 x = 2(1 - \cos 2x) = 2 - 2\cos 2x.$

Lúc đó: $\int f(x)dx = \int (2 - 2\cos 2x)dx = 2x - \sin 2x + C.$

Câu 45. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{\sin 2x}{2} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{\sin 2x}{2} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\cos 2x}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C.$

Lời giải:

Ta có: $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$

Lúc đó: $\int f(x)dx = \int \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} + C.$

Câu 46. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{\sin 2x}{2} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{\sin 2x}{2} + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\cos 2x}{2} + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C.$

Lời giải:

Ta có: $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 2x.$

Lúc đó: $\int f(x)dx = \int \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} + C.$

Câu 47. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4\sin x \cos 3x$ là

A. $\int f(x)dx = -\frac{\cos 4x}{2} + \cos 2x + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{\cos 4x}{2} - \cos 2x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\cos 4x}{2} - \cos 2x + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{\cos 4x}{2} + \cos 2x + C.$

Lời giải:

Ta có: $f(x) = 4\sin x \cos 3x = 4 \cdot \frac{1}{2}(\sin(-2x) + \sin 4x) = 2\sin 4x - 2\sin 2x.$

Lúc đó: $\int f(x)dx = \int (2\sin 4x - 2\sin 2x)dx = -\frac{\cos 4x}{2} + \cos 2x + C.$

Câu 48. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4\sin x \cos^2 3x$ là

A. $\int f(x)dx = -\frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 5x}{5} - 2\cos x + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 5x}{5} + 2\cos x + C.$

C. $\int f(x)dx = \frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 5x}{5} - 2\cos x + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 5x}{5} + 2\cos x + C.$

Lời giải:

Ta có: $f(x) = 4\sin x \cos^2 3x = 4\sin x \cdot \frac{1 + \cos 6x}{2} = 2\sin x(1 + \cos 6x)$
 $= 2\sin x + 2\sin x \cos 6x = 2\sin x + (\sin 7x - \sin 5x) = \sin 7x - \sin 5x + 2\sin x.$

Lúc đó: $\int f(x)dx = \int (\sin 7x - \sin 5x + 2\sin x)dx = -\frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 5x}{5} - 2\cos x + C.$

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = 2\cos[2(x + \pi)] - 3x^2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = 2\sin[2(x + \pi)] - x^3 + C.$

B. $\int f(x)dx = \sin 2x - x^3 + C.$

C. $\int f(x)dx = -\sin[2(x + \pi)] - x^3 + C.$

D. $\int f(x)dx = -4\sin[2(x + \pi)] - 6x + C.$

Lời giải:

Ta có $\int f(x)dx = \int [2\cos(2x + 2\pi) - 3x^2]dx = \int [2\cos 2x - 3x^2]dx = \sin 2x - x^3 + C.$

Câu 50. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 + 5}{x}, x \neq 0$ là

A. $F(x) = x^3 + 2x^2 + 5\ln|x| + C.$

B. $F(x) = x^3 + x^2 + 5\ln x + C.$

C. $F(x) = x^3 + x^2 + 5\ln|x| + C.$

D. $x^3 + 2x^2 + 5\ln x + C.$

Lời giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int \frac{3x^3 + 2x^2 + 5}{x}dx = \int \left(3x^2 + 2x + \frac{5}{x}\right)dx = x^3 + x^2 + 5\ln|x| + C.$

Câu 51. Trên khoảng $(0; +\infty)$, họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{x^3}$ là

A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-2} + C.$

B. $\int f(x)dx = -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-2} + C.$

C. $\int f(x)dx = -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} + 2x^{-2} + C.$

D. $\int f(x)dx = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-2} + C.$

Lời giải:

Ta có: $\int f(x)dx = \int \frac{\sqrt{x} + 1}{x^3}dx = \int \left(x^{-\frac{5}{2}} + x^{-3}\right)dx = -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - 2x^{-2} + C.$

Câu 52. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x + 3}$ là

A. $F(x) = -\frac{2}{(2x + 3)^2} + C.$

B. $F(x) = \ln(2x + 3) + C.$

C. $F(x) = \ln|2x+3| + C.$

D. $F(x) = \frac{\ln|2x+3|}{2} + C.$

Câu 53. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-3x}$ là

A. $F(x) = \frac{3}{(1-3x)^2} + C.$

B. $F(x) = \ln(1-3x) + C.$

C. $F(x) = \ln|1-3x| + C.$

D. $F(x) = -\frac{\ln|1-3x|}{3} + C.$

Câu 54. Xác định $F(x) = \int \frac{6x+2}{3x-1} dx.$

A. $F(x) = 2x + \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C.$

B. $F(x) = 2x + 4 \ln|3x-1| + C$

C. $F(x) = \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C$

D. $F(x) = 2x + 4 \ln(3x-1) + C$

Lời giải:

Ta có: $\int \frac{6x+2}{3x-1} dx = \int \left(2 + \frac{4}{3x-1} \right) dx = 2x + \frac{4}{3} \ln|3x-1| + C.$

Câu 55. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ là

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C.$

B. $\int f(x) dx = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C.$

C. $\int f(x) dx = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + C.$

Lời giải:

Ta có: $\int \frac{dx}{x(x-1)} = \int \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x} = \ln|x-1| - \ln|x| + C = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C.$

Câu 56. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2-4}.$

A. $2 \ln|x^2-4| + C.$ B. $\frac{1}{2(x^2-4)} + C.$ C. $\frac{-1}{4(x^2-4)^2} + C.$ D. $\frac{1}{2} \ln|x^2-4| + C.$

Lời giải:

Ta có $\int \frac{x}{x^2-4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-4)}{x^2-4} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2-4| + C$

Câu 57. Xác định $\int \frac{x^2-x+1}{x-1} dx.$

A. $x^2 + \ln|x-1| + C.$

B. $\frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C.$

C. $1 - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$

D. $x + \frac{1}{x-1} + C.$

Lời giải:

Ta có: $\int \frac{x^2 - x + 1}{x-1} dx = \int \left(x + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + C.$

Câu 58. Họ các nguyên hàm $\int \frac{1}{(2x-1)^2} dx$ là

A. $\frac{-1}{4x-2} + C.$ **B.** $\frac{1}{2x-1} + C.$ **C.** $\frac{-1}{2x-1} + C.$ **D.** $\frac{1}{4x-2} + C.$

Lời giải:

Ta có $\int \frac{1}{(2x-1)^2} dx = \frac{-1}{2(2x-1)} + C = \frac{-1}{4x-2} + C.$

Câu 59. Cho $\int \frac{2x+1}{x-2} dx = ax + b \ln|x-2| + C$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Giá trị của $S = a + b$ là:

A. $S = 4.$ **B.** $S = 7.$ **C.** $S = 1.$ **D.** $S = 2.$

Lời giải:

Ta có: $\int \frac{2x+1}{x-2} dx = \int \frac{2x-4+5}{x-2} dx = \int \left(\frac{2x-4}{x-2} + \frac{5}{x-2} \right) dx = \int \left(2 + \frac{5}{x-2} \right) dx = 2x + 5 \ln|x-2| + C.$

Do đó $a = 2$ và $b = 5$.

Vậy $S = a + b = 2 + 5 = 7.$

Câu 60. Xác định $F(x) = \int \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-3} dx.$

A. $F(x) = x^2 - x + 2 \ln|x-3| + C.$ **B.** $F(x) = x^2 - x - 2 \ln|x-3| + C.$
C. $F(x) = 2x^2 - x + 2 \ln|x-3| + C.$ **D.** $F(x) = 2x^2 - x - 2 \ln|x-3| + C.$

Lời giải:

Ta có: $I = \int \frac{2x^2 - 7x + 5}{x-3} dx = \int \left(2x - 1 + \frac{2}{x-2} \right) dx = x^2 - x + 2 \ln|x-2| + C.$

Câu 61. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}.$

A. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| + C.$ **B.** $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+3}{x+1} \right| + C.$ **C.** $-\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C.$ **D.** $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C.$

Lời giải:

$F(x) = \int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x-3)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C.$

Câu 62. Biết $\int \frac{x+1}{-x^2 + 3x - 2} dx = a \ln|x-1| + b \ln|x-2| + C.$ Tính $a + b.$

A. $a + b = 1.$ **B.** $a + b = 5.$ **C.** $a + b = -5.$ **D.** $a + b = -1.$

Lời giải:

$\frac{-x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} \Leftrightarrow -x-1 = A(x-2) + B(x-1).$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = -1 \\ -2A - B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -3 \end{cases}.$

Nên: $\int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x-2} \right) dx = 2\ln|x-1| - 3\ln|x-2| + C.$

Vậy $a=2, b=-3$. Vậy $a+b=-1$.

Câu 63. Cho biết $\int \frac{2x+7}{x^2+5x+6} dx = a\ln|x+2| + b\ln|x+3| + C (a, b \in \mathbb{R})$. Tính $P = a^2 + ab + b^2$.

A. $P=3$.

B. $P=12$.

C. $P=7$.

D. $P=13$.

Lời giải:

Ta có $\int \frac{2x+7}{x^2+5x+6} dx = \int \frac{2x+7}{(x+2)(x+3)} dx = \int \left(\frac{3}{x+2} - \frac{1}{x+3} \right) dx = 3\ln|x+2| - \ln|x+3| + C.$

Nên $\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow P = a^2 + ab + b^2 = 7.$

Câu 64. Cho biết $\int \frac{2x-13}{x^2-x-2} dx = a\ln|x+1| + b\ln|x-2| + C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+2b=8$.

B. $a+b=8$.

C. $2a-b=8$.

D. $a-b=8$.

Lời giải:

Ta có: $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{5}{x+1} - \frac{3}{x-2} \right) dx = 5\ln|x+1| - 3\ln|x-2| + C.$

Vậy $\begin{cases} a=5 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow a-b=8.$

Câu 65. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2; +\infty)$ là

A. $3\ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C.$

B. $3\ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C.$

C. $3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C.$

D. $3\ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C.$

Lời giải:

Ta có: $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2} = \frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}$, do vậy

$\int \frac{3x-2}{(x-2)^2} dx = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right) dx = 3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C.$

Câu 66. Biết $\int \frac{x}{x^2-4x+4} dx = a\ln|x-2| + \frac{b}{x-2} + C; a, b \in \mathbb{Q}, C \in \mathbb{R}$. Giá trị $a+b$ bằng

A. 1.

B. -1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải:

Ta có: $\frac{x}{x^2-4x+4} = \frac{x}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)+2}{(x-2)^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$

$\Rightarrow \int \frac{x}{x^2-4x+4} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} \right) dx = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow a+b=-1.$

Câu 67. Biết $\int \frac{4x+1}{x^2-2x+1} dx = a \ln|x-1| + \frac{b}{x-1} + C; a, b \in \mathbb{Q}; C \in \mathbb{R}$. Tính $a+b$.

A. 1.

B. -1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{4x+1}{x^2-2x+1} &= \frac{4x+1}{(x-1)^2} = \frac{4(x-1)+5}{(x-1)^2} = \frac{4}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} \\ \Rightarrow \int \frac{4x+1}{x^2-2x+1} dx &= \int \left(\frac{4}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} \right) dx = 4 \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-5 \end{cases} \Rightarrow a+b=-1. \end{aligned}$$

Câu 68. Biết $\int \frac{2x+3}{x^3-4x} dx = a \ln|x| + b \ln|x-2| + c \ln|x+2| + C; a, b, c \in \mathbb{Q}; C \in \mathbb{R}$. Giá trị $4a-b+c$ bằng

A. -3.

B. 4.

C. 2.

D. -4.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \frac{2x+3}{x^3-4x} = \frac{2x+3}{x(x-2)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+2} \Rightarrow 2x+3 = a(x-2)(x+2) + bx(x+2) + cx(x-2)$$

$$\text{Thay } x=0: -4a=3 \Leftrightarrow a=-\frac{3}{4}.$$

$$\text{Thay } x=2: 8b=7 \Leftrightarrow b=\frac{7}{8}.$$

$$\text{Thay } x=-2: 8c=-1 \Leftrightarrow c=-\frac{1}{8}.$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x+3}{x^3-4x} dx = \int \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx = -\frac{3}{4} \ln|x| + \frac{7}{8} \ln|x-2| - \frac{1}{8} \ln|x+2| + C.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{4} \\ b=\frac{7}{8} \\ c=-\frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow 4a-b+c=-4.$$

Câu 69. Biết $\int (3 \sin 2x + 2 \cos 3x) dx = a \cos 2x + b \sin 3x + C; a, b \in \mathbb{Q}; C \in \mathbb{R}$. Giá trị $2a+3b$ bằng

A. 5.

B. 1.

C. 2.

D. -1.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \int (3 \sin 2x + 2 \cos 3x) dx = -\frac{3 \cos 2x}{2} + \frac{2 \sin 3x}{3} + C \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{2} \\ b=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow 2a+3b=-1.$$

Câu 70. Biết $\int 4 \sin x \cos 3x dx = a \cos 2x + b \cos 4x + C; a, b \in \mathbb{Q}; C \in \mathbb{R}$. Giá trị $a+2b$ bằng

A. -2.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \int 4 \sin x \cos 3x dx = \int 2(\sin 2x - \sin 4x) dx = \int (2 \sin 2x - 2 \sin 4x) dx$$

$$= -\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2} + C \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a + 2b = 0.$$

Câu 71. Cho hàm số $y = f(x)$ có $\int f(x)dx = x \sin x + C$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $1 + \frac{\pi}{2}$.

B. 0.

C. 1.

D. $1 - \frac{\pi}{2}$.

Lời giải:

Ta có $f(x) = (x \sin x + C)' = \sin x + x \cos x \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Câu 72. Gọi $F(x)$ là họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 8 \sin 3x \cos x$. Biết rằng $F(x)$ có dạng $F(x) = a \cos 4x + b \cos 2x + C$. Khi đó, $a - b$ bằng

A. 5.

B. 1.

C. 3.

D. -1.

Lời giải:

Ta có: $f(x) = 8 \sin 3x \cos x = 4(\sin 4x + \sin 2x) = 4 \sin 4x + 4 \sin 2x$
 $\Rightarrow F(x) = -\cos 4x - 2 \cos 2x + C \Rightarrow a = -1; b = -2$

Vậy $a - b = 1$.

Câu 73. Cho $\int f(x)dx = x^2 - 3x + C$. Tìm $\int f(e^{-x})dx$.

A. $\int f(e^{-x})dx = e^{-2x} - 3e^{-x} + C$.

B. $\int f(e^{-x})dx = 2e^{-x} - 3x + C$.

C. $\int f(e^{-x})dx = -2e^{-x} - 3x + C$.

D. $\int f(e^{-x})dx = -2e^{-x} - 3e^{-x} + C$.

Lời giải:

Ta có $\int f(x)dx = x^2 - 3x + C$. Suy ra $f(x) = (x^2 - 3x + C)' = 2x - 3$.

Do đó $f(e^{-x}) = 2e^{-x} - 3$.

Vậy $\int f(e^{-x})dx = \int (2e^{-x} - 3)dx = -2e^{-x} - 3x + C$.

Câu 74. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $F(x) = x^3 + 2x^2 + (m^2 - 1)x + C$ (C là hằng số) là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 4x + 3$ trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 2$.

B. $m = \pm 4$.

C. $m = 4$.

D. $m = \pm 2$.

Lời giải:

Ta có:

$F(x) = x^3 + 2x^2 + (m^2 - 1)x + C$

$\Rightarrow F'(x) = 3x^2 + 4x + (m^2 - 1)$.

Để $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $m^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Câu 75. Biết $F(x) = ax^2 + bx + 1$, ($a, b \in \mathbb{R}$) là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$. Tổng $a + b$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải:

Cách 1: Ta có: $F(x) = \int f(x)dx = \int (2x + 1)dx = x^2 + x + C \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$.

Cách 2: Ta có: $F'(x) = 2ax + b = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$.

Câu 76. Biết $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1, (a; b; c \in \mathbb{R})$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = 6x^2 + 2x + 1$. Tổng $a + b + c$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 5.

Lời giải:

Cách 1: Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int (6x^2 + 2x + 1) dx = 2x^3 + x^2 + x + C \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

Cách 2: Ta có: $F'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 6 \\ 2b = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$.

Câu 77. Biết $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 1$ thỏa mãn $F(1) = 2$. Giá trị $F(2)$ bằng

A. 6.

B. 8.

C. 3.

D. 2.

Lời giải:

Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int (2x + 1) dx = x^2 + x + C$.

Theo giả thiết: $F(1) = 2 \Leftrightarrow C = 0$. Suy ra: $F(x) = x^2 + x$.

Vậy $F(2) = 6$.

Câu 78. Biết $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$ thỏa mãn $F(0) = 1$. Giá trị $F(2) + F(3)$ bằng

A. 67.

B. 70.

C. 45.

D. 90.

Lời giải:

Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int (3x^2 + 2x + 4) dx = x^3 + x^2 + 4x + C$.

Theo giả thiết: $F(0) = 1 \Leftrightarrow C = 1$. Suy ra: $F(x) = x^3 + x^2 + 4x + 1 \Rightarrow \begin{cases} F(2) = 21 \\ F(3) = 49 \end{cases}$.

Vậy $F(2) + F(3) = 70$.

Câu 79. Biết $y = F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin 2x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Giá trị $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 2.

Lời giải:

Ta có: $F(x) = \int f(x) dx = \int 2 \sin 2x dx = -\cos 2x + C$.

Theo giả thiết: $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow C = 1$. Suy ra: $F(x) = -\cos 2x + 1$.

Vậy $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

- Câu 80.** Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng
A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải:

$$\text{Ta có } F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C.$$

$$\text{Theo giả thiết } F(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} e^0 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó } F(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \Rightarrow F(\ln 3) = \frac{1}{2} e^{2\ln 3} - \frac{1}{2} = 4.$$

- Câu 81.** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^3-12x}(x^4-4x^2)$. Hàm số $F(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?
A. $(-\infty; 0)$. **B.** $(2; +\infty)$. **C.** $(-2; 0)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Lời giải:

Xét hàm số $y = F(x)$, khi đó $y' = F'(x) = f(x)$ (Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^3-12x}(x^4-4x^2)$).

$$\text{Suy ra } y' = 0 \Leftrightarrow e^{x^3-12x}(x^4-4x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+

- Câu 82.** Cho hai hàm số $F(x) = (x^2 + ax + b)e^x$, $f(x) = (x^2 + 3x + 4)e^x$. Biết a, b là các số thực để $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Tính $S = a + b$.
A. $S = 12$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = -6$. **D.** $S = 4$.

Lời giải:

$$F(x) \text{ là một nguyên hàm của } f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \Leftrightarrow [(x^2 + ax + b)e^x]' = (x^2 + 3x + 4)e^x$$

$$\Leftrightarrow [x^2 + (a+2)x + (a+b)]e^x = (x^2 + 3x + 4)e^x \Leftrightarrow \begin{cases} a+2=3 \\ a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = a + b = 4.$$

- Câu 83.** Gọi $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x^3 + 9x^2 - 2x + 5)e^x$. Tính $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.
A. 245. **B.** 246. **C.** 248. **D.** 249.

Lời giải:

$$F(x) \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f(x) \text{ nên ta có: } F'(x) = f(x)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (3ax^2 + 2bx + c)e^x + (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x \\ &= [ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + (c+d)]e^x \end{aligned}$$

Do đó: $\left[ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + (c+d) \right] e^x = (2x^3 + 9x^2 - 2x + 5)e^x$

$$\text{Đồng nhất hệ số ta có: } \begin{cases} a=2 \\ 3a+b=9 \\ 2b+c=-2 \\ c+d=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \\ c=-8 \\ d=13 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 246.$$

Câu 84. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$ thỏa mãn $F(5) = 2$ và $F(0) = 1$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $F(-1) = 2 - \ln 2$. B. $F(2) = 2 - 2\ln 2$. C. $F(3) = 1 + \ln 2$. D. $F(-3) = 2$.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\text{Ta có: } F(x) = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C = \begin{cases} \ln(x-1) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$F(5) = 2 \Leftrightarrow \ln 4 + C_1 = 2 \Leftrightarrow C_1 = 2 - \ln 4 = 2 - 2\ln 2.$$

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow \ln 1 + C_2 = 1 \Leftrightarrow C_2 = 1.$$

$$\text{Do đó: } F(x) = \int \frac{1}{x-1} dx = \begin{cases} \ln(x-1) + 2 - 2\ln 2 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$F(-1) = \ln 2 + 1; F(2) = 2 - 2\ln 2; F(3) = 2 - \ln 2; F(-3) = 2\ln 2 + 1.$$

Câu 85. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = \frac{2x-3}{x-2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ thỏa mãn $f(1) = 1$ và $f(3) = 2$.

Giá trị của biểu thức $f(0) + 2f(4)$ bằng

- A. 3. B. 5. C. $7 + 3\ln 2$. D. $-5 + 7\ln 2$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2x-3}{x-2} dx = \int \left(2 + \frac{1}{x-2} \right) dx = 2x + \ln|x-2| + C.$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow 2 + \ln 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = -1.$$

$$f(3) = 2 \Rightarrow 6 + \ln 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = -4.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} 2x + \ln(x-2) - 4 & \text{khi } x > 2 \\ 2x + \ln(2-x) - 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(0) + 2f(4) = \ln 2 - 1 + 2(4 + \ln 2) = 7 + 3\ln 2.$$

Câu 86. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên mỗi khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ đồng thời thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{1}{2x+1} \quad \left(\forall x \neq -\frac{1}{2} \right), \quad \text{và} \quad f(-1) + 2f(0) = 2\ln 674. \quad \text{Giá trị của biểu thức}$$

$S = f(-2) + f(1) + f(4)$ bằng

- A. $2\ln 3 - \ln 674$. B. $\ln 2022$. C. $2\ln 2022$. D. $3\ln 3$.

Lời giải:

$$f'(x) = \frac{1}{2x+1} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(2x+1) + C_1, & \text{khi } x > -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \ln(-2x-1) + C_2, & \text{khi } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$f(0) = C_1; f(-1) = C_2 \Rightarrow 2f(0) + f(-1) = 2C_1 + C_2 \Rightarrow 2C_1 + C_2 = 2 \ln 674.$$

$$f(-2) = \frac{1}{2} \ln 3 + C_2, f(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + C_1; f(4) = \frac{1}{2} \ln 9 + C_1$$

$$\Rightarrow S = f(-2) + f(1) + f(4) = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 9 + 2C_1 + C_2$$

$$= \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 9 + 2 \ln 674 = 2 \ln 3 + 2 \ln 674 = 2 \ln 2002.$$

Câu 87. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 27.

B. 29.

C. 12.

D. 33.

Lời giải:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2+5x+C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+4x+C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vì } F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2 \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2+5x+C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+4x+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+5x+C_1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3+4x+2)$$

$$\Leftrightarrow 1+5+C_1 = 1+4+2$$

$$\Leftrightarrow C_1 = 1$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} x^2+5x+1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+4x+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } F(-1) + 2F(2) = -3 + 2.15 = 27.$$

Câu 88. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$

thỏa mãn $F(0) = 2$. Tính giá trị của biểu thức $F(-2) + 2F(3)$.

A. 60.

B. 28.

C. -1.

D. -48.

Lời giải:

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \begin{cases} x^2+3x+C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3+2x+C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Theo bài ra ta có } F(0) = 2 \Rightarrow 0^3 + 2.0 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 2$$

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)$ là hàm số liên tục tại $x = 1$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Rightarrow 1^2 + 3.1 + C_1 = 1^3 + 2.1 + 2 \Rightarrow C_1 = 1$

Vậy: $F(-2) + 2F(3) = 28$.

Câu 89. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{391}{400}$.

B. $-\frac{1}{40}$.

C. $-\frac{41}{400}$.

D. $-\frac{1}{10}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -4x^3 \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -4x^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^4 + C$$

$$\text{Do } f(2) = -\frac{1}{25}, \text{ nên ta có } C = -9. \text{ Do đó } f(x) = -\frac{1}{x^4 + 9} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{10}.$$

Câu 90. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và khác không với mọi x thỏa mãn $f(0) = -1$ và $f'(x) = e^x \cdot f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(-1)$ bằng

A. -1 .

B. $-e$.

C. e .

D. $-\frac{1}{e}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } f'(x) = e^x \cdot f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = e^x \text{ (vì } f(x) = 0 \text{ không thỏa mãn đẳng thức này)}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int e^x dx$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{f^2(x)} d(f(x)) = \int e^x dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = e^x + C \quad (*)$$

$$\text{Thay } x = 0 \text{ vào } (*) \text{ ta được } -\frac{1}{f(0)} = e^0 + C \Leftrightarrow -\frac{1}{-1} = 1 + C \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Do vậy } -\frac{1}{f(x)} = e^x \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{e^x} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{e}.$$

Câu 91. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 3$ và $x(4 - f'(x)) = f(x) - 1$ với mọi $x > 0$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. 6.

B. 2.

C. 5.

D. 3.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } x(4 - f'(x)) = f(x) - 1 \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = 4x + 1 \Leftrightarrow (xf(x))' = 4x + 1$$

$$\Rightarrow xf(x) = \int [xf(x)]' dx = \int (4x + 1) dx = 2x^2 + x + C.$$

$$\text{Với } x = 1 \text{ thì } 1f(1) = 3 + C \Leftrightarrow 3 = 3 + C \Leftrightarrow C = 0.$$

Do đó $xf(x) = 2x^2 + x$. Vậy $2f(2) = 2.2^2 + 2$ hay $f(2) = 5$.

Câu 92. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) + 2x.f(x) = e^x f(x)$ với $f(x) \neq 0, \forall x$ và $f(0) = 1$. Khi đó $|f(1)|$ bằng

A. $e + 1$.

B. e^{e-2} .

C. $e - 1$.

D. e^{e+1} .

Lời giải:

Từ giả thiết: $f'(x) + 2x.f(x) = e^x f(x)$, ta có: $f'(x) = f(x)(e^x - 2x)$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = e^x - 2x \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (e^x - 2x) dx \Rightarrow \ln|f(x)| = e^x - x^2 + C.$$

Mà $f(0) = 1$ nên $C = -1$. Khi đó, ta được: $\ln|f(x)| = e^x - x^2 - 1$.

Thế $x = 1$, ta có: $\ln|f(1)| = e - 2 \Rightarrow |f(1)| = e^{e-2}$.

Câu 93. Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị dương trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1, f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$ với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $4 < f(5) < 5$.

B. $1 < f(5) < 2$.

C. $3 < f(5) < 4$.

D. $2 < f(5) < 3$.

Lời giải:

$$\text{Trên } (0; +\infty): f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + C.$$

$$\text{Vì } f(1) = 1 \Rightarrow C + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}.$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{4}{3} \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} - \frac{4}{3}} \Rightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,8. \text{ Vậy } 3 < f(5) < 4.$$

Câu 94. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $x(x+1)f'(x) + (2x+1)f(x) = \frac{1}{x} - 1$ và $f(1) = 1$.

Biết $f(2) = a + b \ln 2$. Khi đó, $a + b$ bằng

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Từ giả thiết: } x(x+1)f'(x) + (2x+1)f(x) = \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow ((x^2+x)f(x))' = \frac{1}{x} - 1.$$

$$\text{Lấy nguyên hàm hai vế ta được: } (x^2+x)f(x) = \int \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx = \ln|x| - x + C.$$

$$\text{Vì } f(1) = 1 \text{ nên } 2.f(1) = \ln 1 - 1 + C \Leftrightarrow C = 3.$$

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{\ln|x| - x + 3}{x^2 + x}.$$

$$\text{Vậy: } f(2) = \frac{\ln 2 + 1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \ln 2 \Rightarrow a = b = \frac{1}{6} \Rightarrow a + b = \frac{1}{3}.$$

HẾT

Huế, 17h45' Ngày 03 tháng 9 năm 2024

Chủ đề 2:

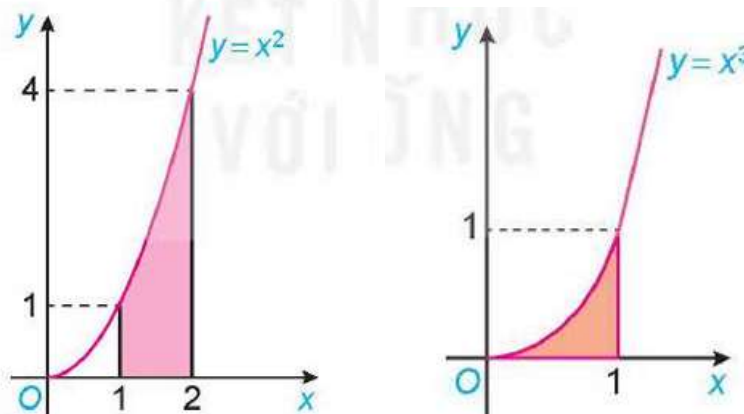
TÍCH PHÂN

I. LÝ THUYẾT

1. Khái niệm tích phân

a. Diện tích hình thang cong

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), trong đó $f(x)$ là hàm liên tục không âm trên đoạn $[a; b]$, gọi là một hình thang cong.



Định lý 1

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là $S = F(b) - F(a)$, trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.

b. Định nghĩa tích phân

Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ thì hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là **tích phân** từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$.

Chú ý

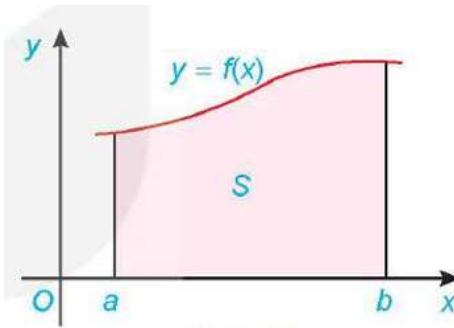
a) Hiệu $F(b) - F(a)$ thường được kí hiệu là $F(x) \Big|_a^b$.

Như vậy: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

b) Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, $f(x) dx$ là biểu thức dưới dấu tích phân và $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân.

c) Trong trường hợp $a = b$ hoặc $a > b$, ta quy ước: $\int_a^a f(x) dx = 0$; $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

Ý nghĩa hình học của tích phân



Nếu hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$, thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

Vậy
$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

2. Tính chất của tích phân

Cho $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} 1) & \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, (k \in \mathbb{R}) \\ 2) & \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ 3) & \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \\ 4) & \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, (a < c < b) \end{aligned}$$

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$

B. $\int_a^b kf(x)dx = k + \int_a^b f(x)dx.$

C. $\int_a^b kf(x)dx = \int_a^b kdx \cdot \int_a^b f(x)dx.$

D. $\int_a^b kf(x)dx = \int_a^b f(kx)dx.$

Câu 2: Xét $f(x)$ là một hàm số tùy ý, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

B. $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b).$

C. $\int_a^b f(x)dx = F(a) + F(b).$

D. $\int_a^b f(x)dx = -F(a) - F(b).$

Câu 3: Gọi $F(x), G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của hai hàm số $f(x), g(x)$ trên đoạn $[a; b]$, k là hằng số khác 0. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b).$

B. $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx.$

C. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k[F(b) - F(a)].$

D. $\int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$

B. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

C. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

D. $\int_a^b f^2(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx \right)^2.$

Câu 5: Biết $\int_1^2 f(x)dx = 2$. Khi đó, $\int_1^2 2f(x)dx$ bằng

A. 2.

B. -4.

C. 4.

D. -2.

Câu 6: Biết $\int_1^8 f(x)dx = -2$; $\int_1^4 f(x)dx = 3$; $\int_1^4 g(x)dx = 7$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)]dx = -2.$

B. $\int_4^8 f(x)dx = 1.$

C. $\int_4^8 f(x)dx = -5.$

D. $\int_1^4 [f(x) + g(x)]dx = 10.$

Câu 7: Biết $\int_1^2 f(x)dx = 2$ và $\int_1^2 g(x)dx = 6$. Khi đó, $\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

A. -4.

B. 8.

C. 4.

D. -8.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$, $f(1) = 1$ và $f(2) = 2$. Giá trị $\int_1^2 f'(x)dx$ bằng

A. $I = 1.$

B. $I = -1.$

C. $I = 3.$

D. $I = \frac{7}{2}.$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1; 2]$, $f(1) = 1$ và $\int_1^2 f'(x)dx = 5$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. 6.

B. 4.

C. 3.

D. 7.

Câu 10: Giả sử f là hàm số liên tục trên khoảng K và a, b, c là các số bất kỳ trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$

B. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$

C. $\int_a^a f(x)dx = 1.$

D. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

Câu 11: Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]dx.$

A. $I = \frac{5}{2}.$

B. $I = \frac{7}{2}.$

C. $I = \frac{17}{2}.$

D. $I = \frac{11}{2}.$

- Câu 12:** Cho $\int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2}$, $\int_3^4 f(x)dx = \frac{3}{4}$. Kết quả $\int_1^4 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx$ bằng
- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{5}{8}$. D. $\frac{1}{4}$.
- Câu 13:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2) - F(0) = 10$. Khi đó $\int_0^2 3f(x)dx$ bằng
- A. 6. B. 9. C. 5. D. 30.
- Câu 14:** Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 [2 + f(x)]dx$ bằng
- A. 5. B. 3. C. $\frac{13}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.
- Câu 15:** Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 (1 + f(x))dx$ bằng
- A. 20. B. 22. C. 26. D. 28.
- Câu 16:** Biết $F(x) = x^4$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{-1}^2 (6x + f(x))dx$ bằng
- A. $\frac{78}{5}$. B. 24. C. $\frac{123}{5}$. D. 33.
- Câu 17:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;10]$ và $\int_0^{10} f(x)dx = 7$; $\int_2^6 f(x)dx = 3$. Giá trị $P = \int_0^2 f(x)dx + \int_6^{10} f(x)dx$ bằng
- A. 4. B. 10. C. 7. D. -4.
- Câu 18:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;9]$ thỏa mãn $\int_0^9 f(x)dx = 8$, $\int_4^7 f(x)dx = 3$. Khi đó giá trị của $P = \int_0^4 f(x)dx + \int_7^9 f(x)dx$ là
- A. $P = 20$. B. $P = 9$. C. $P = 5$. D. $P = 11$.
- Câu 19:** Cho $\int_0^2 f(x)dx = 5$ và $\int_0^5 f(x)dx = -3$, khi đó $\int_2^5 f(x)dx$ bằng
- A. 8. B. 15. C. -8. D. -15.
- Câu 20:** Cho $\int_{-2}^2 f(x)dx = -1$, $\int_{-2}^{2022} f(t)dt = -4$. Tính $\int_2^{2022} f(y)dy$.
- A. -5. B. 15. C. -3. D. 5.
- Câu 21:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;3]$. Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 2$ thì $\int_0^3 [x - 3f(x)]dx$ bằng

- A. -3 . B. 3 . C. $\frac{3}{2}$. D. $-\frac{3}{2}$.

Câu 22: Cho $\int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2}$, $\int_3^4 f(x)dx = \frac{3}{4}$. Khi đó $\int_1^4 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx$ bằng

- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{5}{8}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là $F(x)$. Biết $F(1) = 8$, giá trị $F(9)$ được tính bằng công thức nào dưới đây?

- A. $F(9) = f'(9)$. B. $F(9) = 8 + f'(1)$.
C. $F(9) = \int_1^9 [8 + f(x)]dx$. D. $F(9) = 8 + \int_1^9 f(x)dx$.

Câu 24: Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\int_1^2 \frac{1}{e^x} dx = \frac{1}{e^x} \Big|_1^2$. B. $\int_1^2 \frac{1}{e^x} dx = e^x \Big|_1^2$. C. $\int_1^2 \frac{1}{e^x} dx = e^x \Big|_1^2$. D. $\int_1^2 \frac{1}{e^x} dx = \frac{1}{e^x} \Big|_1^2$.

Câu 25: Cho tích phân $I = \int_1^4 \frac{x^2 + x\sqrt{x} - 1}{x^2} dx$, khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $I = \left(x + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^4$. B. $I = \left(x + \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^4$.
C. $I = \left(x + 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^4$. D. $I = \left(x + \sqrt{x} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^4$.

Câu 26: Biết $\int_1^3 \left(x + \frac{2}{x} \right) dx = a + 2 \ln b$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tổng $a + b$ bằng

- A. 3 . B. 5 . C. 7 . D. 6 .

Câu 27: Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

- A. $\frac{16}{225}$. B. $\log \frac{5}{3}$. C. $\ln \frac{5}{3}$. D. $\frac{2}{15}$.

Câu 28: Tính $I = \int_0^2 \frac{2}{2x+1} dx$.

- A. $I = \frac{1}{2} \ln 5$. B. $I = \ln 5$. C. $I = 4 \ln 5$. D. $I = 2 \ln 5$.

Câu 29: Giá trị của $\int_0^1 x^{2019} dx$ bằng

- A. 2019 . B. $\frac{1}{2020}$. C. $\frac{1}{2019}$. D. 2020 .

Câu 30: Cho $\int f(x)dx = x^2 + x + C$; $\int g(x)dx = x^4 + x^3 + C$. Khi đó, $\int_0^1 f(x)g(x)dx$ bằng

A. $\frac{51}{10}$. B. $\frac{71}{105}$. C. 4. D. $\frac{77}{60}$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = 2|x - 1|$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết rằng $F(2) + F(0) = 5$. Giá trị của biểu thức $P = F(3) + F(-2)$ bằng

A. 4. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là $F(x)$. Nếu $\int_0^1 f(2x)dx = 6$ thì giá trị $F(0) - F(2)$ bằng

A. -12. B. 3. C. 12. D. -3.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = 3f(2x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4) = 3$ và $F(2) + 4F(8) = 0$. Khi đó $\int_2^8 f(x)dx$ bằng

A. -15. B. 15. C. 75. D. -75.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = \left(\int_0^1 f(x)dx \right) \cdot x + \left(\int_0^2 f(x)dx \right) + 1$.

Giá trị của $\int_{2022}^{2023} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{2023}{5}$. B. $-\frac{2023}{5}$. C. $\frac{4046}{5}$. D. $-\frac{4046}{5}$.

Câu 35: Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 4\cos 2x dx = 1$?

A. 4. B. 6. C. 8. D. 2.

Câu 36: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\sin^2 x dx = a\pi + b\sqrt{3}$, $(a; b \in \mathbb{Q})$. Tính ab .

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{7}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $-\frac{1}{6}$.

Câu 37: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2 2x dx = \frac{\pi}{a} + \frac{b}{c}$, với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $P = a + b + c$.

A. $P = 23$. B. $P = 24$. C. $P = 25$. D. $P = 15$.

Câu 38: Gọi là các số nguyên sao cho $\int_0^2 \sqrt{e^{x+2}} dx = 2ae^2 + be$, $(a; b \in \mathbb{Z})$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

A. 3. B. 8. C. 4. D. 5.

Câu 39: Biết $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)dx = 6$, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 2)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(0; 4)$. D. $(-3; 1)$.

Câu 40: Nếu các số hữu tỉ a, b thỏa mãn $\int_0^1 (ae^x + b)dx = e + 2$ thì giá trị của biểu thức $a + b$ bằng

- A. 4. B. 6. C. 5. D. 3.

Câu 41: Có bao nhiêu số thực a để $\int_0^1 (4ax^3 - 3a^2x^2 + 2x + 1)dx = 0$?

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 42: Biết có hai giá trị của số thực a là a_1, a_2 ($0 < a_1 < a_2$) thỏa mãn $\int_1^a (2x - 3)dx = 0$. Tính

$$T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right).$$

- A. $T = 26$. B. $T = 12$. C. $T = 13$. D. $T = 28$.

Câu 43: Cho $\int_{-1}^1 \left(\frac{4}{\sqrt{8x+17}} + \frac{3}{\sqrt{6x+m}} \right) dx = 4$ với hằng số $m > 6$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $12 \leq m \leq 20$. B. $9 < m < 12$. C. $m > 20$. D. $6 < m \leq 9$.

Câu 44: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}} dx$ bằng

- A. $\frac{8}{3}(4 - 3\sqrt{3} + \sqrt{2})$. B. $\frac{4}{3}(4 - 3\sqrt{3} + \sqrt{2})$. C. $\frac{8}{3}(4 + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$. D. $\frac{4}{3}(4 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$.

Câu 45: Biết $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2} + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $P = a + b + c$.

- A. $P = 5$. B. $P = \frac{2}{3}$. C. $P = \frac{13}{2}$. D. $P = \frac{16}{3}$.

Câu 46: Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Tính $P = \frac{a-b}{c}$.

- A. $P = 10$. B. $P = 46$. C. $P = 18$. D. $P = 12$.

Câu 47: Biết $\int_0^1 \frac{6x+3}{3x+5} dx = a + b \ln 2 + c \ln 5$, ($a; b; c \in \mathbb{Q}$). Tính $a + 2b + 3c$.

- A. 3. B. -5. C. 0. D. 1.

Câu 48: Biết $\int_0^1 \frac{4x+7}{2x+3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$, ($a; b; c \in \mathbb{Q}$). Tính $a + 2b + 2c$.

- A. 3. B. -1. C. 2. D. 1.

Câu 49: Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính ab .

- A. 2. B. $\frac{10}{9}$. C. $\frac{3}{4}$. D. -1.

Câu 50: Biết $\int_2^4 \frac{x+2}{x^2-1} dx = a + b \ln 3 - \frac{c}{2} \ln 5$, ($a; b; c \in \mathbb{N}$). Tính $a + b + c$.

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 51: Biết $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2-4} dx = a \ln 2 + b \ln 3$, ($a; b \in \mathbb{Q}$). Tính ab .

- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{3}{7}$. D. $-\frac{3}{2}$.

Câu 52: Biết $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+3x+2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, ($a; b; c \in \mathbb{Q}$). Tính $a + b + c$.

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 53: Cho $\int_2^3 \frac{x+8}{x^2+x-2} dx = a \ln 2 + b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $a + b = 3$. B. $a - b = 5$. C. $a - 2b = 11$. D. $a + 2b = 11$.

Câu 54: Biết $\int_0^3 \frac{3x+2}{x^2+4x+4} dx = a + b \ln 2 + c \ln 5$, ($a; b; c \in \mathbb{Q}$). Tính $5a + b + c$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{7}$. C. $\frac{3}{4}$. D. -6.

Câu 55: Cho tích phân $\int_1^5 \left| \frac{x-2}{x+1} \right| dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $P = abc$.

- A. $P = -36$. B. $P = 0$. C. $P = 18$. D. $P = -18$.

Câu 56: Tính $\int_0^2 \sqrt{x^2 - 2x + 1} dx$

- A. $\frac{1}{2}$. B. 2. C. $\frac{5}{2}$. D. 1.

Câu 57: Cho $I = \int_0^5 \frac{|x^2 - x|}{x+3} dx = \frac{-1}{a} + b \ln \frac{c}{a}$, ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$). Tổng $a + b + c$ bằng

- A. 17. B. 15. C. 13. D. 16.

Câu 58: Biết $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} |\sin x| dx = a - \sqrt{b}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Khi đó, $a + 4b$ bằng

- A. 5. B. 8. C. 10. D. 7.

Câu 59: Tính tích phân $I = \int_0^2 \max\{x^3, x\} dx$.

- A. $\frac{9}{4}$. B. $\frac{17}{4}$. C. $\frac{19}{4}$. D. $\frac{11}{4}$.

Câu 60: Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = 4 + a \ln 2 + b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b$.

- A. $S = 9$. B. $S = 11$. C. $S = -3$. D. $S = 5$.

Câu 61: Tính tích các giá trị của số thực m để tích phân $I = \int_0^1 |2x - m| dx = 2$.

- A. 6. B. -3. C. 2. D. -4.

Câu 62: Biết $\int_0^2 \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x + 3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của abc bằng

- A. -8. B. -10. C. -12. D. 16.

Câu 63: Cho $\int_0^1 \frac{x^2 + 2x}{(x+3)^2} dx = \frac{a}{4} - 4 \ln \frac{4}{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 8. B. 5. C. 6. D. 7.

Câu 64: Cho $\int_4^5 \frac{x}{(x-1)^2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của abc bằng

A. $-\frac{1}{6}$. B. 3. C. $\frac{2}{3}$. D. 2.

Câu 65: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^2 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{5}{3}$. C. 3. D. $\frac{13}{3}$.

Câu 66: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^3 f(x) dx$.

A. $6 + \ln 4$. B. $4 + \ln 4$. C. $6 + \ln 2$. D. $2 + 2 \ln 2$.

Câu 67: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = \sin x \cos x$ và $f(0) = 1$. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx.$$

A. $I = \frac{\pi - 4}{2}$. B. $I = \frac{3\pi - 4}{8}$. C. $I = \frac{3\pi + 2}{16}$. D. $I = \frac{5\pi - 2}{16}$.

Câu 68: Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ và $f'(x) = \frac{2}{\sin^2 x} + 1, \forall x \in (0; \pi)$. Khi đó, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

A. $\ln 2 + \frac{\pi^2}{32} + \pi$. B. $\ln 2 - \frac{\pi^2}{32} + \pi$. C. $-\ln 2 + \frac{\pi^2}{32} - \pi$. D. $\ln 2 + \frac{\pi^2}{32} - \pi$.

Câu 69: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \cos^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2 + 2}{8}$. B. $\frac{\pi^2 + 8\pi + 8}{8}$. C. $\frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$. D. $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$.

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \sin^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2 + 15\pi}{16}$. B. $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$. C. $\frac{\pi^2 + 16\pi - 4}{16}$. D. $\frac{\pi^2 - 4}{16}$.

Câu 71: Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = -2$ và đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \forall x > -1$. Tích phân $\int_0^3 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{64}{3}$. B. $\frac{10}{3}$. C. $-\frac{13}{3}$. D. $-\frac{8}{3}$.

Câu 72: Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{8}{3}$ và $f'(x) = 16 \cos 4x \cdot \sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^{\pi} f(x) dx$.

A. $I = -\frac{4}{3}\pi$. B. $I = \frac{64}{27}\pi$. C. $I = \frac{16}{3}\pi$. D. $I = 0$.

Câu 73: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^2 [f(x) + xf'(x) - 1] dx = 2$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. -2. B. 0. C. 2. D. 4.

Câu 74: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$. Biết x^2 là một nguyên hàm của $x^2 f'(x)$ trên $(0; +\infty)$ và $f(1) = 1$. Tính $f(e)$.

A. 2. B. 3. C. $2e + 1$. D. e .

Câu 75: Nếu $\int_0^1 [f^2(x) - f(x)] dx = 5$ và $\int_0^1 [f(x) + 1]^2 dx = 36$ thì $\int_0^1 f(x) dx$ bằng:

A. 10. B. 31. C. 5. D. 30.

Câu 76: Cho hàm số $f(x) = x\sqrt{x} + \int_0^1 xf(x) dx$. Tính $I = \int_0^4 f(x) dx$.

A. $I = \frac{528}{35}$. B. $I = \frac{438}{35}$. C. $I = \frac{408}{35}$. D. $I = \frac{368}{35}$.

Câu 77: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = |1+x| - |1-x|$ trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1) = 3$. Tính tổng $F(0) + F(2)$

A. 3. B. 2. C. 7. D. 5.

Câu 78: Biết $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cos \pi x$. Tính $f(4)$.

A. 2. B. 4. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 79: Cho hàm số $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1; 4]$ thỏa mãn $x + 2xf(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4], f(1) = \frac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng

A. $\frac{391}{18}$. B. $\frac{361}{18}$. C. $\frac{381}{18}$. D. $\frac{371}{18}$.

Câu 80: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(1) = -2, f(x) \neq -\frac{1}{x}$ và $x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tính $I = \int_1^4 f(x) dx$.

A. $I = -2\ln 2 - \frac{3}{4}$. B. $I = -2\ln 2 - \frac{1}{4}$. C. $I = -\ln 2 - \frac{3}{4}$. D. $I = -\ln 2 - \frac{1}{4}$.

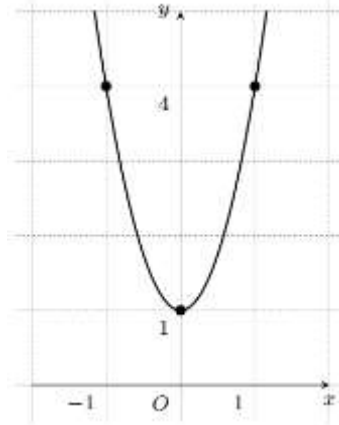
Câu 81: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \geq 0$ và

$(x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}, \forall x \geq 0$. Tính $\sqrt{f(2)} - \sqrt{f(1)}$.

A. $\ln \frac{9}{8}$. B. $\frac{1}{2} \ln \frac{9}{8}$. C. $\ln \frac{4}{3}$. D. $\frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$.

- Câu 82:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x) > 1, f(0) = 0$ và thỏa mãn $f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}$. Khi đó $\int_0^{2\sqrt{2}} f'(x)dx$ bằng
- A. 3. B. 8. C. -1. D. 6.
- Câu 83:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $2f'(x^2) = 9x\sqrt{f(x^2)}$ với mọi $x \in (0; +\infty)$. Biết $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$, tính $f\left(\frac{1}{3}\right)$.
- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $\frac{1}{6}$.
- Câu 84:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + f'(x) = 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 1$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ bằng
- A. $1 + \frac{1}{2e^2}$. B. $1 - \frac{1}{2e^2}$. C. $\frac{1}{2e^2}$. D. $-\frac{1}{2e^2}$.
- Câu 85:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x) = 4x^3 + k$ với $k = \int_0^1 x^2 f(x^2)dx$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng
- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{5}{3}$. C. 2. D. $\frac{2}{3}$.
- Câu 86:** Cho hàm số $y = f(x), f(x) > e^x, \forall x \in (0; +\infty)$ thỏa mãn $(x+1)f(x) - xf'(x) = e^x, f(1) = 3e$. Giá trị $\int_1^2 f(x)dx$ bằng
- A. $3e^2 - 3e$. B. $3e^2 - e$. C. $3e^2$. D. $3e^2 + e$
- Câu 87:** Cho hàm số $y = f(x), f(x) > e^x, \forall x \in (0; +\infty)$ thỏa mãn $(x+1)f(x) - xf'(x) = e^x, f(1) = 3e$. Giá trị $\int_1^2 f(x)dx$ bằng
- A. $3e^2 - 3e$. B. $3e^2 - e$. C. $3e^2$. D. $3e^2 + e$
- Câu 88:** Cho hàm số thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) - \frac{f(x)}{x^2+x} = \frac{x}{x+1}, \forall x \in (0; +\infty)$. Giá trị của $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?
- A. $(1;2)$. B. $(2;3)$. C. $(3;4)$. D. $(0;1)$.
- Câu 89:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$, thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{2}$ và $3xf(x) - x^2 f'(x) = 2[f(x)]^2, f(x) \neq 0$ với $x \in (0; +\infty)$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1;2]$. Tổng $M + m$ bằng
- A. $\frac{21}{10}$. B. $\frac{7}{5}$. C. $\frac{9}{10}$. D. $\frac{6}{5}$.

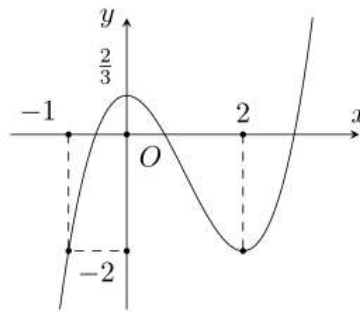
Câu 90: Cho hàm đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho bởi hình vẽ sau:



Giá trị biểu thức $f(3) - f(2)$ bằng

- A. 20. B. 51. C. 64. D. 45.

Câu 91: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a; b; c; d \in \mathbb{R})$ có hai điểm cực trị $x = 0, x = 2$ và đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Giá trị $a \int_{-1}^0 (f(x) + 2)(x^2 - 2x) dx$ bằng

- A. $\frac{32}{9}$. B. $\frac{16}{3}$. C. $\frac{32}{27}$. D. $\frac{16}{9}$.

III. LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$. B. $\int_a^b kf(x) dx = k + \int_a^b f(x) dx$.
C. $\int_a^b kf(x) dx = \int_a^b k dx \cdot \int_a^b f(x) dx$. D. $\int_a^b kf(x) dx = \int_a^b f(kx) dx$.

Câu 2: Xét $f(x)$ là một hàm số tùy ý, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. B. $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$.
C. $\int_a^b f(x) dx = F(a) + F(b)$. D. $\int_a^b f(x) dx = -F(a) - F(b)$.

Câu 3: Gọi $F(x), G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của hai hàm số $f(x), g(x)$ trên đoạn $[a; b]$, k là hằng số khác 0. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b).$

B. $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx.$

C. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k[F(b) - F(a)].$

D. $\int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$

Lời giải:

Ta có: $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx = k[F(b) - F(a)].$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$

B. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

C. $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$

D. $\int_a^b f^2(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx \right)^2.$

Câu 5: Biết $\int_1^2 f(x)dx = 2$. Khi đó, $\int_1^2 2f(x)dx$ bằng

A. 2.

B. -4.

C. 4.

D. -2.

Lời giải:

Ta có: $\int_1^2 2f(x)dx = 2 \int_1^2 f(x)dx = 4.$

Câu 6: Biết $\int_1^8 f(x)dx = -2$; $\int_1^4 f(x)dx = 3$; $\int_1^4 g(x)dx = 7$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)]dx = -2.$

B. $\int_4^8 f(x)dx = 1.$

C. $\int_4^8 f(x)dx = -5.$

D. $\int_1^4 [f(x) + g(x)]dx = 10.$

Lời giải:

Ta có $\int_1^8 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx = - \int_1^4 f(x)dx + \int_1^8 f(x)dx = -3 - 2 = -5.$

Mặt khác: $\int_1^4 [4f(x) - 2g(x)]dx = 4 \int_1^4 f(x)dx - 2 \int_1^4 g(x)dx = 4 \cdot 3 - 2 \cdot 7 = -2.$

$\int_1^4 [f(x) + g(x)]dx = \int_1^4 f(x)dx + \int_1^4 g(x)dx = 3 + 7 = 10.$

Câu 7: Biết $\int_1^2 f(x)dx = 2$ và $\int_1^2 g(x)dx = 6$. Khi đó, $\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx$ bằng

A. -4.

B. 8.

C. 4.

D. -8.

- Câu 8:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$. Giá trị $\int_1^2 f'(x)dx$ bằng
- A. $I=1$. B. $I=-1$. C. $I=3$. D. $I=\frac{7}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $\int_1^2 f'(x)dx = f(x)\Big|_1^2 = f(2) - f(1) = 1$.

- Câu 9:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $\int_1^2 f'(x)dx=5$. Giá trị $f(2)$ bằng
- A. 6. B. 4. C. 3. D. 7.

Lời giải:

Ta có: $\int_1^2 f'(x)dx = f(x)\Big|_1^2 = f(2) - f(1) \Leftrightarrow f(2) - f(1) = 5 \Leftrightarrow f(2) = 6$.

- Câu 10:** Giả sử f là hàm số liên tục trên khoảng K và a, b, c là các số bất kỳ trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$. B. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
- C. $\int_a^a f(x)dx = 1$. D. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Lời giải:

Ta có: $\int_a^a f(x)dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0$.

- Câu 11:** Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]dx$.
- A. $I = \frac{5}{2}$. B. $I = \frac{7}{2}$. C. $I = \frac{17}{2}$. D. $I = \frac{11}{2}$.

Lời giải:

Ta có: $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)]dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^2 + 2\int_{-1}^2 f(x)dx - 3\int_{-1}^2 g(x)dx = \frac{3}{2} + 2.2 - 3(-1) = \frac{17}{2}$.

- Câu 12:** Cho $\int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2}$, $\int_3^4 f(x)dx = \frac{3}{4}$. Kết quả $\int_1^4 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx$ bằng
- A. $\frac{3}{8}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{5}{8}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải:

Ta có: $\int_1^4 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$.

- Câu 13:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2) - F(0) = 10$. Khi đó $\int_0^2 3f(x)dx$ bằng

A. 6. B. 9. C. 5. **D. 30.**

Lời giải:

$$\int_0^2 3f(x) dx = 3F(x) \Big|_0^2 = 3(F(2) - F(0)) = 3 \cdot 10 = 30.$$

Câu 14: Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$ bằng

A. 5. B. 3. C. $\frac{13}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \int_1^2 [2 + f(x)] dx = (2x + x^2) \Big|_1^2 = 8 - 3 = 5.$$

Câu 15: Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 (1 + f(x)) dx$ bằng

A. 20. B. 22. C. 26. **D. 28.**

Lời giải:

$$\text{Ta có } \int_1^3 [1 + f(x)] dx = [x + F(x)] \Big|_1^3 = [x + x^3] \Big|_1^3 = 30 - 2 = 28.$$

Câu 16: Biết $F(x) = x^4$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{-1}^2 (6x + f(x)) dx$ bằng

A. $\frac{78}{5}$. **B. 24.** C. $\frac{123}{5}$. D. 33.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \int_{-1}^2 (6x + f(x)) dx = (3x^2 + x^4) \Big|_{-1}^2 = 12 + 16 - 3 - 1 = 24.$$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 10]$ và $\int_0^{10} f(x) dx = 7$; $\int_2^6 f(x) dx = 3$. Giá trị

$$P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx \text{ bằng}$$

A. 4. B. 10. C. 7. D. -4.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx = \left[\int_0^{10} f(x) dx + \int_{10}^2 f(x) dx \right] + \left[\int_6^2 f(x) dx + \int_2^{10} f(x) dx \right] \\ &= \left[\int_0^{10} f(x) dx + \int_6^2 f(x) dx \right] + \left[\int_{10}^2 f(x) dx + \int_2^{10} f(x) dx \right] = (7 - 3) + 0 = 4. \end{aligned}$$

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 9]$ thỏa mãn $\int_0^9 f(x) dx = 8$, $\int_4^7 f(x) dx = 3$. Khi đó giá

$$\text{trị của } P = \int_0^4 f(x) dx + \int_7^9 f(x) dx \text{ là}$$

A. $P = 20$.

B. $P = 9$.

C. $P = 5$.

D. $P = 11$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \int_0^9 f(x)dx = 8 \Leftrightarrow \int_0^4 f(x)dx + \int_4^7 f(x)dx + \int_7^9 f(x)dx = 8$$

$$\Leftrightarrow \int_0^4 f(x)dx + \int_7^9 f(x)dx = 8 - \int_4^7 f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^4 f(x)dx + \int_7^9 f(x)dx = 8 - 3 = 5.$$

Câu 19: Cho $\int_0^2 f(x)dx = 5$ và $\int_0^5 f(x)dx = -3$, khi đó $\int_2^5 f(x)dx$ bằng

A. 8.

B. 15.

C. -8.

D. -15.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \int_0^5 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx \Leftrightarrow \int_2^5 f(x)dx = \int_0^5 f(x)dx - \int_0^2 f(x)dx = -3 - 5 = -8.$$

Câu 20: Cho $\int_{-2}^2 f(x)dx = -1$, $\int_{-2}^{2022} f(t)dt = -4$. Tính $\int_2^{2022} f(y)dy$.

A. -5.

B. 15.

C. -3.

D. 5.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \int_{-2}^{2022} f(y)dy = \int_{-2}^2 f(y)dy + \int_2^{2022} f(y)dy = \int_{-2}^2 f(x)dx + \int_2^{2022} f(y)dy$$

$$\Leftrightarrow \int_2^{2022} f(y)dy = \int_{-2}^{2022} f(y)dy - \int_{-2}^2 f(x)dx = -4 + 1 = -3.$$

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 3]$. Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 2$ thì $\int_0^3 [x - 3f(x)]dx$ bằng

A. -3.

B. 3.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \int_0^3 [x - 3f(x)]dx = \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^3 - 3 \int_0^3 f(x)dx = \frac{9}{2} - 3 \cdot 2 = \frac{-3}{2}.$$

Câu 22: Cho $\int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2}$, $\int_3^4 f(x)dx = \frac{3}{4}$. Khi đó $\int_1^4 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{3}{8}$.

B. $\frac{5}{4}$.

C. $\frac{5}{8}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải:

Ta có

$$\begin{aligned} \int_1^4 f(x)dx &= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx \Rightarrow \int_1^4 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là $F(x)$. Biết $F(1) = 8$, giá trị $F(9)$ được tính bằng công thức nào dưới đây?

A. $F(9) = f'(9)$.

B. $F(9) = 8 + f'(1)$.

C. $F(9) = \int_1^9 [8 + f(x)] dx$.

D. $F(9) = 8 + \int_1^9 f(x) dx$.

Lời giải:

Ta có $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ (với $a < b$).

$$\Rightarrow \int_1^9 f(x) dx = F(x) \Big|_1^9 = F(9) - F(1) = F(9) - 8 \Rightarrow F(9) = 8 + \int_1^9 f(x) dx.$$

Câu 24: Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int_1^2 \frac{1}{e^x} dx = \frac{1}{e^x} \Big|_1^2$.

B. $\int_1^2 \frac{1}{e^x} dx = e^x \Big|_2^1$.

C. $\int_1^2 \frac{1}{e^x} dx = e^x \Big|_1^2$.

D. $\int_1^2 \frac{1}{e^x} dx = \frac{1}{e^x} \Big|_2^1$.

Lời giải:

Ta có: $\int_1^2 \frac{1}{e^x} dx = \int_1^2 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_1^2 = \frac{1}{e^x} \Big|_2^1$.

Câu 25: Cho tích phân $I = \int_1^4 \frac{x^2 + x\sqrt{x} - 1}{x^2} dx$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $I = \left(x + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^4$.

B. $I = \left(x + \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^4$.

C. $I = \left(x + 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^4$.

D. $I = \left(x + \sqrt{x} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^4$.

Lời giải:

$$I = \int_1^4 \frac{x^2 + x\sqrt{x} - 1}{x^2} dx = \int_1^4 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right) dx = I = \left(x + 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) \Big|_1^4.$$

Câu 26: Biết $\int_1^3 \left(x + \frac{2}{x} \right) dx = a + 2 \ln b$, với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tổng $a + b$ bằng

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 6.

Lời giải:

Ta có $\int_1^3 \left(x + \frac{2}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2 \ln |x| \Big|_1^3 = \frac{9}{2} + 2 \ln 3 - \frac{1}{2} = 4 + 2 \ln 3 \Rightarrow a = 4; b = 3 \Rightarrow a + b = 7$.

Câu 27: Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{16}{225}$.

B. $\log \frac{5}{3}$.

C. $\ln \frac{5}{3}$.

D. $\frac{2}{15}$.

Lời giải:

Ta có: $\int_0^2 \frac{dx}{x+3} = \ln |x+3| \Big|_0^2 = \ln \frac{5}{3}$.

Câu 28: Tính $I = \int_0^2 \frac{2}{2x+1} dx$.

A. $I = \frac{1}{2} \ln 5$.

B. $I = \ln 5$.

C. $I = 4 \ln 5$.

D. $I = 2 \ln 5$.

Lời giải:

Ta có $I = \int_0^2 \frac{2}{2x+1} dx = \int_0^2 \frac{d(2x+1)}{2x+1} = \ln|2x+1|_0^2 = \ln 5$.

Câu 29: Giá trị của $\int_0^1 x^{2019} dx$ bằng

A. 2019.

B. $\frac{1}{2020}$.

C. $\frac{1}{2019}$.

D. 2020.

Lời giải:

Ta có: $\int_0^1 x^{2019} dx = \frac{x^{2020}}{2020} \Big|_0^1 = \frac{1}{2020}$.

Câu 30: Cho $\int f(x) dx = x^2 + x + C$; $\int g(x) dx = x^4 + x^3 + C$. Khi đó, $\int_0^1 f(x)g(x) dx$ bằng

A. $\frac{51}{10}$.

B. $\frac{71}{105}$.

C. 4.

D. $\frac{77}{60}$.

Lời giải:

Ta có $f(x) = \left(\int f(x) dx \right)' = 2x + 1$; $g(x) = \left(\int g(x) dx \right)' = 4x^3 + 3x^2$

Do đó $\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 (2x+1)(4x^3+3x^2) dx = \frac{51}{10}$.

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = 2|x-1|$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Biết rằng $F(2) + F(0) = 5$. Giá trị của biểu thức $P = F(3) + F(-2)$ bằng

A. 4.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải:

Ta có $P = F(3) + F(-2) = F(2) + \int_2^3 f(x) dx + F(0) + \int_0^{-2} f(x) dx = 0$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có một nguyên hàm là $F(x)$. Nếu $\int_0^1 f(2x) dx = 6$ thì giá trị $F(0) - F(2)$ bằng

A. -12.

B. 3.

C. 12.

D. -3.

Lời giải:

Ta có $\int_0^1 f(2x) dx = 6 \Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) d2x = 6 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx = 12 \Rightarrow F(0) - F(2) = -12$

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = 3f(2x), \forall x \in \mathbb{R}$. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4) = 3$ và $F(2) + 4F(8) = 0$. Khi đó $\int_2^8 f(x)dx$ bằng

A. -15.

B. 15.

C. 75.

D. -75.

Lời giải:

$$\text{Có: } f(x) = 3f(2x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_2^4 f(x)dx = 3 \int_4^8 f(2x)dx \Leftrightarrow \int_2^4 f(x)dx = \frac{3}{2} \int_2^4 f(2x)d(2x)$$

$$\Leftrightarrow F(x) \Big|_2^4 = \frac{3}{2} F(x) \Big|_4^8 \Leftrightarrow F(4) - F(2) = \frac{3}{2} [F(8) - F(4)]$$

$$\text{Mà } F(4) = 3 \text{ và } F(2) = -4F(8) \text{ nên } 3 + 4F(8) = \frac{3}{2} [F(8) - 3] \Rightarrow F(8) = -3 \text{ và } F(2) = 12$$

$$\text{Vậy } \int_2^8 f(x)dx = F(8) - F(2) = -15.$$

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) = \left(\int_0^1 f(x)dx \right) \cdot x + \left(\int_0^2 f(x)dx \right) + 1$.

Giá trị của $\int_{2022}^{2023} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{2023}{5}$.

B. $-\frac{2023}{5}$.

C. $\frac{4046}{5}$.

D. $-\frac{4046}{5}$.

Lời giải:

$$f(x) = \left(\int_0^1 f(x)dx \right) \cdot x + \left(\int_0^2 f(x)dx \right) + 1 \Rightarrow f(x) = ax + b,$$

$$\text{với } a = \int_0^1 f(x)dx, b = \int_0^2 f(x)dx + 1$$

Do đó:

$$f(x) = \left(\int_0^1 f(x)dx \right) \cdot x + \left(\int_0^2 f(x)dx \right) + 1 \Leftrightarrow ax + b = \left(\int_0^1 (ax + b)dx \right) \cdot x + \int_0^2 (ax + b)dx + 1$$

$$\Leftrightarrow ax + b = \left(a \cdot \frac{x^2}{2} + bx \Big|_0^1 \right) \cdot x + \left(a \cdot \frac{x^2}{2} + bx \Big|_0^2 \right) + 1$$

$$\Leftrightarrow ax + b = \left(\frac{a}{2} + b \right) x + 2a + 2b + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{a}{2} + b \\ b = 2a + 2b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 0 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{5} \\ b = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5} \Rightarrow \int_{2022}^{2023} f(x)dx = -\frac{4046}{5}.$$

Câu 35: Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$?

A. 4.

B. 6.

C. 8.

D. 2.

Lời giải:

Ta có: $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1 \Leftrightarrow 2 \sin 2x \Big|_{\pi}^b = 1$

$$\Leftrightarrow \sin 2b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2b = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ b = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

• Với $b = \frac{\pi}{12} + k\pi$:

Mà $b \in (\pi; 3\pi) \Rightarrow 1 < \frac{1}{12} + k < 3, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = 1; 2 \Rightarrow b = \frac{13\pi}{12}; \frac{25\pi}{12}$.

• Với $b = \frac{5\pi}{12} + k\pi$:

Mà $b \in (\pi; 3\pi) \Rightarrow 1 < \frac{5}{12} + k < 3, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = 1; 2 \Rightarrow b = \frac{17\pi}{12}; \frac{29\pi}{12}$.

Vậy có 4 số thực b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 36: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \sin^2 x dx = a\pi + b\sqrt{3}, (a; b \in \mathbb{Q})$. Tính ab .

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{7}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $-\frac{1}{6}$.

Lời giải:

Ta có: $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 - 2 \cos 2x) dx = (2x - \sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra: $a = \frac{1}{3}; b = -\frac{1}{2} \Rightarrow ab = -\frac{1}{6}$.

Câu 37: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2 2x dx = \frac{\pi}{a} + \frac{b}{c}$, với $a, b, c \in \mathbb{N}^*, \frac{b}{c}$ tối giản. Tính $P = a + b + c$.

A. $P = 23$.

B. $P = 24$.

C. $P = 25$.

D. $P = 15$.

Lời giải:

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \left(\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}$.

Vậy $a = 16, b = 1, c = 8 \Rightarrow P = a + b + c = 25$.

Câu 38: Gọi là các số nguyên sao cho $\int_0^2 \sqrt{e^{x+2}} dx = 2ae^2 + be, (a; b \in \mathbb{Z})$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

A. 3.

B. 8.

C. 4.

D. 5.

Lời giải:

$$\int_0^2 \sqrt{e^{x+2}} dx = \int_0^2 e^{\frac{1}{2}x+1} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x+1} \Big|_0^2 = 4e^2 - 2e \quad a, b$$

Vậy $a = 2; b = 2$ và $a^2 + b^2 = 8$

Câu 39: Biết $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$, giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; 2)$. B. $(-\infty; 0)$. **C. $(0; 4)$.** D. $(-3; 1)$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6 \Leftrightarrow (x^3 - x^2 + x) \Big|_0^m = 6 \Leftrightarrow m^3 - m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy $m \in (0; 4)$.

Câu 40: Nếu các số hữu tỉ a, b thỏa mãn $\int_0^1 (ae^x + b) dx = e + 2$ thì giá trị của biểu thức $a + b$ bằng

- A. 4.** B. 6. C. 5. D. 3.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \int_0^1 (ae^x + b) dx = (ae^x + bx) \Big|_0^1 = ae + b - a \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b = 4.$$

Câu 41: Có bao nhiêu số thực a để $\int_0^1 (4ax^3 - 3a^2x^2 + 2x + 1) dx = 0$?

- A. 2.** B. 0. C. 1. D. 3.

Lời giải:

Ta có:

$$\int_0^1 (4ax^3 - 3a^2x^2 + 2x + 1) dx = (ax^4 - a^2x^3 + x^2 + x) \Big|_0^1 = -a^2 + a + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}.$$

Vậy có hai số thực a thỏa mãn.

Câu 42: Biết có hai giá trị của số thực a là a_1, a_2 ($0 < a_1 < a_2$) thỏa mãn $\int_1^a (2x - 3) dx = 0$. Tính

$$T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right).$$

- A. $T = 26$. B. $T = 12$. **C. $T = 13$.** D. $T = 28$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \int_1^a (2x - 3) dx = (x^2 - 3x) \Big|_1^a = a^2 - 3a + 2.$$

$$\text{Vì } \int_1^a (2x - 3) dx = 0 \text{ nên } a^2 - 3a + 2 = 0, \text{ suy ra } \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}.$$

Lại có $0 < a_1 < a_2$ nên $a_1 = 1; a_2 = 2$.

$$\text{Như vậy } T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right) = 3^1 + 3^2 + \log_2 \left(\frac{2}{1} \right) = 13.$$

Câu 43: Cho $\int_{-1}^1 \left(\frac{4}{\sqrt{8x+17}} + \frac{3}{\sqrt{6x+m}} \right) dx = 4$ với hằng số $m > 6$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $12 \leq m \leq 20$. B. $9 < m < 12$. C. $m > 20$. D. $6 < m \leq 9$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_{-1}^1 \left(\frac{4}{\sqrt{8x+17}} + \frac{3}{\sqrt{6x+m}} \right) dx &= \left(4 \cdot \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{8x+17} + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{6x+m} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \left(\sqrt{8x+17} + \sqrt{6x+m} \right) \Big|_{-1}^1 = (5 + \sqrt{6+m}) - (3 + \sqrt{m-6}) = 2 + \sqrt{6+m} - \sqrt{m-6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \int_{-1}^1 \left(\frac{4}{\sqrt{8x+17}} + \frac{3}{\sqrt{6x+m}} \right) dx &= 4 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{6+m} - \sqrt{m-6} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ \sqrt{6+m} = 2 + \sqrt{m-6} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ 6+m = 4 + 4\sqrt{m-6} + m-6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ \sqrt{m-6} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m-6 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m = 10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 10. \end{aligned}$$

Vậy $m = 10$.

Câu 44: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}} dx$ bằng

- A. $\frac{8}{3}(4 - 3\sqrt{3} + \sqrt{2})$. B. $\frac{4}{3}(4 - 3\sqrt{3} + \sqrt{2})$. C. $\frac{8}{3}(4 + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$. D. $\frac{4}{3}(4 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}} dx = \int_0^1 \frac{2(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3})}{-1} dx = -2 \int_0^1 (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3}) dx \\ I &= 2 \int_0^1 \sqrt{x+3} dx - 2 \int_0^1 \sqrt{x+2} dx = 2 \cdot \frac{2}{3} (x+3)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - 2 \cdot \frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \left(4^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot 3^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{4}{3} (8 - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) = \frac{8}{3} (4 - 3\sqrt{3} + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Câu 45: Biết $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2} + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $P = a + b + c$.

- A. $P = 5$. B. $P = \frac{2}{3}$. C. $P = \frac{13}{2}$. D. $P = \frac{16}{3}$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} &= \int_1^3 (\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) dx = \left[\frac{2}{3} (x+1)\sqrt{x+1} + \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right] \Big|_1^3 \\ &= \left(\frac{16}{3} + 2\sqrt{3} \right) - \left(\frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3} \right) = 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} + \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a = 2; b = -\frac{4}{3}; c = \frac{14}{3}. \text{ Suy ra } P = 2 - \frac{4}{3} + \frac{14}{3} = \frac{16}{3}.$$

Câu 46: Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Tính $P = \frac{a-b}{c}$.

- A. $P = 10$. B. $P = 46$. C. $P = 18$. D. $P = 12$.

Lời giải:

$$A = \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \int_1^2 \frac{(x+1)\sqrt{x} - x\sqrt{x+1}}{x(x+1)^2 - x^2(x+1)} dx = \int_1^2 \frac{(x+1)\sqrt{x} - x\sqrt{x+1}}{x(x+1)} dx$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx = \left(2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1} \right) \Big|_1^2 = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2 = \sqrt{32} - \sqrt{12} - 2.$$

Suy ra $a = 32$, $b = 12$, $c = 2$. Vậy $P = \frac{a-b}{c} = \frac{32-12}{2} = 10$.

Câu 47: Biết $\int_0^1 \frac{6x+3}{3x+5} dx = a + b \ln 2 + c \ln 5$, ($a; b; c \in \mathbb{Q}$). Tính $a + 2b + 3c$.

A. 3.

B. -5.

C. 0.

D. 1.

Lời giải:

Ta có: $\int_0^1 \frac{6x+3}{3x+5} dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{7}{3x+5} \right) dx = \left(2x - \frac{7 \ln|3x+5|}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 - \frac{7}{3} \ln 8 + \frac{7}{3} \ln 5 = 2 - 7 \ln 2 + \frac{7}{3} \ln 5.$

Suy ra: $a = 2$; $b = -7$; $c = \frac{7}{3} \Rightarrow a + 2b + 3c = -5$.

Câu 48: Biết $\int_0^1 \frac{4x+7}{2x+3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$, ($a; b; c \in \mathbb{Q}$). Tính $a + 2b + 2c$.

A. 3.

B. -1.

C. 2.

D. 1.

Lời giải:

Ta có: $\int_0^1 \frac{4x+7}{2x+3} dx = \int_0^1 \left(2 + \frac{1}{2x+3} \right) dx = \left(2x + \frac{\ln|2x+3|}{2} \right) \Big|_0^1 = 2 - \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 5.$

Suy ra: $a = 2$; $b = -\frac{1}{2}$; $c = \frac{1}{2} \Rightarrow a + 2b + 2c = 2$.

Câu 49: Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính ab .

A. 2.

B. $\frac{10}{9}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. -1.

Lời giải:

Ta có $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \left(\ln|x+1| - \ln|x+3| \right) \Big|_0^1 = (\ln 2 - \ln 4) - (\ln 1 - \ln 3) = -\ln 2 + \ln 3$

suy ra $a = -1, b = 1 \Rightarrow ab = -1$.

Câu 50: Biết $\int_2^4 \frac{x+2}{x^2-1} dx = a + b \ln 3 - \frac{c}{2} \ln 5$, ($a; b; c \in \mathbb{N}$). Tính $a + b + c$.

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải:

Ta có: $\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow x+2 = a(x+1) + b(x-1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A-B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{3}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Lúc đó: } \int_2^4 \frac{x+2}{x^2-1} dx = \left(\frac{3}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| \right) \Big|_2^4 = 2\ln 3 - \frac{1}{2} \ln 5.$$

$$\text{Suy ra: } a=0; b=2; c=1 \Rightarrow a+b+c=3.$$

Câu 51: Biết $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2-4} dx = a \ln 2 + b \ln 3, (a; b \in \mathbb{Q})$. Tính ab .

A. $\frac{3}{5}$.

B. $\frac{3}{8}$.

C. $\frac{3}{7}$.

D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \frac{2x+1}{x^2-4} = \frac{2x+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow 2x+1 = A(x+2) + B(x-2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ 2A-2B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{5}{4} \\ B=\frac{3}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Lúc đó: } \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2-4} dx = \left(\frac{5}{4} \ln|x-2| + \frac{3}{4} \ln|x+2| \right) \Big|_0^1 = -2\ln 2 + \frac{3}{4} \ln 3.$$

$$\text{Suy ra: } a=-2; b=\frac{3}{4} \Rightarrow ab=-\frac{3}{2}.$$

Câu 52: Biết $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+3x+2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3, (a; b; c \in \mathbb{Q})$. Tính $a+b+c$.

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \frac{2x+1}{x^2+3x+2} = \frac{2x+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow 2x+1 = A(x+2) + B(x+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ 2A+B=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=3 \end{cases}.$$

$$\text{Lúc đó: } \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+3x+2} dx = \left(-\ln|x+1| + 3\ln|x+2| \right) \Big|_1^2 = 7\ln 2 - 4\ln 3.$$

$$\text{Suy ra: } a=0; b=7; c=-4 \Rightarrow a+b+c=3.$$

Câu 53: Cho $\int_2^3 \frac{x+8}{x^2+x-2} dx = a \ln 2 + b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a+b=3$.

B. $a-b=5$.

C. $a-2b=11$.

D. $a+2b=11$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \int_2^3 \frac{x+8}{x^2+x-2} dx = \int_2^3 \left(\frac{3}{x-1} + \frac{-2}{x+2} \right) dx = \left(3\ln|x-1| - 2\ln|x+2| \right) \Big|_2^3 = 7\ln 2 - 2\ln 5.$$

$$\text{Suy ra giá trị là: } a=7, b=-2.$$

Câu 54: Biết $\int_0^3 \frac{3x+2}{x^2+4x+4} dx = a + b \ln 2 + c \ln 5$, ($a; b; c \in \mathbb{Q}$). Tính $5a + b + c$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{2}{7}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. -6 .

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_0^3 \frac{3x+2}{x^2+4x+4} dx &= \int_0^3 \frac{3(x+2)-4}{(x+2)^2} dx = \int_0^3 \left[\frac{3}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} \right] dx = \left(3 \ln|x+2| + \frac{4}{x+2} \right) \Big|_0^3 \\ &= -\frac{6}{5} - 3 \ln 2 + 3 \ln 5. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } a = -\frac{6}{5}; b = -3; c = 3 \Rightarrow 5a + b + c = -6.$$

Câu 55: Cho tích phân $\int_1^5 \left| \frac{x-2}{x+1} \right| dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $P = abc$.

A. $P = -36$.

B. $P = 0$.

C. $P = 18$.

D. $P = -18$.

Lời giải:

Ta có

$$\begin{aligned} \int_1^5 \left| \frac{x-2}{x+1} \right| dx &= -\int_1^2 \frac{x-2}{x+1} dx + \int_2^5 \frac{x-2}{x+1} dx \\ &= -\int_1^2 \left(1 - \frac{3}{x+1} \right) dx + \int_2^5 \left(1 - \frac{3}{x+1} \right) dx \\ &= -\left(x - 3 \ln|x+1| \right) \Big|_1^2 + \left(x - 3 \ln|x+1| \right) \Big|_2^5 \\ &= -(2 - 3 \ln 3) + 1 - 3 \ln 2 + 5 - 3 \ln 6 - 2 + 3 \ln 3 \\ &= 2 - 6 \ln 2 + 3 \ln 3 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a = 2, b = -6, c = 3 \Rightarrow P = abc = -36.$$

Câu 56: Tính $\int_0^2 \sqrt{x^2 - 2x + 1} dx$

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2 .

C. $\frac{5}{2}$.

D. 1 .

Lời giải:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{x^2 - 2x + 1} dx &= \int_0^2 |x-1| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx \\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 = 1 \end{aligned}$$

Câu 57: Cho $I = \int_0^5 \frac{|x^2 - x|}{x+3} dx = \frac{-1}{a} + b \ln \frac{c}{a}$, ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$). Tổng $a + b + c$ bằng

A. 17 .

B. 15 .

C. 13 .

D. 16 .

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^5 \frac{|x^2 - x|}{x+3} dx = -\int_0^1 \frac{x^2 - x}{x+3} dx + \int_1^5 \frac{x^2 - x}{x+3} dx = -\int_0^1 \left(x - 4 + \frac{12}{x+3} \right) dx + \int_1^5 \left(x - 4 + \frac{12}{x+3} \right) dx \\
 &= -\int_0^1 (x-4) dx - \int_0^1 \frac{12}{x+3} dx + \int_1^5 (x-4) dx + \int_1^5 \frac{12}{x+3} dx \\
 &= \frac{7}{2} - 12 \ln(x+3) \Big|_0^1 - 4 + 12 \ln(x+3) \Big|_1^5 = \frac{-1}{2} + 12 \ln \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Suy ra: $a = 2; b = 12; c = 3 \Rightarrow a + b + c = 17$.

Câu 58: Biết $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} |\sin x| dx = a - \sqrt{b}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Khi đó, $a + 4b$ bằng

A. 5.

B. 8.

C. 10.

D. 7.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} |\sin x| dx = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx = (\cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 - (\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{\frac{3}{4}}$$

Suy ra: $a = 2, b = \frac{3}{4}$ nên $a + 4b = 5$.

Câu 59: Tính tích phân $I = \int_0^2 \max\{x^3, x\} dx$.

A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{17}{4}$.

C. $\frac{19}{4}$.

D. $\frac{11}{4}$.

Lời giải:

Đặt $f(x) = x^3 - x$ ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta có.

$$\forall x \in [0; 1], f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^3 - x \leq 0 \Leftrightarrow x^3 \leq x \Rightarrow \max\{x^3, x\} = x.$$

$$\forall x \in [1; 2], f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq x \Rightarrow \max\{x^3, x\} = x^3.$$

$$\text{Ta có: } I = \int_0^2 \max\{x^3, x\} dx = \int_0^1 \max\{x^3, x\} dx + \int_1^2 \max\{x^3, x\} dx.$$

$$\text{Nên } I = \int_0^2 \max\{x^3, x\} dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 x^3 dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{4} x^4 \Big|_1^2 = \frac{17}{4}.$$

Câu 60: Biết $I = \int_1^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx = 4 + a \ln 2 + b \ln 5$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a + b$.

A. $S = 9$.

B. $S = 11$.

C. $S = -3$.

D. $S = 5$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{ khi } x \geq 2 \\ 2-x & \text{ khi } x \leq 2 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } I &= \int_1^2 \frac{2|x-2|+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2|x-2|+1}{x} dx. \\ &= \int_1^2 \frac{2(2-x)+1}{x} dx + \int_2^5 \frac{2(x-2)+1}{x} dx = \int_1^2 \left(\frac{5}{x} - 2 \right) dx + \int_2^5 \left(2 - \frac{3}{x} \right) dx \\ &= (5\ln|x| - 2x) \Big|_1^2 + (2x - 3\ln|x|) \Big|_2^5 = 4 + 8\ln 2 - 3\ln 5. \\ &\Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow S = a+b = 5. \end{aligned}$$

Câu 61: Tính tích các giá trị của số thực m để tích phân $I = \int_0^1 |2x-m| dx = 2$.

A. 6.

B. -3.

C. 2.

D. -4.

Lời giải:

Th1. $m < 0 \Rightarrow 2x - m > 0 \forall x \in [0;1]$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 (2x-m) dx = \left(x^2 - mx \right) \Big|_0^1 = 1-m$$

$$\Rightarrow 1-m = 2 \Leftrightarrow m = -1.$$

Th2. $m > 2 \Rightarrow 2x - m < 0 \forall x \in [0;1]$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 (m-2x) dx = \left(mx - x^2 \right) \Big|_0^1 = m-1.$$

$$\Rightarrow m-1 = 2 \Leftrightarrow m = 3$$

Th3. $0 \leq m \leq 2$

$$I = \int_0^{\frac{m}{2}} (m-2x) dx + \int_{\frac{m}{2}}^1 (2x-m) dx = \left(mx - x^2 \right) \Big|_0^{\frac{m}{2}} + \left(x^2 - mx \right) \Big|_{\frac{m}{2}}^1 = \frac{m^2}{4} + (1-m) + \frac{m^2}{4} = \frac{m^2}{2} - m + 1$$

$$\Rightarrow \frac{m^2}{2} - m + 1 = 2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{3} \\ m = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

Tích các giá trị của m là $-1.3 = -3$.

Câu 62: Biết $\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của abc bằng

A. -8.

B. -10.

C. -12.

D. 16.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3} dx = \int_0^2 \left(1 + \frac{x-1}{(x+1)(x+3)} \right) dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} \right) dx$$

$$= \left(x - \ln|x+1| + 2\ln|x+3| \right) \Big|_0^2 = 2 - 3\ln 3 + 2\ln 5.$$

Vậy $a = 2, b = -3, c = 2$, do đó $abc = -12$.

Câu 63: Cho $\int_0^1 \frac{x^2 + 2x}{(x+3)^2} dx = \frac{a}{4} - 4\ln \frac{4}{b}$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 8.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 + 2x}{(x+3)^2} dx &= \int_0^1 \frac{(x^2 + 6x + 9) - 4(x+3) - 9 + 12}{(x+3)^2} dx = \int_0^1 \left[1 - \frac{4}{x+3} + \frac{3}{(x+3)^2} \right] dx \\ &= 1 - 4\ln|x+3| \Big|_0^1 - \frac{3}{x+3} \Big|_0^1 = 1 - 4\ln \frac{4}{3} - \frac{3}{4} + 1 = \frac{5}{4} - 4\ln \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Theo giả thiết $\Rightarrow a = 5, b = 3$ nên $a + b = 8$.

Câu 64: Cho $\int_4^5 \frac{x}{(x-1)^2} dx = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của abc bằng

A. $-\frac{1}{6}$.

B. 3.

C. $\frac{2}{3}$.

D. 2.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \int_4^5 \frac{x}{(x-1)^2} dx = \int_4^5 \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \ln|x-1| \Big|_4^5 - \frac{1}{x-1} \Big|_4^5 = \ln 4 - \ln 3 + \frac{1}{12} = \frac{1}{12} + 2\ln 2 - \ln 3.$$

Ta tìm được $a = \frac{1}{12}; b = 2; c = -1$. Vậy $abc = -\frac{1}{6}$.

Câu 65: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$. Tích phân $\int_0^2 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{5}{3}$.

C. 3.

D. $\frac{13}{3}$.

Lời giải:

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 2x dx + \int_1^2 (x^2 + 1) dx = \frac{13}{3}.$$

Câu 66: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^3 f(x) dx$.

A. $6 + \ln 4$.

B. $4 + \ln 4$.

C. $6 + \ln 2$.

D. $2 + 2\ln 2$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2}{x+1} dx + \int_1^3 (2x-1) dx \\ &= 2\ln|x+1| \Big|_0^1 + (x^2 - x) \Big|_1^3 = \ln 4 + 6. \end{aligned}$$

Câu 67: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = \sin x \cos x$ và $f(0) = 1$. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx.$$

A. $I = \frac{\pi - 4}{2}$.

B. $I = \frac{3\pi - 4}{8}$.

C. $I = \frac{3\pi + 2}{16}$.

D. $I = \frac{5\pi - 2}{16}$.

Lời giải:

Ta có: $f(x) = \int f'(x)dx = \int \sin x \cos x dx = \int \sin x d \sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + C$.

$f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 0}{2} + C = 1 \Leftrightarrow C = 1, f(x) = \frac{\sin^2 x}{2} + 1$.

Khi đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin^2 x}{2} + 1 \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 - \cos 2x}{4} + 1 \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{5}{4} - \frac{\cos 2x}{4} \right) dx$
 $= \frac{5}{4}x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{8} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5\pi - 2}{16}$.

Câu 68: Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ và $f'(x) = \frac{2}{\sin^2 x} + 1, \forall x \in (0; \pi)$. Khi đó, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\ln 2 + \frac{\pi^2}{32} + \pi$.

B. $\ln 2 - \frac{\pi^2}{32} + \pi$.

C. $-\ln 2 + \frac{\pi^2}{32} - \pi$.

D. $\ln 2 + \frac{\pi^2}{32} - \pi$.

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = \frac{2}{\sin^2 x} + 1$ suy ra $f(x) = \int \left[\frac{2}{\sin^2 x} + 1 \right] dx = -2 \cot x + x + C$.

Mà $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$ suy ra $C = 4 - \frac{\pi}{2}$.

Khi đó $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[-2 \cot x + x + 4 - \frac{\pi}{2} \right] dx = \left[-2 \ln |\sin x| + \frac{x^2}{2} + \left(4 - \frac{\pi}{2} \right) x \right] \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = \ln 2 + \frac{\pi^2}{32} + \pi$.

Câu 69: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \cos^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2 + 2}{8}$.

B. $\frac{\pi^2 + 8\pi + 8}{8}$.

C. $\frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$.

D. $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$.

Lời giải:

Cách 1: *Tự luận*

Ta có $\int f'(x)dx = \int (2 \cos^2 x + 3)dx = \int (4 + \cos 2x)dx = \frac{1}{2} \sin 2x + 4x + C$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 4x + C_1$.

Ta có $f(0) = 4 \Rightarrow C_1 = 4 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 4x + 4$.

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} \sin 2x + 4x + 4 \right) dx = \left(-\frac{1}{4} \cos 2x + 2x^2 + 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$.

Cách 2: Tư duy trắc nghiệm

$$\text{Ta có: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) dx = f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f(0) \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f(0) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) dx.$$

$$\text{Mặt khác: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} xf'(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x df(x) = xf(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{\pi}{4} f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} xf'(x) dx.$$

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\sin^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2 + 15\pi}{16}$.

B. $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$.

C. $\frac{\pi^2 + 16\pi - 4}{16}$.

D. $\frac{\pi^2 - 4}{16}$.

Lời giải:

$$f'(x) = 2\sin^2 x + 1 = 1 - \cos 2x + 1 = 2 - \cos 2x$$

$$\text{Suy ra } f(x) = 2x - \frac{\sin 2x}{2} + C. \text{ Vì } f(0) = 4 \Rightarrow C = 4$$

$$\text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \left(x^2 + \frac{\cos 2x}{4} + 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 16\pi - 4}{16}.$$

Câu 71: Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = -2$ và đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \forall x > -1$. Tích phân $\int_0^3 f(x) dx$ bằng

A. $\frac{64}{3}$.

B. $\frac{10}{3}$.

C. $-\frac{13}{3}$.

D. $-\frac{8}{3}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2\sqrt{x+1} + C.$$

$$\text{Do } f(0) = -2 \text{ nên } C = -4. \text{ Suy ra: } f(x) = 2\sqrt{x+1} - 4.$$

$$\text{Khi đó: } \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (2\sqrt{x+1} - 4) dx = \left(\frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - 4x \right) \Big|_0^3 = -\frac{8}{3}.$$

Câu 72: Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{8}{3}$ và $f'(x) = 16\cos 4x \cdot \sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^{\pi} f(x) dx$.

A. $I = -\frac{4}{3}\pi$.

B. $I = \frac{64}{27}\pi$.

C. $I = \frac{16}{3}\pi$.

D. $I = 0$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f'(x) = 16\cos 4x \cdot \sin^2 x = 8\cos 4x(1 - \cos 2x) = 8\cos 4x - 4\cos 6x - 4\cos 2x.$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (8\cos 4x - 4\cos 6x - 4\cos 2x) dx = 2\sin 4x - \frac{2}{3}\sin 6x - 2\sin 2x + C$$

$$\text{Mà } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{8}{3} \text{ nên } 2\sin \pi - \frac{2}{3}\sin \frac{3\pi}{2} - 2\sin \frac{\pi}{2} + C = -\frac{8}{3} \Rightarrow C = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\pi} \left(2 \sin 4x - \frac{2}{3} \sin 6x - 2 \sin 2x - \frac{4}{3} \right) dx = -\frac{4\pi}{3}.$$

Câu 73: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^2 [f(x) + xf'(x) - 1] dx = 2$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. -2.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_0^2 [f(x) + xf'(x) - 1] dx = 2 &\Leftrightarrow \int_0^2 \left[(xf(x))' - 1 \right] dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^2 (xf(x))' dx - \int_0^2 1 dx = 2 \\ &\Leftrightarrow xf(x) \Big|_0^2 - 2 = 2 \Leftrightarrow 2f(2) = 4 \Leftrightarrow f(2) = 2. \end{aligned}$$

Câu 74: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$. Biết x^2 là một nguyên hàm của $x^2 f'(x)$ trên $(0; +\infty)$ và $f(1) = 1$. Tính $f(e)$.

A. 2.

B. 3.

C. $2e + 1$.

D. e .

Lời giải:

Vì x^2 là một nguyên hàm của $x^2 f'(x)$ trên $(0; +\infty)$ nên ta có

$$x^2 f'(x) = (x^2)' = 2x \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_1^e f'(x) dx &= \int_1^e \frac{2}{x} dx = 2 \ln x \Big|_1^e = 2 \ln e - 2 \ln 1 = 2 = f(e) - f(1). \\ \Rightarrow 2 &= f(e) - 1 \Rightarrow f(e) = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Câu 75: Nếu $\int_0^1 [f^2(x) - f(x)] dx = 5$ và $\int_0^1 [f(x) + 1]^2 dx = 36$ thì $\int_0^1 f(x) dx$ bằng:

A. 10.

B. 31.

C. 5.

D. 30.

Lời giải:

$$\text{Ta có } \int_0^1 [f^2(x) - f(x)] dx = 5 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 f(x) dx = 5 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + 5 \quad (1).$$

$$\text{Lại có } \int_0^1 [f(x) + 1]^2 dx = 36 \Leftrightarrow \int_0^1 [f^2(x) + 2f(x) + 1] dx = 36.$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 1 dx = 36 \quad (2). \text{ Thay (1) vào (2) ta được:}$$

$$\int_0^1 f(x) dx + 5 + 2 \int_0^1 f(x) dx + 1 = 36 \Leftrightarrow 3 \int_0^1 f(x) dx = 30 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = 10. \text{ Vậy } \int_0^1 f(x) dx = 10.$$

Câu 76: Cho hàm số $f(x) = x\sqrt{x} + \int_0^1 xf(x) dx$. Tính $I = \int_0^4 f(x) dx$.

A. $I = \frac{528}{35}$.

B. $I = \frac{438}{35}$.

C. $I = \frac{408}{35}$.

D. $I = \frac{368}{35}$.

Lời giải:

Đặt $\int_0^1 xf(x)dx = a$. Suy ra $f(x) = x\sqrt{x} + a \Rightarrow xf(x) = x^2\sqrt{x} + ax \Rightarrow \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 (x^2\sqrt{x} + ax)dx$

$$a = \int_0^1 x^2 \sqrt{x} dx + a \int_0^1 x dx = \frac{2}{7} + \frac{a}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{7}.$$

Vậy $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{4}{7}$. Suy ra $\int_0^4 \left(x\sqrt{x} + \frac{4}{7}\right) dx = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{7}x\right)\bigg|_0^4 = \frac{528}{35}$.

Câu 77: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = |1+x| - |1-x|$ trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1) = 3$.

Tính tổng $F(0) + F(2)$

A. 3.

B. 2.

C. 7.

D. 5.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f(x) = \begin{cases} -(1+x) - (1-x) & , \text{khi } x < -1 \\ (1+x) - (1-x) & , \text{khi } -1 \leq x \leq 1 \\ (1+x) + (1-x) & , \text{khi } x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -2 & , \text{khi } x < -1 \\ 2x & , \text{khi } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & , \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } F(0) - F(1) + F(2) - F(1) = \int_1^0 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_1^0 2x dx + \int_1^2 2x dx = 1.$$

$$\Rightarrow F(0)+F(2)=1+2F(1)=1+2\cdot 3=7.$$

Câu 78: Biết $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cos \pi x$. Tính $f(4)$.

A. 2.

B. 4.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của $f(t)$.

$$g(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt = F(t) \Big|_0^{x^2} = F(x^2) - F(0) = x \cos \pi x$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2x \cdot F'(x^2) = \cos \pi x - \pi x \sin \pi x \Rightarrow 2x \cdot f(x^2) = \cos \pi x - \pi x \sin \pi x$$

Cho $x = 2$ ta có: $4f(4) = \cos 2\pi - 2\pi \sin 2\pi = 1 \Rightarrow f(4) = \frac{1}{4}$. Vậy $f(4) = \frac{1}{4}$.

Câu 79: Cho hàm số $f(x)$ xác định, có đạo hàm, liên tục và đồng biến trên $[1;4]$ thỏa mãn

$x + 2xf(x) = [f'(x)]^2, \forall x \in [1; 4], f(1) = \frac{3}{2}$. Giá trị $f(4)$ bằng

A. $\frac{391}{18}$.

B. $\frac{361}{18}$.

C. $\frac{381}{18}$.

D. $\frac{371}{18}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } x + 2xf(x) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow x(1 + 2f(x)) = [f'(x)]^2 \Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^2}{1 + 2f(x)} = x \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + 2f(x)}} = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \int_1^4 \frac{f'(x)}{\sqrt{1+2f(x)}} dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx \Leftrightarrow \left[\sqrt{1+2f(x)} \right]_1^4 = \frac{14}{3} \Leftrightarrow \sqrt{1+2f(4)} - 2 = \frac{14}{3} \Leftrightarrow f(4) = \frac{391}{18}.$$

Câu 80: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f(1) = -2$, $f(x) \neq -\frac{1}{x}$ và

$$x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \text{ Tính } I = \int_1^4 f(x) dx.$$

A. $I = -2\ln 2 - \frac{3}{4}$. **B.** $I = -2\ln 2 - \frac{1}{4}$. **C.** $I = -\ln 2 - \frac{3}{4}$. **D.** $I = -\ln 2 - \frac{1}{4}$.

Lời giải:

$$x^2 f^2(x) + (2x-1)f(x) = xf'(x) - 1 \Leftrightarrow x^2 f^2(x) + 2xf(x) - f(x) = xf'(x) - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 f^2(x) + 2xf(x) + 1 = xf'(x) + f(x) \Leftrightarrow [xf(x) + 1]^2 = (xf'(x) + f(x))' \Leftrightarrow [xf(x) + 1]^2 = (xf(x) + 1)'.$$

$$\text{Do đó } \frac{(xf(x) + 1)'}{[xf(x) + 1]^2} = 1 \Rightarrow \int \frac{(xf(x) + 1)'}{[xf(x) + 1]^2} dx = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{xf(x) + 1} = x + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = -2 \Rightarrow -\frac{1}{f(1) + 1} = 1 + C \Rightarrow -\frac{1}{-2 + 1} = 1 + C \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Nên } -\frac{1}{xf(x) + 1} = x \Rightarrow xf(x) + 1 = -\frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

$$\text{Suy ra } \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{1}{x} - \ln x\right) \Big|_1^4 = \frac{1}{4} - \ln 4 - 1 + \ln 1 = -2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Câu 81: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \geq 0$ và

$$(x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2}, \forall x \geq 0. \text{ Tính } \sqrt{f(2)} - \sqrt{f(1)}.$$

A. $\ln \frac{9}{8}$. **B.** $\frac{1}{2} \ln \frac{9}{8}$. **C.** $\ln \frac{4}{3}$. **D.** $\frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } (x+1)f'(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x+2} \Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} \Rightarrow \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2(x+1)(x+2)}.$$

Suy ra

$$\int_1^2 \left(\sqrt{f(x)}\right)' dx = \int_1^2 \frac{1}{2(x+1)(x+2)} dx \Rightarrow \sqrt{f(2)} - \sqrt{f(1)} = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{8}.$$

Câu 82: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x) > 1, f(0) = 0$ và thỏa mãn

$$f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1}. \text{ Khi đó } \int_0^{2\sqrt{2}} f'(x) dx \text{ bằng}$$

A. 3. **B.** 8. **C.** -1. **D.** 6.

Lời giải:

$$\text{Ta có } f'(x)\sqrt{x^2+1} = 2x\sqrt{f(x)+1} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)+1} = \sqrt{x^2+1} + C$$

Mà $f(0)=0$ nên $C=0$. Suy ra $f(x)=x^2$.

Khi đó $\int_0^{2\sqrt{2}} f'(x)dx = f(x)\Big|_0^{2\sqrt{2}} = x^2\Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8$.

Câu 83: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $2f'(x^2)=9x\sqrt{f(x^2)}$ với mọi $x \in (0; +\infty)$. Biết $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$, tính $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } 2f'(x^2) = 9x\sqrt{f(x^2)} \Leftrightarrow \frac{2xf'(x)}{2\sqrt{f(x^2)}} = \frac{9}{2}x^2 \Leftrightarrow \frac{[f(x^2)]'}{2\sqrt{f(x^2)}} = \frac{9}{2}x^2 \Leftrightarrow \left[\sqrt{f(x^2)}\right]' = \frac{9}{2}x^2$$

$$\text{Do đó } \sqrt{f(x^2)} = \int \frac{9}{2}x^2 dx = \frac{3}{2}x^3 + C. \text{ Mà } f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} + C \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{Suy ra } f(x^2) = \frac{9}{4}x^6 \Leftrightarrow f(x) = \frac{9}{4}x^3 \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{12}.$$

Câu 84: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x)+f'(x)=2x+1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0)=1$. Giá trị của $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

- A. $1+\frac{1}{2e^2}$. B. $1-\frac{1}{2e^2}$. C. $\frac{1}{2e^2}$. D. $-\frac{1}{2e^2}$.

Lời giải:

$$2f(x)+f'(x)=2x+1 \Leftrightarrow 2f(x) \cdot e^{2x} + f'(x) \cdot e^{2x} = (2x+1) \cdot e^{2x} \Leftrightarrow (f(x) \cdot e^{2x})' = (2x+1) \cdot e^{2x} \\ \Rightarrow f(x) \cdot e^{2x} = \int (2x+1) \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{2}(2x+1) \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C.$$

$$\text{Do } f(0)=1 \text{ nên } c=1. \text{ Suy ra } f(x) = x + \frac{1}{e^{2x}}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{e^{2x}}\right) dx = 1 - \frac{1}{2e^2}.$$

Câu 85: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=4x^3+k$ với $k=\int_0^1 x^2 f(x^2)dx$. Khi đó

$$\int_0^1 f(x)dx \text{ bằng}$$

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{5}{3}$. C. 2. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } k = \int_0^1 x^2 f(x^2)dx = \int_0^1 x^2 (4x^6 + k)dx = \left(\frac{4x^9}{9} + \frac{kx^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{9} + \frac{k}{3} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(4x^3 + \frac{2}{3}\right)dx = \frac{5}{3}.$$

Câu 86: Cho hàm số $y = f(x)$, $f(x) > e^x, \forall x \in (0; +\infty)$ thỏa mãn $(x+1)f(x) - xf'(x) = e^x, f(1) = 3e$. Giá trị $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

A. $3e^2 - 3e$.

B. $3e^2 - e$.

C. $3e^2$.

D. $3e^2 + e$

Lời giải:

$$+) \text{Ta có } (x+1)f(x) - xf'(x) = e^x \Leftrightarrow \frac{(x+1).e^{-x}}{x^2} f(x) - \frac{e^{-x}}{x} f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{e^{-x} f(x)}{x} \right]' = \frac{-1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{x} f(x) = \frac{1}{x} + C$$

$$\text{Mà } f(1) = 3e \Rightarrow e^{-1} f(1) = 1 + C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow \frac{e^{-x}}{x} f(x) = \frac{1}{x} + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = (2x+1)e^x$$

$$\text{Vậy } \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (2x+1)e^x dx = 3e^2 - e.$$

Câu 87: Cho hàm số $y = f(x)$, $f(x) > e^x, \forall x \in (0; +\infty)$ thỏa mãn $(x+1)f(x) - xf'(x) = e^x, f(1) = 3e$. Giá trị $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

A. $3e^2 - 3e$.

B. $3e^2 - e$.

C. $3e^2$.

D. $3e^2 + e$

Lời giải:

$$+) \text{Ta có } (x+1)f(x) - xf'(x) = e^x \Leftrightarrow \frac{(x+1).e^{-x}}{x^2} f(x) - \frac{e^{-x}}{x} f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{e^{-x} f(x)}{x} \right]' = \frac{-1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{e^{-x}}{x} f(x) = \frac{1}{x} + C$$

$$\text{Mà } f(1) = 3e \Rightarrow e^{-1} f(1) = 1 + C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow \frac{e^{-x}}{x} f(x) = \frac{1}{x} + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = (2x+1)e^x$$

$$\text{Vậy } \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (2x+1)e^x dx = 3e^2 - e.$$

Câu 88: Cho hàm số thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) - \frac{f(x)}{x^2 + x} = \frac{x}{x+1}, \forall x \in (0; +\infty)$. Giá trị của $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 2)$.

B. $(2; 3)$.

C. $(3; 4)$.

D. $(0; 1)$.

Lời giải:

Ta có:

$$f'(x) - \frac{f(x)}{x^2 + x} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} f'(x) - \frac{f(x)}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \left[\frac{x+1}{x} f(x) \right]' = 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x} f(x) = x + C$$

$$\text{Cho } x=1 \Rightarrow C+1=1 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{x+1} \Rightarrow f(2) = \frac{4}{3}.$$

Câu 89: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$, thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{2}$ và $3xf(x) - x^2 f'(x) = 2[f(x)]^2$, $f(x) \neq 0$ với $x \in (0; +\infty)$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tổng $M + m$ bằng

A. $\frac{21}{10}$.

B. $\frac{7}{5}$.

C. $\frac{9}{10}$.

D. $\frac{6}{5}$.

Lời giải:

+) Xét hàm số $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ ta có: $3xf(x) - x^2 f'(x) = 2f^2(x)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 f(x) - x^3 f'(x) = 2xf^2(x) \Leftrightarrow \frac{(x^3)' f(x) - x^3 f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)} \right)' = 2x \quad (1).$$

$$\text{Lấy nguyên hàm hai vế của (1) ta được: } \int \left(\frac{x^3}{f(x)} \right)' dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \frac{x^3}{f(x)} = x^2 + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = \frac{1}{2} \text{ nên } \frac{1^3}{f(1)} = 1^2 + C \Leftrightarrow C = 1. \text{ Suy ra } f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}.$$

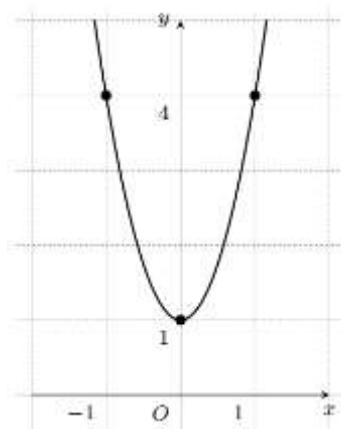
+) Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ trên $[1; 2]$.

$$\text{Xét hàm số } f'(x) = \frac{3x^2(x^2 + 1) - 2x \cdot x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} > 0 \text{ với } \forall x \in [1; 2].$$

$$\text{Suy ra } M = \max_{[1; 2]} f(x) = f(2) = \frac{8}{5}; m = \min_{[1; 2]} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } M + m = \frac{1}{2} + \frac{8}{5} = \frac{21}{10}.$$

Câu 90: Cho hàm đa thức bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho bởi hình vẽ sau:



Giá trị biểu thức $f(3) - f(2)$ bằng

A. 20.

B. 51.

C. 64.

D. 45.

Lời giải:

Giả sử $f'(x) = ax^2 + bx + c$ trong đó $a \neq 0$ có đồ thị (C) .

Hàm số $y = f'(x)$ đạt cực trị tại $x = -\frac{b}{2a} = 0$ suy ra $b = 0$.

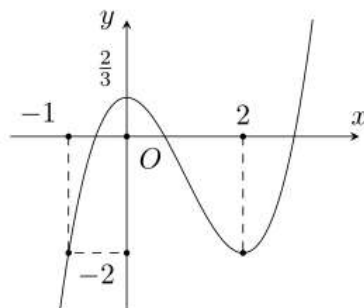
$(0; 1) \in (C)$ suy ra $c = 1$.

$(1; 4) \in (C)$ suy ra $a = 3$.

Do đó $f'(x) = 3x^2 + 1$.

Vậy $f(3) - f(2) = \int_2^3 (3x^2 + 1) dx = 20$.

Câu 91: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a; b; c; d \in \mathbb{R})$ có hai điểm cực trị $x = 0, x = 2$ và đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Giá trị $a \int_{-1}^0 (f(x) + 2)(x^2 - 2x) dx$ bằng

A. $\frac{32}{9}$.

B. $\frac{16}{3}$.

C. $\frac{32}{27}$.

D. $\frac{16}{9}$.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số đi qua 2 điểm $A(-1; -2)$ và $B\left(0; \frac{2}{3}\right)$ nên ta có:

$$\begin{cases} -a + b - c + d = -2 \\ d = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c = \frac{-8}{3} \\ d = \frac{2}{3} \end{cases} \quad (I)$$

Mặt khác ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$\text{Theo giả thiết ta có: } \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases} \quad (II)$$

$$\text{Từ (I) và (II) ta có: } \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -2 \\ c = 0 \\ d = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3}$$

$$\text{Suy ra: } a \int_{-1}^0 (f(x) + 2)(x^2 - 2x) dx = \frac{2}{3} \int_{-1}^0 \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{2}{3} + 2 \right) (x^2 - 2x) dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_{-1}^0 \left(\frac{2}{3}x^5 - \frac{10}{3}x^4 + 4x^3 + \frac{8}{3}x^2 - \frac{16}{3}x \right) dx = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \frac{x^6}{6} - \frac{10}{3} \frac{x^5}{5} + 4 \frac{x^4}{4} + \frac{8}{3} \frac{x^3}{3} - \frac{16}{3} \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{2}{3} \left(0 - \left(-\frac{16}{9} \right) \right) = \frac{32}{27}.$$

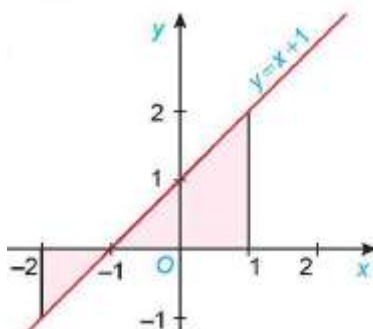
Chủ đề 3:

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

I. LÝ THUYẾT

1. Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng

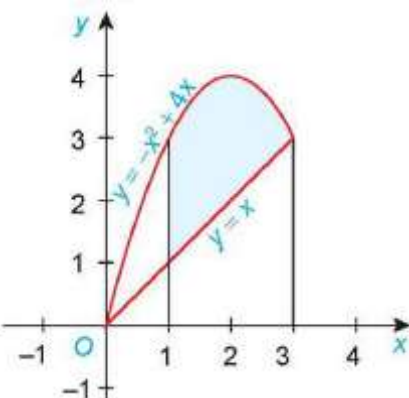
a. Hình phẳng giới hạn bởi một đồ thị hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$



Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ ($a < b$), được tính bằng công thức:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

b. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng $x=a, x=b$



Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $f(x), g(x)$ liên tục và hai đường thẳng $x=a, x=b$ ($a < b$), được tính bằng công thức:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

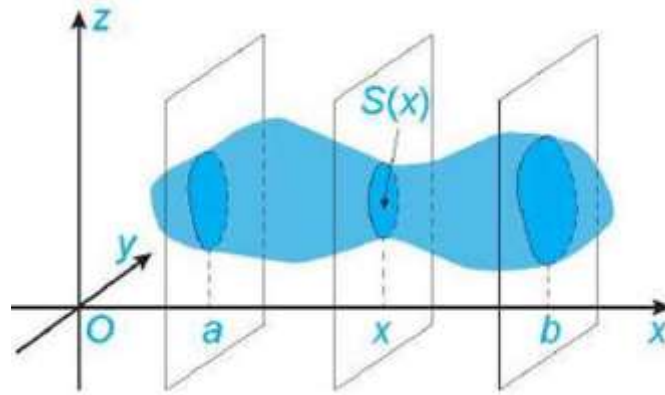
Chú ý. Nếu hiệu $f(x) - g(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a; b]$ thì

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$$

2. Ứng dụng tích phân để tính thể tích vật thể

a. Tính thể tích vật thể

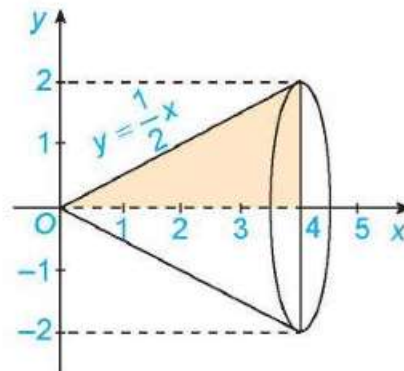
Công thức tính thể tích vật thể



Cho một vật thể trong không gian $Oxyz$. Gọi β là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm có hoành độ $x=a, x=b$. Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x , cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích là $S(x)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, thể tích V của phần vật thể β được tính bởi công

thức:
$$V = \int_a^b S(x) dx$$

b. Tính thể tích khối tròn xoay



Công thức tính thể tích khối tròn xoay

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, không âm trên đoạn $[a; b]$.

Khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$ xung quanh trục hoành, ta được hình khối gọi là **một khối tròn xoay**.

Khi cắt khối tròn xoay đó bởi một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $x \in [a; b]$ được một hình tròn xoay có bán kính $f(x)$. Thể tích khối tròn xoay này là:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

3. Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng

Bài toán: Giả sử một vật chuyển động có vận tốc thay đổi theo thời gian, $v = f(t)$ ($0 < t < T$).

Chúng minh rằng quãng đường L vật đi được trong khoảng thời gian từ thời điểm $t=a$ đến thời điểm $t=b$ ($0 < a < b < T$) là:

$$L = \int_a^b v(t) dt = F(b) - F(a)$$

trong đó F là một nguyên hàm bất kì của f trên $(0; T)$.

Nhắc: CÁC BÀI TOÁN DẪN ĐẾN KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

Kết quả 1: Bài toán tìm vận tốc tức thời

Quãng đường s của chuyển động là một hàm số của thời gian $t: s = s(t)$. Lúc đó, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là: $v(t_0) = s'(t_0)$.

Kết quả 2: Bài toán tìm gia tốc tức thời

Quãng đường s của chuyển động là một hàm số của thời gian $t: s = s(t)$. Lúc đó, gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là: $a(t_0) = s''(t_0) = v'(t_0)$.

Kết quả 3: Bài toán tìm cường độ tức thời

Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian $t: Q = Q(t)$. Lúc đó, cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là: $I_{tb} = Q'(t_0)$.

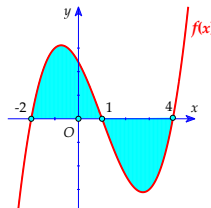
II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức nào dưới đây?

- A. $\int_a^b |f(x)| dx$. B. $\left| \int_a^b f(x) dx \right|$. C. $\int_a^b |f(x)| dx$. D. $\int_a^b f(x) dx$.

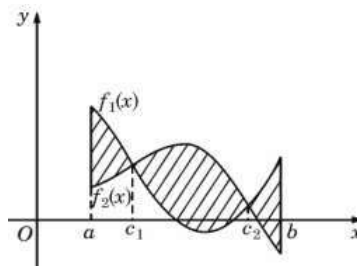
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = -2, x = 4$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $S_D = \int_{-2}^4 |f(x)| dx$. B. $S_D = \left| \int_{-2}^4 f(x) dx \right|$.
C. $S_D = \left| \int_{-2}^1 f(x) dx \right| + \left| \int_1^4 f(x) dx \right|$. D. $S_D = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$.

Câu 3: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ (tham khảo hình vẽ dưới).



Công thức tính diện tích của hình (H) là

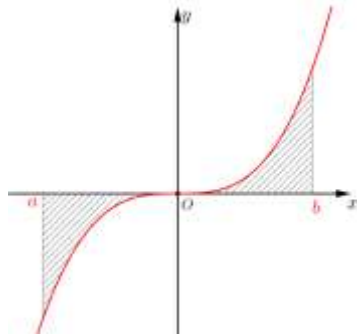
A. $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$

B. $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx.$

C. $S = \int_a^b |f_1(x) + f_2(x)| dx.$

D. $S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx.$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (như hình vẽ dưới đây).



Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

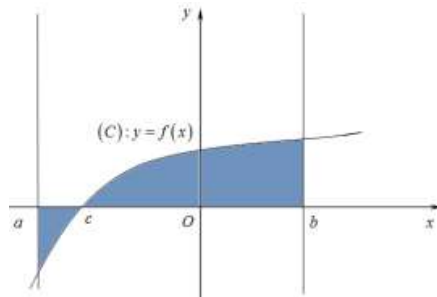
A. $S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

B. $S_D = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

C. $S_D = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

D. $S_D = -\int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

Câu 5: Diện tích của hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) (phần tô đậm trong hình vẽ dưới đây) tính theo công thức:



A. $S = \int_a^b f(x) dx.$

B. $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

C. $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$

D. $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

Câu 6: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx.$

B. $S = \int_0^2 e^x dx.$

C. $S = \pi \int_0^2 e^x dx.$

D. $S = \int_0^2 e^{2x} dx.$

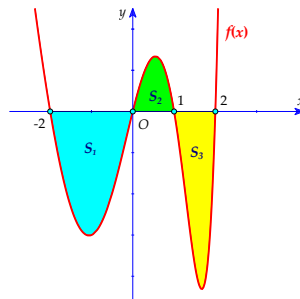
Câu 7: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \cos^2 x$, $y = 0$ và $x = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$ bằng

- A. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$. B. $\frac{\pi}{4} + 1$. C. $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$. D. $\frac{\pi}{8}$.

Câu 8: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2 + 3$ và $y = 4x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $S = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx$. B. $S = \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx$.
C. $S = \int_1^3 (|x^2 + 3| - |4x|) dx$. D. $S = \int_1^3 |x^2 + 4x + 3| dx$.

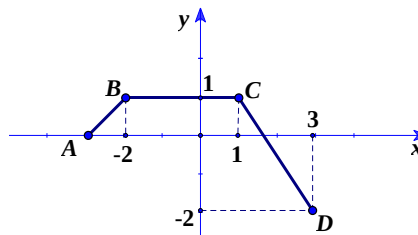
Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$, có đồ thị tạo với trục hoành một hình phẳng gồm 3 phần có diện tích $S_1; S_2; S_3$ như hình vẽ bên dưới:



Tích phân $\int_{-2}^2 f(x) dx$ bằng

- A. $S_2 + S_3 - S_1$. B. $S_1 - S_2 + S_3$. C. $S_1 + S_2 + S_3$. D. $-S_1 + S_2 - S_3$.

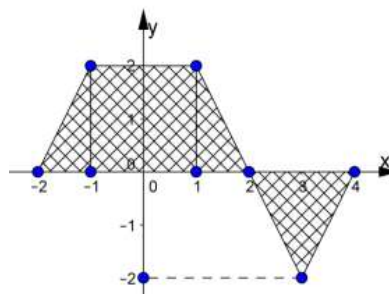
Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-3; 3]$ là đường gấp khúc $ABCD$ như hình vẽ.



Tính $\int_{-3}^3 f(x) dx$.

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{35}{6}$. C. $-\frac{5}{2}$. D. $-\frac{35}{6}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và có nguyên hàm trên $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tính $I = \int_{-2}^4 f(x) dx$.

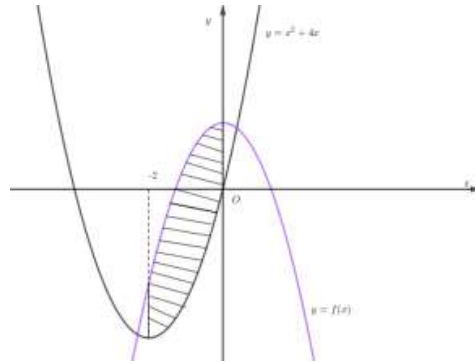
A. $I = 8$.

B. $I = 4$.

C. $I = 6$.

D. $I = 2$.

Câu 12: Phần hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = x^2 + 4x$ và hai đường thẳng $x = -2$; $x = 0$.



Biết $\int_{-2}^0 f(x) dx = \frac{4}{3}$. Diện tích hình (H) bằng

A. $\frac{7}{3}$.

B. $\frac{16}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{20}{3}$.

Câu 13: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $f(x) = x^3 - 3x + 2$; $g(x) = x + 2$ là

A. $S = 8$.

B. $S = 4$.

C. $S = 12$.

D. $S = 16$.

Câu 14: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 7 - 2x^2$, $y = x^2 + 4$ bằng

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. $\frac{5}{2}$.

Câu 15: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^3$, $y = -\pi$, $x = 4$ và trục tung được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $S = \int_0^4 (2x^3 - \pi) dx$.

B. $S = \pi \int_{-\pi}^4 |2x^3| dx$.

C. $S = \int_0^4 (2x^3 + \pi) dx$.

D. $S = \int_{-\pi}^4 |2x^3| dx$.

Câu 16: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P): $y = x^2 - 4$, tiếp tuyến của (P) tại $M(2;0)$ và trục Oy là

A. $S = \frac{4}{3}$.

B. $S = 2$.

C. $S = \frac{8}{3}$.

D. $S = \frac{7}{3}$.

Câu 17: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = 4 - |x|$ và trục hoành là

A. 4.

B. 0.

C. 16.

D. 8.

Câu 18: Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và đường thẳng $y = x - 2$.

A. $S = 2$.

B. $S = \frac{10}{3}$.

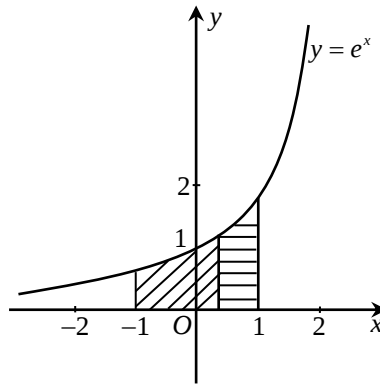
C. $S = \frac{16}{3}$.

D. $S = \frac{22}{3}$.

Câu 19: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ với $a < b$. Kí hiệu S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3f(x)$, $y = 3g(x)$, $x = a$, $x = b$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) - 2$, $y = g(x) - 2$, $x = a$, $x = b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $S_1 = 2S_2$. B. $S_1 = 3S_2$. C. $S_1 = 2S_2 - 2$. D. $S_1 = 2S_2 + 2$.

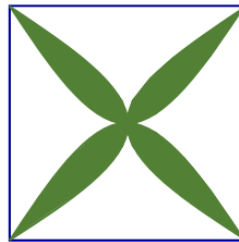
Câu 20: Cho hàm số $y = e^x$, gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$; $x = -1$; $x = k$ và S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$; $x = k$; $x = 1$. (tham khảo hình vẽ).



Xác định k để $S_1 = S_2$.

- A. $k = \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - \ln 2$. B. $k = 2\ln\left(e - \frac{1}{e}\right) - 1$. C. $k = 2\ln 2 - 1$. D. $k = \ln 2$.

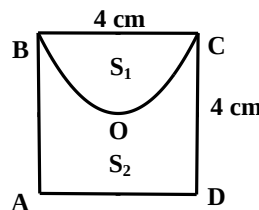
Câu 21: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô màu sẫm như hình vẽ).



Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

- A. 800 cm^2 . B. $\frac{800}{3}\text{ cm}^2$. C. $\frac{400}{3}\text{ cm}^2$. D. 250 cm^2 .

Câu 22: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , độ dài cạnh là 4 cm. Đường cong BOC là một phần của parabol đỉnh O chia hình vuông thành hai hình phẳng có diện tích lần lượt là S_1 và S_2 (tham khảo hình vẽ).



Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

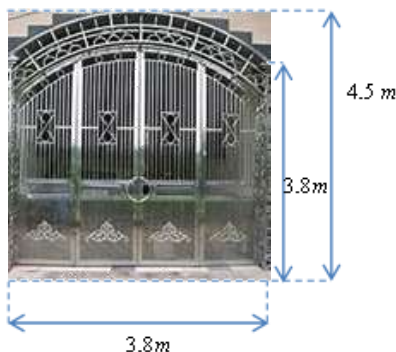
A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

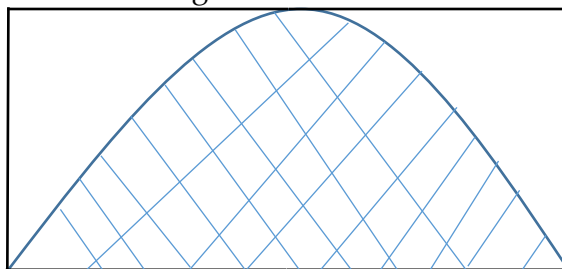
D. $\frac{3}{5}$.

Câu 23: Ông X muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol, chất liệu làm là inox. Giá $1m^2$ vật tư và công làm là 1.300.000 đồng. Hỏi ông X phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).



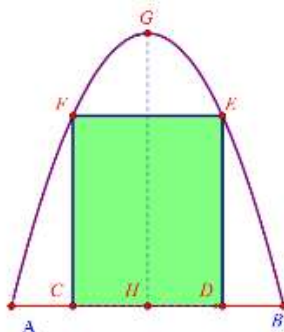
A. 13.050.000 đồng. B. 36.630.000 đồng. C. 19.520.000 đồng. D. 21.077.330 đồng.

Câu 24: Một sân bóng hình chữ nhật với diện tích $200m^2$. Người ta muốn trồng cỏ trên sân bóng theo hình một parabol bậc hai sao cho đỉnh của parabol trùng với trung điểm một cạnh của sân bóng như hình vẽ bên. Biết chi phí trồng cỏ là 300 ngàn đồng cho mỗi mét vuông. Xác định chi phí trồng cỏ cần có cho sân bóng trên?



A. 30 triệu đồng. B. 60 triệu đồng. C. 50 triệu đồng. D. 40 triệu đồng.

Câu 25: Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng/ m^2 , còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/ m^2 . Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

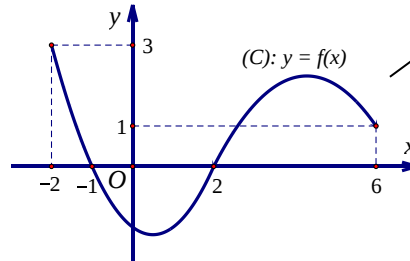


A. 11445000 đồng. B. 4077000 đồng. C. 7368000 đồng. D. 11370000 đồng.

Câu 26: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + m - 1$. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox có diện tích phần nằm phía trên trục Ox và phần nằm dưới trục Ox bằng nhau. Giá trị của m là

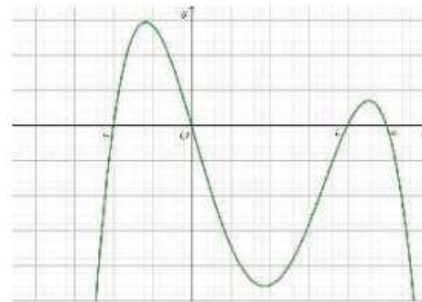
- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{4}{5}$.

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình bên dưới. Khẳng định nào dưới đây đúng?



- A. $f(-2) < f(-1) < f(2) < f(6)$. B. $f(2) < f(-2) < f(-1) < f(6)$.
C. $f(-2) < f(2) < f(-1) < f(6)$. D. $f(6) < f(2) < f(-2) < f(-1)$.

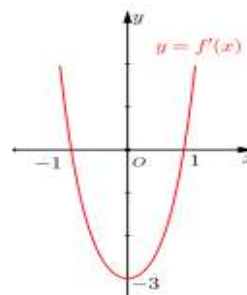
Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Biết phương trình $f'(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt $a, 0, b, c$ với $a < 0 < b < c$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(a) > f(c) > f(b)$. B. $f(a) > f(b) > f(c)$.
C. $f(c) > f(a) > f(b)$. D. $f(b) > f(a) > f(c)$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị (C) . Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây:



Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.

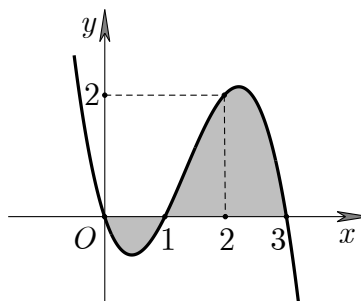
A. $S = 9$.

B. $S = \frac{27}{4}$.

C. $S = \frac{21}{4}$.

D. $S = \frac{5}{4}$.

Câu 30: Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng được tô đậm.



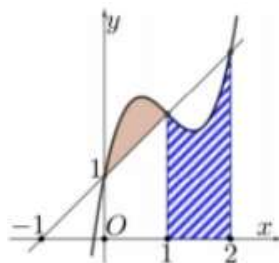
A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{37}{12}$.

C. $\frac{5}{12}$.

D. $\frac{8}{3}$.

Câu 31: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $d : g(x) = mx + n$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Nếu diện tích phần tô bằng $\frac{1}{2}$ thì diện tích phần gạch bằng

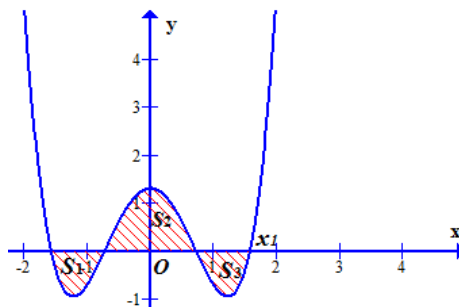
A. $\frac{5}{2}$.

B. 2.

C. 1.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 32: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

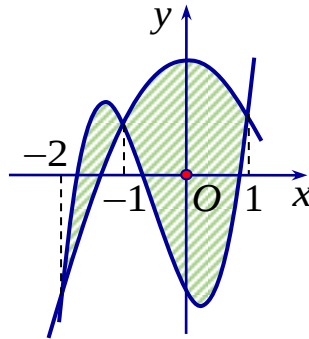
A. $-\frac{5}{2}$

B. $\frac{5}{4}$

C. $-\frac{5}{4}$

D. $\frac{5}{2}$

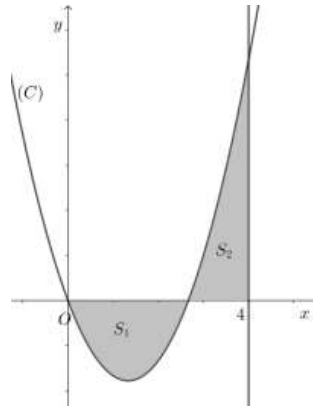
Câu 33: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

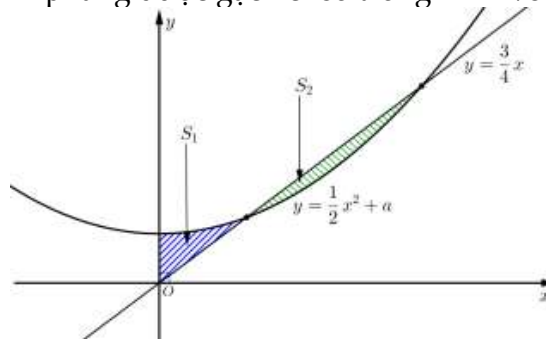
- A. $\frac{37}{6}$. B. $\frac{13}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{37}{12}$.

Câu 34: Cho hàm số $y = x^2 - mx$ ($0 < m < 4$) có đồ thị (C). Gọi $S_1 + S_2$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 4$ (phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới). Giá trị của m sao cho $S_1 = S_2$ là



- A. $m = 3$. B. $m = \frac{10}{3}$. C. $m = 2$. D. $m = \frac{8}{3}$.

Câu 35: Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên.



Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{4}; \frac{9}{32}\right)$. B. $\left(\frac{7}{32}; \frac{1}{4}\right)$. C. $\left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32}\right)$. D. $\left(0; \frac{3}{16}\right)$.

Dạng 2: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$. B. $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$. C. $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$. D. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Câu 37: Thể tích khối tròn xoay do hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ quay quanh trục Ox là:

A. $V = \pi \int_4^0 f^2(x) dx$. B. $V = \pi \int_0^4 |f(x)| dx$. C. $V = \pi \int_0^4 f(x) dx$. D. $V = \pi \int_0^4 f^2(x) dx$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể (H) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = a$ và $x = b$ ($a < b$). Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của (H) bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x , với $a \leq x \leq b$. Giả sử hàm số $y = S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, thể tích V của vật thể (H) được tính bởi công thức

A. $V = \int_a^b S^2(x) dx$. B. $V = \int_a^b S(x) dx$. C. $V = \pi \int_a^b S^2(x) dx$. D. $V = \pi \int_a^b S(x) dx$.

Câu 39: Cho vật thể (T) được giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = -2$ và $x = 2$. Biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , ($x \in [-2; 2]$) là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{4 - x^2}$. Thể tích của vật thể (T) bằng

A. π . B. $\frac{32}{3}$. C. $\frac{32\pi}{3}$. D. $\frac{8}{3}$.

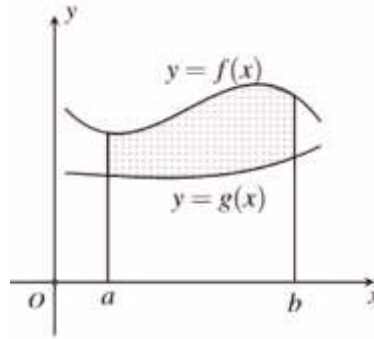
Câu 40: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq \pi$) là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

A. $2\pi\sqrt{3}$. B. 3. C. $2\sqrt{3}$. D. 3π .

Câu 41: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 4$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x bất kì ($1 \leq x \leq 4$) thì được thiết diện là một nửa lục giác đều có độ dài cạnh là $2x$.

A. $21\sqrt{3}$. B. 21. C. $63\sqrt{3}$. D. 63.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$ (có đồ thị như hình vẽ). Gọi H là hình phẳng được tô đậm trong hình, khi quay H quanh trục Ox ta thu được khối tròn xoay có thể tích V . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?



A. $V = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

B. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$

C. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx.$

D. $V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$

Câu 43: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $x=0, x=\pi, y=0$ và $y=-\sin 2x$. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình D quanh trục Ox bằng

A. $\pi \int_0^\pi \sin^2 2x dx.$ B. $\pi \int_0^\pi |\sin 2x| dx.$ C. $\int_0^\pi \sin^2 2x dx.$ D. $\int_0^\pi |\sin 2x| dx.$

Câu 44: Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=3\sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1; x=4$ quanh trục hoành được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $V = 3\pi^2 \int_1^4 x dx.$ B. $V = 3\pi \int_1^4 \sqrt{x} dx.$ C. $V = 9\pi \int_1^4 x dx.$ D. $V = 3 \int_1^4 |\sqrt{x}| dx.$

Câu 45: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $y=(2x-1)\sqrt{\ln x}$, trục hoành và đường thẳng $x=e$. Thể tích V khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D quanh trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $V = \int_1^e (2x-1)^2 \ln x dx.$ B. $V = \int_{\frac{1}{2}}^e (2x-1)^2 \ln x dx.$

C. $V = \pi \int_1^e (2x-1)^2 \ln x dx.$ D. $V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^e (2x-1)^2 \ln x dx.$

Câu 46: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}, y=0, x=0, x=2$. Quay hình phẳng (H) quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1).$ B. $\pi \ln \sqrt{3}.$ C. $\frac{8\pi}{9}.$ D. $\pi \ln 3.$

Câu 47: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=\frac{\pi}{2}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là

A. $V = \pi - 1.$ B. $V = \pi + 1.$ C. $V = \pi(\pi + 1).$ D. $V = \pi(\pi - 1).$

Câu 48: Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x-1}$, trục hoành, $x=2$ và $x=5$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{14\pi}{3}$ B. $\frac{14}{3}$ C. $\frac{15\pi}{2}$ D. $\frac{15}{2}$

Câu 49: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh trục Ox .

A. $V = \frac{81}{10}\pi$ B. $V = \frac{81}{10}$ C. $V = \frac{9}{2}$ D. $V = \frac{9}{2}\pi$

Câu 50: Giả sử D là hình phẳng giới hạn bởi đường parabol $y = x^2 - 3x + 2$ và trục hoành. Quay D quanh trục hoành ta thu được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $V = \frac{\pi}{30}$ B. $V = \frac{1}{6}$ C. $V = \frac{\pi}{6}$ D. $V = \frac{1}{30}$

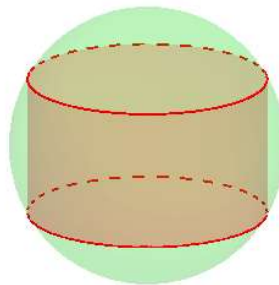
Câu 51: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = -x^2 - 2x + 3$ và trục Ox quanh trục Ox là

A. $V = \frac{16}{15}$ B. $V = \frac{512\pi}{15}$ C. $V = \frac{16\pi^3}{15}$ D. $V = \frac{16\pi}{15}$

Câu 52: Thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 3x + 5$, $y = x + 2$ quay quanh trục Ox là

A. $\frac{16\pi}{15}$ B. $\frac{16}{15}$ C. $\frac{48}{5}$ D. $\frac{48\pi}{5}$

Câu 53: Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



A. $\frac{100}{3}\pi(dm^3)$ B. $\frac{43}{3}\pi(dm^3)$ C. $41\pi(dm^3)$ D. $132\pi(dm^3)$

Dạng 3: ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

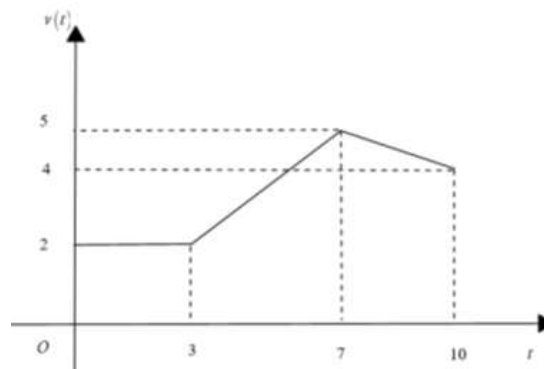
Câu 54: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 180 - 20t$ (m/s). Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm mà vật dừng lại.

A. 810 m. B. 9 m. C. 160 m. D. 180 m.

Câu 55: Một xe ô tô đang đi với vận tốc $10m/s$ thì người lái xe bắt đầu đạp phanh, từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 10 - 5t(m/s)$, ở đó t tính bằng giây. Quãng đường ô tô dịch chuyển từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn bằng

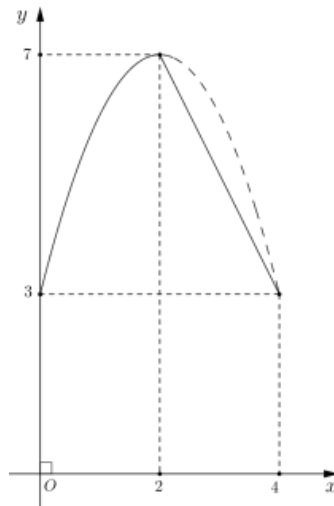
A. 5m. B. 10m. C. 6m. D. 12m.

- Câu 56:** Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 180 - 20t \text{ (m/s)}$. Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t = 0 \text{ (s)}$ đến thời điểm mà vật dừng lại.
- A. 810 m . B. 9 m . C. 180 m . D. 160 m .
- Câu 57:** Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20 \text{ (m/s)}$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn thì ô tô đi được bao nhiêu mét?
- A. 10 m . B. 40 m . C. 20 m . D. 30 m .
- Câu 58:** Hàng ngày anh An đi làm bằng xe máy trên cùng một cung đường từ nhà đến cơ quan mất 15 phút. Hôm nay khi đang di chuyển trên đường với vận tốc v_0 thì bất chợt anh gặp một chướng ngại vật nên anh đã hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -6 \text{ m/s}^2$. Biết rằng tổng quãng đường từ lúc anh nhìn thấy chướng ngại vật và quãng đường anh đã đi được trong 3s đầu tiên kể từ lúc hãm phanh là $35,5 \text{ m}$. Tính v_0 .
- A. $v_0 = 45 \text{ km/h}$. B. $v_0 = 40 \text{ km/h}$. C. $v_0 = 60 \text{ km/h}$. D. $v_0 = 50 \text{ km/h}$.
- Câu 59:** Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_t = 8t \text{ (m/s)}$. Đi được 5 (s) , người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -75 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Quãng đường $S \text{ (m)}$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn gần nhất với giá trị nào dưới đây?
- A. $94,00 \text{ (m)}$. B. $166,7 \text{ (m)}$. C. $110,7 \text{ (m)}$. D. $95,70 \text{ (m)}$.
- Câu 60:** Một vật chuyển động trong 10 giây với vận tốc $v \text{ (m/s)}$ phụ thuộc vào thời gian $t \text{ (s)}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Quãng đường vật chuyển động được trong 10 giây bằng

- A. $\frac{63}{2} \text{ m}$. B. $\frac{67}{2} \text{ m}$. C. $\frac{61}{2} \text{ m}$. D. $\frac{65}{2} \text{ m}$.
- Câu 61:** Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v \text{ (km/h)}$ phụ thuộc thời gian $t \text{ (h)}$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 2 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;7)$ và trục đối xứng của parabol song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là đoạn thẳng IA . Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



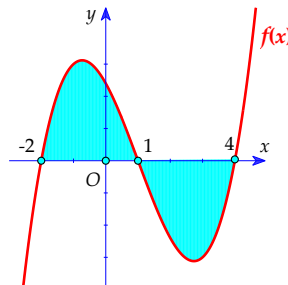
- A. 15,81(km). B. 17,33(km). C. 23,33(km). D. 21,33(km).

III. LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức nào dưới đây?

- A. $\int_b^a |f(x)| dx$. B. $\left| \int_a^b f(x) dx \right|$. C. $\int_a^b |f(x)| dx$. D. $\int_a^b f(x) dx$.

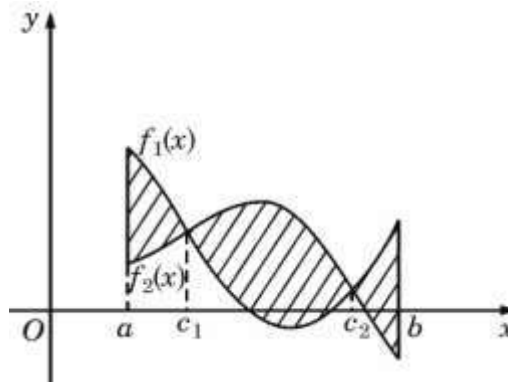
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = -2, x = 4$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $S_D = \int_{-2}^4 |f(x)| dx$. B. $S_D = \left| \int_{-2}^4 f(x) dx \right|$.
C. $S_D = \left| \int_{-2}^1 f(x) dx \right| + \left| \int_1^4 f(x) dx \right|$. D. $S_D = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$.

Câu 3: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ (tham khảo hình vẽ dưới).



Công thức tính diện tích của hình (H) là

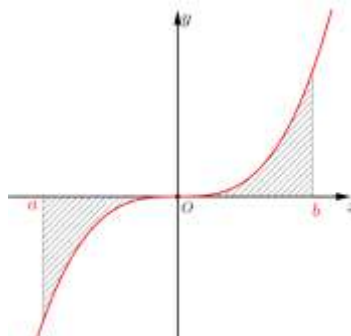
A. $S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx.$

B. $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx.$

C. $S = \int_a^b |f_1(x) + f_2(x)| dx.$

D. $S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx.$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C): $y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (như hình vẽ dưới đây).



Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

B. $S_D = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

C. $S_D = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

D. $S_D = -\int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$

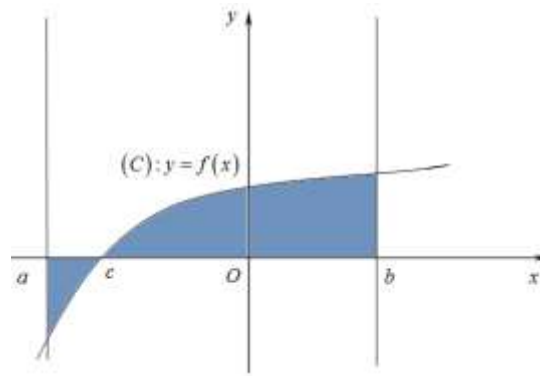
Lời giải:

+ Nhìn đồ thị ta thấy:

- Đồ thị (C) cắt trục hoành tại $O(0;0)$
- Trên đoạn $[a;0]$, đồ thị (C) ở dưới trục hoành nên $|f(x)| = -f(x)$
- Trên đoạn $[0;b]$, đồ thị (C) ở trên trục hoành nên $|f(x)| = f(x)$

+ Do đó: $S_D = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^0 |f(x)| dx + \int_0^b |f(x)| dx = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$

Câu 5: Diện tích của hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) (phần tô đậm trong hình vẽ dưới đây) tính theo công thức:



A. $S = \int_a^b f(x) dx$.

B. $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

C. $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.

D. $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Lời giải:

Áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng ta có:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c [0 - f(x)] dx + \int_c^b [f(x) - 0] dx = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Câu 6: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$.

B. $S = \int_0^2 e^x dx$.

C. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$.

D. $S = \int_0^2 e^{2x} dx$.

Lời giải:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ là $S = \int_0^2 e^x dx$.

Câu 7: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \cos^2 x$, $y = 0$ và $x = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$ bằng

A. $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

B. $\frac{\pi}{4} + 1$.

C. $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

D. $\frac{\pi}{8}$.

Lời giải:

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\cos^2 x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

Câu 8: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x^2 + 3$ và $y = 4x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx$.

B. $S = \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx$.

C. $S = \int_1^3 (|x^2 + 3| - |4x|) dx$.

D. $S = \int_1^3 |x^2 + 4x + 3| dx$.

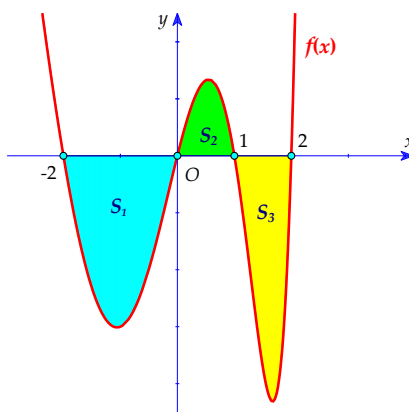
Lời giải:

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y = x^2 + 3$ và $y = 4x$ là:

$$x^2 + 3 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Diện tích của hình phẳng cần tìm là: $S = \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$, có đồ thị tạo với trục hoành một hình phẳng gồm 3 phần có diện tích $S_1; S_2; S_3$ như hình vẽ bên dưới:



Tích phân $\int_{-2}^2 f(x) dx$ bằng

A. $S_2 + S_3 - S_1$.

B. $S_1 - S_2 + S_3$.

C. $S_1 + S_2 + S_3$.

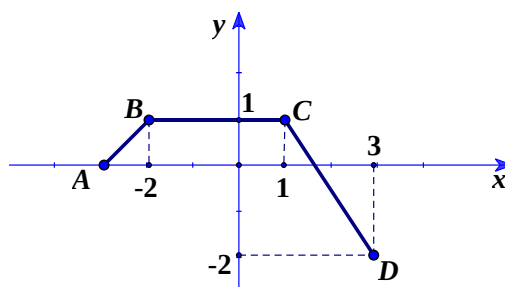
D. $-S_1 + S_2 - S_3$.

Lời giải:

Ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = -2; x = 0; x = 1; x = 2$.

Ta có: $\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = -S_1 + S_2 - S_3$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-3; 3]$ là đường gấp khúc $ABCD$ như hình vẽ.



Tính $\int_{-3}^3 f(x) dx$.

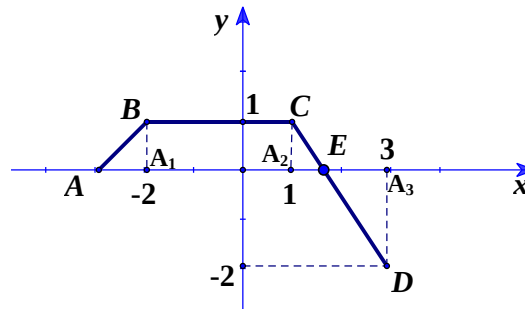
A. $\frac{5}{2}$.

B. $\frac{35}{6}$.

C. $\frac{-5}{2}$.

D. $\frac{-35}{6}$.

Lời giải:



Phương trình đường thẳng CD đi qua $C(1;1)$ và nhận $\overrightarrow{CD} = (2; -3)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình chính tắc $(CD): \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} \Leftrightarrow -3x - 2y = -5$.

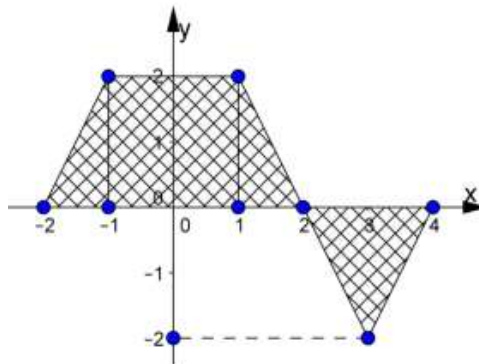
Đặt $E = (CD) \cap Ox$.

$$\text{Ta được } \begin{cases} -3x - 2y = -5 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{5}{3}; 0\right).$$

$$\text{Do đó: } \int_{-3}^3 |f(x)| dx = \int_{-3}^{-2} |f(x)| dx + \int_{-2}^1 |f(x)| dx + \int_1^{\frac{5}{3}} |f(x)| dx + \int_{\frac{5}{3}}^3 |f(x)| dx$$

$$= S_{ABA_1} + S_{A_1BCA_2} + S_{A_2CE} + S_{EDA_3} = \frac{1}{2}(1 \times 1) + (3 \times 1) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \times 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} \times 2\right) = \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = \frac{5}{2}.$$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục và có nguyên hàm trên $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



$$\text{Tính } I = \int_{-2}^4 f(x) dx.$$

A. $I = 8$.

B. $I = 4$.

C. $I = 6$.

D. $I = 2$.

Lời giải:

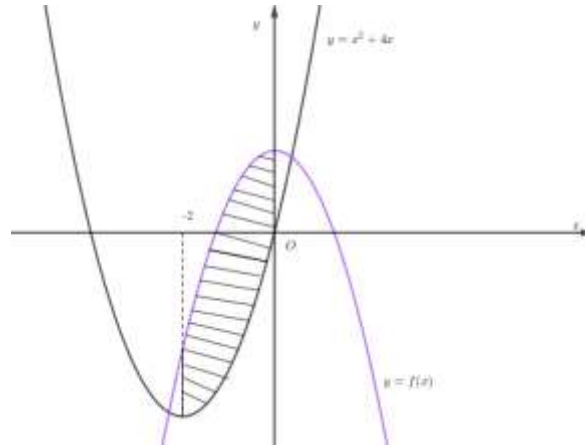
Ta có giá trị của tích phân $I = \int_{-2}^4 f(x) dx$ là hiệu của diện tích hình thang với diện tích tam giác.

Từ hình vẽ ta có hình thang cân, độ dài đáy lớn bằng 4, độ dài đáy bé bằng 2, chiều cao bằng 2. Diện tích hình thang là 6

Tam giác cân có cạnh đáy bằng 2, chiều cao bằng 2. Diện tích của tam giác là 2

$$\text{Vậy } I = \int_{-2}^4 f(x) dx = 6 - 2 = 4.$$

Câu 12: Phần hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình vẽ dưới đây được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = x^2 + 4x$ và hai đường thẳng $x = -2$; $x = 0$.



Biết $\int_{-2}^0 f(x)dx = \frac{4}{3}$. Diện tích hình (H) bằng

- A. $\frac{7}{3}$. B. $\frac{16}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{20}{3}$.

Lời giải:

Diện tích hình (H) là :

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 [f(x) - (x^2 + 4x)] dx = \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_{-2}^0 (x^2 + 4x) dx \\ &= \frac{4}{3} - \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_{-2}^0 = \frac{4}{3} + \frac{(-2)^3}{3} + 2(-2)^2 = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

Vậy diện tích hình (H) là $S = \frac{20}{3}$.

Câu 13: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $f(x) = x^3 - 3x + 2$; $g(x) = x + 2$ là

- A. $S = 8$. B. $S = 4$. C. $S = 12$. D. $S = 16$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $x^3 - 3x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Diện tích cần tìm

$$S = \int_{-2}^0 |x^3 - 4x| dx + \int_0^2 |x^3 - 4x| dx = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx - \int_0^2 (x^3 - 4x) dx = \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^0 - \left(\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right) \Big|_0^2 = 8.$$

Câu 14: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 7 - 2x^2$, $y = x^2 + 4$ bằng

- A. 5. B. 3. C. 4. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = 7 - 2x^2$, $y = x^2 + 4$ là

$$7 - 2x^2 = x^2 + 4 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-1}^1 \left| (7 - 2x^2) - (x^2 + 4) \right| dx = \int_{-1}^1 |3 - 3x^2| dx = \left| \int_{-1}^1 (3 - 3x^2) dx \right| = 4.$$

Câu 15: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^3$, $y = -\pi$, $x = 4$ và trục tung được tính bởi công thức nào dưới đây ?

A. $S = \int_0^4 (2x^3 - \pi) dx.$

B. $S = \pi \int_{-\pi}^4 |2x^3| dx.$

C. $S = \int_0^4 (2x^3 + \pi) dx.$

D. $S = \int_{-\pi}^4 |2x^3| dx.$

Lời giải:

Diện tích S của hình phẳng được tính bởi công thức: $S = \int_0^4 |2x^3 + \pi| dx = \int_0^4 (2x^3 + \pi) dx.$

Câu 16: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = x^2 - 4$, tiếp tuyến của (P) tại $M(2;0)$ và trục Oy là

A. $S = \frac{4}{3}.$

B. $S = 2.$

C. $S = \frac{8}{3}.$

D. $S = \frac{7}{3}.$

Lời giải:

Ta có: $y' = 2x$; $y'(2) = 4.$

Phương trình tiếp tuyến của (P) tại $M(2;0)$: $y = 4(x - 2) = 4x - 8.$

$$\begin{aligned} \text{Diện tích hình phẳng cần tìm là } S &= \int_0^2 |x^2 - 4 - (4x - 8)| dx = \left| \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx \right| \\ &= \left| \frac{(x-2)^3}{3} \right|_0^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Câu 17: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = 4 - |x|$ và trục hoành là

A. 4.

B. 0.

C. 16.

D. 8.

Lời giải:

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } 4 - |x| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}.$$

Diện tích hình phẳng là.

$$S = \int_{-4}^4 |4 - |x|| dx = \int_{-4}^0 |4 + x| dx + \int_0^4 |4 - x| dx = \left| \int_{-4}^0 (4 + x) dx \right| + \left| \int_0^4 (4 - x) dx \right| = 16.$$

Câu 18: Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành và đường thẳng $y = x - 2.$

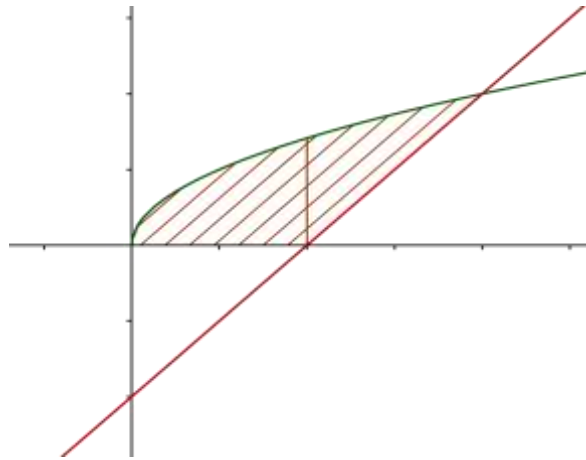
A. $S = 2.$

B. $S = \frac{10}{3}.$

C. $S = \frac{16}{3}.$

D. $S = \frac{22}{3}.$

Lời giải:



Hoàn thành giao điểm $\sqrt{x} = x - 2 \Leftrightarrow x = 4 (x \geq 0)$.

$\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

$$\text{Diện tích } S = \int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx = \frac{10}{3}.$$

Câu 19: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ với $a < b$. Kí hiệu S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3f(x)$, $y = 3g(x)$, $x = a$, $x = b$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x) - 2$, $y = g(x) - 2$, $x = a$, $x = b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_1 = 2S_2$.

B. $S_1 = 3S_2$.

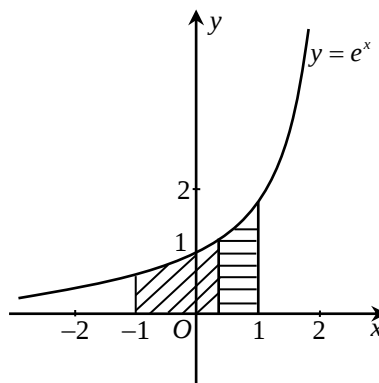
C. $S_1 = 2S_2 - 2$.

D. $S_1 = 2S_2 + 2$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } S_1 = \int_a^b |3f(x) - 3g(x)| dx = 3 \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = 3 \int_a^b |(f(x) - 2) - (g(x) - 2)| dx = 3S_2.$$

Câu 20: Cho hàm số $y = e^x$, gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$; $x = -1$; $x = k$ và S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$; $x = k$; $x = 1$. (tham khảo hình vẽ).



Xác định k để $S_1 = S_2$.

A. $k = \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - \ln 2$.

B. $k = 2 \ln\left(e - \frac{1}{e}\right) - 1$.

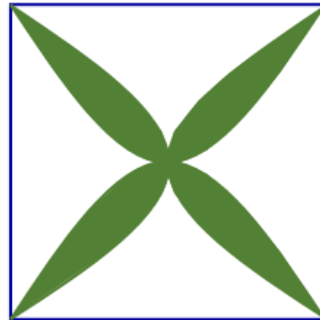
C. $k = 2 \ln 2 - 1$.

D. $k = \ln 2$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } S_1 = S_2 \Leftrightarrow \int_{-1}^k e^x dx = \int_k^1 e^x dx \Leftrightarrow e^k - \frac{1}{e} = e - e^k \Leftrightarrow k = \ln\left(e + \frac{1}{e}\right) - \ln 2.$$

Câu 21: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô màu sẫm như hình vẽ).



Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

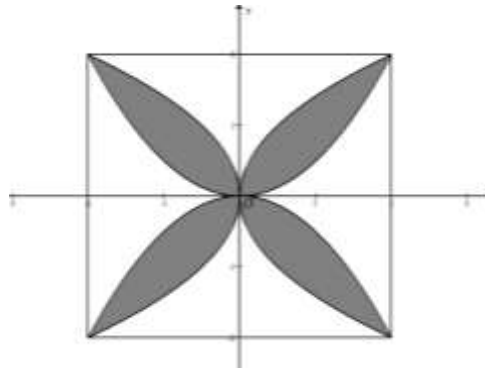
A. 800 cm^2 .

B. $\frac{800}{3} \text{ cm}^2$.

C. $\frac{400}{3} \text{ cm}^2$.

D. 250 cm^2 .

Lời giải:



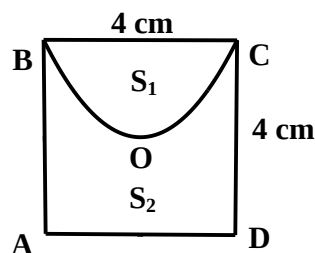
Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10 \text{ cm} = 1 \text{ dm}$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{2}$, $y = -\frac{x^2}{2}$, $x = -\frac{y^2}{2}$, $x = \frac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{(2x)^3} - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{4}{3} (\text{dm}^2) = \frac{400}{3} (\text{cm}^2) = \frac{4}{3} (\text{dm}^2) = \frac{400}{3} (\text{cm}^2).$$

Câu 22: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , độ dài cạnh là 4 cm. Đường cong BOC là một phần của parabol đỉnh O chia hình vuông thành hai hình phẳng có diện tích lần lượt là S_1 và S_2 (tham khảo hình vẽ).



Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

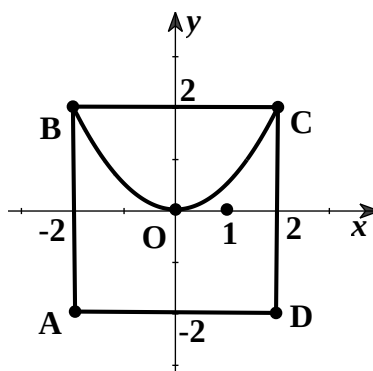
A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải:



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Ta có phương trình parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$.

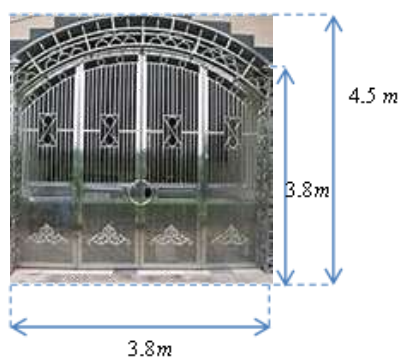
Suy ra $S_1 = \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \frac{16}{3}$ (đvdt).

Diện tích hình vuông ABCD là $S_{ABCD} = 4^2 = 16$ (đvdt).

Do đó diện tích S_2 là $S_2 = S_{ABCD} - S_1 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$ (đvdt).

Vậy tỉ số $\frac{S_1}{S_2} = \frac{16}{3} : \frac{32}{3} = \frac{1}{2}$.

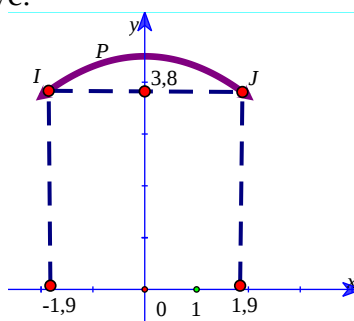
Câu 23: Ông X muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một Parabol, chất liệu làm là inox. Giá $1m^2$ vật tư và công làm là 1.300.000 đồng. Hỏi ông X phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy (làm tròn đến hàng nghìn).



- A. 13.050.000 đồng. B. 36.630.000 đồng. C. 19.520.000 đồng. **D. 21.077.330 đồng.**

Lời giải:

Ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $I\left(-\frac{19}{10}; \frac{19}{5}\right)$, $J\left(\frac{19}{10}; \frac{19}{5}\right)$.

Đường cong phía trên là một Parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + b$, với $a; b \in \mathbb{R}$.

Do Parabol đi qua các điểm I, J và chiều cao cổng là $\frac{9}{2}m$ nên có $y = -\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2}$.

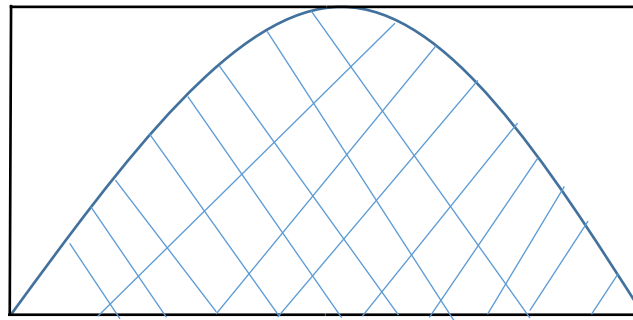
Diện tích S của cửa rào sắt là diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số

$y = -\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -\frac{19}{10}$; $x = \frac{19}{10}$.

$$\text{Ta có } S = \int_{-\frac{19}{10}}^{\frac{19}{10}} \left(-\frac{70}{361}x^2 + \frac{9}{2} \right) dx = \frac{1216}{75}.$$

Vậy ông X phải trả số tiền để làm cái cửa sắt là: $\frac{1216}{75} \times 1.300.000 \approx 21.077.330$ (đồng).

Câu 24: Một sân bóng hình chữ nhật với diện tích $200m^2$. Người ta muốn trồng cỏ trên sân bóng theo hình một parabol bậc hai sao cho đỉnh của parabol trùng với trung điểm một cạnh của sân bóng như hình vẽ bên. Biết chi phí trồng cỏ là 300 ngàn đồng cho mỗi mét vuông. Xác định chi phí trồng cỏ cần có cho sân bóng trên?



- A. 30 triệu đồng. B. 60 triệu đồng. C. 50 triệu đồng. D. 40 triệu đồng.

Lời giải:

Gọi chiều dài của hình chữ nhật là m , chiều rộng là n ($m > n > 0$).

Ta có diện tích hình chữ nhật là $S = mn = 200$ (m^2).

Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Oxy sao cho đỉnh của parabol là $I(0;n)$. Parabol đi qua

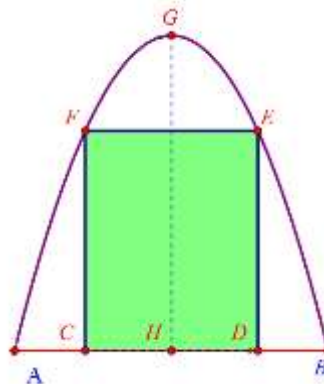
2 điểm $A\left(-\frac{m}{2};0\right)$ và $B\left(\frac{m}{2};0\right)$.

Do đó parabol có dạng $y = \frac{-4n}{m^2}x^2 + n$.

Vậy phần diện tích trồng cỏ là $S = 2 \int_0^{\frac{m}{2}} \left(\frac{-4n}{m^2}x^2 + n \right) dx = \frac{2mn}{3}$.

Vậy số tiền trồng cỏ cần là: $\frac{2mn}{3} \cdot 300000 = \frac{2 \cdot 200}{3} \cdot 300000 = 40000000$.

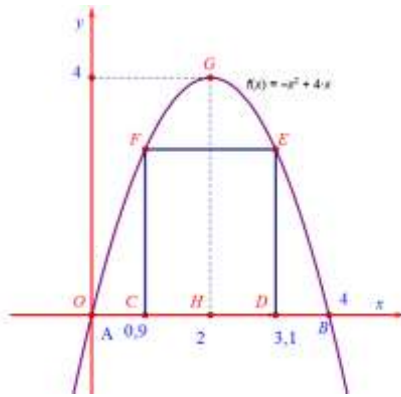
Câu 25: Một cái cổng hình Parabol như hình vẽ sau. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chủ nhà làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng/ m^2 , còn các phần để trồng làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/ m^2 . Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



- A. 11445000 đồng. B. 4077000 đồng. C. 7368000 đồng. D. 11370000 đồng.

Lời giải:

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox , A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Vì parabol có đỉnh là $G(2; 4)$ và đi qua điểm $O(0; 0)$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

Diện tích của cả công là $S = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \text{ (m}^2\text{)}.$

Mặt khác chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79 \text{ (m)}$; $CD = 4 - 2 \cdot 0,9 = 2,2 \text{ (m)}$.

Diện tích hai cánh công là $S_{CDEF} = CD \cdot CF = 6,138 \text{ (m}^2\text{)}.$

Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh} = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 6,14 = \frac{6793}{1500} \text{ (m}^2\text{)}.$

Vậy tổng số tiền để làm công là $6,138 \cdot 1200000 + \frac{6793}{1500} \cdot 900000 = 11441400$ đồng.

Câu 26: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + m - 1$. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục Ox có diện tích phần nằm phía trên trục Ox và phần nằm dưới trục Ox bằng nhau. Giá trị của m là

A. $\frac{3}{4}$.

B. $\frac{3}{5}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. $y' = 3x^2 - 6x + 3m = 3(x^2 - 2x + m)$.

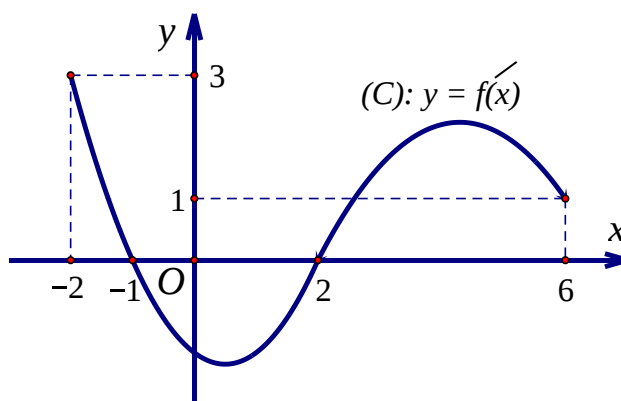
Yêu cầu bài toán suy ra đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt nên.

$x^2 - 2x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} > 0 \Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.

Khi đó đồ thị hàm số đối xứng qua tâm $I(1; -3 + 4m)$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $I \in Ox \Leftrightarrow -3 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4} \text{ (t/m)}.$

Câu 27: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình bên dưới. Khẳng định nào dưới đây đúng?



A. $f(-2) < f(-1) < f(2) < f(6)$.

B. $f(2) < f(-2) < f(-1) < f(6)$.

C. $f(-2) < f(2) < f(-1) < f(6)$.

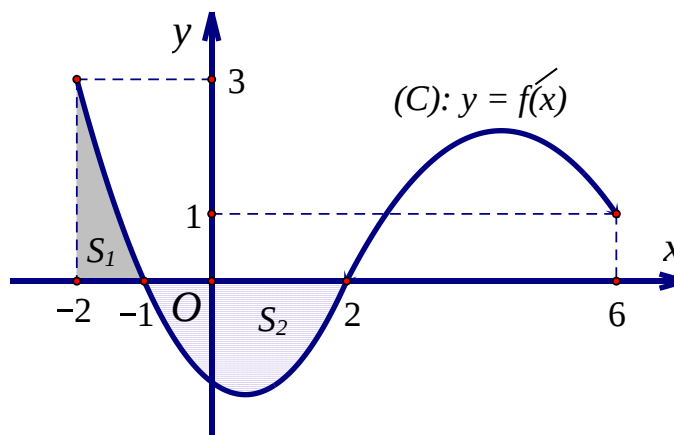
D. $f(6) < f(2) < f(-2) < f(-1)$.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị của hàm $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như sau:

x	-2	-1	2	6
$f'(x)$	0	+	0	+
$f(x)$	$f(-2)$	$f(-1)$	$f(2)$	$f(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(-2) < f(-1) \\ f(2) < f(-1) \\ f(2) < f(6) \end{cases}$ nên A, D sai.



Ta cần so sánh $f(-2)$ và $f(2)$.

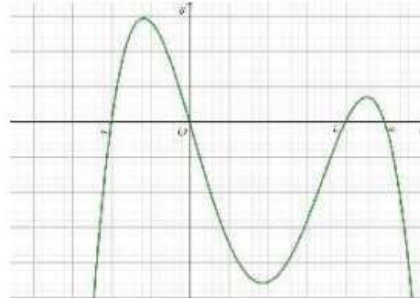
Gọi S_1 , S_2 là diện tích hình phẳng được tô đậm như trên hình vẽ.

Ta có: $S_1 = \int_{-2}^{-1} |f'(x)| dx = \int_{-2}^{-1} f'(x) dx = f(-1) - f(-2)$.

$$S_2 = \int_{-1}^2 |f'(x)| dx = - \int_{-1}^2 f'(x) dx = f(-1) - f(2).$$

Dựa vào đồ thị ta thấy $S_1 < S_2$ nên $f(-1) - f(-2) < f(-1) - f(2) \Leftrightarrow f(-2) > f(2)$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Biết phương trình $f'(x) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt $a, 0, b, c$ với $a < 0 < b < c$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(a) > f(c) > f(b)$.

B. $f(a) > f(b) > f(c)$.

C. $f(c) > f(a) > f(b)$.

D. $f(b) > f(a) > f(c)$.

Lời giải:

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	a	0	b	c	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	+
$f(x)$		$f(a)$	$f(0)$	$f(b)$	$f(c)$	

Suy ra $f(c) > f(b)$ (1)

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f'(x)$, đường thẳng $x = a$, $x = 0$.

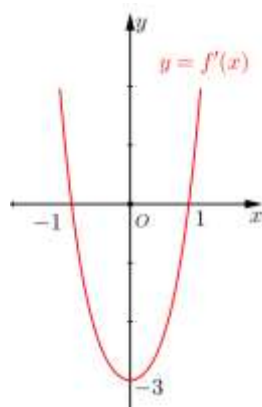
S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f'(x)$, đường thẳng $x = 0$, $x = b$.

S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f'(x)$, đường thẳng $x = b$, $x = c$.

$$\begin{aligned} \text{Vì } S_1 + S_3 < S_2 &\Leftrightarrow \int_a^0 |f'(x)| dx + \int_b^c |f'(x)| dx < \int_0^b |f'(x)| dx \\ &\Leftrightarrow \int_a^0 f'(x) dx + \int_b^c f'(x) dx < - \int_0^b f'(x) dx \\ &\Leftrightarrow f(0) - f(a) + f(c) - f(b) < -f(b) + f(0) \\ &\Leftrightarrow f(a) > f(c) \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(a) > f(c) > f(b)$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây:



Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.

A. $S = 9$.

B. $S = \frac{27}{4}$.

C. $S = \frac{21}{4}$.

D. $S = \frac{5}{4}$.

Lời giải:

Từ đồ thị suy ra $f'(x) = 3x^2 - 3$.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 3) dx = x^3 - 3x + C.$$

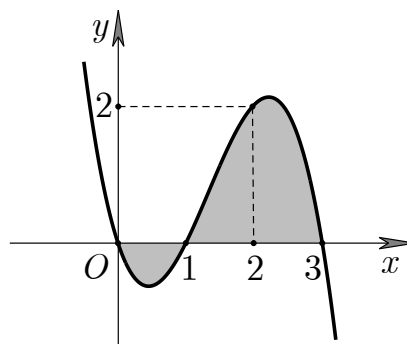
Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ x_0 âm nên

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1. \text{ Suy ra } f(-1) = 4 \Leftrightarrow C = 2 \Rightarrow (C): y = x^3 - 3x + 2$$

$$\text{Xét phương trình } x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Diện tích hình phẳng cần tìm là: } \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \frac{27}{4}.$$

Câu 30: Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng được tô đậm.



A. $\frac{9}{4}$.

B. $\frac{37}{12}$.

C. $\frac{5}{12}$.

D. $\frac{8}{3}$.

Lời giải:

Giả sử $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C) như hình vẽ trên.

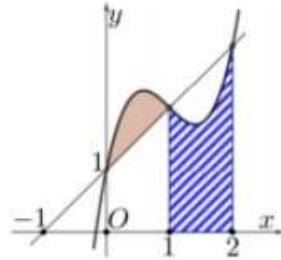
$$\text{Điểm } O(0;0) \in (C) \Rightarrow d = 0 \Rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + cx.$$

$$\text{Các điểm } A(1;0), B(2;2), D(3;0) \in (C) \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 4a+2b+c=1 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=-3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x.$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 [0 - f(x)]dx + \int_1^3 [f(x) - 0]dx = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx + \int_1^3 (-x^3 + 4x^2 - 3x)dx = \frac{37}{12}.$$

Câu 31: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ và đường thẳng $d: g(x) = mx + n$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Nếu diện tích phần tô bằng bằng $\frac{1}{2}$ thì diện tích phần gạch bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. 2.

C. 1.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải:

Cách 1:

Dựa vào đồ thị $\Rightarrow$ đường thẳng $d: g(x) = x + 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của của hai đồ thị hàm số $f(x)$, $g(x)$ là

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = x + 1 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + (c-1)x + d-1 = 0 \quad (1)$$

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $f(x)$, $g(x)$ cắt nhau tại ba điểm $x = 0, x = 1, x = 2$.

$$(1) \Rightarrow ax(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow a(x^3 - 3x^2 + 2x) = 0.$$

$$\text{Diện tích phần tô màu: } \int_0^1 a(x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \frac{1}{4}a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2.$$

Diện tích phần không tô màu giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, $g(x)$ và hai đường thẳng

$$x = 1, x = 2 \text{ là } S_1 = \int_1^2 -2(x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \frac{1}{2}.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x) = x + 1$, Ox , $x = 1, x = 2$ là $S_2 = \frac{5}{2}$.

$$\text{Diện tích phần gạch chéo là } S = S_2 - S_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

Cách 2:

Diện tích phần không tô màu giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, $g(x)$ và hai đường thẳng

$$x = 1, x = 2 \text{ là } S_1.$$

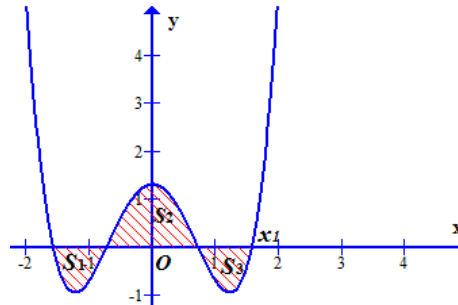
Diện tích phần tô màu là $S_2 = \frac{1}{2}$. Dựa vào đồ thị ta thấy $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị $\Rightarrow$ đường thẳng $d: g(x) = x + 1$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $g(x) = x + 1$, Ox , $x = 1$, $x = 2$ là $S_3 = \frac{5}{2}$.

Diện tích phần gạch chéo là $S = S_3 - S_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$.

Câu 32: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 + m$ có đồ thị (C_m) , với m là tham số thực. Giả sử (C_m) cắt trục Ox tại bốn điểm phân biệt như hình vẽ



Gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích các miền gạch chéo được cho trên hình vẽ. Giá trị của m để $S_1 + S_3 = S_2$ là

A. $-\frac{5}{2}$

B. $\frac{5}{4}$

C. $-\frac{5}{4}$

D. $\frac{5}{2}$

Lời giải:

Gọi x_1 là nghiệm dương lớn nhất của phương trình $x^4 - 3x^2 + m = 0$, ta có $m = -x_1^4 + 3x_1^2$ (1).

Vì $S_1 + S_3 = S_2$ và $S_1 = S_3$ nên $S_2 = 2S_3$ hay $\int_0^{x_1} f(x) dx = 0$.

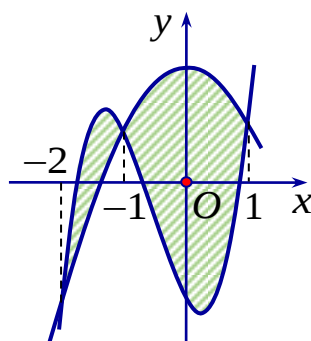
$$\text{Mà } \int_0^{x_1} f(x) dx = \int_0^{x_1} (x^4 - 3x^2 + m) dx = \left(\frac{x^5}{5} - x^3 + mx \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{x_1^5}{5} - x_1^3 + mx_1 = x_1 \left(\frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m \right).$$

$$\text{Do đó, } x_1 \left(\frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1^4}{5} - x_1^2 + m = 0 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có phương trình } \frac{x_1^4}{5} - x_1^2 - x_1^4 + 3x_1^2 = 0 \Leftrightarrow -4x_1^4 + 10x_1^2 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy } m = -x_1^4 + 3x_1^2 = \frac{5}{4}.$$

Câu 33: Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = dx^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{37}{6}$.

B. $\frac{13}{2}$.

C. $\frac{9}{2}$.

D. $\frac{37}{12}$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $f(x)$ và $g(x)$ là

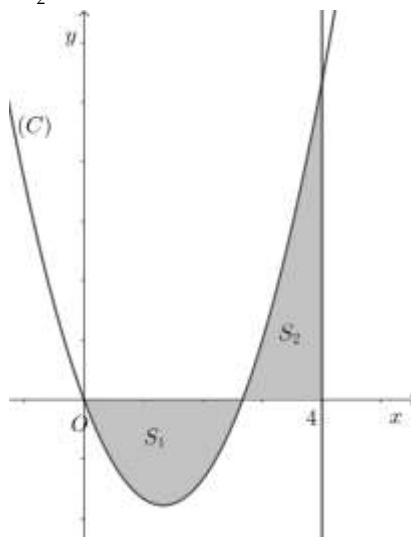
$$ax^3 + bx^2 + cx - 2 = dx^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow a^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = 0. \quad (*)$$

Do đồ thị của hai hàm số cắt nhau tại ba điểm suy ra phương trình (*) có ba nghiệm $x = -2$; $x = -1$; $x = 1$. Ta được

$$ax^3 + (b-d)x^2 + (c-e)x - 4 = k(x+2)(x+1)(x-1). \text{ Khi đó } -4 = -2k \Rightarrow k = 2.$$

$$\text{Vậy diện tích hình phẳng cần tìm là } \int_{-2}^1 |2(x+2)(x+1)(x-1)| dx = \frac{37}{6}.$$

Câu 34: Cho hàm số $y = x^2 - mx$ ($0 < m < 4$) có đồ thị (C). Gọi $S_1 + S_2$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (C), trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 4$ (phần tô đậm trong hình vẽ bên dưới). Giá trị của m sao cho $S_1 = S_2$ là



A. $m = 3$.

B. $m = \frac{10}{3}$.

C. $m = 2$.

D. $m = \frac{8}{3}$.

Lời giải:

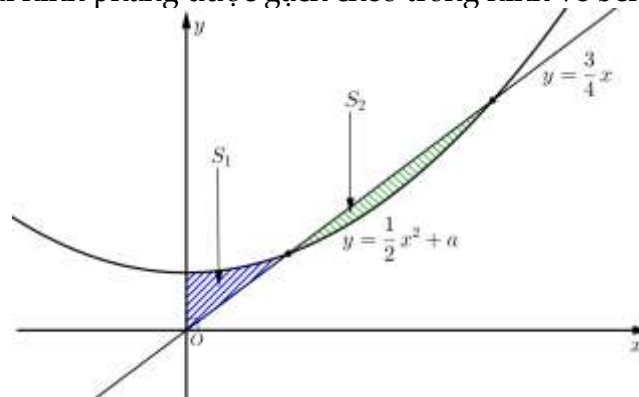
$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục } Ox \text{ là: } x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m (0 < m < 4) \end{cases}$$

$$S_1 = \int_0^m |x^2 - mx| dx = \int_0^m (mx - x^2) dx = \left(m \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^m = \frac{m^3}{6}.$$

$$S_2 = \int_m^4 |x^2 - mx| dx = \int_m^4 (x^2 - mx) dx = \left(\frac{x^3}{3} - m \frac{x^2}{2} \right) \Big|_m^4 = \frac{64}{3} - 8m + \frac{m^3}{6}.$$

$$\text{Ta có: } S_1 = S_2 \Leftrightarrow 8m - \frac{64}{3} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{8}{3}.$$

Câu 35: Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên.



Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{4}; \frac{9}{32}\right).$

B. $\left(\frac{7}{32}; \frac{1}{4}\right).$

C. $\left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32}\right).$

D. $\left(0; \frac{3}{16}\right).$

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^2 + a = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + a = 0$ (*).

Do đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ cắt parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương nên phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt $0 < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{16} - 2a > 0 \\ 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{9}{32}.$$

Ta có:

$$S_1 = \int_0^{x_1} \left(\frac{1}{2}x^2 + a - \frac{3}{4}x \right) dx; S_2 = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x^2 + a \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}x^2 + a - \frac{3}{4}x \right) dx.$$

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow S_1 - S_2 = 0 \Leftrightarrow \int_0^{x_1} \left(\frac{1}{2}x^2 + a - \frac{3}{4}x \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}x^2 + a - \frac{3}{4}x \right) dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_2} \left(\frac{1}{2}x^2 + a - \frac{3}{4}x \right) dx = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^3}{6} + ax - \frac{3}{8}x^2 \right) \Big|_0^{x_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}x_2^3 + ax_2 - \frac{3}{8}x_2^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}x_2^2 + a - \frac{3}{8}x_2 = 0.$$

Mà x_2 là nghiệm phương trình (*) nên $\frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{4}x_2 + a = 0$.

Trừ vế với vế hai phương trình được: $-\frac{1}{3}x_2^2 + \frac{3}{8}x_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 & (L) \\ x_2 = \frac{9}{8} & (TM) \end{cases}$.

Với $x_2 = \frac{9}{8} \Rightarrow a = \frac{27}{128}$ (tm). Vậy $a = \frac{27}{128} \in \left(\frac{3}{16}; \frac{7}{32}\right)$.

Dạng 2: ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$. B. $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$. C. $V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx$. **D. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.**

Lời giải:

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Câu 37: Thể tích khối tròn xoay do hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$ quay quanh trục Ox là:

A. $V = \pi \int_4^0 f^2(x) dx$. B. $V = \pi \int_0^4 |f(x)| dx$. C. $V = \pi \int_0^4 f(x) dx$. **D. $V = \pi \int_0^4 f^2(x) dx$.**

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể (H) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x = a$ và $x = b$ ($a < b$). Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của (H) bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x , với $a \leq x \leq b$. Giả sử hàm số $y = S(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó, thể tích V của vật thể (H) được tính bởi công thức

A. $V = \int_a^b S^2(x) dx$. **B. $V = \int_a^b S(x) dx$.** C. $V = \pi \int_a^b S^2(x) dx$. D. $V = \pi \int_a^b S(x) dx$.

Câu 39: Cho vật thể (T) được giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = -2$ và $x = 2$. Biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x , ($x \in [-2; 2]$) là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{4 - x^2}$. Thể tích của vật thể (T) bằng

A. π . **B. $\frac{32}{3}$.** C. $\frac{32\pi}{3}$. D. $\frac{8}{3}$.

Lời giải:

Thể tích của vật thể (T) là $V = \int_{-2}^2 \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 dx = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3}$.

Câu 40: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (0 \leq x \leq \pi)$ là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

A. $2\pi\sqrt{3}$.

B. 3.

C. $2\sqrt{3}$.

D. 3π .

Lời giải:

$$\text{Ta có } V = \int_0^\pi S(x)dx = \int_0^\pi S(x)dx = \int_0^\pi \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{\sin x})^2 dx = \int_0^\pi \sqrt{3} \cdot \sin x dx = -\sqrt{3} \cos x \Big|_0^\pi = 2\sqrt{3}.$$

Câu 41: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=4$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x bất kì $(1 \leq x \leq 4)$ thì được thiết diện là một nửa lục giác đều có độ dài cạnh là $2x$.

A. $21\sqrt{3}$.

B. 21.

C. $63\sqrt{3}$.

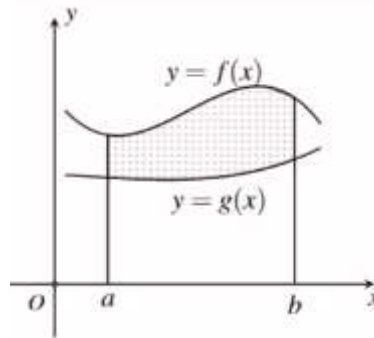
D. 63.

Lời giải:

Diện tích thiết diện tạo ra khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x bất kì $(1 \leq x \leq 4)$ là $S(x) = 3 \cdot \frac{(2x)^2 \sqrt{3}}{4} = 3x^2 \sqrt{3}$ nên thể tích vật thể là

$$V = \int_1^4 3x^2 \sqrt{3} dx = 63\sqrt{3}.$$

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$ (có đồ thị như hình vẽ). Gọi H là hình phẳng được tô đậm trong hình, khi quay H quanh trục Ox ta thu được khối tròn xoay có thể tích V . Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?



A. $V = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

B. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

C. $V = \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$.

D. $V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$.

Lời giải:

Thể tích khối tròn xoay hình phẳng H quay quanh trục Ox : $V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$.

Câu 43: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=\pi$, $y=0$ và $y=-\sin 2x$. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình D quanh trục Ox bằng

A. $\pi \int_0^\pi \sin^2 2x dx$.

B. $\pi \int_0^\pi |\sin 2x| dx$.

C. $\int_0^\pi \sin^2 2x dx$.

D. $\int_0^\pi |\sin 2x| dx$.

Lời giải:

$$V = \pi \int_0^{\pi} (\sin 2x)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 2x dx.$$

Câu 44: Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3\sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1; x=4$ quanh trục hoành được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $V = 3\pi^2 \int_1^4 x dx$. B. $V = 3\pi \int_1^4 \sqrt{x} dx$. **C. $V = 9\pi \int_1^4 x dx$.** D. $V = 3 \int_1^4 |\sqrt{x}| dx$.

Lời giải:

Áp dụng công thức ta có $V = \pi \int_1^4 (3\sqrt{x})^2 dx = 9\pi \int_1^4 x dx$.

Câu 45: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $y = (2x-1)\sqrt{\ln x}$, trục hoành và đường thẳng $x=e$. Thể tích V khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D quanh trục Ox được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $V = \int_1^e (2x-1)^2 \ln x dx$. B. $V = \int_{\frac{1}{2}}^e (2x-1)^2 \ln x dx$.
C. $V = \pi \int_1^e (2x-1)^2 \ln x dx$. D. $V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^e (2x-1)^2 \ln x dx$.

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm $(2x-1)\sqrt{\ln x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy nên thể tích cần tính là $V = \pi \int_1^e (2x-1)^2 \ln x dx$.

Câu 46: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Quay hình phẳng (H) quanh trục hoành tạo nên một khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{\pi}{2}(\sqrt{3}-1)$. B. $\pi \ln \sqrt{3}$. C. $\frac{8\pi}{9}$. **D. $\pi \ln 3$.**

Lời giải:

Thể tích khối tròn xoay bằng $V = \pi \int_0^2 \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}} \right]^2 dx = \pi \int_0^2 \frac{1}{x+1} dx = \pi \ln(x+1)_0^2 = \pi \ln 3$.

Câu 47: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành là

A. $V = \pi - 1$. B. $V = \pi + 1$. **C. $V = \pi(\pi+1)$.** D. $V = \pi(\pi-1)$.

Lời giải:

Hình phẳng D giới hạn bởi $\begin{cases} y = \sqrt{2 + \cos x} \\ y = 0 \\ x = 0, x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay

D quanh trục hoành được tính theo công thức:

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2 + \cos x})^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + \cos x) dx = \pi (2x + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(\pi + 1).$$

Câu 48: Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x-1}$, trục hoành, $x = 2$ và $x = 5$ quanh trục Ox bằng

- A. $\frac{14\pi}{3}$ B. $\frac{14}{3}$ **C. $\frac{15\pi}{2}$.** D. $\frac{15}{2}$.

Lời giải:

Áp dụng công thức tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox ta có:

$$V = \pi \int_2^5 (\sqrt{x-1})^2 dx = \pi \int_2^5 (x-1) dx = \frac{15\pi}{2}.$$

Câu 49: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 3x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh trục Ox .

- A. $V = \frac{81}{10}\pi$.** B. $V = \frac{81}{10}$ C. $V = \frac{9}{2}$ D. $V = \frac{9}{2}\pi$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 (3x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4) dx = \pi \left(3x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^3 \\ &= \pi \left(3 \cdot 3^3 - \frac{3}{2} \cdot 3^4 + \frac{3^5}{5} \right) = \frac{81}{10}\pi. \end{aligned}$$

Câu 50: Giả sử D là hình phẳng giới hạn bởi đường parabol $y = x^2 - 3x + 2$ và trục hoành. Quay D quanh trục hoành ta thu được khối tròn xoay có thể tích bằng

- A. $V = \frac{\pi}{30}$.** B. $V = \frac{1}{6}$ C. $V = \frac{\pi}{6}$ D. $V = \frac{1}{30}$.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \text{Thể tích của vật thể là: } V &= \pi \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)^2 dx = \pi \int_1^2 (x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 + 4x^2 - 12x) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} + 3x^3 + 4x - \frac{3}{2}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 6x^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{30}. \end{aligned}$$

Câu 51: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = -x^2 - 2x + 3$ và trục Ox quanh trục Ox là

- A. $V = \frac{16}{15}$. B. $V = \frac{512\pi}{15}$. C. $V = \frac{16\pi^3}{15}$. D. $V = \frac{16\pi}{15}$.

Lời giải:

Hoành độ giao điểm của đường $y = -x^2 - 2x + 3$ với $y = 0$ là $x = 1; x = -3$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V = \pi \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3)^2 dx = \frac{512\pi}{15}$.

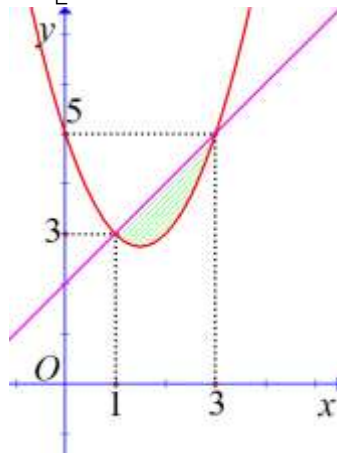
Câu 52: Thể tích của khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 3x + 5$, $y = x + 2$ quay quanh trục Ox là

- A. $\frac{16\pi}{15}$. B. $\frac{16}{15}$. C. $\frac{48}{5}$. D. $\frac{48\pi}{5}$.

Lời giải:

Hoành độ giao điểm của hai đường đã cho là nghiệm của phương trình:

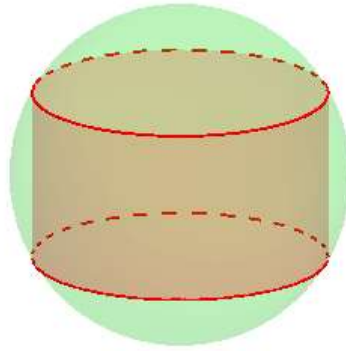
$$x^2 - 3x + 5 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$



Nhìn vào đồ thị ta có thể tích tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 3x + 5$, $y = x + 2$ quay quanh trục Ox là:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 \left| (x^2 - 3x + 5)^2 - (x + 2)^2 \right| dx = \pi \int_1^3 \left[(x + 2)^2 - (x^2 - 3x + 5)^2 \right] dx \\ &= \pi \int_1^3 \left[(x^2 + 4x + 4) - (x^4 + 9x^2 + 25 - 6x^3 + 10x^2 - 30x) \right] dx = \pi \int_1^3 (-x^4 + 6x^3 - 18x^2 + 34x - 21) dx \\ &= \pi \left(-\frac{x^5}{5} + \frac{3x^4}{2} - 6x^3 + 17x^2 - 21x \right) \Big|_1^3 = \frac{48\pi}{5}. \end{aligned}$$

Câu 53: Một khối cầu có bán kính là $5(dm)$, người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc đường kính và cách tâm một khoảng $3(dm)$ để làm một chiếc lu đựng nước (như hình vẽ). Tính thể tích mà chiếc lu chứa được.



- A. $\frac{100}{3}\pi (dm^3)$. B. $\frac{43}{3}\pi (dm^3)$. C. $41\pi (dm^3)$. **D. $132\pi (dm^3)$.**

Lời giải:

Trên hệ trục tọa độ Oxy , xét đường tròn $(C): (x-5)^2 + y^2 = 25$. Ta thấy nếu cho nửa trên trục Ox của (C) quay quanh trục Ox ta được mặt cầu bán kính bằng 5. Nếu cho hình phẳng (H) giới hạn bởi nửa trên trục Ox của (C) , trục Ox , hai đường thẳng $x=0, x=2$ quay xung quanh trục Ox ta sẽ được khối tròn xoay chính là phần cắt đi của khối cầu trong đề bài.

Ta có $(x-5)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{25 - (x-5)^2}$.

$\Rightarrow$ Nửa trên trục Ox của (C) có phương trình $y = \sqrt{25 - (x-5)^2} = \sqrt{10x - x^2}$.

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể tròn xoay khi cho (H) quay quanh Ox là:

$$V_1 = \pi \int_0^2 (10x - x^2) dx = \pi \left(5x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{52\pi}{3}.$$

Thể tích khối cầu là: $V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = \frac{500\pi}{3}.$

Thể tích cần tìm: $V = V_2 - 2V_1 = \frac{500\pi}{3} - 2 \cdot \frac{52\pi}{3} = 132\pi (dm^3).$

Dạng 3: ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG

Câu 54: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 180 - 20t$ (m/s). Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm mà vật dừng lại.

- A. 810 m.** B. 9 m. C. 160 m. D. 180 m.

Lời giải:

Thời điểm vật dừng lại là $v = 0 \Leftrightarrow 180 - 20t = 0 \Leftrightarrow t = 9(s)$

Quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm mà vật dừng lại là:

$$s(t) = \int_0^9 (180 - 20t) dt = 810(m)$$

Câu 55: Một xe ô tô đang đi với vận tốc 10 m/s thì người lái xe bắt đầu đạp phanh, từ thời điểm đó xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 10 - 5t$ (m/s), ở đó t tính bằng giây. Quãng đường ô tô dịch chuyển từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn bằng

- A. 5m.** **B. 10m.** C. 6m. D. 12m.

Lời giải:

Thời điểm xe dừng hẳn là: $v(t) = 10 - 5t = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (s)

Vậy quãng đường ô tô dịch chuyển từ lúc đạp phanh đến lúc dừng hẳn là:

$$S = \int_0^2 |v(t)| dt = \int_0^2 |10 - 5t| dt = 10 \text{ (m)}.$$

Câu 56: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = 180 - 20t$ (m/s). Tính quãng đường mà vật di chuyển được từ thời điểm $t = 0$ (s) đến thời điểm mà vật dừng lại.

A. 810 m.

B. 9 m.

C. 180 m.

D. 160 m.

Lời giải:

Gọi t_1 (s) là thời điểm vật dừng lại.

$$\text{Suy ra: } v(t_1) = 0 \Leftrightarrow 180 - 20t_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 9 \text{ (s)}$$

$$\text{Quãng đường vật di chuyển là: } S = \int_0^9 (180 - 20t) dt = (180t - 10t^2) \Big|_0^9 = 810.$$

Câu 57: Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái xe đạp phanh. Từ thời điểm đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn thì ô tô đi được bao nhiêu mét?

A. 10 m.

B. 40 m.

C. 20 m.

D. 30 m.

Lời giải:

$$\text{Khi xe dừng hẳn thì } v(t) = 0 \Leftrightarrow -5t + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ (s)}.$$

Khi đó quãng đường xe đi được từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là:

$$S = \int_0^4 (-5t + 20) dt = \left(-\frac{5t^2}{2} + 10t \right) \Big|_0^4 = 40 \text{ (m)}.$$

Câu 58: Hàng ngày anh An đi làm bằng xe máy trên cùng một cung đường từ nhà đến cơ quan mất 15 phút. Hôm nay khi đang di chuyển trên đường với vận tốc v_0 thì bất chợt anh gặp một chướng ngại vật nên anh đã hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -6 \text{ m/s}^2$. Biết rằng tổng quãng đường từ lúc anh nhìn thấy chướng ngại vật và quãng đường anh đã đi được trong 3s đầu tiên kể từ lúc hãm phanh là $35,5 \text{ m}$. Tính v_0 .

A. $v_0 = 45 \text{ km/h}$.

B. $v_0 = 40 \text{ km/h}$.

C. $v_0 = 60 \text{ km/h}$.

D. $v_0 = 50 \text{ km/h}$.

Lời giải:

Khi chưa hãm phanh thì quãng đường đi được của anh An được tính theo công thức

$$S(t) = v_0 \cdot t$$

Suy ra quãng đường anh An đã đi được trong 2s trước khi hãm phanh là $S_1 = 2v_0$

Sau khi hãm phanh thì xe chuyển động với vận tốc là $v(t) = -6t + v_0$.

Quãng đường anh An đi được trong 3s đầu tiên kể từ lúc hãm phanh là

$$S_2 = \int_0^3 (-6t + v_0) dt = (-3t^2 + v_0 t) \Big|_0^3 = -27 + 3v_0$$

$$\text{Khi đó ta có } S_1 + S_2 = 35,5 \Leftrightarrow 2v_0 + (-27 + 3v_0) = 35,5 \Leftrightarrow v_0 = 12,5 \text{ (m/s)} = 45 \text{ km/h}.$$

Câu 59: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_t = 8t$ (m/s). Đi được 5(s), người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với

gia tốc $a = -75 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Quãng đường $S(m)$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A. 94,00(m). B. 166,7(m). C. 110,7(m). D. 95,70(m).

Lời giải:

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe lăn bánh đến khi được phanh:

$$S_1 = \int_0^5 v_1(t) dt = \int_0^5 8t dt = 8 \frac{t^2}{2} \Big|_0^5 = 100(m).$$

Vận tốc $v_2(t)(m/s)$ của ô tô từ lúc được phanh đến khi dừng hẳn thoả mãn $v_2(t) = \int (-75) dt = -75t + C$, $v_2(5) = v_1(5) = 40 \Rightarrow C = 415$. Vậy $v_2(t) = -75t + 415$.

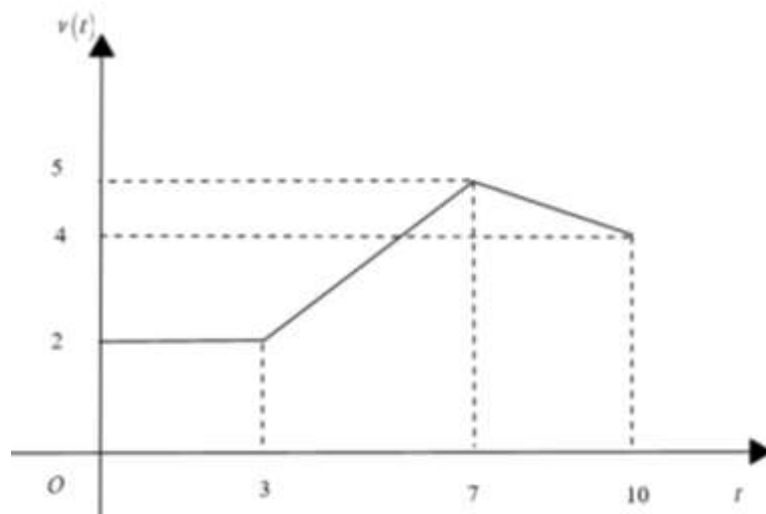
Thời điểm xe dừng hẳn tương ứng với t thoả mãn $v_2(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{83}{15}(s)$.

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe được phanh đến khi dừng hẳn:

$$S_2 = \int_5^{\frac{83}{15}} v_2(t) dt = \int_5^{\frac{83}{15}} (-75t + 415) dt = \frac{32}{3} (m).$$

Quãng đường cần tìm: $S = S_1 + S_2 = 100 + \frac{32}{3} = \frac{332}{3}(m)$.

Câu 60: Một vật chuyển động trong 10 giây với vận tốc $v(m/s)$ phụ thuộc vào thời gian $t(s)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Quãng đường vật chuyển động được trong 10 giây bằng

- A. $\frac{63}{2}m$. B. $\frac{67}{2}m$. C. $\frac{61}{2}m$. D. $\frac{65}{2}m$.

Lời giải:

Vận tốc chuyển động của vật trong 3 giây đầu là $v_1(t) = 2$.

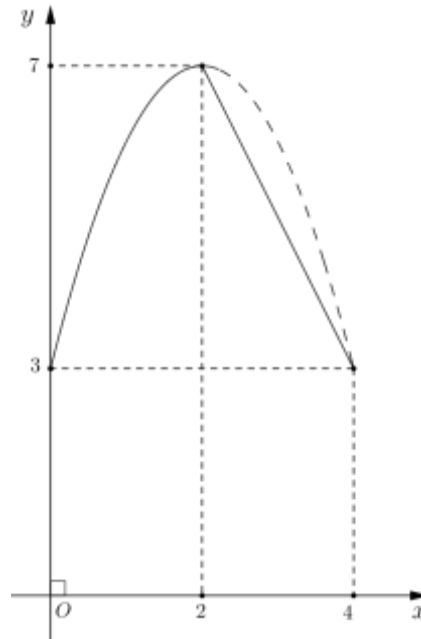
Vận tốc chuyển động của vật từ giây thứ 3 đến giây thứ 7 là $v_2(t) = \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}$.

Vận tốc chuyển động của vật từ giây thứ 7 đến giây thứ 10 là $v_3(t) = -\frac{1}{3}t + \frac{22}{3}$.

Ta có $S'(t) = v(t)$, suy ra

$$S = \int_0^3 v_1(t) dt + \int_3^7 v_2(t) dt + \int_7^{10} v_3(t) dt = \int_0^3 2dt + \int_3^7 \left(\frac{3}{4}t - \frac{1}{4} \right) dt + \int_7^{10} \left(-\frac{1}{3}t + \frac{22}{3} \right) dt = \frac{67}{2} \text{ (m)}.$$

Câu 61: Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 2 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;7)$ và trục đối xứng của parabol song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là đoạn thẳng IA . Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. 15,81(km).

B. 17,33(km).

C. 23,33(km).

D. 21,33(km).

Lời giải:

Parabol $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $(0;3)$ và có đỉnh $I(2;7)$ nên có

$$\begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 + 4x + 3$$

Đường thẳng IA đi qua $A(4;3)$ nhận vectơ $\overrightarrow{IA} = (2;-4)$ làm vectơ chỉ phương, suy ra có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (4;2)$

Phương trình đường thẳng IA là $4(x-4) + 2(y-3) = 0 \Leftrightarrow y = -2x + 11$

Quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ là:

$$s = \int_0^2 (-t^2 + 4t + 3) dt + \int_2^4 (-2t + 11) dt = \frac{64}{3} \text{ (km)}.$$

HẾT

Huế, 10h00' Ngày 02 tháng 10 năm 2024

