# TUYỂN TẬP MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ VIẾT PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

https://www.facebook.com/ThuongToan.hocmai

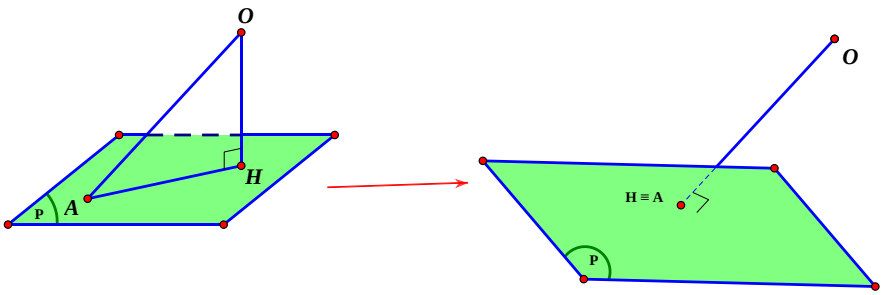
Biên soạn: Lưu Huy Thưởng

**HT 1.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1;1;1)$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. Khi đó, mặt phẳng $(P)$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $M_1(1;2;0)$. B. $M_2(1;-2;0)$. C. $M_3(-1;2;0)$. D. $M_4(-1;-2;0)$.

**Hướng dẫn**

**Cách 1: Phương pháp hình học**




Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng $(P)$

Ta có: $OH \le OA$.

Để $d(O,(P))\max \Leftrightarrow OH = OA \Leftrightarrow H \equiv A$

$\Leftrightarrow OA \perp (P)$ hay $\overrightarrow{OA}$ là một vec-tơ pháp tuyến của $(P)$

Ta có: $\begin{cases}(P)\text{qua } A(1;1;1)\\(P)\text{nhan } \overrightarrow{OA}=(1;1;1)\text{la 1 vtpt}\end{cases}$

Phương trình tổng quát của $(P)$ là:

$1.(x-1)+1.(y-1)+1.(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y+z-3=0.$

$\Rightarrow (P)$ đi qua điểm $M_1(1;2;0)$. **Chọn đáp án A.**

**Cách 2: Phương pháp đại số**

Bất đẳng thức Bunhiacopxki: Với mọi số $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3$ ta luôn có:

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2\le\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$

Mặt phẳng $(P)$ qua $A(1;1;1)\Rightarrow$ Phương trình tổng quát của $(P)$ có dạng:

$Ax+By+Cz-A-B-C=0$ $(A^2+B^2+C^2>0)$.

Khoảng cách từ O đến $(P)$:

$$d\left(O;(P)\right)=\frac{|A+B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 6 số ta được:

$$\left(A^2+B^2+C^2\right)\left(1^2+1^2+1^2\right)\ge\left(A+B+C\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\left(A^2+B^2+C^2\right)\left(1^2+1^2+1^2\right)}\ge|A+B+C|$$

$$\Leftrightarrow\frac{|A+B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\le\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{A}{1}=\frac{B}{1}=\frac{C}{1}\Rightarrow$ Chọn $\begin{cases}A=1\\B=1\\C=1\end{cases}\Rightarrow$ Phương trình $(P):x+y+z-3=0.$

$\Rightarrow(P)$ đi qua điểm $M_1(1;2;0)$. **Chọn đáp án A.**

**HT 2.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2;-1;1)$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng đi qua điểm A và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. Khi đó, mặt phẳng $(P)$ đi qua điểm nào sau đây?

A. $M_1(-1;-2;2)$. B. $M_2(1;-2;-2)$. C. $M_3(1;-2;2)$. D. $M_4(1;2;2)$.

**Hướng dẫn**

**Cách 1: Phương pháp hình học – Học sinh tự làm ☺**

**Cách 2: Phương pháp đại số**

Mặt phẳng $(P)$ qua $A(2;-1;1) \Rightarrow$ Phương trình tổng quát của $(P)$ có dạng:

$Ax+By+Cz-2A+B-C=0$ $(A^2+B^2+C^2>0)$.

Khoảng cách từ $O$ đến $(P)$:

$$d(O;(P))=\frac{|2A-B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 6 số ta được:

$$(A^2+B^2+C^2)(2^2+(-1)^2+1^2)\geq(2A-B+C)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(A^2+B^2+C^2)(2^2+(-1)^2+1^2)}\geq|2A-B+C|$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2A-B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\leq\sqrt{6}.$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{A}{2}=\frac{B}{-1}=\frac{C}{1}\Rightarrow\begin{cases}A=-2B\\C=-B\end{cases}\Rightarrow$ Chọn $\begin{cases}A=-2\\B=1\\C=-1\end{cases}$

$\Rightarrow$ Phương trình $(P):-2x+y-z+6=0.$

$\Rightarrow (P)$ qua $M_3$

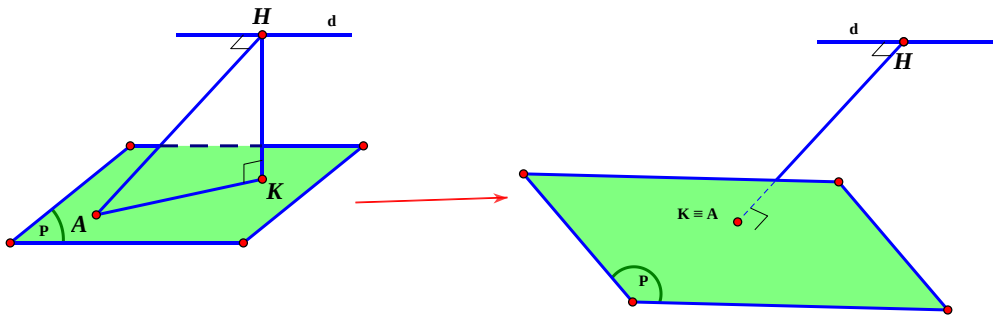
**Chọn đáp án C**

**HT 3.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Gọi $(P)$ là mặt phẳng đi qua A, song song với d và khoảng cách từ d tới (P) là lớn nhất. Khi đó, mặt phẳng $(P)$ vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(Q_1): x+y-z+3=0.$ B. $(Q_2): -x+y-z+3=0.$

C. $(Q_3): x+y+z+3=0.$ D. $(Q_4): x+y-2z+3=0.$

**Hướng dẫn**




Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên (P),

$\Rightarrow$ d(d, (P)) = d(H, (P)) = HK.

Ta có $HA \geq HK \Rightarrow$ HK lớn nhất khi $K \equiv A$.

Ta tìm tọa độ điểm H.

Phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t. \\ z=1+t \end{cases}$

$H \in d \Rightarrow H(1+t;1-t;1+t)$

$\overrightarrow{AH}=(t-1;2-t;t+3)$

Ta có: $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}_d=(1;-1;1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}_d=0 \Leftrightarrow t-1-2+t+t+3=0 \Leftrightarrow t=0.$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=(-1;2;3)$

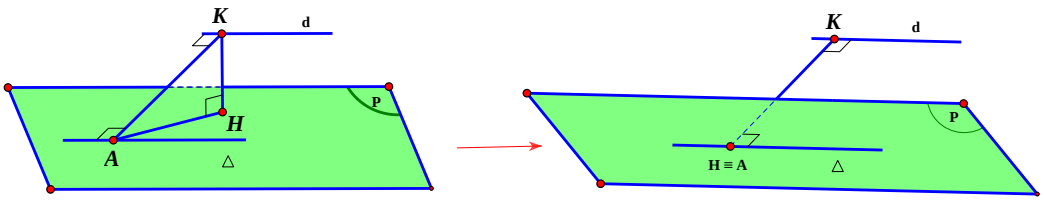
Ta có: $\vec{n}_{Q_2}=(-1;1;-1)$ và $\vec{n}_{Q_2}.\overrightarrow{AH}=0 \Rightarrow (P) \perp (Q_2)$

**Chọn đáp án B.**

**HT 4.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua điểm $A(4;0;-1)$ song song với $d$. Gọi $(P):Ax+By+Cz+D=0,(A,B,C\in\mathbb{Z})$ là mặt phẳng chứa $\Delta$ và có khoảng cách đến $d$ là lớn nhất. Khi đó, $M=A^2+B^2+C^2$ có thể là giá trị nào sau đây?

A. 9. B. 6. C. 5. D. 4.

**Hướng dẫn**




Gọi $K$ là hình chiếu vuông góc của A trên d.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của K trên $(P)$.

$\Rightarrow d(d;(P))=d(K;(P))=HK.$

Ta luôn có $KH\le KA$

$HK$ lớn nhất $\Leftrightarrow H\equiv A.$

$\Leftrightarrow (P)\perp AK.$

Hay mặt phẳng $(P)$ nhận $\overrightarrow{AK}$ là một vecto pháp tuyến.

Ta có: $d:\begin{cases}x=-2+t\\y=-2t\\z=2+2t\end{cases}.$

$K\in d\Rightarrow K(-2+t;-2t;2+2t)$

$\overrightarrow{AK}=(t-6;-2t;2t+3)$

$\overrightarrow{AK}\perp\vec{u}_d=(1;-2;2)\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}.\vec{u}_d=0$

$\Leftrightarrow t-6+4t+4t+6=0\Leftrightarrow t=0.$

$\Rightarrow\overrightarrow{AK}=(-6;0;3)$ cùng phương với $\vec{n}=(2;0;-1)$

$\Rightarrow M = 5.$

**Chọn đáp án C**

**HT 5.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $A(2;5;3)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. Khi đó, mặt phẳng $(P)$ vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+1}{1}.$

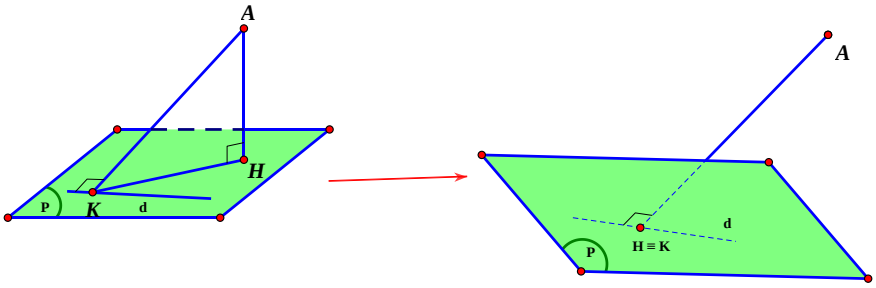
B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{1}.$

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}.$

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}.$

**Hướng dẫn**

**Cách 1: Phương pháp hình học**




Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên d.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $(P)$.

Ta có: $d(A;(P)) = AH \le AK.$

$\Rightarrow AH$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K.$

$\Leftrightarrow (P)$ nhận $\overrightarrow{AK}$ làm vecto pháp tuyến.

Ta có: $d: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 2+2t \end{cases}$

Với $K \in d \Rightarrow K(1+2t; t; 2+2t)$

$\overrightarrow{AK} = (2t-1; t-5; 2t-1)$

Ta có: $\overrightarrow{AK} \perp \vec{u}_d = (2;1;2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AK}.\vec{u}_d = 4t-2+t-5+4t-2 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$

$\Rightarrow \overrightarrow{AK} = (1;-4;1)$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

**Cách 2: Phương pháp đại số**

Phương trình mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0 \ (a^2+b^2+c^2>0)$.

(P) có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a;b;c)$, d đi qua điểm $M(1;0;2)$ và có VTCP $\vec{u} = (2;1;2)$.

Vì $(P) \supset d$ nên $\begin{cases} M \in (P) \\ \vec{n}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2c+d=0 \\ 2a+b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c = -(2a+b) \\ d = a+b \end{cases}$.

Xét 2 trường hợp:

TH1: Nếu $b=0$ thì (P): $x-z+1=0$. Khi đó: $d(A,(P))=0$.

TH2: Nếu $b \neq 0$. Chọn $b=1$ ta được (P): $2ax+2y-(2a+1)z+2a+2=0$.

Khi đó: $d(A,(P)) = \dfrac{9}{\sqrt{8a^2+4a+5}} = \dfrac{9}{\sqrt{2\left(2a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}}} \le 3\sqrt{2}$

Vậy $\max d(A,(P)) = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 2a+\dfrac{1}{2}=0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{4}$.

Khi đó: (P): $x-4y+z-3=0$.

**Chọn đáp án A.**

**HT 6.** Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (Q): $x+2y-z+5=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất. Mặt phẳng $(P)$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M_1(0;-2;6)$. B. $M_2(0;2;6)$. C. $M_1(0;2;-6)$. D. $M_1(0;-2;-6)$.

**Hướng dẫn**

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $(P): ax+by+cz+d=0 \ (a^2+b^2+c^2 \neq 0)$.

Gọi $\alpha = ((P),(Q))$.

Chọn hai điểm $M(-1;-1;3), N(1;0;4) \in c$. Ta có: $\begin{cases} M \in (P) \\ N \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -a-b \\ d = 7a+4b \end{cases}$

$\Rightarrow (P): ax+by+(-2a-b)z+7a+4b=0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{6}}.\frac{|a+b|}{\sqrt{5a^2+4ab+2b^2}}$

TH1: Nếu $a=0$ thì $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{6}}.\frac{|b|}{\sqrt{2b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^0$.

TH2: Nếu $a \neq 0$ thì $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{6}}.\frac{\left|1+\frac{b}{a}\right|}{\sqrt{5+4\frac{b}{a}+2\left(\frac{b}{a}\right)^2}}$.

Đặt $x = \frac{b}{a}$ và $f(x) = \cos^2\alpha$

Xét hàm số $f(x) = \frac{9}{6}.\frac{x^2+2x+1}{5+4x+2x^2}$.

Dựa vào BBT, ta thấy $\min f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90^0 > 30^0$

Do đó chỉ có trường hợp 1 thoả mãn, tức $a=0$. Khi đó chọn $b=1, c=1, d=4$.

Vậy: (P): $y-z+4=0$.

**Chọn đáp án B.**

**HT 7.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi $(P)$ là mặt phẳng đi qua điểm $M(9;1;1)$, cắt các **tia** $Ox$, $Oy$, $Oz$ tại A, B, C. Thể tích tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng:

A. 41. B. $\frac{83}{2}$. C. 40. D. $\frac{81}{2}$.

**Hướng dẫn**

Giả sử $A(a;0;0) \in Ox, B(0;b;0) \in Oy, C(0;0;c) \in Oz \ (a,b,c>0)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ta có: $M(9;1;1) \in (P) \Rightarrow \frac{9}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow abc = 9bc+ac+ab$ (1);

Thể tích khối chóp: $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc$ (2)

$(1) \Leftrightarrow abc = 9bc + ac + ab \geq 3\sqrt[3]{9(abc)^2} \Leftrightarrow (abc)^3 \geq 27.9(abc)^2 \Leftrightarrow abc \geq 243 \Rightarrow V \geq \frac{81}{2}.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 9bc = ac = ab \\ \frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 27 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow (P): \frac{x}{27} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1.$

**Chọn đáp án D.**

**HT 8.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;3)$, cắt các **tia** $Ox$, $Oy$, $Oz$ tại A, B, C sao cho biểu thức $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất. Mặt phẳng $(P)$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M_1(4;0;2)$. B. $M_2(2;0;4)$. C. $M_3(1;0;2)$. D. $M_4(2;0;1)$.

**Hướng dẫn**

Giả sử $A(a;0;0) \in Ox, B(0;b;0) \in Oy, C(0;0;c) \in Oz \ \ (a,b,c>0)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

Ta có: $M(1;2;3) \in (P) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$

Ta có: $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

Theo bất đẳng thức Bunhia-copxki ta có:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(1^2 + 2^2 + 3^2\right) \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{14}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{2b} = \frac{1}{3c} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = \frac{14}{2} \\ c = \frac{14}{3} \end{cases}$

Vậy, phương trình mặt phẳng: $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$

**Chọn đáp án B.**

**HT 9.** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm $M(1;4;9)$, cắt các **tia** Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho biểu thức $OA+OB+OC$ có giá trị nhỏ nhất. Mặt phẳng $(P)$ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $(12;0;0)$. B. $(0;6;0)$. C. $(0;0;12)$. D. $(6;0;0)$.

**Hướng dẫn**

Giả sử $A(a;0;0)\in Ox, B(0;b;0)\in Oy, C(0;0;c)\in Oz \ (a,b,c>0)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ta có: $M(1;4;9)\in(P) \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)(a+b+c)=\left(\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{4}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{9}{c}}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right)$$

$$\geq(1+2+3)^2$$

$$\Rightarrow a+b+c\geq(1+2+3)^2$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1\\ \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}\\ a+b+c=(1+2+3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\ b=12\\ c=18\end{cases}$

Vậy, $(P):\frac{x}{6}+\frac{y}{12}+\frac{z}{18}=1$

**Chọn đáp án D.**

**Đón xem phần 2: "TUYỂN TẬP MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ - VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG"**

**Giáo viên: Lưu Huy Thưởng**

**Nguồn : Hocmai**

# TUYỂN TẬP MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ
# VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG (P2)

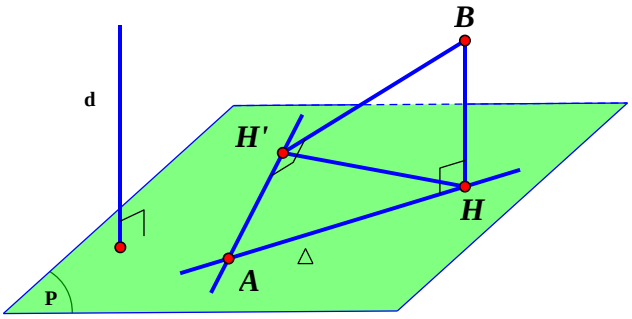
https://www.facebook.com/ThuongToan.hocmai

Biên soạn: Lưu Huy Thưởng

**HT 1.** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{2}$ và hai điểm $A(3;2;1), B(2;0;4)$. Gọi $\Delta$ là đường thẳng qua A, vuông góc với d sao cho khoảng cách từ B tới $\Delta$ là nhỏ nhất. Gọi $\vec{u}=(a;b;c)$ là vec-tơ chỉ phương của $\Delta$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Giá trị của $P=a^2+b^2+c^2$ có thể là giá trị nào dưới đây?

A. 11. B. 6. C. 3. D. 5.

**Hướng dẫn**




✓ **Dựng hình:**

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d.

$\Rightarrow (P)$ là mặt phẳng duy nhất. Khi đó, $\Delta\subset(P)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (P)

Khi đó, ta chứng minh đường thẳng $\Delta$ đi qua A và H thỏa yêu cầu bài toán.

✓ **Chứng minh:**

Ta có: $BH\perp(P)\Rightarrow BH\perp\Delta\Rightarrow d(B;\Delta)=BH.$

Xét: $\Delta'\neq\Delta$ đi qua A và nằm trong $(P)$.

Khi đó, gọi $H'$ là hình chiếu vuông góc của B trên $\Delta'$

Trong tam giác vuông $BHH'$ ta luôn có: $BH'>BH$

$\Rightarrow BH$ là đoạn nhỏ nhất.

✓ **Tính:**

d có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (1;-2;2)$.

Ta có, mặt phẳng $(P)$ qua A và vuông góc với d

$\Rightarrow (P): 1.(x-3)-2.(y-2)+2.(z-1)=0$

$\Leftrightarrow x-2y+2z-1=0.$

Đường thẳng BH qua B và song song với d

$\Rightarrow BH: \begin{cases} x=2+t \\ y=-2t \\ z=4+2t \end{cases} \Rightarrow H(2+t;-2t;4+2t)$ thay tọa độ vào phương trình $(P)$ ta được:

$2+t+4t+2(4+2t)-1=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(1;2;2).$

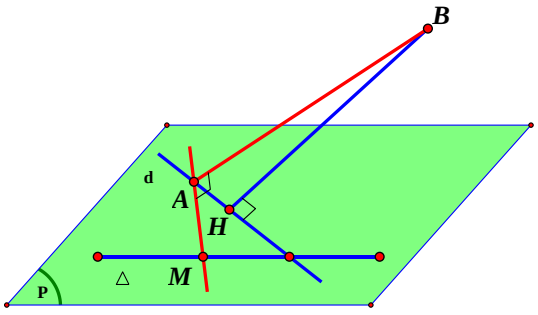
Ta có: $\overrightarrow{AH}=(-2;0;1)$ là một vec-tơ chỉ phương của $\Delta$

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

**HT 2.** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(3;-1;-5)$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm A và cắt đường thẳng $\Delta$ sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng d là lớn nhất. Khi đó, gọi $M(a;b;c)$ là giao điểm của d và $\Delta$. Giá trị $P=a+b+c$ bằng

A. $-2$. B. 2. C. 6. D. 4.

**Hướng dẫn**




➢ **Dựng hình và chứng minh**

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên $d \Rightarrow BH \le BA$

Vậy, để khoảng cách từ B đến d là lớn nhất thì $BH=BA \Leftrightarrow H \equiv A$

$\Rightarrow d \perp BA \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AB}$

➢ **Tính**

Ta có: $M \in \Delta \Rightarrow M(-1+2t;3t;-1-t)$, $\overrightarrow{AM}=(-2+2t;3t-2;-t), \overrightarrow{AB}=(2;-3;-4)$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow 2(-2+2t)-3(3t-2)+4t=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow M(3;6;-3)$

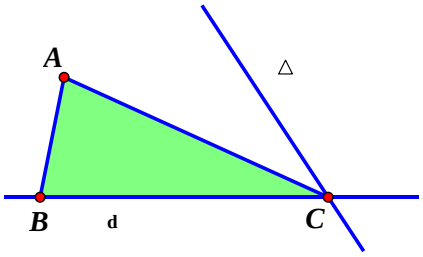
$\Rightarrow P=3+6-3=6.$

**Chọn đáp án C**

**HT 3.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm B và cắt đường thẳng $\Delta$ tại điểm C sao cho diện tích tam giác ABC có giá trị nhỏ nhất. Đường thẳng d vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2t \\ z=1-t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=-2t \\ z=1+t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=-1-t \\ y=-2t \\ z=1-t \end{cases}$.

**Hướng dẫn**




➢ **Ý tưởng:**

Công thức tính diện tích tam giác $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|$

Trong đó, $C \in \Delta \Rightarrow$ 1 ẩn số.

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của hàm 1 ẩn

➢ **Thực hiện**

Phương trình tham số của $\Delta$: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$.

Điểm $C \in \Delta$ nên $C(-1+2t;1-t;2t)$.

$\overrightarrow{AC}=(-2+2t;-4-t;2t); \overrightarrow{AB}=(2;-2;6); \left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]=(-24-2t;12-8t;12-2t)$

$\Rightarrow \left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]\right| = 2\sqrt{18t^2-36t+216} \Rightarrow S = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right]\right| = \sqrt{18(t-1)^2+198} \geq \sqrt{198}$

(Học sinh có thể xét hàm số: $f(t) = 18t^2 - 36t + 216$ để tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số)

Vậy: Min S = $\sqrt{198}$ khi $t = 1$ hay C(1; 0; 2)

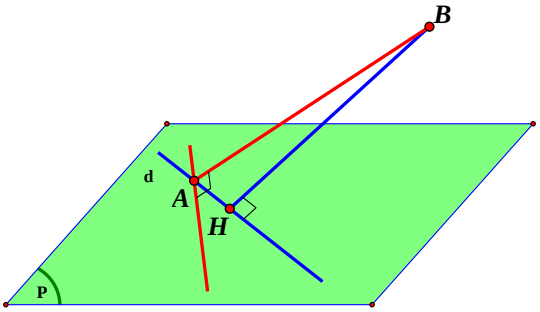
$\overrightarrow{BC} = (-2;-3;-4)$

**Chọn đáp án B.**

**HT 4.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+3y-z-1=0$ và các điểm $A(1;0;0)$ ; $B(0;-2;3)$. Gọi d là đường thẳng nằm trong (P) đi qua A và cách B một khoảng **lớn** nhất. Gọi $\vec{u}$ là vec-tơ chỉ phương của d. $\vec{u}$ vuông góc với vec-tơ nào sau đây?

A. $\vec{n}_1 = (1;-4;1)$. B. $\vec{n}_2 = (-1;4;1)$. C. $\vec{n}_3 = (1;4;1)$. D. $\vec{n}_4 = (-1;-4;1)$.

**Hướng dẫn**




➢ **Dựng hình và chứng minh**

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên d $\Rightarrow BH \leq BA$

Vậy, để khoảng cách từ B đến d là lớn nhất thì $BH = BA \Leftrightarrow H \equiv A$

Khi đó, đường thẳng d qua A, nằm trong $(P)$ và vuông góc với AB.

➢ **Tính**

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;-2;3)$ ; $\vec{n}_P = (1;3;-1)$ là một vec-tơ pháp tuyến của $(P)$

Gọi $\vec{u}_d$ là vec-tơ chỉ phương của d

Ta có: $\begin{cases} d \subset (P) \\ d \perp AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u}_d \perp \vec{n}_P \\ \vec{u}_d \perp \overrightarrow{AB} \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_d = \left[\vec{n}_P; \overrightarrow{AB}\right] = (7;-2;1).$

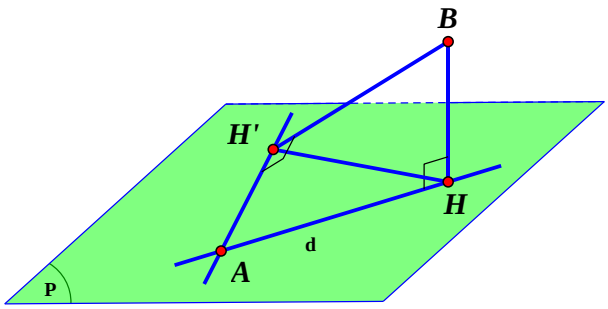
Ta có: $\vec{u}_d \perp \vec{n}_3$.

**Chọn đáp án C**

**HT 5.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+3y-z-1=0$ và các điểm $A(1;0;0)$; $B(0;-2;3)$. Gọi $d$ là đường thẳng nằm trong (P) đi qua A và cách B một khoảng **nhỏ** nhất. Gọi $\vec{u}$ là vec-tơ chỉ phương của d. $\vec{u}$ vuông góc với vec-tơ nào sau đây?

A. $\vec{n}_1=(-1;-3;1)$. B. $\vec{n}_2=(-1;3;1)$. C. $\vec{n}_3=(1;3;1)$. D. $\vec{n}_4=(-1;3;-1)$.

**Hướng dẫn**




**Cách 1: Phương pháp hình học.**

➢ **Dựng hình**

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (P)

Khi đó, ta chứng minh đường thẳng d đi qua A và H thỏa yêu cầu bài toán.

✓ **Chứng minh:**

Ta có: $BH\perp(P)\Rightarrow BH\perp\Delta\Rightarrow d(B;\Delta)=BH.$

Xét: $\Delta'\neq\Delta$ đi qua A và nằm trong $(P)$.

Khi đó, gọi $H'$ là hình chiếu vuông góc của B trên $\Delta'$

Trong tam giác vuông $BHH'$ ta luôn có: $BH'>BH$

$\Rightarrow BH$ là đoạn nhỏ nhất.

➢ **Tính**

$BH$ qua B và vuông góc với $(P)$

$\Rightarrow$ Phương trình tham số của BH là: $\begin{cases}x=t\\y=-2+3t\\z=3-t\end{cases}$

$H\in BH\Rightarrow H(t;-2+3t;3-t)$ Thay tọa độ điểm H vào phương trình mặt phẳng $(P)$ ta được:

$t-6+9t-3+t-1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{10}{11}$

$\Rightarrow H\left(\dfrac{10}{11};\dfrac{8}{11};\dfrac{23}{11}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(-\frac{1}{11};\frac{8}{11};\frac{23}{11}\right)$

d có một vec-tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(-1;8;23)$.

$\vec{u}_d \perp \vec{n}_1 \Rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

**Cách 2: Phương pháp đại số**

Đặt: $\vec{u}=(a;b;c)$ là vecto chỉ phương của d với $a^2+b^2+c^2>0$.

Ta có: $d\subset(P)\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{n}_P \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}_P=0$

$\Leftrightarrow a+3b-c=0 \Leftrightarrow c=a+3b$

$\Rightarrow \vec{u}=(a;b;a+3b)$.

Công thức tính khoảng cách từ B đến d:

$$d(B;d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$$

Ta có: $\left[\overrightarrow{AB};\vec{u}\right]=(-2a-9b;4a+3b;2a-b)$

$$\Rightarrow d(B;d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{(2a+9b)^2+(4a+3b)^2+(2a-b)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+(a+3b)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{24a^2+56ab+91b^2}}{\sqrt{2a^2+6ab+10b^2}}$$

TH1: $b=0\Rightarrow d(B;d)=2\sqrt{3}$

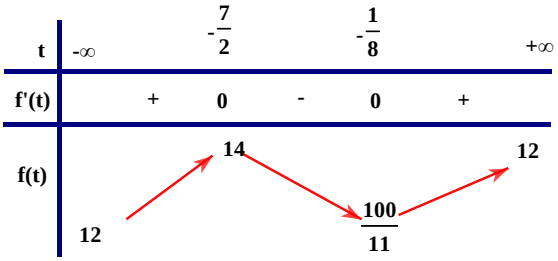
TH2: $b\neq 0$ chia cả tử và mẫu cho $b^2$ ta được:

$$d(B;d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB};\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{24a^2+56ab+91b^2}}{\sqrt{2a^2+6ab+10b^2}}=\frac{\sqrt{\frac{24a^2}{b^2}+\frac{56a}{b}+91}}{\sqrt{\frac{2a^2}{b^2}+\frac{6a}{b}+10}}\overset{\frac{a}{b}=t}{=}\frac{\sqrt{24t^2+56t+91}}{\sqrt{2t^2+6t+10}}$$

Xét hàm số: $f(t)=\frac{24t^2+56t+91}{2t^2+6t+10}$

$$f'(t)=\frac{32t^2+116t+14}{(2t^2+6t+10)^2}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\frac{7}{2}\\ t=-\frac{1}{8}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:




Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\text{Min}\,f(t)=\dfrac{100}{11}$

$\Rightarrow \sqrt{\min f(t)}=\sqrt{\dfrac{100}{11}}<2\sqrt{3}$

Vậy, $\min d(B;d)=\sqrt{\dfrac{100}{11}}$ khi $t=-\dfrac{1}{8}\Rightarrow \dfrac{a}{b}=-\dfrac{1}{8}.$

Chọn $\begin{cases}a=1\\ b=-8\end{cases}\Rightarrow c=-23\ \Rightarrow \vec{u}=(1;-8;-23)$

**Chọn đáp án A.**

**Nhận xét:** Phương pháp đại số vừa cho ta biết khoảng cách lớn nhất và nhỏ nhất từ B đến d nhưng mà tính thì…

**HT 6.** Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz,gọi d là đường thẳng đi qua $A(0;-1;2)$, cắt đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ sao cho khoảng cách giữa d và đường thẳng $\Delta_2:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$ là lớn nhất. Đường thẳng d song song với mặt phẳng nào sau đây?

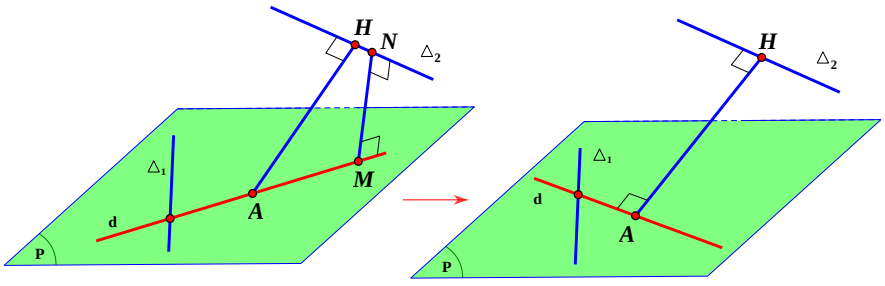
A. $(P_1):2x+y+17z+1=0.$ B. $(P_2):-2x+y-17z+1=0.$

C. $(P_3):2x-y-17z+1=0.$ D. $(P_4):2x+y-17z+1=0.$

**Hướng dẫn**

**Cách 1: Phương pháp hình học**

➢ **Dựng hình và chứng minh**



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $\Delta_2$

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của d và $\Delta_2$.

Khi đó, $d(d;\Delta_2)=MN\le AH$

$\Rightarrow$ Khoảng cách giữa d và đường thẳng $\Delta_2$ lớn nhất khi và chỉ khi AH là đoạn vuông góc chung của d và $\Delta_2$

➢ **Tính**

**Tìm vec-tơ $\overrightarrow{AH}$.**

Ta có: $H\in\Delta_2\Rightarrow H(2t+5;-2t;t)$

$\overrightarrow{AH}=(2t+5;-2t+1;t-2)$ ; $\vec{u}_2=(2;-2;1)$ là vec-tơ chỉ phương của $\Delta_2$.

$AH\perp\Delta_2\Rightarrow\overrightarrow{AH}.\vec{u}_2=0\Leftrightarrow 4t+10+4t-2+t-2=0\Leftrightarrow t=-\frac{2}{3}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AH}=\left(\frac{11}{3};\frac{7}{3};-\frac{8}{3}\right)$

**Tìm vec-tơ pháp tuyến của $(P)$**

Gọi $(P)$ là mặt phẳng chứa $\Delta_1$ và d

$M(-1;0;2)\in\Delta_1$ ; $\overrightarrow{AM}=(-1;1;0)$ ; $\vec{u}_1=(2;1;-1)$ là 1 vec-tơ chỉ phương của $\Delta_1$.

Mặt phẳng $(P)$ có 1 vec-tơ pháp tuyến là: $\vec{n}_P=\left[\overrightarrow{AM};\vec{u}_1\right]=(-1;-1;-3)$

**Tìm vec-tơ chỉ phương của d.**

Khi đó, $\begin{cases}d\perp AH\\ d\subset(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}_d\perp\overrightarrow{AH}\\ \vec{u}_d\perp\vec{n}_P\end{cases}\Rightarrow\vec{u}_d=\left[\overrightarrow{AH};\vec{n}_P\right]=\left(-\frac{29}{3};\frac{41}{3};-\frac{4}{3}\right)$

$\Rightarrow$ d song song với $(P_4)$

**Chọn đáp án D.**

**<u>Cách 2: Phương pháp đại số</u>**

Gọi $M=d\cap\Delta_1$. Giả sử $M(-1+2t;t;2-t)$.VTCP của d : $\vec{u}_d=\overrightarrow{AM}=(2t-1;t+1;-t)$

$\Delta_2$ đi qua $N(5;0;0)$ và có VTCP $\vec{v}_\Delta=(2;-2;1)$ ; $\overrightarrow{AN}=(5;1;-2)$ ; $\left[\vec{v}_\Delta;\vec{u}_d\right]=(t-1;4t-1;6t)$

$\Rightarrow d(\Delta_2,d)=\frac{\left|\left[\vec{v}_\Delta,\vec{u}_d\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\vec{v}_\Delta,\vec{u}_d\right]\right|}=3.\sqrt{\frac{(2+t)^2}{53t^2-10t+2}}=3.\sqrt{f(t)}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{(2+t)^2}{53t^2-10t+2}$. Ta suy ra được $\max f(t)=f(\frac{4}{37})=\frac{26}{9}$

$\Rightarrow \max(d(\Delta,d)) = \sqrt{26}$ tại $t = \frac{4}{37}$

$\Rightarrow \vec{u}_d = \left(-\frac{29}{3};\frac{41}{3};-\frac{26}{9}\right)$

**Chọn đáp án D.**

**HT 7.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua $A(1;-1;2)$, song song với mặt phẳng $(P): 2x-y-z+3=0$. Gọi $\alpha,\beta$ lần lượt là góc lớn nhất và nhỏ nhất giữa d và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định đúng là

A. $\begin{cases}\cos\alpha = 0\\ \cos\beta = \frac{5}{9}\end{cases}$ B. $\begin{cases}\cos\alpha = 0\\ \cos\beta = \frac{5\sqrt{3}}{9}\end{cases}$ C. $\begin{cases}\cos\alpha = \frac{5}{9}\\ \cos\beta = 0\end{cases}$ D. $\begin{cases}\cos\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{9}\\ \cos\beta = 0\end{cases}$

**Hướng dẫn**

$\Delta$ có VTCP $\vec{u}_\Delta = (1;-2;2)$. Gọi VTCP của đường thẳng d là $\vec{u} = (a;b;c)$.

$d \,/\!/\, (P) \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}_P = 0 \Leftrightarrow c = 2a - b$. Gọi góc giữa hai mặt phẳng là $\theta$.

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{|5a-4b|}{3\sqrt{5a^2-4ab+2b^2}} = \frac{1}{3}.\sqrt{\frac{(5a-4b)^2}{5a^2-4ab+2b^2}}$$

+ TH1: Nếu $b = 0$ thì $\cos\theta = \frac{1}{3}.\sqrt{5}$

+ TH2: Nếu $b \neq 0$. Đặt $t = \frac{a}{b} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3}.\sqrt{\frac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}} = \frac{1}{3}.\sqrt{f(t)}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}$. Ta suy ra được: $0 \le \cos\theta = \sqrt{f(t)} \le \frac{5\sqrt{3}}{9}$

So sánh TH1 và TH2, ta suy ra: $0 \le \cos\theta \le \frac{5\sqrt{3}}{9}$

Trong $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ hàm cosin là hàm nghịch biến, góc càng nhỏ, giá trị cosin càng lớn

$\Rightarrow \begin{cases}\cos\alpha = 0\\ \cos\beta = \frac{5\sqrt{3}}{9}\end{cases}$ **Chọn đáp án B.**

**HT 8.** Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ gọi d là đường thẳng đi qua $A(-1;0;-1)$, cắt đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$. Gọi $\alpha,\beta$ lần lượt là góc lớn nhất và nhỏ nhất giữa d và đường thẳng $\Delta_2: \frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{2}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định đúng là

A. $\begin{cases}\cos\alpha=0\\ \cos\beta=\frac{2}{5}\end{cases}$ B. $\begin{cases}\cos\alpha=0\\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$ C. $\begin{cases}\cos\alpha=0\\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}$ D. $\begin{cases}\cos\alpha=0\\ \cos\beta=\frac{1}{5}\end{cases}$

**Hướng dẫn**

Gọi $M=d\cap\Delta_1$. Giả sử $M(1+2t;2+t;-2-t)$.

VTCP của d: $\vec{u}_d=\overrightarrow{AM}=(2t+2;t+2;-1-t)$. Gọi $\theta=(d,\Delta_2)$.

$\Rightarrow \cos\theta=\frac{2}{3}.\sqrt{\frac{t^2}{6t^2+14t+9}}=\frac{2}{3}.\sqrt{f(t)}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2}{6t^2+14t+9}$.

Ta suy ra được $\max f(t)=f\left(-\frac{9}{7}\right)=\frac{9}{5}; \min f(t)=f(0)=0$

$\Rightarrow 0\le\cos\theta\le\frac{2}{\sqrt{5}}$

Trong $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ hàm cosin là hàm nghịch biến, góc càng nhỏ, giá trị cosin càng lớn

$\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=0\\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}$

**Chọn đáp án C**

**Đón xem phần 3: "TUYỂN TẬP MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ - ĐIỂM TRONG KHÔNG GIAN"**

**Giáo viên: Lưu Huy Thưởng**

**Nguồn : Hocmai**