

HÌNH HỌC *Oxyz*

Vận dụng cao

Phần 1. Các bài toán cơ bản ở mức vận dụng

Phần 2. Cực trị trong hình học Oxyz

Phần 3. Các bài toán về mặt cầu

Phần 4. Bài toán cực trị sử dụng tâm tỷ cự

Phần 5. Bài toán hỏi số mặt phẳng, số mặt cầu

Phần 6. Bài toán quỹ tích

Phần 1. Các bài toán cơ bản ở mức vận dụng

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 4 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{1}$. Mặt phẳng (α) song song với (P) và cắt d_1, d_2 theo thứ tự tại M, N sao cho $MN = \sqrt{3}$. Điểm nào sau đây thuộc (α) ?

- A. $A(1;2;3)$. B. $B(0;1;-3)$. C. $C(0;-1;3)$. D. $D(0;1;3)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P): x - y + z - 1 = 0$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (1;b;c)$, biết rằng (α) vuông góc với (P) và cắt các tia Ox, Oz lần lượt tại M và N thỏa $OM = 3ON$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $b + c = -84$. B. $b + c = -7$. C. $b + c = 7$. D. $b + c = 84$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;3)$, $N(3;1;3)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$, $d_2: \frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M ; cắt d_1 tại A và cắt d_2 tại B sao cho A, B, N thẳng hàng. Điểm nào sau đây không thuộc (α) ?

- A. $A(0;-2;0)$. B. $A(-4;0;0)$. C. $C(0;0;-3)$. D. $D(1;-1;1)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(1;2;3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a;b;1)$, biết Δ đồng thời cắt cả hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z-3}{1}$

và $d_2: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $a + b = 3$. B. $a + b = 4$. C. $a + b = 5$. D. $a + b = 6$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

- A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$. B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.
C. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$. D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 7 = 0$. Gọi I là giao điểm của d và (P) . Tính khoảng cách từ điểm M thuộc d đến (P) , biết $IM = 9$.

- A. $3\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{5}$. C. $\sqrt{15}$. D. 8.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;1)$, $B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng d nằm trong (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là

- A. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 7 - 3t \\ z = t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = -t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;2)$ và hai đường thẳng

$$d: 2x = y = z, \quad d': \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 0 \end{cases}. \text{ Tìm tọa độ của điểm } N \text{ thuộc đường thẳng } d' \text{ sao cho đường}$$

thẳng AN cắt đường thẳng d tại một điểm.

- A. $N(0;3;0)$. B. $N(2;1;0)$. C. $N(1;2;0)$. D. $N(0;0;3)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 3y - 2z + 2 = 0$ và đường

$$\text{thẳng } d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{1}. \text{ Đường thẳng qua } A(1;2;-1) \text{ và cắt } (P), d \text{ lần lượt tại}$$

$B, C(a;b;c)$ sao cho C là trung điểm của AB . Giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng

- A. -15 . B. -12 . C. -5 . D. 11 .

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng

$$(P): 2x + y - 4z + 1 = 0. \text{ Đường thẳng } d \text{ đi qua điểm } A, \text{ song song với mặt phẳng } (P), \text{ đồng}$$

thời cắt trục Oz . Phương trình tham số của đường thẳng d là

$$\text{A. } \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - 6t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 6t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;-4;1), B(1;-2;0), C(4;-1;3)$ và

$$\text{mặt phẳng } (\alpha): x - 2y + z - 7 = 0. \text{ Gọi } (P) \text{ là mặt phẳng qua } C \text{ và vuông góc với } (\alpha) \text{ sao cho}$$

$$d[A;(P)] = 2d[B;(P)]. \text{ Giả sử phương trình của } (P): ax + by + cz + d = 0. \text{ Tính } a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mp (P) đi qua $M(1;2;1), N(-1;0;-1)$ đồng

$$\text{thời cắt } Ox, Oy \text{ theo thứ tự tại } A, B \text{ (khác } O) \text{ sao cho } \frac{AM}{BN} = \sqrt{3}. \text{ Khi đó } (P) \text{ có một véc tơ}$$

pháp tuyến $\vec{n} = (1;m;n)$ thì tổng $m + n$ bằng

- A. 2. B. -1 . C. 1. D. 0.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;5;-3), B(-2;1;1), C(2;0;1)$ và mặt phẳng

$$(\alpha): 3x + 4y + 5z + 1 = 0. \text{ Gọi } D(a;b;c) \text{ (với } c > 0) \text{ thuộc } (\alpha) \text{ sao cho có vô số mặt phẳng } (P)$$

chứa C, D và khoảng cách từ A đến (P) gấp 3 lần khoảng cách từ B đến (P) . Tính giá trị

$$\text{biểu thức } S = a^2 + b^2 + c^2.$$

- A. $S = 24$. B. $S = 25$. C. $S = 27$. D. $S = 26$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x - z - 3 = 0$ và điểm

$$M(1;1;1). \text{ Gọi } A \text{ là điểm thuộc trục } Oz, B \text{ là hình chiếu của } A \text{ lên } (\alpha). \text{ Biết rằng tam giác}$$

MAB cân tại M . Đoạn thẳng MA có độ dài bằng

- A. $\sqrt{6}$ hoặc $\sqrt{18}$. B. $\sqrt{6}$ hoặc $\sqrt{102}$. C. $\sqrt{18}$. D. $\sqrt{6}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;-3), B(2;0;-1)$ và mặt

$$\text{phẳng } (P): 3x - 8y + 7z - 1 = 0. \text{ Điểm } C(a;b;c) \text{ là điểm nằm trên mặt phẳng } (P), \text{ có hoành độ}$$

dương để tam giác ABC đều. Tính $a - b + 3c$.

- A. -7 . B. -9 . C. -5 . D. -3 .

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;1), B(1;0;0), C(1;1;1)$ và mặt

$$\text{phẳng } (P): x + y + z - 2 = 0. \text{ Điểm } M(a;b;c) \text{ nằm trên mặt phẳng } (P) \text{ thỏa mãn}$$

$$MA = MB = MC. \text{ Tính } T = a + 2b + 3c.$$

- A. $T = 5$. B. $T = 3$. C. $T = 2$. D. $T = 4$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1), M(5;3;1), N(4;1;2)$ và mặt phẳng $(P): y+z=27$. Biết rằng tồn tại điểm B trên tia AM , điểm C trên (P) và điểm D trên tia AN sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Tọa độ của điểm C là

- A. $(-15;21;6)$. B. $(21;21;6)$. C. $(-15;7;20)$. D. $(21;19;8)$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;4)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua trực tâm H của ΔABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

- A. $\Delta: \frac{x-1}{-4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. B. $\Delta: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$.
C. $\Delta: \frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. D. $\Delta: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;-2;1), B(-2;2;1), C(1;-2;2)$. Hỏi đường phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm nào sau đây?

- A. $\left(0; -\frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. B. $\left(0; -\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. C. $\left(0; -\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$. D. $\left(0; \frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right)$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC nhọn có $H(2;2;1)$, $K\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, O lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, AC, AB .

Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

- A. $d: \frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$. B. $d: \frac{x-\frac{8}{3}}{1} = \frac{y-\frac{2}{3}}{-2} = \frac{z+\frac{2}{3}}{2}$.
C. $d: \frac{x+\frac{4}{9}}{1} = \frac{y-\frac{17}{9}}{-2} = \frac{z-\frac{1}{9}}{2}$. D. $d: \frac{x}{1} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z}{2}$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến d_1 kẻ từ B là $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong d_2 của góc C là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng BC có một vectơ chỉ phương là

- A. $\vec{u} = (2;1;-1)$. B. $\vec{u} = (1;1;0)$. C. $\vec{u} = (1;-1;0)$. D. $\vec{u} = (1;2;1)$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;0), B(0;1;1), C(1;0;1)$. Xét điểm D thuộc mặt phẳng Oxy sao cho tứ diện $ABCD$ là một tứ diện đều. Kí hiệu $D(x_0; y_0; z_0)$ là tọa độ của điểm D . Tổng $x_0 + y_0$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$ và

đường thẳng $d: \begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=m+t \end{cases}$. Tìm các giá trị của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B

sao cho các mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A và B vuông góc với nhau.

- A. $\begin{cases} m=-1 \\ m=-4 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m=-1 \\ m=0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m=0 \\ m=-4 \end{cases}$. D. Đáp án khác.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-4}$, $d_3: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$, $d_4: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi Δ là đường thẳng cắt cả bốn đường thẳng đã cho. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

- A. $\vec{u}_3 = (2; 0; -1)$. B. $\vec{u}_2 = (2; 1; -1)$. C. $\vec{u}_1 = (2; 1; 1)$. D. $\vec{u}_4 = (1; 2; -2)$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$, $\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$, $\Delta_3: \frac{x}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1}$ và $\Delta_4: \frac{x-5}{1} = \frac{y-a}{3} = \frac{z-b}{1}$. Biết không tồn tại đường thẳng nào trong không gian mà cắt được đồng thời cả bốn đường thẳng trên. Tính giá trị của $T = a - 2b$.

- A. $T = -2$. B. $T = -3$. C. $T = 2$. D. $T = 3$.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $S(1; 2; 3)$ và các điểm A, B, C thuộc các trục Ox, Oy, Oz sao cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- A. $\frac{343}{6}$. B. $\frac{343}{18}$. C. $\frac{343}{12}$. D. $\frac{343}{36}$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 2; 1)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự tạo thành cấp số nhân có công bội bằng 2. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ tới mặt phẳng (α) .

- A. $\frac{4}{\sqrt{21}}$. B. $\frac{\sqrt{21}}{21}$. C. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$. D. $9\sqrt{21}$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Một mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt các tia Ox, Oy, Oz tương ứng tại A, B, C . Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

- A. $T = \frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $T = \frac{1}{3}$. C. $T = \frac{1}{9}$. D. $T = \sqrt{3}$.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(6; -3; 4)$, $B(a; b; c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) sao cho M, N, P nằm giữa A và B thỏa mãn $AM = MN = NP = PB$. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng

- A. -40 . B. -32 . C. -24 . D. -17 .

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có $A_1(\sqrt{3}; -1; 1)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA_1 = 1$, (C không trùng O). Biết $\vec{u} = (a; b; 2)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng A_1C . Tính $T = a^2 + b^2$.

- A. $T = 4$. B. $T = 5$. C. $T = 9$. D. $T = 16$.

Phần 2. Cực trị trong hình học $Oxyz$

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 4 \end{cases}$ và điểm

$A(1; -1; 2)$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho A cách đều d và Δ . Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách giữa d và Δ .

- A. $d_{\max} = 1$. B. $d_{\max} = 3\sqrt{2}$. C. $d_{\max} = \sqrt{2}$. D. Không tồn tại.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với $(P): x + y + z - 7 = 0$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A, B sao cho AB ngắn nhất. Phương trình của đường thẳng Δ là

- A. $\begin{cases} x = 12 - t \\ y = 5 \\ z = -9 + t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 6 - t \\ y = \frac{5}{2} \\ z = -\frac{9}{2} + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 6 \\ y = \frac{5}{2} - t \\ z = -\frac{9}{2} + t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = \frac{5}{2} + t \\ z = -\frac{9}{2} + t \end{cases}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-4; -1; 3), B(-1; -2; -1), C(3; 2; -3)$ và $D(0; -3; -5)$. Mặt phẳng (α) qua D và tổng khoảng cách A, B, C đến (α) lớn nhất, đồng thời ba điểm A, B, C nằm về cùng một phía so với mặt phẳng (α) . Điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (α) .

- A. $M(7; -3; -4)$. B. $M(2; 0; -7)$. C. $M(-1; -1; -6)$. D. $M(36; 1; -1)$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-2; 1; 0), B(4; 4; -3), C(2; 3; -2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa d sao cho A, B, C ở cùng phía đối với mặt phẳng (α) . Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ A, B, C đến (α) . Tìm giá trị lớn nhất của $T = d_1 + 2d_2 + 3d_3$.

- A. $T_{\max} = 6\sqrt{14}$. B. $T_{\max} = \sqrt{203}$.
C. $T_{\max} = \sqrt{14} + \frac{\sqrt{203}}{3} + 3\sqrt{21}$. D. $T_{\max} = 2\sqrt{21}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua $A(2; 1; 0)$ song song với mặt phẳng $(P): x - y - z = 0$ và tổng khoảng cách từ $M(0; 2; 0), N(4; 0; 0)$ tới đường thẳng d có giá trị nhỏ nhất. Véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của d có tọa độ là:

- A. $(1; 0; 1)$. B. $(2; 1; 1)$. C. $(3; 2; 1)$. D. $(0; 1; -1)$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(2; 1; 0)$, song song với mặt phẳng $(P): x - y - z = 0$ và có tổng khoảng cách từ các điểm $M(0; 2; 0), N(4; 0; 0)$ tới đường thẳng đó đạt giá trị nhỏ nhất? Vectơ chỉ phương của Δ là vectơ nào sau đây?

- A. $\vec{u}_{\Delta} = (0; 1; -1)$ B. $\vec{u}_{\Delta} = (1; 0; 1)$ C. $\vec{u}_{\Delta} = (3; 2; 1)$ D. $\vec{u}_{\Delta} = (2; 1; 1)$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$ và điểm $A(2;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ O đến Δ và khoảng cách từ d đến Δ lớn nhất. Biết $\vec{u} = (2; b; c)$ là một vectơ chỉ phương của Δ . Tính tổng $b + c$.

- A. -3. B. 3. C. 4. D. -4.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -4; 4)$, $B(1; 7; -2)$, $C(1; 4; -2)$. Mặt phẳng $(P): 2x + by + cz + d = 0$ qua A và thỏa mãn $T = d(B, (P)) + 2d(C, (P))$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $b + c + d$.

- A. 77. B. 52. C. 45. D. 65.

Câu 9. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng gốc tọa độ O , các điểm $B(m; 0; 0)$, $D(0; m; 0)$, $A'(0; 0; n)$ với $m, n > 0$ và $m + n = 4$. Gọi M là trung điểm của CC' . Thể tích tứ diện $BDA'M$ lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{64}{27}$. B. $\frac{9}{4}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{16}{27}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(3; 3; 0)$, $B(3; 0; 3)$, $C(0; 3; 3)$. Mặt phẳng (P) đi qua O , vuông góc với mặt phẳng (ABC) sao cho mặt phẳng (P) cắt các cạnh AB, AC tại các điểm M, N thỏa mãn thể tích tứ diện $OAMN$ nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) có phương trình:

- A. $x + y - 2z = 0$. B. $x + y + 2z = 0$. C. $x - z = 0$. D. $y - z = 0$.

Phần 3. Các bài toán về mặt cầu

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2; 1; 0)$, $B(-2; 3; 2)$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc đường thẳng d . Diện tích của mặt cầu (S) bằng

- A. 68π . B. 25π . C. 74π . D. 26π .

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(3; 2; 2)$ bán kính $R_1 = 2$, mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(1; 0; 1)$ bán kính $R_2 = 1$. Mặt phẳng (P) đồng thời tiếp xúc với (S_1) và (S_2) cắt đoạn I_1I_2 có dạng $2x + by + cz + d = 0$. Tính $T = b + c + d$.

- A. -5. B. -3. C. -1. D. 2.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Gọi (S') là mặt cầu chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P) đồng thời (S') tiếp xúc với mặt phẳng $(Q): x - y + z - 5 = 0$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu (S') . Tính $T = abc$.

- A. $T = 1$. B. $T = -\frac{1}{8}$. C. $T = -1$. D. $T = \frac{1}{8}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 1 = 0$, $(Q): 2x + y + z - 1 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r . Xác định r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa yêu cầu.

- A. $r = \sqrt{3}$. B. $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$. C. $r = \sqrt{2}$. D. $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

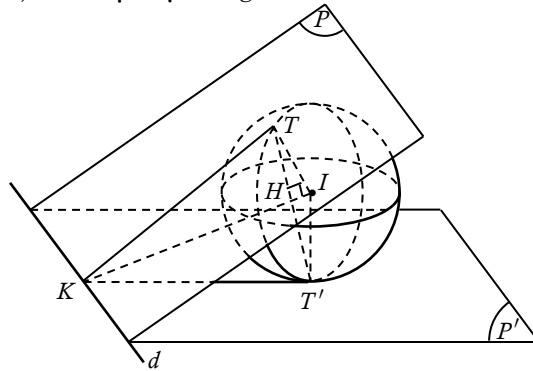
Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2), B(5;7;0)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my - 2(m+1)z + m^2 + 2m + 8 = 0$ là phương trình của một mặt cầu (S) sao cho qua hai điểm A, B có duy nhất một mặt phẳng cắt mặt cầu (S) đó theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1.

- A. 1. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(5; -3; 5)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm B . Tính OA biết rằng $AB = 4$.

- A. $OA = 3$. B. $OA = \sqrt{11}$. C. $OA = \sqrt{6}$. D. $OA = 5$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T và T' (tham khảo hình vẽ). Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .



- A. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$. B. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$. C. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$. D. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$, và hai điểm $A(1;0;4), B(0;1;4)$. Các mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ cùng chứa đường thẳng AB và hai mặt phẳng này lần lượt tiếp xúc với mặt cầu (S) tại các điểm H_1, H_2 . Điểm K nào trong số các điểm sau đây nằm trên đường thẳng H_1H_2 .

- A. $K(1;4;2)$. B. $K(-1;3;2)$. C. $K(1;5;3)$. D. $K(-1;3-2)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$ và điểm $A(1;1;-1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc nhau, cắt mặt cầu theo thiết diện là ba hình tròn. Tổng diện tích của ba hình tròn này bằng

- A. 3π . B. 4π . C. 11π . D. 12π .

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với $a, b, c > 0$. Biết mặt cầu (S) cắt 3 mặt phẳng toạ độ theo 3 đường tròn có bán kính $r = 5$ và mặt cầu (S) đi qua điểm $M(0;1;2)$. Tính tổng $a + b + c + d$.

- A. 25. B. 75. C. 40. D. 10.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 12$ và $M(x_o; y_o; z_o)$ là điểm thay đổi thuộc (S) . Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x_o + y_o + z_o$ bằng?

- A. 10. B. 11. C. 12. D. 14.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_m): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-m)^2 = \frac{m^2}{4}$ (với $m > 0$ là tham số thực) và hai điểm $A(2;3;5), B(1;2;4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để trên (S_m) tồn tại điểm M sao cho $MA^2 - MB^2 = 9$.

- A. $m = 1$. B. $m = 3 - \sqrt{3}$. C. $m = 8 - 4\sqrt{3}$. D. $m = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;2)$, mặt phẳng $(\alpha): x - y + z - 4 = 0$ và $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A , vuông góc với (α) và đồng thời (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tọa độ giao điểm M của (P) và trục xOx' là

- A. $M\left(-\frac{1}{3}; 0; 0\right)$. B. $M(1; 0; 0)$. C. $M\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$. D. $M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán

kính nhỏ nhất có phương trình là

- A. $3x - 2y - 4z - 8 = 0$. B. $y + z + 1 = 0$.
C. $x - 2y - 3 = 0$. D. $x + 3y + 5z + 2 = 0$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$, $(S_2): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Gọi d là đường thẳng đồng thời tiếp xúc với hai mặt cầu trên, cắt đoạn thẳng nối tâm hai mặt cầu và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. Nếu $\vec{u} = (a; 1; b)$ là một vectơ chỉ phương của d thì tổng $S = 2a + 3b$ bằng bao nhiêu?

- A. $S = 2$. B. $S = 1$. C. $S = 0$. D. $S = 4$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;3;3), B(-2;-1;1)$. Gọi (S) và (S') là hai mặt cầu thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với đường thẳng AB lần lượt tại các điểm A, B đồng thời tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm $M(a, b, c)$. Tính giá trị của $a + b + c$ biết rằng khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2018 = 0$ đạt giá trị lớn nhất?

- A. $a + b + c = 4$. B. $a + b + c = 5$. C. $a + b + c = 3$. D. $a + b + c = 2$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm I và bán kính bằng 3 sao cho luôn tiếp xúc với mặt phẳng Oxy . Khi các đường tròn giao tuyến của (S) với hai mặt phẳng tọa độ còn lại có diện tích lớn nhất thì tâm I của mặt cầu thuộc mặt phẳng nào?

- A. $x + y + z - 1 = 0$. B. $x - y + z = 0$. C. $x - 2y + 1 = 0$. D. $x + y = 0$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P_1): 2x + y + 2z - 5 = 0$, $(P_2): 2x + y + 2z + 13 = 0$, $(Q): 2x - 2y - z - 5 = 0$, và điểm $A(-2; 0; 0)$ nằm giữa hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$. Mặt cầu (S) di động có tâm $I(a; b; c)$ luôn đi qua A và luôn tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$. Khi khối cầu (S) cắt mặt phẳng (Q) theo thiết diện là hình tròn có diện tích lớn nhất thì $a + b - 2c$ bằng

- A. 0. B. 3. C. -3. D. 2.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(S_1):(x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$,

$(S_2):(x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1-t \\ z = 5+2t \end{cases}$. Gọi A, B là 2 điểm tùy ý thuộc

$(S_1), (S_2)$ và M thuộc đường thẳng d . Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + MB$ bằng bao nhiêu?

- A. $P_{\min} = 2\sqrt{6} - 3$. B. $P_{\min} = 2\sqrt{6} + 3$. C. $P_{\min} = 2\sqrt{3} - 3$. D. $P_{\min} = 2\sqrt{3} + 3$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(S_1):(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$,

$(S_2):(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 1$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2-t \\ y = -3t \\ z = -2-t \end{cases}$. Gọi A, B là 2 điểm tùy ý

thuộc $(S_1), (S_2)$ và M thuộc đường thẳng d . Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + MB$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2211}}{11}$. B. $\frac{\sqrt{3707}}{11} - 3$. C. $\frac{\sqrt{1771} + 2\sqrt{110}}{11}$. D. $\frac{\sqrt{3707}}{11}$.

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S):(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 12$ và điểm $A(4;4;0)$. Gọi B là điểm thuộc mặt cầu (S) .

Diện tích tam giác OAB có giá trị lớn nhất bằng:

- A. 6. B. $8\sqrt{3}$. C. $4(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. D. $8(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$. Gọi

$A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ là hai điểm thuộc mặt cầu thỏa mãn biểu thức

$T = 2(x_A - x_B) + (y_A - y_B) - (z_A - z_B)$ đạt giá trị lớn nhất. Trung điểm của đoạn thẳng AB thuộc mặt phẳng nào sau đây?

- A. $-y + 4z + 5 = 0$. B. $-x + 5y - 6z - 10 = 0$.
C. $x + 3y + 2z + 3 = 0$. D. $x + 3y - 7z + 10 = 0$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và

các điểm $A(3;0;0), B(4;2;1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S) . Giá trị nhỏ nhất của

$MA + 2MB$ bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $6\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $6\sqrt{3}$.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$,

$d_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$, $d_3: \frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{1}$. Mặt cầu bán kính nhỏ nhất tâm $I(a;b;c)$ tiếp

xúc với 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 . Tính $S = a + 2b + 3c$.

- A. $S = 10$. B. $S = 11$. C. $S = 12$. D. $S = 13$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Xét đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -mt \\ z = (m-1)t \end{cases}$ với m là tham số thực. Giả sử (P) và (P') là hai mặt phẳng

chứa d , tiếp xúc với (S) lần lượt tại T và T' . Khi m thay đổi, tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng TT' .

- A. $\frac{4\sqrt{13}}{5}$. B. $2\sqrt{2}$. C. 2. D. $\frac{2\sqrt{11}}{3}$.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M, N . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = AM + 4AN$.

- A. $S_{\min} = 50$. B. $S_{\min} = 5\sqrt{34} - 9$. C. $S_{\min} = S_{\min} = 5\sqrt{34} + 9$. D. $S_{\min} = 20$.

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$ và hai điểm $M(4;-4;2), N(6;0;6)$. Gọi E là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho $EM + EN$ đạt giá trị lớn nhất. Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S) tại E .

- A. $x - 2y + 2z + 8 = 0$. B. $2x + y - 2z - 9 = 0$.
C. $2x + 2y + z + 1 = 0$. D. $2x - 2y + z + 9 = 0$.

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 4 = 0$. Gọi $(P), (Q)$ là hai mặt phẳng vuông góc với nhau theo giao tuyến d và đồng thời tiếp xúc với (S) , K là hình chiếu vuông góc của tâm I của mặt cầu (S) lên d và M là giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OIK (O là gốc tọa độ). Hãy chọn khẳng định đúng về M .

- A. $M \in (2\sqrt{3}; 4)$. B. $M \in (2; 2\sqrt{2})$. C. Không tồn tại M . D. $M \in (2\sqrt{3}; 4)$.

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3), B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu có đường kính AB . Mặt phẳng (P) vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H (giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P)) có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P): 2x + by + cz + d = 0$ với $b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tính $S = b + c + d$.

- A. $S = -18$. B. $S = -11$. C. $S = -24$. D. $S = -14$.

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 25$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 4 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (T) , CD là một đường kính cố định của (T) , A là điểm thay đổi trên (T) (A khác C và D). Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) cắt (S) tại B . Giá trị lớn nhất của khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng

- A. $\frac{12}{\sqrt{13}}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\frac{15}{4}$. D. 11.

Phần 4. Bài toán cực trị sử dụng tâm tỷ cự

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-1;3;5), B(2;6;-1), C(-4;-12;5)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T = |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết rằng $M(x_0; y_0; z_0)$, hỏi x_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng sau.

- A. $(0; 2)$. B. $(2; 4)$. C. $(-4; -1)$. D. $(-5; -4)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;3), B(-3;1;3), C(1;5;1)$ và $M(x; y; 0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $T_{\min}$ của biểu thức $T = 2|\overrightarrow{MA}| + |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$.

- A. $T_{\min} = 2\sqrt{35}$. B. $T_{\min} = 2\sqrt{37}$. C. $T_{\min} = 2\sqrt{38}$. D. $T_{\min} = 12$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;0), B(-2;0;1), C(0;0;2)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z+4=0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $Q = a + b + 6c$.

- A. $Q = 2$. B. $Q = -2$. C. $Q = 0$. D. $Q = 1$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1), B(3;0;-1), C(0;21;-19)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S = a + b + c$.

- A. $S = 0$. B. $S = \frac{12}{5}$. C. $S = \frac{14}{5}$. D. $S = \frac{16}{5}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;1;-1), B(-1;2;0), C(3;-1;-2)$. Giả sử $M(a; b; c)$ thuộc mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 861$ sao cho $P = 2MA^2 - 7MB^2 + 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $T = |a| + |b| + |c|$ bằng

- A. $T = 49$. B. $T = 51$. C. $T = 55$. D. $T = 47$.

Phần 5. Bài toán hỏi số mặt phẳng, số mặt cầu

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x+z-2=0$, $(Q): 4y+5z-8=0$. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa giao tuyến của (P) và (Q) , đồng thời cắt $x'Ox, z'Oz$ lần lượt tại A, B (khác O) thỏa mãn $OA = OB$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = 2OB = 3OC \neq 0$?

- A. 4. B. 3. C. 1. D. 8.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P): 2x-y-z-2=0$, $(Q): x-2y+z+2=0$, $(R): x+y-2z+2=0$ và $(T): x+y+z=0$. Hỏi có nhiều mặt cầu có tâm thuộc (T) và tiếp xúc với $(P), (Q), (R)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(3;7;1), B(8;3;8)$ và $C(3;3;0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3 và (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng 6. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đi qua C và tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3), B\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right), C(1;1;4), D(5;3;0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3, (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng $\frac{3}{2}$. Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với 2 mặt cầu $(S_1), (S_2)$ đồng thời song song với đường thẳng đi qua C và D .

- A. 1. B. 2. C. 4. D. Vô số.

Phần 6. Bài toán quỹ tích

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;0)$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 8$. Đường thẳng (Δ) thay đổi qua A và tiếp xúc với (S) tại B . Biết khi (Δ) thay đổi thì B thuộc một đường cong (ω) cố định. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường cong (ω) bằng

- A. 2π . B. $\frac{8}{3}\pi$. C. 3π . D. 4π .

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + 4y - 4z + 5 = 0$ cắt (P) tại điểm B . Điểm M nằm trong mặt phẳng (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông và độ dài MB lớn nhất. Tính độ dài MB .

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. B. $\sqrt{5}$. C. $\frac{\sqrt{41}}{2}$. D. $\sqrt{41}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M thuộc mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$ và ba điểm $A(1;0;0); B(2;1;3); C(0;2;-3)$. Biết rằng quỹ tích các điểm M thỏa mãn $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 8$ là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

- A. $r = \sqrt{3}$. B. $r = 6$. C. $r = 3$. D. $r = \sqrt{6}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với a, b, c dương. Biết A, B, C di động trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $a + b + c = 2$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Khoảng cách từ $M(2019;0;0)$ tới mặt phẳng (P) bằng

- A. 2018. B. $\frac{2018}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{2019}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{2020}{\sqrt{3}}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$ và điểm $M(1;3;-1)$. Biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới mặt cầu đã cho luôn thuộc vào đường tròn (C) . Tìm tâm J và bán kính r của đường tròn (C) .

- A. $J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right)$ và $r = \frac{12}{25}$. B. $J\left(\frac{41}{25}; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right)$ và $r = \frac{12}{5}$.
C. $J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right)$ và $r = \frac{12}{5}$. D. $J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{73}{25}\right)$ và $r = \frac{12}{25}$.

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và hai điểm $A(1;1;1), B(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

- A. $R = \frac{2\sqrt{11}}{3}$. B. $R = \frac{2\sqrt{33}}{3}$. C. $R = 4$. D. $R = 6$.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P_m): (m-1)x + (2-m)y - mz + 2m - 1 = 0$ thay đổi. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;0;3)$ lên mặt phẳng (P_m) luôn thuộc một đường tròn cố định có bán kính là

- A. $R = 1$. B. $R = \frac{1}{2}$. C. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng $(P): 2mx + (m^2 + 1)y + (m^2 - 1)z - 10 = 0$. Biết khi m thay đổi thì tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với (P) và cùng đi qua A . Tổng bán kính của hai mặt cầu đó là

- A. $4\sqrt{2}$. B. $5\sqrt{3}$. C. $6\sqrt{3}$. D. $12\sqrt{2}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm A, B, C (không trùng O) lần lượt thay đổi trên các trục Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn điều kiện: tỉ số giữa diện tích của tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3}{2}$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - \cos \alpha \sin \beta)^2 + (y - \sin \alpha \sin \beta)^2 + (z - \cos \beta)^2 = \frac{1}{4}$, với α, β là các góc thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $\alpha, \beta \in [0; 2\pi]$. Khi đó mặt cầu (S) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định $(S_1), (S_2)$. Tính tổng thể tích của hai khối cầu (S_1) và (S_2) đó.

- A. 16π . B. $\frac{21\pi}{8}$. C. $\frac{14\pi}{3}$. D. $\frac{67\pi}{3}$.

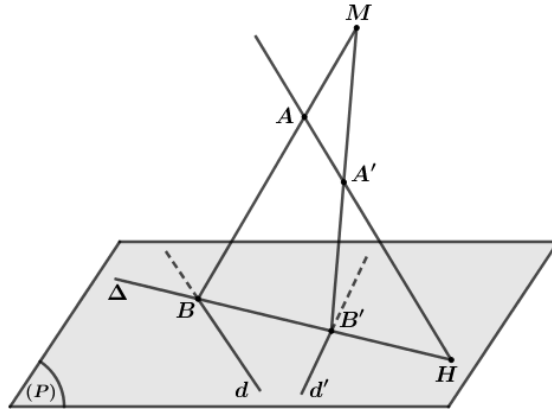
Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;2)$ và $B(2;-2;0)$. Gọi $I(1;1;-1)$ và $J(3;1;1)$ là tâm của hai đường tròn nằm trên hai mặt phẳng khác nhau và có chung một dây cung AB . Biết rằng luôn có một mặt cầu (S) đi qua cả hai đường tròn ấy. Tính bán kính R của (S) .

- A. $R = 2\sqrt{2}$. B. $R = 2\sqrt{6}$. C. $R = \frac{\sqrt{129}}{3}$. D. $R = \frac{\sqrt{219}}{3}$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 9$ và điểm $M(2;-3;5)$. Ba tia Mx, My, Mz thay đổi, đôi một vuông góc với nhau và cắt mặt cầu (S) tại 3 điểm A, B, C . Biết rằng hình chiếu của M lên mỗi đường thẳng AB, BC, CA cùng thuộc một mặt cầu bán kính R . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $R = \frac{3}{2}$. B. $R = 3$. C. $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$. D. $R = \frac{3}{4}$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{1}$, $d': \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$ và hai điểm $A(a;0;0), A'(0;0;b)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và d' , H là giao điểm của đường thẳng AA' và mặt phẳng (P) . Một đường thẳng Δ thay đổi trên (P) nhưng luôn đi qua H đồng thời Δ cắt d và d' lần lượt tại B, B' . Hai đường thẳng $AB, A'B'$ cắt nhau tại điểm M . Biết điểm M luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định có véctơ chỉ phương $\vec{u} = (15; -10; -1)$ (tham khảo hình vẽ). Tính $T = a + b$.



- A. $T = 8$. B. $T = 9$. C. $T = -9$. D. $T = 6$.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;3), N(3;4;5)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng (P) , các điểm H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N trên Δ . Biết rằng khi $MH = NK$ thì trung điểm của HK luôn thuộc một đường thẳng d cố định, phương trình của d là

- A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = t \\ y = 13 + 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 - t \end{cases}$

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;0)$. Giả sử B, C là các điểm thay đổi nằm trên các trục Ox và Oz . Gọi M là trung điểm của AC . Biết rằng khi B và C thay đổi nhưng nằm trên các trục Ox và Oz thì hình chiếu vuông góc H của M trên đường thẳng AB luôn nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó?

- A. $R = \frac{1}{4}$. B. $R = \frac{1}{2}$. C. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $R = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{-1}$ và điểm $A(1;1;1)$. Hai điểm B, C di động trên đường thẳng d sao cho mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt phẳng (OAC) . Gọi điểm B' là hình chiếu vuông góc của điểm B lên đường thẳng AC . Biết rằng quỹ tích các điểm B' là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

- A. $r = \frac{\sqrt{15}}{5}$. B. $r = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. C. $r = \frac{\sqrt{70}}{10}$. D. $r = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8$ và hai điểm $A(4;4;3), B(1;1;1)$. Gọi (C) là tập hợp các điểm $M \in (S)$ để cho $|MA - 2MB|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết rằng (C) là một đường tròn bán kính R . Tính R .

- A. $\sqrt{7}$. B. $\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6)$, điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) , N là điểm trên tia OM sao cho $OM \cdot ON = 12$. Biết khi M thay đổi thì điểm N luôn nằm trên mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó

- A. $\frac{7}{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\frac{5}{2}$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm O (O là gốc tọa độ) bán kính là $\sqrt{3}$ và mặt cầu (S_2) có tâm $O'(2;3;6)$ và bán kính bằng 4. Biết tập hợp các điểm A trong không gian mà độ dài tiếp tuyến kẻ từ A tới (S_1) và (S_2) bằng nhau là một mặt phẳng (còn gọi là mặt phẳng đẳng phương). Viết phương trình mặt phẳng đó.

A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1.$ **B.** $\frac{x}{9} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$ **C.** $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1.$ **D.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1.$

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 4 = 0$ và các điểm $A(2; 1; 2); B(3; -2; 2)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho các đường thẳng MA, MB luôn tạo với mặt phẳng (P) các góc bằng nhau. Biết rằng điểm M luôn thuộc đường tròn (C) cố định. Tìm tọa độ tâm của đường tròn (C) .

A. $\left(\frac{10}{3}; -3; \frac{14}{3}\right).$ **B.** $\left(\frac{17}{21}; -\frac{17}{21}; \frac{17}{21}\right).$ **C.** $\left(\frac{74}{27}; -\frac{97}{27}; \frac{62}{27}\right).$ **D.** $\left(\frac{32}{9}; -\frac{49}{9}; \frac{2}{9}\right).$

----- **HẾT** -----

HÌNH HỌC $Oxyz$

Vận dụng cao

Phần 1. Các bài toán cơ bản ở mức vận dụng

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 3z - 4 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{1}$. Mặt phẳng (α) song song với (P) và cắt d_1, d_2 theo thứ tự tại M, N sao cho $MN = \sqrt{3}$. Điểm nào sau đây thuộc (α) ?

- A. $A(1;2;3)$. B. $B(0;1;-3)$. C. $C(0;-1;3)$. D. $D(0;1;3)$.

Lời giải. Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}_p = (1; -2; 3)$.

Điểm $\begin{cases} M \in d_1 \rightarrow M(1+m; -m; -1+2m) \\ N \in d_2 \rightarrow N(1+2n; 3+n; -1+n) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{MN} = (2n-m; n+m+3; n-2m)$ là VTCP của (α) .

• $(\alpha) \parallel (P) \Leftrightarrow \vec{n}_p \perp \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \vec{n}_p \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow (2n-m)1 + (n+m+3)(-2) + (n-2m)3 = 0 \Leftrightarrow n = 2 + 3m$.

• Ta có $MN = \sqrt{3} \Leftrightarrow (2n-m)^2 + (n+m+3)^2 + (n-2m)^2 = 3 \xrightarrow{n=2+3m} m = -1 \Rightarrow M(0;1;-3)$.

Khi đó $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } M(0;1;-3) \\ \text{VTPT } \vec{n}_\alpha = (1; -2; 3) \end{cases} \rightarrow (\alpha): x - 2y + 3z + 11 = 0$. **Chọn B.**

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng

$(P): x - y + z - 1 = 0$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = (1; b; c)$, biết rằng (α) vuông góc với (P) và cắt các tia Ox, Oz lần lượt tại M và N thỏa $OM = 3ON$.

Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. $b + c = -84$. B. $b + c = -7$. C. $b + c = 7$. D. $b + c = 84$.

Lời giải. Mặt phẳng (P) có VPPT $\vec{n}_p = (1; -1; 1)$.

Ta có $\begin{cases} (\alpha) \cap Ox = M(m; 0; 0) \\ (\alpha) \cap Oz = N(0; 0; n) \end{cases}$ với $\begin{cases} m > 0 \\ n > 0 \end{cases}$. Vì $OM = 3ON \rightarrow m = 3n$.

Suy ra $M(3n; 0; 0) \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (3n-1; -2; -3) \\ \overrightarrow{AN} = (-1; -2; n-3) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = (-2n; -3n^2 + 10n; -6n)$.

Do $(\alpha) \perp (P)$ nên $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] \cdot \vec{n}_p = 0 \Leftrightarrow (-2n) \cdot 1 + (-3n^2 + 10n) \cdot (-1) + (-6n) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \text{ (loại)} \\ n = 6 \end{cases}$.

Với $n = 6$, suy ra $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = (-12; -48; -36)$.

Khi đó $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } A(1;2;3) \\ \text{VTPT } [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = (-12; -48; -36) \end{cases} \rightarrow (\alpha): x + 4y + 3z - 18 = 0$. **Chọn C.**

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;3)$, $N(3;1;3)$ và hai đường

thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$, $d_2: \frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M ; cắt d_1 tại A và cắt d_2 tại B sao cho A, B, N thẳng hàng. Điểm nào sau đây không thuộc (α) ?

- A. $A(0;-2;0)$. B. $A(-4;0;0)$. C. $C(0;0;-3)$. D. $D(1;-1;1)$.

Lời giải. Vì $\begin{cases} (\alpha) \cap d_1 = A \rightarrow A \in d_1 \rightarrow A(a; -2-2a; -a) \\ (\alpha) \cap d_2 = B \rightarrow B \in d_2 \rightarrow B(4+2b; -1-b; 5+3b) \end{cases}$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \overrightarrow{NA} = (a-3; -2a-3; -a-3) \\ \overrightarrow{NB} = (2b+1; -b-2; 3b+2) \end{cases}$$

$$\longrightarrow [\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}] = (-6a-12b-7ab-12; -3a+3b-5ab+3; 9b+3ab+9).$$

$$\text{Do } A, B, N \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow [\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}] = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a-12b-7ab-12=0 \\ -3a+3b-5ab+3=0 \\ 9b+3ab+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} A(0; -2; 0) \\ B(2; 0; 2) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (-1; -4; -3) \\ \overrightarrow{MB} = (1; -2; -1) \end{cases} \longrightarrow [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}] = (-2; -4; 6).$$

$$\text{Khi đó } (\alpha): \begin{cases} \text{qua } M(1; 2; 3) \\ \text{VTPT } [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}] = (-2; -4; 6) \end{cases} \longrightarrow (\alpha): x+2y-3z+4=0. \text{ Chọn C.}$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(1; 2; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; 1)$, biết Δ đồng thời cắt cả hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z-3}{1}$

$$\text{và } d_2: \begin{cases} x = -2+2t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases}. \text{ Khẳng định nào sau đây là đúng?}$$

- A. $a+b=3$. B. $a+b=4$. C. $a+b=5$. D. $a+b=6$.

$$\text{Lời giải. Gọi } \begin{cases} M = \Delta \cap d_1 \rightarrow M \in d_1 \rightarrow M(3+m; 7-3m; 3+m) \\ N = \Delta \cap d_2 \rightarrow N \in d_2 \rightarrow N(-2+2n; -n; 2) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (m+2; -3m+5; m) \\ \overrightarrow{AN} = (2n-3; -n-2; -1) \end{cases} \longrightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = (5m+mn-5; -2m+2mn+2; -11m-12n+5mn+11).$$

Do A, M, N cùng thuộc Δ nên

$$[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m+mn-5=0 \\ -2m+2mn+2=0 \\ -11m-12n+5mn+11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(4; 4; 4) \\ N(-2; 0; 2) \end{cases}.$$

Khi đó Δ có VTCP là $\overrightarrow{MN} = (-6; -4; -2) \longrightarrow$ chọn $\vec{u} = (3; 2; 1)$. **Chọn C.**

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

$$\text{A. } \Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

$$\text{B. } \Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

$$\text{C. } \Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}.$$

$$\text{D. } \Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}.$$

Lời giải. Gọi $B = \Delta \cap d$, suy ra $B \in d$ nên $B(1+t; t; -1+2t)$.

Khi đó Δ có VTCP là $\overrightarrow{AB} = (t; t; 2t-3)$. Đường thẳng d có VTCP $\vec{u}_d = (1; 1; 2)$.

Theo đề bài: $\Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = t+t+4t-6=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow B(2; 1; 1)$.

Đường thẳng Δ cần tìm đi qua hai điểm A, B nên $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$. **Chọn B.**

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+2z-7=0$. Gọi I là giao điểm của d và (P) . Tính khoảng cách từ điểm M thuộc d đến (P) , biết $IM=9$.

A. $3\sqrt{2}$.

B. $2\sqrt{5}$.

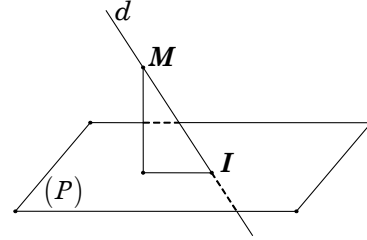
C. $\sqrt{15}$.

D. 8.

Lời giải. Đường thẳng d có VTCP $\vec{u_d} = (2; 2; 1)$. Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n_p} = (1; 2; 2)$.

Suy ra sin của góc α tạo bởi d và (P) bằng $\frac{|\vec{u_d} \cdot \vec{n_p}|}{|\vec{u_d}| \cdot |\vec{n_p}|} = \frac{8}{9}$.

Khi đó $d[M, (P)] = IM \cdot \sin \alpha = 8$. **Chọn D.**



Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 3; 1)$, $B(0; 2; 1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-7=0$. Đường thẳng d nằm trong (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là

A. $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t \\ z=2t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t \\ z=t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t \\ z=2t \end{cases}$.

Lời giải. Phương trình mặt phẳng trung trực của AB là $(\alpha): 3x+y-7=0$.

Đường thẳng cần tìm d cách đều hai điểm A, B nên sẽ thuộc mặt phẳng (α) .

Lại có $d \subset (P)$, suy ra $d = (P) \cap (\alpha)$ hay $d: \begin{cases} x+y+z-7=0 \\ 3x+y-7=0 \end{cases}$. Chọn $x=t$, ta được $\begin{cases} z=2t \\ y=7-3t \end{cases}$.

Chọn C.

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0; 0; 2)$ và hai đường thẳng

$d: 2x=y=z$, $d': \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=0 \end{cases}$. Tìm tọa độ của điểm N thuộc đường thẳng d' sao cho đường

thẳng AN cắt đường thẳng d tại một điểm.

A. $N(0; 3; 0)$.

B. $N(2; 1; 0)$.

C. $N(1; 2; 0)$.

D. $N(0; 0; 3)$.

Lời giải. Viết lại $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2} \longrightarrow d: \begin{cases} x=t' \\ y=2t' \\ z=2t' \end{cases}$. Gọi $\begin{cases} M(m; 2m; 2m) \in d \\ N(1+n; 2-n; 0) \in d' \end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases} \vec{AM} = (m; 2m; 2m-2) \\ \vec{AN} = (1+n; 2-n; -2) \end{cases} \longrightarrow [\vec{AM}, \vec{AN}] = (2mn-8m-2n+4; 2mn+4m-2n-2; -3mn)$.

Để AN cắt d tại $M \iff$ ba điểm A, M, N thẳng hàng $\iff [\vec{AM}, \vec{AN}] = \vec{0}$

$$\iff \begin{cases} 2mn-8m-2n+4=0 \\ 2mn+4m-2n-2=0 \\ -3mn=0 \end{cases} \iff \begin{cases} m=\frac{1}{2} \\ n=0 \end{cases} \longrightarrow N(1; 2; 0). \text{ Chọn C.}$$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+3y-2z+2=0$ và đường

thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{1}$. Đường thẳng qua $A(1; 2; -1)$ và cắt (P) , d lần lượt tại

$B, C(a; b; c)$ sao cho C là trung điểm của AB . Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

A. -15.

B. -12.

C. -5.

D. 11.

Lời giải. Ta có $C \in d \longrightarrow C(1+2t; -1-t; 4+t)$. Do C là trung điểm của

$$AB \longrightarrow B(4t+1; -2t-4; 2t+9).$$

$$\text{Mà } B \in (P) \longrightarrow (4t+1)+3(-2t-4)-2(2t+9)+2=0 \Leftrightarrow t=-\frac{9}{2} \longrightarrow C\left(-8; \frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Suy ra } a+b+c=-8+\frac{7}{2}-\frac{1}{2}=-5. \text{ Chọn C.}$$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng

$(P): 2x+y-4z+1=0$. Đường thẳng d đi qua điểm A , song song với mặt phẳng (P) , đồng thời cắt trục Oz . Phương trình tham số của đường thẳng d là

$$\text{A. } \begin{cases} x=1+5t \\ y=2-6t \\ z=3+t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=2+t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x=1+3t \\ y=2+2t \\ z=3+t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x=1-t \\ y=2+6t \\ z=3+t \end{cases}$$

Lời giải. Gọi $d \cap Oz = B(0;0;z_0) \longrightarrow d$ có VTCP là $\overrightarrow{AB} = (-1; -2; z_0 - 3)$.

Mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n} = (2; 1; -4)$.

$$\text{Theo giả thiết } d \parallel (P) \longrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow -2 - 2 - 4z_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow z_0 = 2 \longrightarrow \overrightarrow{AB} = (-1; -2; -1).$$

Vậy đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (1; 2; 1)$ nên loại các phương án A, C, D. **Chọn B.**

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2; -4; 1), B(1; -2; 0), C(4; -1; 3)$ và mặt phẳng $(\alpha): x-2y+z-7=0$. Gọi (P) là mặt phẳng qua C và vuông góc với (α) sao cho $d[A; (P)] = 2d[B; (P)]$. Giả sử phương trình của $(P): ax+by+cz+d=0$. Tính $a^2+b^2+c^2+d^2$.

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải. Gọi $I = (P) \cap AB$. Lại có $d[A; (P)] = 2d[B; (P)] \longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB} \end{cases}$.

Trường hợp 1. I nằm ngoài AB mà $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \longrightarrow I(0; 0; -1)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{n_{(\alpha)}}] = (7; 0; -7) \parallel (1; 0; -1) \longrightarrow (P) x - z - 1 = 0.$$

Trường hợp 2. I nằm trong đoạn AB mà $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB} \Rightarrow I\left(\frac{4}{3}; -\frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{n_{(\alpha)}}] = (21; 0; -21) \parallel (1; 0; -1) \longrightarrow (P): x - z - 1 = 0.$$

Qua hai trường hợp suy ra $a=1, b=0, c=-1, d=-1 \longrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=3$. **Chọn B.**

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mp (P) đi qua $M(1;2;1), N(-1;0;-1)$ đồng

thời cắt Ox, Oy theo thứ tự tại A, B (khác O) sao cho $\frac{AM}{BN} = \sqrt{3}$. Khi đó (P) có một véc tơ

pháp tuyến $\vec{n} = (1; m; n)$ thì tổng $m+n$ bằng

A. 2.

B. -1.

C. 1.

D. 0.

Lời giải. Giả sử (P) cắt ba trục tọa độ tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $abc \neq 0$.

$$\text{Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng } (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

$$\text{Vì } (P) \text{ qua } M, N \text{ nên ta có hệ phương trình } \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ \frac{-1}{a} + \frac{-1}{c} = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a + c = -ac \end{cases}.$$

$$\text{Từ } AM = \sqrt{3}BN \Leftrightarrow (a-1)^2 + 5 = 3(2+b^2) \longrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases}.$$

Với $a = 3 \rightarrow c = -\frac{3}{4} \Rightarrow (P): x + 3y - 4z - 3 = 0 \longrightarrow m + n = -1$.

Với $a = -1 \rightarrow -1 + c = c$ không có giá trị thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;5;-3), B(-2;1;1), C(2;0;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x + 4y + 5z + 1 = 0$. Gọi $D(a;b;c)$ (với $c > 0$) thuộc (α) sao cho có vô số mặt phẳng (P) chứa C, D và khoảng cách từ A đến (P) gấp 3 lần khoảng cách từ B đến (P) . Tính giá trị biểu thức $S = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $S = 24$.

B. $S = 25$.

C. $S = 27$.

D. $S = 26$.

Lời giải. Vì khoảng cách từ A đến (P) gấp 3 lần khoảng cách từ B đến $(P) \longrightarrow (P)$ đi qua giao điểm I của AB và (α) và có thể xảy ra hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. $\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{IB} \longrightarrow I(-1;2;0)$. Ta tìm được giao điểm D đường thẳng JC và (α) là $D(-4;4;-1)$ (loại).

Trường hợp 2. $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB} \longrightarrow I(-4;-1;3)$. Ta tìm được giao điểm D đường thẳng IC và (α) là $D(-4;-1;3)$ (thỏa).

Vậy $\begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \\ c = 3 \end{cases} \longrightarrow S = a^2 + b^2 + c^2 = 26$. **Chọn D.**

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x - z - 3 = 0$ và điểm $M(1;1;1)$. Gọi A là điểm thuộc trục Oz , B là hình chiếu của A lên (α) . Biết rằng tam giác MAB cân tại M . Đoạn thẳng MA có độ dài bằng

A. $\sqrt{6}$ hoặc $\sqrt{18}$.

B. $\sqrt{6}$ hoặc $\sqrt{102}$.

C. $\sqrt{18}$.

D. $\sqrt{6}$.

Lời giải. Vì A là điểm thuộc trục Oz , nên $A(0;0;a)$. B là hình chiếu của A lên (α) , ta tìm được $B\left(\frac{a+3}{2};0;\frac{a-3}{2}\right) \longrightarrow$ trung điểm của AB là

$$I = \left(\frac{a+3}{4};0;\frac{3a-3}{4}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \left(\frac{a-1}{4};-1;\frac{3a-7}{4}\right).$$

Ta có $AB \perp (\alpha)$ nên AB có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;0;-1)$.

Lại có tam giác MAB cân tại $M \longrightarrow MI \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \frac{a-1}{4} \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + \frac{3a-7}{4} \cdot (-1) = 0 \longrightarrow a = 3$.

Vậy $A(0;0;3) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (-1;-1;2) \longrightarrow MA = \sqrt{6}$. **Chọn D.**

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;-3), B(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 8y + 7z - 1 = 0$. Điểm $C(a;b;c)$ là điểm nằm trên mặt phẳng (P) , có hoành độ dương để tam giác ABC đều. Tính $a - b + 3c$.

A. -7 .

B. -9 .

C. -5 .

D. -3 .

Lời giải. Trung điểm của AB là $I(1;0;-2)$ và tính được $\overrightarrow{AB} = (2;0;2)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn AB là $(Q): x + z + 1 = 0$.

Giao tuyến d của (P) và (Q) là $d: \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow d: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{-2}$.

Chọn $C(2c;-1-c;-1-2c) \in d$. Tam giác ABC đều khi và chỉ khi $AB = AC$

$$\longrightarrow \sqrt{(2t)^2 + (-1-t)^2 + (2-2t)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 9t^2 - 6t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases} \longrightarrow C(2;-2;-3).$$

Vậy $a - b + 3c = -5$. **Chọn C.**

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;1), B(1;0;0), C(1;1;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Điểm $M(a;b;c)$ nằm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn $MA = MB = MC$. Tính $T = a + 2b + 3c$.

- A. $T = 5$. B. $T = 3$. C. $T = 2$. D. $T = 4$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB}(-1;0;-1), \overrightarrow{BC}(0;-1;-1)$ và trung điểm của AB, BC lần lượt là

$$I\left(\frac{3}{2};0;\frac{1}{2}\right), J\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là $(\alpha): x + z - 2 = 0$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BC là $(\beta): y + z - 2 = 0$.

Do $MA = MB = MC$ nên $M \in (\alpha)$ và $M \in (\beta)$, lại có $M \in (P) \longrightarrow$ tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow M(1;0;1) \longrightarrow T = a + 2b + 3c = 4. \text{ Chọn D.}$$

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1), M(5;3;1), N(4;1;2)$ và mặt phẳng $(P): y + z = 27$. Biết rằng tồn tại điểm B trên tia AM , điểm C trên (P) và điểm D trên tia AN sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Tọa độ của điểm C là

- A. $(-15;21;6)$. B. $(21;21;6)$. C. $(-15;7;20)$. D. $(21;19;8)$.

Lời giải. Ta có $AM: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$ và $AN: \begin{cases} x = 2 + 2u \\ y = -1 + 2u \\ z = 1 + u \end{cases}$.

Gọi $B(2 + 3t; -1 + 4t; 1) \in AM$, $D(2 + 2u; -1 + 2u; 1 + u) \in AN$.

Vì tứ giác $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \longrightarrow C(3t + 2u + 2; 4t + 2u - 1; u + 1)$.

Mà $C \in (P) \Rightarrow 4t + 3u = 27$ (1).

Vì tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên suy ra $AB^2 = AD^2 \longrightarrow 25t^2 = 9u^2$ (2).

Từ (1) và (2) tìm được $\begin{cases} t = 3 \\ u = 5 \end{cases} \longrightarrow C(21;21;6)$. **Chọn B.**

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;4)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua trực tâm H của ΔABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

- A. $\Delta: \frac{x-1}{-4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. B. $\Delta: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$.
C. $\Delta: \frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. D. $\Delta: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{1}$.

Lời giải. Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ hay

$(ABC): 4x + 2y + z - 4 = 0$. Suy ra mặt phẳng (ABC) có một VTPT là $\vec{n} = (4;2;1)$.

Vì OA, OB, OC đôi một vuông góc nên suy ra $OH \perp (ABC) \longrightarrow \Delta: \frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$. **Chọn C.**

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với

$A(1;-2;1), B(-2;2;1), C(1;-2;2)$. Hỏi đường phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt mặt phẳng (Oyz) tại điểm nào sau đây?

- A. $\left(0;-\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. B. $\left(0;-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$. C. $\left(0;-\frac{2}{3};\frac{8}{3}\right)$. D. $\left(0;\frac{2}{3};-\frac{8}{3}\right)$.

Lời giải. Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-3; 4; 0) \rightarrow AB = 5 \\ \overrightarrow{AC} = (0; 0; 1) \rightarrow AC = 1 \end{cases}$$

VTCP của đường phân giác trong góc A của tam giác ABC là

$$\vec{u} = \frac{1}{AB} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{AC} \overrightarrow{AC} = \left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; 1 \right).$$

Phương trình đường phân giác góc A là $d: \begin{cases} x = 1 - \frac{3}{5}t \\ y = -2 + \frac{4}{5}t \\ z = 1 + t \end{cases}$

Đường thẳng d cắt mặt phẳng (Oyz) tại $M\left(0; -\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$. **Chọn C.**

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC nhọn có $H(2; 2; 1)$,

$K\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, O lần lượt là hình chiếu vuông góc của A , B , C trên các cạnh BC , AC , AB .

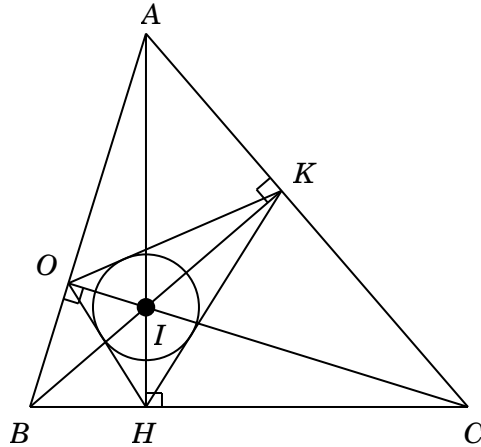
Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $d: \frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$. B. $d: \frac{x-\frac{8}{3}}{1} = \frac{y-\frac{2}{3}}{-2} = \frac{z+\frac{2}{3}}{2}$.

C. $d: \frac{x+\frac{4}{9}}{1} = \frac{y-\frac{17}{9}}{-2} = \frac{z-\frac{1}{9}}{2}$. D. $d: \frac{x}{1} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z}{2}$.

Lời giải. Để giải quyết bài này ta sử dụng hai tính chất sau:

- Tâm đường tròn nội tiếp tam giác OHK là trực tâm của tam giác ABC .
- Công thức tâm tỷ cự của tâm đường tròn nội tiếp tam giác OHK là $HK \cdot \vec{IO} + OH \cdot \vec{IK} + OK \cdot \vec{IH} = \vec{0}$.



Mặt phẳng (ABC) có VTPT $\vec{n} = [\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OK}] = (4; -; 8; 8)$.

Ta có $OH = 3$, $OK = 4$, $HK = 5$.

Gọi I là trực tâm của tam giác ABC , suy ra I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OHK .

$$\text{Khi đó tọa độ điểm } I \text{ được xác định: } \begin{cases} x_I = \frac{HK.x_O + OH.x_K + OK.x_H}{HK + OH + OK} \\ y_I = \frac{HK.y_O + OH.y_K + OK.y_H}{HK + OH + OK} \\ z_I = \frac{HK.z_O + OH.z_K + OK.z_H}{HK + OH + OK} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = 0 \\ y_I = 1 \\ z_I = 1 \end{cases}, \text{ suy ra}$$

$$I(0;1;1).$$

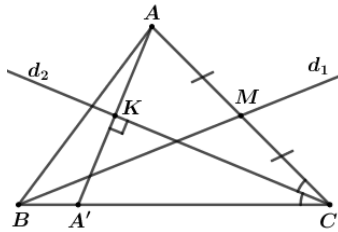
$$\text{Đường thẳng } AH: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = 1 \end{cases}. \text{ Điểm } A \in AH \longrightarrow A(2t;1+t;1).$$

Ta có $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OI} = 0 \longrightarrow A(-4;-1;1)$. **Chọn A.**

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến d_1 kẻ từ B là $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong d_2 của góc C là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng BC có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u} = (2;1;-1)$. **B.** $\vec{u} = (1;1;0)$. **C.** $\vec{u} = (1;-1;0)$. **D.** $\vec{u} = (1;2;1)$.

Lời giải.



Gọi M là trung điểm của AC . Vì $M \in d_1$ nên $M(3-p;3+2p;2-p)$.

Mặt khác M là trung điểm của AC nên $C(4-2p;3+4p;1-2p)$.

Mà $C \in d_2$ nên ta có phương trình $\frac{4-2p-2}{2} = \frac{3+4p-4}{-1} = \frac{1-2p-2}{-1} \Leftrightarrow p = 0 \longrightarrow C(4;3;1)$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua CD , suy ra $AA' \perp d_2$ và $A' \in BC$.

Gọi $K = AA' \cap d_2 \Rightarrow K$ là trung điểm của AA' , khi đó ta có $AA' \perp d_2$ tại K .

Do vậy điểm $K \in d_2 \Rightarrow K(2+2q;4-q;2-q)$.

Kết hợp với $AK \perp d_2$ nên ta có $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{u_{d_2}} = 0 \Rightarrow q = 0 \Rightarrow K(2;4;2) \longrightarrow A'(2;5;1)$.

$\overrightarrow{A'C} = (2;-2;0)$ chọn VTCP của đường thẳng BC là $\vec{u} = (1;-1;0)$. **Chọn C.**

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;0)$, $B(0;1;1)$, $C(1;0;1)$. Xét điểm D thuộc mặt phẳng Oxy sao cho tứ diện $ABCD$ là một tứ diện đều. Kí hiệu

$D(x_0; y_0; z_0)$ là tọa độ của điểm D . Tổng $x_0 + y_0$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải. Tính được $AB = BC = CA = \sqrt{2}$.

$$\text{Do } D \in (Oxy) \longrightarrow D(x_0; y_0; 0). \text{ Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow DA = DB = DC = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} DA = \sqrt{2} \\ DB = \sqrt{2} \\ DC = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{2} \\ \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 1)^2 + 1} = \sqrt{2} \\ \sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2 + 1} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 = 2 \\ x_0^2 + (y_0 - 1)^2 = 1 \\ (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases} \longrightarrow x_0 + y_0 = 2. \text{ Chọn C.}$$

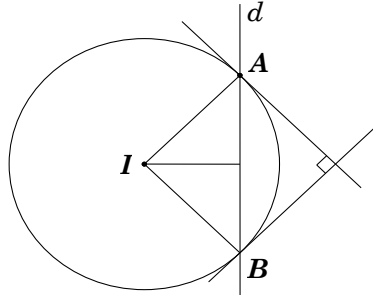
Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$ và

đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = m + t \end{cases}$. Tìm các giá trị của m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B

sao cho các mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A và B vuông góc với nhau.

- A. $\begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 0 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m = 0 \\ m = -4 \end{cases}$. D. Đáp án khác.

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R = 2$.



Hai mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A và B vuông góc với nhau $\longrightarrow \triangle IAB$ vuông cân

$$\longrightarrow d[I, AB] = \frac{IA}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \longrightarrow d[I, d] = \sqrt{2}.$$

Đường thẳng d đi qua $M(2;0;m)$ và có VTCP $\vec{u} = (-1;1;1)$.

Suy ra $\overrightarrow{IM} = (1;0;m+2) \longrightarrow [\overrightarrow{IM}, \vec{u}] = (-m-2; -m-3; 1)$.

$$\text{Vậy } d[I, d] = \frac{[\overrightarrow{IM}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2m^2 + 10m + 14}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2m^2 + 10m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases}. \text{ Chọn A.}$$

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$,

$d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-4}$, $d_3: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$, $d_4: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi Δ là đường thẳng cắt cả

bốn đường thẳng đã cho. Vectơ nào sau đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ .

- A. $\vec{u}_3 = (2;0;-1)$. B. $\vec{u}_2 = (2;1;-1)$. C. $\vec{u}_1 = (2;1;1)$. D. $\vec{u}_4 = (1;2;-2)$.

Lời giải. Ta có $d_1 \parallel d_2$. Phương trình mặt phẳng $(d_1, d_2): y - z + 2 = 0$.

Gọi $A = d_3 \cap (d_1, d_2) \longrightarrow A\left(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $B = d_4 \cap (d_1, d_2) \longrightarrow B(4;2;0)$.

Khi đó AB là đường thẳng Δ . $\overrightarrow{AB} = \left(3; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \vec{u}_2 = (2;1;-1)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ . **Chọn B.**

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$,

$\Delta_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$, $\Delta_3: \frac{x}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{1}$ và $\Delta_4: \frac{x-5}{1} = \frac{y-a}{3} = \frac{z-b}{1}$. Biết không tồn tại

đường thẳng nào trong không gian mà cắt được đồng thời cả bốn đường thẳng trên. Tính giá trị của $T = a - 2b$.

A. $T = -2$.

B. $T = -3$.

C. $T = 2$.

D. $T = 3$.

Lời giải. Ta thấy $\Delta_1 // \Delta_3$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ_1 và Δ_3 .

Phương trình mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 3 = 0$.

$$\text{Gọi } I = \Delta_2 \cap (P) \longrightarrow I = (0; -1; 1) \text{ và } J = \Delta_4 \cap (P) \Rightarrow J = \left(\frac{-2a+b+22}{6}; \frac{3b-24}{6}; \frac{-2a+7b-8}{6} \right) \\ \longrightarrow \overrightarrow{IJ} = \left(\frac{-2a+b+22}{6}; \frac{3b-18}{6}; \frac{-2a+7b-14}{6} \right).$$

Theo yêu cầu bài toán suy ra $\overrightarrow{IJ}$ cùng phương với $\vec{u}_{\Delta_1} = (1, -1, -1)$.

$$\Rightarrow \frac{-2a+b+22}{6} = \frac{3b-18}{-6} = \frac{-2a+7b-14}{-6} \longrightarrow a - 2b = 2. \text{ Chọn C.}$$

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $S(1; 2; 3)$ và các điểm A, B, C thuộc các trục Ox, Oy, Oz sao cho hình chóp $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{343}{6}$.

B. $\frac{343}{18}$.

C. $\frac{343}{12}$.

D. $\frac{343}{36}$.

Lời giải. Gọi $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) \longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{SA} = (a-1; -2; -3) \\ \overrightarrow{SB} = (-1; b-2; -3) \\ \overrightarrow{SC} = (-1; -2; c-3) \end{cases}$

$$\text{Vì } SA, SB, SC \text{ đôi một vuông góc} \longrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{SB} \\ \overrightarrow{SB} \perp \overrightarrow{SC} \\ \overrightarrow{SA} \perp \overrightarrow{SC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \\ \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \\ \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=14 \\ 2b+3c=14 \\ a+3c=14 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=7 \\ b=\frac{7}{2} \\ c=\frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\text{Do } SA, SB, SC \text{ đôi một vuông góc, nên } V_{SABC} = \frac{1}{6} SA \cdot SB \cdot SC = \frac{1}{6} \cdot 7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{343}{36}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 2; 1)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự tạo thành cấp số nhân có công bội bằng 2. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ tới mặt phẳng (α) .

A. $\frac{4}{\sqrt{21}}$.

B. $\frac{\sqrt{21}}{21}$.

C. $\frac{3\sqrt{21}}{7}$.

D. $9\sqrt{21}$.

Lời giải. Gọi $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ theo đề ra ta có a, b, c dương.

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng

$$\text{Vì mặt phẳng } (\alpha) \text{ đi qua điểm } M(1; 2; 1) \text{ nên ta có } \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1 \quad (1).$$

$$\text{Do } OA, OB, OC \text{ theo thứ tự tạo thành cấp số nhân có công bội bằng } 2 \Rightarrow c = 2b = 4a \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra } a = \frac{9}{4} \Rightarrow OA = \frac{9}{4}, OB = \frac{9}{2}, OC = 9.$$

$$\text{Đặt } d(O; (\alpha)) = h \text{ suy ra } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{7}{27} \longrightarrow h = \frac{3\sqrt{21}}{7}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Một mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt các tia Ox, Oy, Oz tương ứng tại A, B, C . Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

A. $T = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $T = \frac{1}{3}$.

C. $T = \frac{1}{9}$.

D. $T = \sqrt{3}$.

Lời giải. Gọi $\begin{cases} (\alpha) \cap Ox = A(a;0;0) \\ (\alpha) \cap Oy = B(0;b;0) \\ (\alpha) \cap Oz = C(0;0;c) \end{cases} \longrightarrow (\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ hay } (\alpha): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0.$

Mặt cầu (S) có tâm $I = (0;0;0)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.

Do (α) tiếp xúc với (S) nên $d[I,(\alpha)] = R \Leftrightarrow \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Suy ra $T = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{3}$. **Chọn B.**

Cách trắc nghiệm. Do bài toán đúng với mọi nên ta chọn một trường hợp đặc biệt. Chọn điểm $M(1;1;1)$ thuộc (S) .

Khi đó mặt phẳng (α) thỏa mãn bài toán sẽ đi qua M và nhận $\overline{OM}$ làm một VTPT nên có phương trình $(\alpha): x + y + z - 3 = 0$.

Suy ra $\begin{cases} (\alpha) \cap Ox = A(3;0;0) \\ (\alpha) \cap Oy = B(0;3;0) \\ (\alpha) \cap Oz = C(0;0;3) \end{cases} \longrightarrow T = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(6;-3;4)$, $B(a;b;c)$. Gọi

M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Ozx) sao cho M, N, P nằm giữa A và B thỏa mãn $AM = MN = NP = PB$. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng

A. -40.

B. -32.

C. -24.

D. -17.

Lời giải. Vì $AM = MN = NP = PB \longrightarrow N$ là trung điểm của $AB \longrightarrow N\left(\frac{a+6}{2}; \frac{b-3}{2}; \frac{c+4}{2}\right)$.

Mà $N \in (Oyz)$ suy ra $\frac{a+6}{2} = 0 \longrightarrow a = -6$. Suy ra $N\left(0; \frac{b-3}{2}; \frac{c+4}{2}\right)$ và $B(-6;b;c)$.

Vì $AM = MN \Rightarrow M$ là trung điểm của $AN \longrightarrow M\left(3; \frac{b-9}{4}; \frac{c+12}{4}\right)$.

Mà $M \in (Oxy)$ suy ra $\frac{c+12}{4} = 0 \longrightarrow c = -12$.

Vì $NP = PB \Rightarrow P$ là trung điểm của $NB \longrightarrow P\left(-3; \frac{3b-3}{4}; \frac{3c+4}{4}\right)$.

Mà $P \in (Oxz)$ suy ra $\frac{3b-3}{4} = 0 \longrightarrow b = 1$.

Vậy $a + b + c = -17$. **Chọn D.**

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có $A_1(\sqrt{3};-1;1)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA_1 = 1$, (C không trùng O). Biết $\vec{u} = (a;b;2)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng A_1C . Tính $T = a^2 + b^2$.

A. $T = 4$.

B. $T = 5$.

C. $T = 9$.

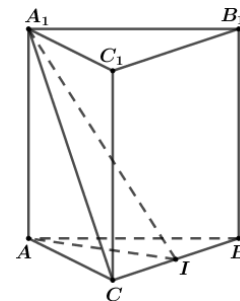
D. $T = 16$.

Lời giải. Gọi I là trung điểm của $BC \longrightarrow I(0;0;1)$.

Do $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow AI \perp BC$, mà $BC \perp AA_1 \Rightarrow BC \perp (AA_1I) \Rightarrow BC \perp A_1I \longrightarrow I$ là hình chiếu vuông góc của A_1 trên Oz .

Ta có $d(A_1, Oz) = A_1I = 2 \longrightarrow AI = \sqrt{A_1I^2 - AA_1^2} = \sqrt{3}$.

Suy ra $CI = \frac{BC}{2} = \frac{\frac{2AI}{\sqrt{3}}}{2} = 1$ (do tam giác ABC đều)



Vì $C \in Oz$ nên gọi $C(0;0;c)$ với $c \neq 0$.

Từ $IC = 1 \Rightarrow (c-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \text{ (loại)} \\ c = 2 \end{cases} \rightarrow C(0;0;2) \longrightarrow \overrightarrow{A_1C} = (-\sqrt{3}; 1; 1).$

Chọn VTCP của A_1C là $\vec{u}(-2\sqrt{3}; 2; 2) \longrightarrow T = a^2 + b^2 = 16$. **Chọn D.**

Phần 2. Cực trị trong hình học Oxyz

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 4 \end{cases}$ và điểm

$A(1; -1; 2)$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho A cách đều d và Δ .

Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách giữa d và Δ .

- A. $d_{\max} = 1$. B. $d_{\max} = 3\sqrt{2}$. C. $d_{\max} = \sqrt{2}$. D. Không tồn tại.

Lời giải. Lấy $M(0; 1; 4) \in d, \overrightarrow{MA} = (1; -2; -2), u_d = (1; -1; 0) \longrightarrow [\overrightarrow{MA}, \vec{u}_d] = (-2; -2; 1).$

$$\text{Kẻ } AH \perp d (H \in d) \longrightarrow AH = d(A, d) = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Lấy K đối xứng với H qua A . Suy ra $HK = 2AH = 3\sqrt{2}$ là giá trị lớn nhất của $d(\Delta, d)$.

Thật vậy, lấy Δ' thỏa $d(A, \Delta') = AH' = AH \Rightarrow AH' = AH = AK \Rightarrow HH' \perp H'K \longrightarrow HH' \leq HK$.

Chọn C.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và

$d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với $(P): x + y + z - 7 = 0$ và cắt

d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A, B sao cho AB ngắn nhất. Phương trình của đường thẳng Δ là

$$\text{A. } \begin{cases} x = 12 - t \\ y = 5 \\ z = -9 + t \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x = 6 - t \\ y = \frac{5}{2} \\ z = -\frac{9}{2} + t \end{cases} \quad \text{C. } \begin{cases} x = 6 \\ y = \frac{5}{2} - t \\ z = -\frac{9}{2} + t \end{cases} \quad \text{D. } \begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = \frac{5}{2} + t \\ z = -\frac{9}{2} + t \end{cases}$$

Lời giải. Gọi $A(1+2a; a; -2-a) \in d_1, B(1+b; -2+3b; 2-2b) \in d_2$.

VTCP của Δ là $\overrightarrow{AB} = (b-2a; 3b-a-2; -2b+a+4)$, VTPT của (P) là $\vec{n}_p = (1; 1; 1)$.

Vì $\Delta // (P)$ nên $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}_p \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_p = 0 \Leftrightarrow b = a - 1$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (-a-1; 2a-5; 6-a)$

$$AB = \sqrt{(-a-1)^2 + (2a-5)^2 + (6-a)^2} = \sqrt{6a^2 - 30a + 62} = \sqrt{6\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{2}} \geq \frac{7\sqrt{2}}{2}, \forall a \in \mathbb{R}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = \frac{5}{2} \longrightarrow A\left(6; \frac{5}{2}; -\frac{9}{2}\right), \overrightarrow{AB} = \left(-\frac{7}{2}; 0; \frac{7}{2}\right)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A\left(6; \frac{5}{2}; -\frac{9}{2}\right)$ và vec tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (-1; 0; 1)$

$$\text{Vậy phương trình đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = 6 - t \\ y = \frac{5}{2} \\ z = -\frac{9}{2} + t \end{cases} \quad \text{Chọn B.}$$

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm

$A(-4;-1;3), B(-1;-2;-1), C(3;2;-3)$ và $D(0;-3;-5)$. Mặt phẳng (α) qua D và tổng khoảng cách A, B, C đến (α) lớn nhất, đồng thời ba điểm A, B, C nằm về cùng một phía so với mặt phẳng (α) . Điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (α) .

- A. $M(7;-3;-4)$. B. $M(2;0;-7)$. C. $M(-1;-1;-6)$. D. $M(36;1;-1)$.

Lời giải. Trọng tâm của tam giác ABC là $G\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{GD} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}; -\frac{14}{5}\right)$.

Theo đề $S = d(A, (\alpha)) + d(B, (\alpha)) + d(C, (\alpha)) = 3d(G, (\alpha)) \leq 3GD = 2\sqrt{66}$

$S_{\max} = 2\sqrt{66}$ khi $(\alpha) \perp GD$ và $D \in (\alpha)$

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): x - 4y - 7z - 47 = 0$. Đối chiếu đáp án **chọn A**.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-2;1;0), B(4;4;-3), C(2;3;-2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa d sao cho A, B, C ở cùng phía đối với mặt phẳng (α) . Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là khoảng cách từ A, B, C đến (α) . Tìm giá trị lớn nhất của $T = d_1 + 2d_2 + 3d_3$.

- A. $T_{\max} = 6\sqrt{14}$. B. $T_{\max} = \sqrt{203}$.
C. $T_{\max} = \sqrt{14} + \frac{\sqrt{203}}{3} + 3\sqrt{21}$. D. $T_{\max} = 2\sqrt{21}$.

Lời giải. Trung điểm của AB, BC lần lượt là

$M\left(1; \frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ và $N\left(3; \frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right)$. Trọng tâm của tam giác

MNC là $G(2;3;-2)$.

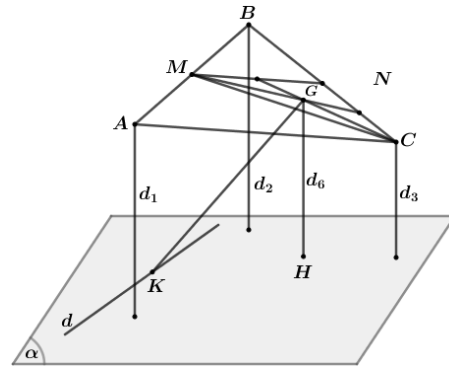
Gọi d_4, d_5, d_6 lần lượt là khoảng cách từ M, N, G đến (α) .

Ta có

$$T = d_1 + 2d_2 + 3d_3 = (d_1 + d_2) + (d_2 + d_3) + 2d_3 = 2d_4 + 2d_5 + 2d_6 = 6d_6.$$

Kẻ $GH \perp (\alpha), GK \perp d$ ($H \in (\alpha), K \in d$). Ta chứng minh được $IH \leq IK = d_6 = 6\sqrt{14}$.

Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv K$ hay $IK \perp (\alpha)$. **Chọn A**.



Câu 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua $A(2;1;0)$ song song với mặt phẳng $(P): x - y - z = 0$ và tổng khoảng cách từ $M(0;2;0), N(4;0;0)$ tới đường thẳng d có giá trị nhỏ nhất. Véc-tơ chỉ phương $\vec{u}$ của d có tọa độ là:

- A. $(1;0;1)$. B. $(2;1;1)$. C. $(3;2;1)$. D. $(0;1;-1)$.

Lời giải. Mặt phẳng (α) đi qua $A(2;1;0)$ và song song với mặt phẳng (P) là:

$(\alpha): x - y - z - 1 = 0$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (4;-2;0)$, $\overrightarrow{n_p} = (1;-1;-1) \Rightarrow [\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{n_p}] = (2;4;-2) = \vec{a}$.

Ta thấy A là trung điểm của MN nên đường thẳng d là hình chiếu vuông góc của đường thẳng MN trên mặt phẳng (α) , khi đó véc-tơ chỉ phương của đường thẳng d là

$\vec{u} = [\overrightarrow{n_p}, \vec{a}] = (-6;0;-6)$. **Chọn A**.

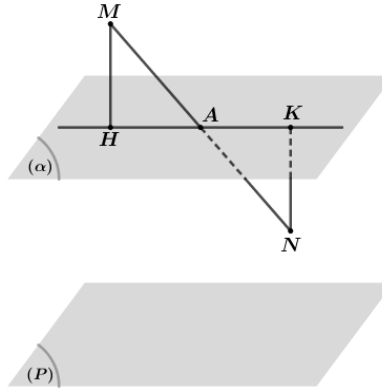
Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(2;1;0)$, song song với mặt phẳng $(P): x - y - z = 0$ và có tổng khoảng cách từ các điểm $M(0;2;0), N(4;0;0)$ tới đường thẳng đó đạt giá trị nhỏ nhất? Vectơ chỉ phương của Δ là vectơ nào sau đây?

- A. $\vec{u}_\Delta = (0;1;-1)$ B. $\vec{u}_\Delta = (1;0;1)$ C. $\vec{u}_\Delta = (3;2;1)$ D. $\vec{u}_\Delta = (2;1;1)$

Lời giải. Vì Δ là đường thẳng đi qua điểm A , song song với mặt phẳng $(P) \longrightarrow \Delta$ nằm trong mặt phẳng (α) qua A và song song với mặt phẳng (P) .

Nhận thấy A là trung điểm của MN nên $d(M, \Delta) = d(N, \Delta)$.

Ta có $d(M, \Delta) = d(N, \Delta) \geq d(M, (\alpha))$. Dấu "=" xảy ra khi Δ nằm trong mặt phẳng (β) chứa MN và vuông góc với (α) .



Mặt phẳng (β) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\beta)} = [\vec{n}_P, \vec{AM}] = (1;2;-1)$.

Đường thẳng Δ là giao tuyến của (Q) và (R) nên nhận $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_{(\alpha)}, \vec{n}_{(\beta)}] = (3;0;3)$ làm một véc-tơ chỉ phương. Đối chiếu đáp án, **chọn B**.

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$ và điểm $A(2;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ O đến Δ và khoảng cách từ d đến Δ lớn nhất. Biết $\vec{u} = (2;b;c)$ là một vectơ chỉ phương của Δ . Tính tổng $b+c$.

- A. -3. B. 3. C. 4. D. -4.

Lời giải. Do O, A, d cố định, gọi H là hình chiếu của A lên d , khi đó:

$$\begin{cases} d_{(O;\Delta)} \leq OA \\ d_{(d;\Delta)} \leq HA \end{cases} \Rightarrow d_{(O;\Delta)} + d_{(d;\Delta)} \leq OA + AH.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} OA \perp \Delta \\ HA \perp \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{OA} \perp \vec{u}_\Delta \\ \vec{HA} \perp \vec{u}_\Delta \end{cases}. \text{ Vậy ta có thể chọn } \vec{u}_\Delta = [\vec{OA}; \vec{HA}].$$

$$\text{Khi đó ta tìm được } H(1;2;0) \Rightarrow \vec{HA} = (1;-1;1), \vec{OA} = (2;1;1).$$

$$\text{Vậy } \vec{u}_\Delta = [\vec{OA}; \vec{HA}] = (2;-1;-3) \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = -3 \end{cases} \longrightarrow b+c = -4. \text{ Chọn D.}$$

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;-4;4), B(1;7;-2), C(1;4;-2)$. Mặt phẳng $(P): 2x + by + cz + d = 0$ qua A và thỏa mãn $T = d(B, (P)) + 2d(C, (P))$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $b+c+d$.

- A. 77. B. 52. C. 45. D. 65.

Lời giải.

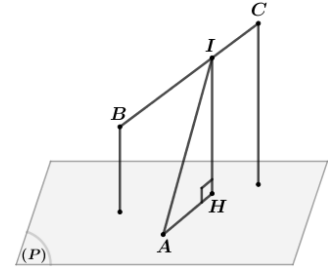
Trường hợp 1. B, C cùng phía so với (P) .

Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \longrightarrow I(1;5;-2)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên $(P) \Rightarrow IH \leq IA$.

$$\text{Có } T = d(B, (P)) + 2d(C, (P)) = 3d(I, (P)) = 3IH \leq 3IA.$$

Vậy $\max T = 3IA$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv A$ hay $IA \perp (P)$.

$$\text{Suy ra } (P): 2x + 9y - 6z + 62 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 9 \\ c = -6 \\ d = 62 \end{cases} \longrightarrow b + c + d = 65.$$



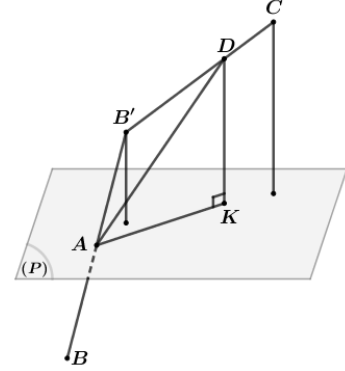
Trường hợp 2. B, C hai phía so với (P) . Gọi B' là điểm đối xứng của B qua $A \longrightarrow B'(-3;-15;10)$.

Gọi D thỏa mãn $\overrightarrow{DB'} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0} \longrightarrow D\left(-\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}; 2\right)$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của D trên $(P) \Rightarrow DK \leq DA$.

$$\text{Có } T = d(B', (P)) + 2d(C, (P)) = d(B, (P)) + 2d(C, (P)) = 3d(I, (P)) = 3DK \leq 3DA.$$

Vậy $\max T = 3DA$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $K \equiv A$ hay $DA \perp (P)$.

$$\text{Suy ra } (P): 2x + 5y - 6z + 46 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = -6 \\ d = 46 \end{cases} \longrightarrow b + c + d = 45.$$



Từ hai trường hợp $\longrightarrow \max T = 65$. **Chọn D.**

Câu 9. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng gốc tọa độ O , các điểm $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với $m, n > 0$ và $m + n = 4$. Gọi M là trung điểm của CC' .

Thể tích tứ diện $BDA'M$ lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{64}{27}$. B. $\frac{9}{4}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{16}{27}$.

Lời giải. Từ giả thiết, ta suy ra $C(m;m;0)$, $C'(m;m;n)$ và $M\left(m;m;\frac{n}{2}\right)$ là trung điểm CC' .

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{BA'} = (-m; 0; n) \\ \overrightarrow{BD} = (-m; m; 0) \end{cases} \longrightarrow [\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BD}] = (-mn; -mn; -m^2) \text{ và } \overrightarrow{BM} = \left(0; m; \frac{n}{2}\right).$$

$$\text{Thể tích khối chóp } BDA'M \text{ là } V_{BDA'M} = \frac{1}{6} \cdot |[\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BD}] \cdot \overrightarrow{BM}| = \frac{m^2 \cdot n}{4} = \frac{m^2(4-m)}{4} = \frac{-m^3 + 4m^2}{4}.$$

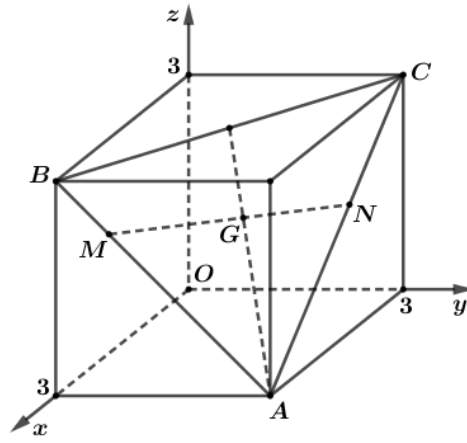
$$\text{Xét hàm } f(m) = \frac{-m^3 + 4m^2}{4} \text{ trên khoảng } (0;4), \text{ ta được } \max_{(0;4)} f(m) = f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{64}{27}. \text{ Chọn A.}$$

$$\text{Cách khác. Áp dụng BĐT Côsi, ta có } 4 = m + n = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m + n \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}m^2n} \longrightarrow \frac{m^2n}{4} \leq \frac{64}{27}.$$

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(3;3;0), B(3;0;3), C(0;3;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua O , vuông góc với mặt phẳng (ABC) sao cho mặt phẳng (P) cắt các cạnh AB, AC tại các điểm M, N thỏa mãn thể tích tứ diện $OAMN$ nhỏ nhất. Mặt phẳng (P) có phương trình:

- A. $x + y - 2z = 0$. B. $x + y + 2z = 0$. C. $x - z = 0$. D. $y - z = 0$.

Lời giải



Đường thẳng AB có phương trình $\begin{cases} x=3 \\ y=3-t \\ z=t \end{cases}$. Mà $M \in AB \longrightarrow M(3; 3-a; a)$ với $0 < a < 3$.

Đường thẳng AC có phương trình $\begin{cases} x=3-t' \\ y=3 \\ z=t' \end{cases}$. Mà $N \in AC \longrightarrow N(3-b; 3; b)$ với $0 < b < 3$.

Gọi G là trọng tâm $ABC \longrightarrow G(2; 2; 2)$ và $OG \perp (ABC) \Rightarrow M, G, N$ thẳng hàng $\longrightarrow ab = a + b$.

Ta có $V_{OAMN} = \frac{1}{3} \cdot OG \cdot S_{AMN}$ với $S_{AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} \cdot ab$.

Do đó V_{OAMN} nhỏ nhất khi S_{AMN} nhỏ nhất

Áp dụng bất đẳng thức côsi, ta có: $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow (ab)^2 - 4(ab) \geq 0 \longrightarrow ab \geq 4$.

Dấu bằng xảy ra khi $a = b$ hay $MN \parallel BC \longrightarrow M(3; 1; 2), N(1; 3; 2)$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): x + y - 2z = 0$. **Chọn A.**

Phần 3. Các bài toán về mặt cầu

Một số bài tập cơ bản ở mức độ vận dụng

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và hai điểm

$A(2; 1; 0), B(-2; 3; 2)$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc đường thẳng d .

Diện tích của mặt cầu (S) bằng

A. 68π .

B. 25π .

C. 74π .

D. 26π .

Lời giải. Gọi I là tâm và R là bán kính của mặt cầu (S) . Vì $I \in d \longrightarrow I(1+2t; t; -2t)$.

Theo đề ta có $IA^2 = IB^2 (= R^2) \Leftrightarrow (2t-1)^2 + (t-1)^2 + (-2t)^2 = (3+2t)^2 + (t-3)^2 + (-2t-2)^2$

$\longrightarrow t = -1 \Rightarrow R^2 = IA^2 = 17$.

Vậy $S = 4\pi R^2 = 68\pi$. **Chọn A**

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(3; 2; 2)$ bán kính $R_1 = 2$, mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(1; 0; 1)$ bán kính $R_2 = 1$. Mặt phẳng (P) đồng thời tiếp xúc với (S_1) và (S_2) cắt đoạn I_1I_2 có dạng $2x + by + cz + d = 0$. Tính $T = b + c + d$.

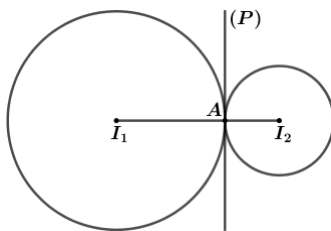
A. -5 .

B. -3 .

C. -1 .

D. 2 .

Lời giải.



Tính được $\overrightarrow{I_2 I_1} = (2; 2; 1) \longrightarrow I_1 I_2 = 3 = R_1 + R_2 \Rightarrow (S_1)$ tiếp xúc với (S_2) . Gọi A là tiếp điểm của hai mặt cầu $\Rightarrow A\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Mặt phẳng (P) đồng thời tiếp xúc với (S_1) và (S_2) cắt đoạn $I_1 I_2$ là mặt phẳng vuông góc với

$$I_2 I_1 \text{ tại } A \text{ là: } 2x + 2y + z - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 1 \\ d = -6 \end{cases} \longrightarrow T = b + c + d = -3. \text{ Chọn B.}$$

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Gọi (S') là mặt cầu chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P) đồng thời (S') tiếp xúc với mặt phẳng $(Q): x - y + z - 5 = 0$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu (S') . Tính $T = abc$.

A. $T = 1$. B. $T = -\frac{1}{8}$. C. $T = -1$. D. $T = \frac{1}{8}$.

Lời giải. Mặt cầu (S') có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 9 + m(x + y + z - 3) = 0 \Leftrightarrow (S'): x^2 + y^2 + z^2 + mx + my + mz - 9 - 3m = 0.$$

Như vậy mặt cầu (S') có tâm $I\left(\frac{-m}{2}; \frac{-m}{2}; \frac{-m}{2}\right)$ và bán kính $R = \sqrt{\frac{3m^2}{4} + 3m + 9}$.

$$\text{Vì } (S') \text{ tiếp xúc với mặt phẳng } (Q) \text{ nên } d(I, (Q)) = R \longrightarrow \frac{\left|-\frac{m}{2} - 5\right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3m^2}{4} + 3m + 9}$$

$$\Leftrightarrow |m + 10| = \sqrt{9m^2 + 36m + 108} \longrightarrow m = -1 \text{ suy ra } I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right). \text{ Vậy } T = abc = \frac{1}{8}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 1 = 0$, $(Q): 2x + y + z - 1 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r . Xác định r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa yêu cầu.

A. $r = \sqrt{3}$. B. $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$. C. $r = \sqrt{2}$. D. $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải. Gọi $I(m; 0; 0)$ là tâm mặt cầu có bán kính R , d_1 , d_2 là các khoảng cách từ I đến (P) và (Q) .

$$\text{Ta có } d_1 = \frac{|m + 1|}{\sqrt{6}} \text{ và } d_2 = \frac{|2m - 1|}{\sqrt{6}}.$$

Theo đề ta có

$$\sqrt{d_1^2 + 4} = \sqrt{d_2^2 + r^2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{m^2 + 2m + 1}{6} + 4} = \sqrt{\frac{4m^2 - 4m + 1}{6} + r^2} \Leftrightarrow m^2 - 2m + 2r^2 - 8 = 0 \quad (1).$$

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có đúng một nghiệm m

$$\longrightarrow 1 - (2r^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow r^2 = \frac{9}{2} \longrightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \text{ Chọn D.}$$

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;1;2), B(5;7;0)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my - 2(m+1)z + m^2 + 2m + 8 = 0$ là phương trình của một mặt cầu (S) sao cho qua hai điểm A, B có duy nhất một mặt phẳng cắt mặt cầu (S) đó theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1.

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải. (S) là một mặt cầu, khi đó mặt cầu (S) có tâm $I(2; -m; m+1)$ bán kính

$$R = \sqrt{m^2 - 3} \longrightarrow m < -\sqrt{3} \cup m > \sqrt{3}. \text{ Ngoài ra ta có } d(I; AB) = \frac{\sqrt{6(m-2)^2}}{\sqrt{11}}.$$

- Nếu $R < 1 \longrightarrow$ không tồn tại mặt phẳng nào để thỏa yêu cầu bài toán.

- Nếu $R = 1 \longrightarrow$ có duy nhất một mặt phẳng qua tâm và chứa AB khi đó $R = \sqrt{m^2 - 3} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$. Loại $m = 2$ vì $I \in AB$ nên có vô số mặt phẳng cắt mặt cầu (S) đó theo giao tuyến

là một đường tròn có bán kính bằng 1. Suy ra có 1 giá trị m .

- $R > 1$, + nếu $R^2 - 1^2 < d^2(I; AB) \longrightarrow$ có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu.

+ nếu $R^2 - 1^2 > d^2(I; AB) \longrightarrow$ không có mặt phẳng nào thỏa yêu cầu.

$$+ \text{ nếu } R^2 - 1^2 = d^2(I; AB) \longrightarrow m^2 - 3 - 1 = \frac{6(m-2)^2}{11} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{34}{2} \end{cases} \text{ (loại } m = 2 \text{ vì } R > 1).$$

Khi đó có duy nhất 1 mặt phẳng qua AB và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính 1

Vậy có 2 giá trị m . **Chọn D.**

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(5; -3; 5)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$. Từ một điểm A thuộc mặt phẳng (P) kẻ một đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm B . Tính OA biết rằng $AB = 4$.

A. $OA = 3$.

B. $OA = \sqrt{11}$.

C. $OA = \sqrt{6}$.

D. $OA = 5$.

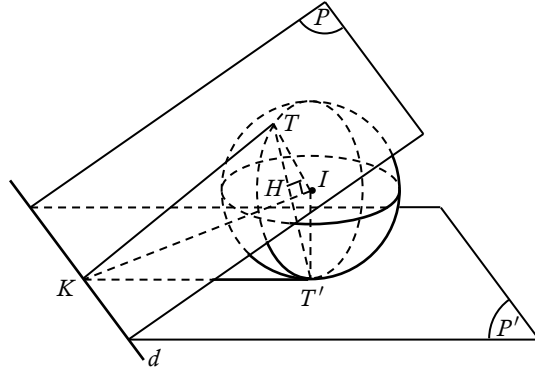
Lời giải. Gọi $A(a; b; c)$. Do $A \in (P) \longrightarrow a - 2b + 2c - 3 = 0$. (1)

$$\text{Ta có } \begin{cases} d[I, (P)] = \frac{|5 - 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 6 \longrightarrow IA = d[I, (P)] \longrightarrow IA \perp (P) \text{ hay } A \text{ là hình chiếu} \\ IA = \sqrt{AB^2 + IB^2} = \sqrt{AB^2 + R^2} = 6 \end{cases}$$

vuông góc của I trên mặt phẳng (P) .

Do đó ta dễ dàng tìm được $A(3; 1; 1) \longrightarrow OA = \sqrt{11}$. **Chọn B.**

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại T và T' (tham khảo hình vẽ). Tìm tọa độ trung điểm H của TT' .



- A. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$. B. $H\left(\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{6}\right)$. C. $H\left(-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; \frac{5}{6}\right)$. D. $H\left(-\frac{7}{6}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}\right)$.

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm mặt cầu $I(1; 0; -1)$, bán kính $R = 1$.

Gọi $K = d \cap (ITT')$. Ta có $\begin{cases} d \perp IT \\ d \perp IT' \end{cases} \Rightarrow d \perp (ITT')$ nên K là hình chiếu vuông góc của I trên $d \Rightarrow K(0; 2; 0)$.

Ta có $\frac{IH}{IK} = \frac{IH \cdot IK}{IK^2} = \frac{R^2}{IK^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{1}{6} \longrightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{1}{6} \overrightarrow{IK} \longrightarrow H\left(\frac{5}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{5}{6}\right)$. **Chọn A.**

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$, và hai điểm $A(1; 0; 4), B(0; 1; 4)$. Các mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ cùng chứa đường thẳng AB và hai mặt phẳng này lần lượt tiếp xúc với mặt cầu (S) tại các điểm H_1, H_2 . Điểm K nào trong số các điểm sau đây nằm trên đường thẳng H_1H_2 .

- A. $K(1; 4; 2)$. B. $K(-1; 3; 2)$. C. $K(1; 5; 3)$. D. $K(-1; 3; -2)$.

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$.

Phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Vì mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ cùng chứa đường thẳng AB và hai mặt phẳng này lần lượt tiếp xúc với mặt cầu (S) tại các

điểm $H_1, H_2 \longrightarrow \begin{cases} IH_1 \perp AB \\ IH_2 \perp AB \end{cases} \longrightarrow (IH_1H_2) \perp AB. \quad \overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$.

Phương trình mặt phẳng $(IH_1H_2): -x + y - 3 = 0$.

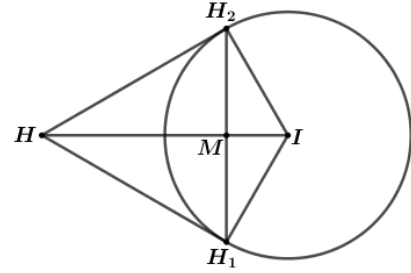
Gọi H là giao điểm của AB và (IH_1H_2) . Khi đó $H(-1; 2; 4)$.

Gọi M là giao điểm của H_1H_2 và IH . Khi đó $H_1M \perp IH$

Ta có $\frac{IM}{IH} = \frac{IM \cdot IH}{IH^2} = \frac{R^2}{IH^2} = \frac{1}{3}$ nên $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IH}$, từ đó ta tìm được $M(-1; 2; 2)$.

H_1H_2 vuông góc với IH và AB nên đường H_1H_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u} = -\frac{1}{3} [\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{AB}] = (1; 1; 0)$.

Phương trình $H_1H_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases}$. Đối chiếu đáp án **Chọn A.**



Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$ và điểm $A(1;1;-1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc nhau, cắt mặt cầu theo thiết diện là ba hình tròn. Tổng diện tích của ba hình tròn này bằng

A. 3π .

B. 4π .

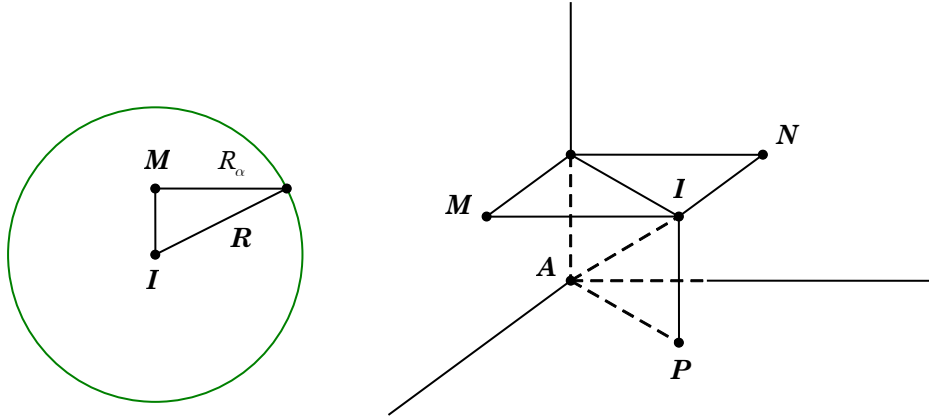
C. 11π .

D. 12π .

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;-2)$, bán kính $R=2$.

Gọi ba mặt phẳng đôi một vuông góc thỏa mãn bài toán là $(\alpha), (\beta), (\gamma)$.

Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của I trên $(\alpha), (\beta), (\gamma)$. Suy ra M, N, P là tâm của các đường tròn giao tuyến.



Xét đường tròn giao tuyến nằm trong mặt phẳng (α) có: $R_\alpha^2 = R^2 - IM^2$.

Tương tự, ta có $R_\beta^2 = R^2 - IN^2$ và $R_\gamma^2 = R^2 - IP^2$.

Suy ra $R_\alpha^2 + R_\beta^2 + R_\gamma^2 = 3R^2 - [IM^2 + IN^2 + IP^2] = 3R^2 - IA^2 = 11$.

Vậy tổng diện tích ba hình tròn: $S = R_\alpha^2\pi + R_\beta^2\pi + R_\gamma^2\pi = (R_\alpha^2 + R_\beta^2 + R_\gamma^2)\pi = 11\pi$. **Chọn C.**

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với $a, b, c > 0$. Biết mặt cầu (S) cắt 3 mặt phẳng toạ độ theo 3 đường tròn có bán kính $r=5$ và mặt cầu (S) đi qua điểm $M(0;1;2)$. Tính tổng $a+b+c+d$.

A. 25.

B. 75.

C. 40.

D. 10.

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm $I(a,b,c)$.

Vì (S) cắt 3 mặt phẳng toạ độ theo 3 đường tròn có bán kính bằng nhau $\Rightarrow a=b=c \rightarrow I(a;a;a)$ với $a > 0$. Suy

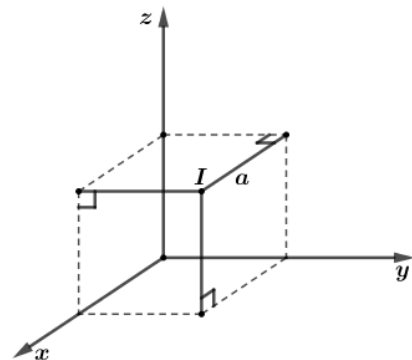
ra $R = \sqrt{a^2 + 25}$.

Mặt khác (S) đi qua điểm $M(0;1;2)$

$$\Rightarrow IM = R \Leftrightarrow a^2 + 25 = 3a^2 - 6a + 5 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -2 \end{cases} (l)$$

Với $a = 5 \rightarrow R = \sqrt{50}$, khi đó

$$\begin{cases} a = b = c = 5 \\ d = 25 \end{cases} \rightarrow a + b + c + d = 40. \text{ Chọn C}$$



Bài toán cực trị

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 12$ và $M(x_o; y_o; z_o)$ là điểm thay đổi thuộc (S) . Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x_o + y_o + z_o$ bằng?

A. 10.

B. 11.

C. 12.

D. 14.

Lời giải. Ta có $P = (x_o - 3) + (y_o + 2) + (z_o - 4) + 5 \longrightarrow P - 5 = (x_o - 3) + (y_o + 2) + (z_o - 4)$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta có $(P - 5)^2 = [(x_o - 3) + (y_o + 2) + (z_o - 4)]^2$

$$\leq (1+1+1) \cdot [(x_o - 3)^2 + (y_o + 2)^2 + (z_o - 4)^2] = 3 \cdot 12 = 36.$$

Suy ra $-6 \leq P - 5 \leq 6 \longrightarrow -1 \leq P \leq 11$. **Chọn B.**

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S_m): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-m)^2 = \frac{m^2}{4}$ (với $m > 0$ là tham số thực) và hai điểm

$A(2; 3; 5), B(1; 2; 4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để trên (S_m) tồn tại điểm M sao cho

$$MA^2 - MB^2 = 9.$$

A. $m = 1$.

B. $m = 3 - \sqrt{3}$.

C. $m = 8 - 4\sqrt{3}$.

D. $m = \frac{4 - \sqrt{3}}{2}$.

Lời giải. Mặt cầu $(S_m): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-m)^2 = \frac{m^2}{4}$ có tâm $I(1; 1; m)$ và bán kính $R = \frac{m}{2}$.

Gọi $M(a; b; c)$, theo đề

$$MA^2 - MB^2 = 9 \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-3)^2 + (c-5)^2 - (a-1)^2 - (b-2)^2 - (c-4)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow a + b + c - 4 = 0 \longrightarrow \text{điểm } M \text{ nằm trên mặt phẳng } (\alpha): x + y + z - 4 = 0.$$

Suy ra $M \in (\alpha) \cap (S_m) \longrightarrow d(M; (\alpha)) \leq R \Leftrightarrow 8 - 4\sqrt{3} \leq m \leq 8 + 4\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0; 1; 2)$, mặt phẳng

$(\alpha): x - y + z - 4 = 0$ và $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A , vuông góc với (α) và đồng thời (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tọa độ giao điểm M của (P) và trục zOx' là

A. $M\left(-\frac{1}{3}; 0; 0\right)$.

B. $M(1; 0; 0)$.

C. $M\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$.

D. $M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right)$.

Lời giải. Mặt phẳng (P) là mặt phẳng đi qua A có dạng:

$$ax + by + cz - b - 2c = 0 \quad (a^2 + b^2 + c^2 > 0).$$

Vì (P) vuông góc với (α) và đồng thời (P) cắt mặt cầu (S)

theo giao tuyến là một đường tròn có tâm là H .

Khi đó ta có hệ phương trình

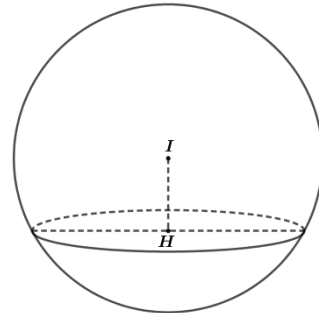
$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ d(I; (P)) = \frac{|3a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = IH \quad (*) \end{cases}$$

Đường tròn giao tuyến có bán kính r nhỏ nhất khi và chỉ khi

IH lớn nhất $\longrightarrow a \neq 0$.

$$\text{Khi đó từ } (*), \text{ suy ra } IH = \frac{3}{\sqrt{1 + \left(1 + \frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2}} \leq \sqrt{6} \longrightarrow \max IH = \sqrt{6}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -2c \Rightarrow b = -c$.



Chọn $c = -1$ suy ra $(P)2x + y - z + 1 = 0$. suy ra giao điểm M của (P) và trục xOx' là

$$M\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right).$$

Chọn C.

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ và

đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$. Mặt phẳng chứa d và cắt (S) theo một đường tròn có bán

kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $3x - 2y - 4z - 8 = 0$.

B. $y + z + 1 = 0$.

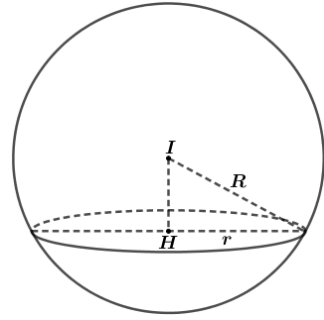
C. $x - 2y - 3 = 0$.

D. $x + 3y + 5z + 2 = 0$.

Lời giải. Mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ có tâm

$I(3; -1; 0)$ bán kính $R = 2$.

Gọi r là bán kính đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (α) chứa d và cắt (S) , gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng (α) .



Ta có $r = \sqrt{R^2 - IH^2} \Rightarrow r_{\min} \Leftrightarrow IH_{\max}$, $IH_{\max}$ khi H là hình chiếu vuông góc của của I trên đường thẳng d .

Ta tìm được $H(3; 0; -1) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (0; -1; -1)$.

Phương trình mặt phẳng $(\alpha): y + x + 1 = 0$. **Chọn B.**

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu

$(S_1): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$, $(S_2): (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Gọi d là đường thẳng đồng thời tiếp xúc với hai mặt cầu trên, cắt đoạn thẳng nối tâm hai mặt cầu và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. Nếu $\vec{u} = (a; 1; b)$ là một vectơ chỉ phương của d thì tổng $S = 2a + 3b$ bằng bao nhiêu?

A. $S = 2$.

B. $S = 1$.

C. $S = 0$.

D. $S = 4$.

Lời giải. Mặt cầu $(S_1), (S_2)$ có tâm và bán kính lần lượt là $I_1(3; 2; 2), I_2(1; 0; 1)$ và $R_1 = 2, R_2 = 1$.

Suy ra $I_1I_2 = 3 = R_1 + R_2 \longrightarrow (S_1), (S_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm $A\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Vì d là đường thẳng đồng thời tiếp xúc với hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ suy ra d đi qua A và $d \perp I_1I_2$.

$d(O, d)$ lớn nhất khi và chỉ khi $d \perp OA$. Khi đó d có 1 VTCP là $[\overrightarrow{I_1I_2}, \overrightarrow{OA}] = (6; -3; -6)$.

Chọn VTCP của đường thẳng d là $\vec{u} = (-2; 1; 2) \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases} \longrightarrow S = 2a + 3b = 2$. **Chọn A.**

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; 3; 3), B(-2; -1; 1)$. Gọi (S) và (S') là hai mặt cầu thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với đường thẳng AB lần lượt tại các điểm A, B đồng thời tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm $M(a, b, c)$. Tính giá trị của $a + b + c$ biết rằng khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 2018 = 0$ đạt giá trị lớn nhất?

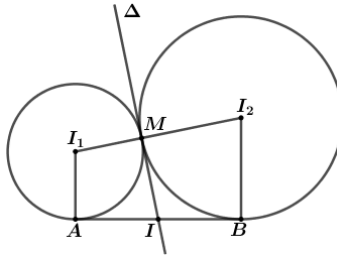
A. $a + b + c = 4$.

B. $a + b + c = 5$.

C. $a + b + c = 3$.

D. $a + b + c = 2$.

Lời giải. Gọi tâm của hai mặt cầu (S) và (S') lần lượt là I_1, I_2



Kẻ tiếp tuyến d chung của (S) và (S') tại M , d cắt AB tại $I \longrightarrow \begin{cases} IM = IA \\ IM = IB \end{cases} \longrightarrow I$ là trung điểm của AB và $\triangle MAB$ vuông tại $M \longrightarrow M$ thuộc mặt cầu (S_1) tâm $I(0;1;2)$ bán kính $IA = 3$.

$$\longrightarrow d(M; (P))_{\max} = d(I; (P)) + IA = \frac{|0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 2018|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} + 3 = 675.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $IM \perp (P)$.

Phương trình đường thẳng $IM: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-2}$. Mặt cầu $(S_1): x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$.

Tìm được giao điểm IM và (S_1) là $M_1(1;3;0), M_2(-1;-1;4)$.

Ta thấy $d(M_1; (P)) = 675, d(M_2; (P)) = 669 \Rightarrow M(1;3;0) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{cases} \longrightarrow a + b + c = 4$. **Chọn A.**

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm I và bán kính bằng 3 sao cho luôn tiếp xúc với mặt phẳng Oxy . Khi các đường tròn giao tuyến của (S) với hai mặt phẳng tọa độ còn lại có diện tích lớn nhất thì tâm I của mặt cầu thuộc mặt phẳng nào?

A. $x + y + z - 1 = 0$. **B.** $x - y + z = 0$. **C.** $x - 2y + 1 = 0$. **D.** $x + y = 0$.

Lời giải. Gọi $I(x; y; z)$. Vì mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với mặt phẳng

$$Oxy \longrightarrow d_{(I, (Oxy))} = 3 \Leftrightarrow |z| = 3 \quad (1).$$

Các đường tròn giao tuyến của (S) với các mặt phẳng tọa độ Oyz, Ozx có diện tích lớn nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I \in Oyz \\ I \in Ozx \end{cases} \longrightarrow I \in Oz \quad (2).$$

Từ (1) và (2), suy ra $\begin{cases} I(0;0;3) \\ I(0;0;-3) \end{cases} \longrightarrow I \in mp: x + y = 0$. **Chọn D.**

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng

$(P_1): 2x + y + 2z - 5 = 0, (P_2): 2x + y + 2z + 13 = 0, (Q): 2x - 2y - z - 5 = 0$, và điểm $A(-2;0;0)$ nằm giữa hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$. Mặt cầu (S) di động có tâm $I(a;b;c)$ luôn đi qua A và luôn tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$. Khi khối cầu (S) cắt mặt phẳng (Q) theo thiết diện là hình tròn có diện tích lớn nhất thì $a + b - 2c$ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** -3. **D.** 2.

Lời giải. Ta tính được $d((P_1), (P_2)) = 6$. Ta tìm được mặt phẳng cách đều cả hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ là $(\alpha): 2a + b + 2c + 4 = 0$.

Gọi bán kính của mặt cầu (S) là R . Vì mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$

$$\longrightarrow \begin{cases} I \in (\alpha) \\ R = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + 2c + 4 = 0 \\ R = 3 \end{cases}.$$

Theo đề, ta có $A \in (S) \longrightarrow IA = R = 3$. Suy ra I thuộc mặt cầu (S') có tâm A và bán kính 3.

Ta có $d(A, (Q)) = 3 \longrightarrow$ mặt cầu (S') tiếp xúc với mặt phẳng (Q) .

Khối cầu (S) cắt mặt phẳng (Q) theo thiết diện là hình tròn có diện tích lớn nhất khi I là tiếp điểm của mặt cầu (S') với mặt phẳng (Q) . Khi đó

$$I \in (Q) \Rightarrow \begin{cases} 2a + b + 2c + 4 = 0 \\ 2a - 2b - c - 5 = 0 \\ (a+2)^2 + b^2 + c^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases} \longrightarrow a + b - 2c = 0. \text{ Chọn A.}$$

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(S_1): (x+1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$,

$$(S_2): (x-3)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4 \text{ và đường thẳng } d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 5 + 2t \end{cases}. \text{ Gọi } A, B \text{ là 2 điểm tùy ý thuộc}$$

$(S_1), (S_2)$ và M thuộc đường thẳng d . Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + MB$ bằng bao nhiêu?

A. $P_{\min} = 2\sqrt{6} - 3$. B. $P_{\min} = 2\sqrt{6} + 3$. C. $P_{\min} = 2\sqrt{3} - 3$. D. $P_{\min} = 2\sqrt{3} + 3$.

Lời giải.

Mặt cầu (S_1) lần lượt có tâm $I(-1; 0; 2)$ và bán kính $R_1 = 1$, mặt

cầu (S_2) lần lượt có tâm $J(3; 2; 0)$ và bán kính $R_2 = 2$. Gọi

$$E = IJ \cap d \longrightarrow E(1; 1; 1).$$

Để $(MA + MB)_{\min} \Rightarrow M, A, B$ nằm trên mặt phẳng (IJ, d) .

Gọi H, K lần lượt là giao của các tia IM, JM với $(S_1), (S_2)$.

Ta có:

$$MA + MB \geq MH + MK = MI + MJ - 3 \Rightarrow (MA + MB)_{\min} \Leftrightarrow (MI + MJ)_{\min}$$

Lại có $\overrightarrow{EI} = -\overrightarrow{EJ} \Rightarrow I, J$ nằm khác phía so với d

$$\Rightarrow MI + MJ \geq IJ = (MI + MJ)_{\min} = IJ = 2\sqrt{6} \longrightarrow (MA + MB)_{\min} = 2\sqrt{6} - 3. \text{ Chọn A.}$$

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(S_1): (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4$,

$$(S_2): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 1 \text{ và đường thẳng } d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3t \\ z = -2 - t \end{cases}. \text{ Gọi } A, B \text{ là 2 điểm tùy ý}$$

thuộc $(S_1), (S_2)$ và M thuộc đường thẳng d . Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = MA + MB$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2211}}{11}$. B. $\frac{\sqrt{3707}}{11} - 3$. C. $\frac{\sqrt{1771} + 2\sqrt{110}}{11}$. D. $\frac{\sqrt{3707}}{11}$.

Lời giải. Mặt cầu (S_1) lần lượt có tâm $I(1; 0; 0)$ và bán kính $R_1 = 2$,

mặt cầu (S_2) lần lượt có tâm $J(2; 3; 1)$ và bán kính

$$R_2 = 1 \longrightarrow IJ \parallel d.$$

Để $(MA + MB)_{\min} \longrightarrow M, A, B$ nằm trên mặt phẳng (IJ, d) .

Gọi H, K lần lượt là giao của các tia IM, JM với $(S_1), (S_2)$.

Ta có:

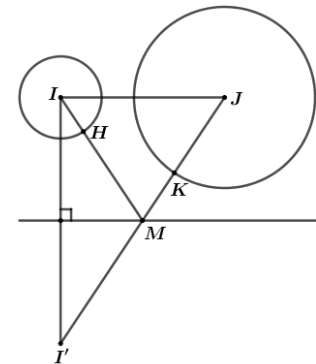
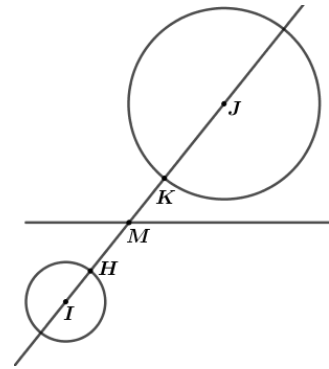
$$MA + MB \geq MH + MK = MI + MJ - 3 \Rightarrow (MA + MB)_{\min} \Leftrightarrow (MI + MJ)_{\min}$$

Gọi I' là điểm đối xứng của I qua $d \Rightarrow MI + MJ = MI' + MJ \geq I'J$

$$\Rightarrow (MI + MJ)_{\min} \Leftrightarrow M = I'J \cap d \longrightarrow (MA + MB)_{\min} = I'J - 3.$$

Dễ dàng tìm được:

$$I' \left(\frac{35}{11}; \frac{6}{11}; \frac{-42}{11} \right) \Rightarrow I'J = \frac{\sqrt{3707}}{11} \longrightarrow (MA + MB)_{\min} = \frac{\sqrt{3707}}{11} - 3. \text{ Chọn B.}$$



Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 12$ và điểm $A(4;4;0)$. Gọi B là điểm thuộc mặt cầu (S) .

Diện tích tam giác OAB có giá trị lớn nhất bằng:

- A. 6. B. $8\sqrt{3}$. C. $4(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. D. $8(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

Lời giải. Ta có $O(0;0;0) \in (S)$ và $OA = 4\sqrt{2}$ không đổi.

Do đó để $S_{\Delta OAB}$ lớn nhất $\leftrightarrow d[B, OA]$ lớn nhất.

Gọi M là trung điểm OA , I là tâm mặt cầu (S) .

Ta có $IM^2 = IA^2 - AM^2 = 4 \longrightarrow IM = 2$.

Ta có $d[B, OA] \leq MB \leq MI + IB = MI + R = 2 + 2\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi M, I, B thẳng hàng.

Khi đó $S_{\Delta OAB \max} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot (2 + 2\sqrt{3}) = 4(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. **Chọn C.**

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$. Gọi

$A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ là hai điểm thuộc mặt cầu thỏa mãn biểu thức

$T = 2(x_A - x_B) + (y_A - y_B) - (z_A - z_B)$ đạt giá trị lớn nhất. Trung điểm của đoạn thẳng AB thuộc mặt phẳng nào sau đây?

- A. $-y + 4z + 5 = 0$. B. $-x + 5y - 6z - 10 = 0$.
C. $x + 3y + 2z + 3 = 0$. D. $x + 3y - 7z + 10 = 0$.

Lời giải. Mặt cầu (S) có bán kính $R = 5$.

Gọi $\vec{u} = (2; 1; -1)$ thì $T = \vec{u} \cdot \overrightarrow{BA} = |\vec{u}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos(\vec{u}, \overrightarrow{BA}) \leq \sqrt{6} \cdot 2R$.

Vậy T đạt giá trị lớn nhất bằng $10\sqrt{6}$ khi $\vec{u}, \overrightarrow{BA}$ cùng hướng và $AB = 2R$ nên trung điểm của đoạn AB là tâm $I(1; 0; -2)$ của mặt cầu. Đối chiếu đáp án **Chọn C.**

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 8$ và

các điểm $A(3; 0; 0), B(4; 2; 1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt cầu (S) . Giá trị nhỏ nhất của

$MA + 2MB$ bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $6\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $6\sqrt{3}$.

Lời giải. Ta thấy $IA = 4\sqrt{2} = 2R$.

$$MA + 2MB = \sqrt{(x-3)^2 + y^2 + z^2} + 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}.$$

Vì $M \in (S)$ nên ta có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8y = -9 \Leftrightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8y) = -27$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (x-3)^2 + y^2 + z^2 &= x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 9 = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 27 + 36 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 3(x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 8y) + 36 \\ &= 4(x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 9) = 4[x^2 + (y-3)^2 + z^2] \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \longrightarrow MA + 2MB = 2\sqrt{x^2 + (y-3)^2 + z^2} + 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} \geq 2\sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} = 6\sqrt{2}.$$

Chọn B.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$,

$d_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$, $d_3: \frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{1}$. Mặt cầu bán kính nhỏ nhất tâm $I(a; b; c)$ tiếp

xúc với 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 . Tính $S = a + 2b + 3c$.

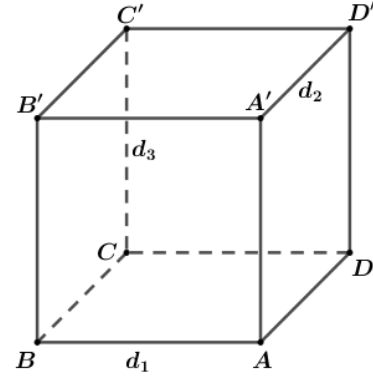
- A. $S = 10$. B. $S = 11$. C. $S = 12$. D. $S = 13$.

Lời giải. Ta chứng minh được $\begin{cases} d_1 \perp d_2, d_1 \perp d_3, d_2 \perp d_3 \\ d(d_1; d_2) = d(d_1; d_3) = d(d_2; d_3) = 3 \end{cases}$

Dựng hình lập phương sao cho d_1, d_2, d_3 chứa 3 cạnh của hình lập phương có cạnh hình lập phương là 3.

d_1, d_2, d_3 lần lượt đi qua các điểm $(1; 1; 1), (3; -1; 2), (4; 4; 1)$ mà khoảng cách giữa hai điểm $(1; 1; 1)$ và $(3; -1; 2)$ bằng 3 (đúng bằng cạnh hình lập phương), khoảng cách giữa hai điểm $(1; 1; 1)$ và $(4; 4; 1)$ bằng $3\sqrt{2}$ (bằng đường chéo của các mặt hình lập phương) còn khoảng cách giữa hai điểm $(3; -1; 2)$ và $(4; 4; 1)$ bằng $3\sqrt{3}$. Do đó ta có thể chọn d_1, d_2, d_3 lần lượt chứa $AB, A'D', CC'$ và $A(1; 1; 1), A'(3; -1; 2), C(4; 4; 1)$ (như hình vẽ).

Suy ra mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 có tâm là tâm hình lập phương $\longrightarrow I$ là trung điểm của



$$A'C \Rightarrow I\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases} \longrightarrow S = a + 2b + 3c = 11. \text{ Chọn B.}$$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.

Xét đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -mt \\ z = (m-1)t \end{cases}$ với m là tham số thực. Giả sử (P) và (P') là hai mặt phẳng

chứa d , tiếp xúc với (S) lần lượt tại T và T' . Khi m thay đổi, tính giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng TT' .

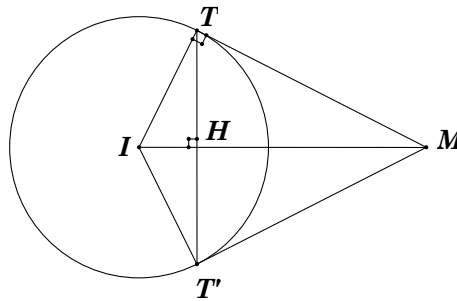
A. $\frac{4\sqrt{13}}{5}$.

B. $2\sqrt{2}$.

C. 2.

D. $\frac{2\sqrt{11}}{3}$.

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = IT = IT' = 2$.



Ta có $TT' = 2TH$ mà $\frac{1}{TH^2} = \frac{1}{TI^2} + \frac{1}{TM^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{TM^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{IM^2 - 4}$. (*)

Ta đi tìm GTNN của độ dài cạnh IM .

Do $M \in d \Rightarrow M(1+t; -mt; (m-1)t)$

$\longrightarrow \overrightarrow{IM} = (t; -mt - 2; (m-1)t - 3)$

$\longrightarrow IM^2 = t^2 + (mt + 2)^2 + [(m-1)t - 3]^2 = [1 + m^2 + (m-1)^2]t^2 + [4m - 6(m-1)]t + 13$

$\longleftrightarrow (2m^2 - 2m + 2)t^2 + (6 - 2m)t + 13 - IM^2 = 0$.

Để phương trình có nghiệm t thì $\Delta' = (3-m)^2 - (2m^2 - 2m + 2)(13 - IM^2) \geq 0$

$$\longleftrightarrow 13 - IM^2 \leq \frac{(m-3)^2}{2m^2 - 2m + 2} \longleftrightarrow IM^2 \geq 13 - \frac{(m-3)^2}{2m^2 - 2m + 2} = f(m).$$

Khảo sát hàm $f(m)$ ta được $f(m) \geq f\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{25}{3}\right) \longrightarrow IM^2 \geq \frac{25}{3}$.

Khi đó (*) $\longrightarrow \frac{1}{TH^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{\frac{25}{3} - 4} = \frac{25}{52} \longrightarrow TH \geq \sqrt{\frac{52}{25}} \longrightarrow TT' = 2TH \geq \frac{4\sqrt{13}}{5}$. **Chọn A.**

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ và điểm $A(5; 3; -2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M, N . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = AM + 4AN$.

- A. $S_{\min} = 50$. B. $S_{\min} = 5\sqrt{34} - 9$. C. $S_{\min} = S_{\min} = 5\sqrt{34} + 9$. D. $S_{\min} = 20$.

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 1)$ và bán kính

$R = 3$. Kẻ tiếp tuyến AH (với H là tiếp điểm).

Ta có $\overrightarrow{IA} = (3; 4; 3) \rightarrow IA = \sqrt{34} \rightarrow AH = 5$.

Ta có $AM \cdot AN = AH^2 \Leftrightarrow AM \cdot AN = 25$.

Đặt $AN = x \Rightarrow \sqrt{34} - 3 \leq x \leq \sqrt{34} + 3$.

$\longrightarrow AM = \frac{25}{x}$. Khi đó ta có

$$S = 4AN + AM = 4x + \frac{25}{x} = f(x)$$

Xét $f(x) = 4x + \frac{25}{x}$ trên $[\sqrt{34} - 3; \sqrt{34} + 3]$.

$$f'(x) = 4 - \frac{25}{x^2} = \frac{4x^2 - 25}{x^2} > 0 \quad \forall x \in [\sqrt{34} - 3; \sqrt{34} + 3] \longrightarrow S_{\min} = f(\sqrt{34} - 3) = 5\sqrt{34} - 9. \text{ **Chọn B.**}$$

Sai lầm. Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 1)$ và bán kính $R = 3$. Kẻ tiếp tuyến AH (với H là tiếp điểm).

Ta có $\overrightarrow{IA} = (3; 4; 3) \rightarrow IA = \sqrt{34} \rightarrow AH = 5$.

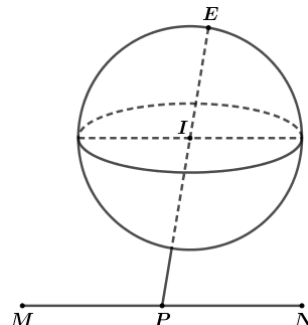
Ta có $AM \cdot AN = AH^2 \Leftrightarrow AM \cdot AN = 25$.

$$S = AM + 4AN \geq 2\sqrt{AM \cdot 4AN} = 20. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 27. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$ và hai điểm $M(4; -4; 2), N(6; 0; 6)$. Gọi E là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho $EM + EN$ đạt giá trị lớn nhất. Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu (S) tại E .

- A. $x - 2y + 2z + 8 = 0$. B. $2x + y - 2z - 9 = 0$.
C. $2x + 2y + z + 1 = 0$. D. $2x - 2y + z + 9 = 0$.

Lời giải



Ta có $I(1;2;2)$ là tâm của mặt cầu (S) . Gọi P là trung điểm của $MN \longrightarrow P(5;-2;4)$.

$$\text{Ta có } (EM + EN)^2 \leq 2(EM^2 + EN^2) = 2\left(2EP^2 + \frac{MN^2}{2}\right).$$

Suy ra $EM + EN$ lớn nhất khi $\begin{cases} EM = EN \\ EP \text{ max} \end{cases}$.

Khi đó E là giao điểm của đường thẳng IP với mặt cầu (S) (với I nằm giữa E, P).

$$\text{Có } \overrightarrow{IP} = (4;-4;2), \text{ do đó phương trình đường thẳng } IP: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{1}.$$

$$\text{Tọa độ } E \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E(3;0;3) \\ E(-1;4;1) \end{cases}.$$

Do EP lớn nhất nên $E(-1;4;1)$.

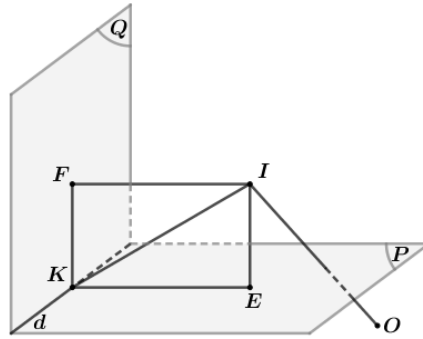
Suy ra $\overrightarrow{EI} = (2;-2;1)$, phương trình mặt phẳng tiếp diện tại E là: $2x - 2y + z + 9 = 0$. **Chọn D.**

Câu 28. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 4 = 0$. Gọi $(P), (Q)$ là hai mặt phẳng vuông góc với nhau theo giao tuyến d và đồng thời tiếp xúc với (S) , K là hình chiếu vuông góc của tâm I của mặt cầu (S) lên d và M là giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OIK (O là gốc tọa độ). Hãy chọn khẳng định đúng về M .

A. $M \in (2\sqrt{3}; 4)$. **B.** $M \in (2; 2\sqrt{2})$. **C.** Không tồn tại M . **D.** $M \in (2\sqrt{3}; 4)$.

Lời giải.



Giả sử (S) tiếp xúc với $(P), (Q)$ lần lượt tại E và $F \longrightarrow K = d \cap (IEF)$.

Ta chứng minh được $d \perp (IEF) \longrightarrow K \in (IEF)$. Theo đề, $(P), (Q)$ là hai mặt phẳng vuông góc với nhau theo giao tuyến d và đồng thời tiếp xúc với (S) , từ đó ta chứng minh được tứ giác $IEKF$ là hình vuông.

$$\text{Mặt cầu } (S) \text{ có tâm } I(1;-2;1) \text{ và bán kính } R = \sqrt{2} \longrightarrow \begin{cases} IE = IF = \sqrt{2} \rightarrow IK = 2 \\ OI = \sqrt{6} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } S_{\Delta OIK} = \frac{1}{2} IK \cdot IO \cdot \sin \widehat{OIK} = \sqrt{6} \cdot \sin \widehat{OIK}.$$

$S_{\Delta OIK}$ đạt giá trị lớn nhất khi $\sin \widehat{OIK}$ lớn nhất $\Leftrightarrow \widehat{OIK} = 90^\circ$.

Vậy $M = \sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra khi $OI \perp IK$. **Chọn B.**

Câu 29. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3), B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu có đường kính AB . Mặt phẳng (P) vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H (giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P)) có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P): 2x + by + cz + d = 0$ với $b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tính $S = b + c + d$.

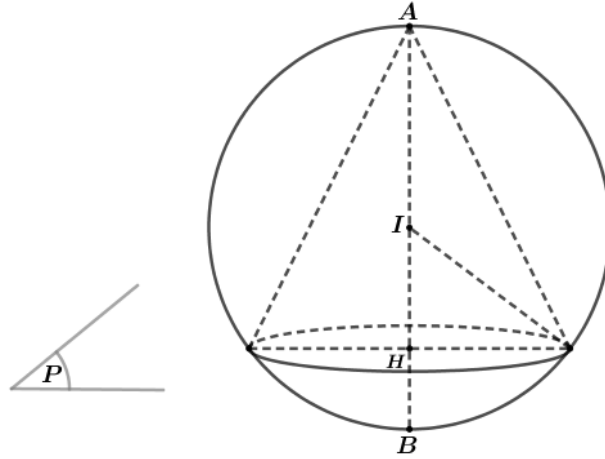
A. $S = -18$.

B. $S = -11$.

C. $S = -24$.

D. $S = -14$.

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{AB} = (4; 4; 2)$. Mặt cầu (S) đường kính AB có tâm $I(4; 3; 4)$ và bán kính $R = \frac{1}{2} AB = 3$.

Gọi r là bán kính của đường tròn tâm H . Vì thể tích khối nón lớn nhất nên ta chỉ cần xét trường hợp H thuộc đoạn IB , tức là $AH > 3$.

Đặt $IH = x, 0 \leq x < 3 \Rightarrow r^2 = R^2 - x^2 = 9 - x^2$.

Khi đó thể tích khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H là:

$$V = \frac{1}{3} AH \cdot \pi r^2 = \frac{1}{3} (3+x) \cdot \pi (9-x^2) = \frac{1}{6} (3+x) \cdot (3+x)(6-2x) \pi \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{12}{3}\right)^3 \pi = \frac{32}{3} \pi.$$

Dấu "=" xảy ra khi $3+x = 6-2x \longrightarrow x = 1$.

Mặt phẳng (P) nhận $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = (2; 2; 1)$ làm véc tơ pháp tuyến

Phương trình mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + m = 0$.

$$\text{Lại có } d(H; (P)) = 1 \Leftrightarrow \frac{|18+m|}{3} = 1 \longrightarrow \begin{cases} m = -15 \\ m = -21 \end{cases}$$

Với $m = -15 \longrightarrow$ mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 15 = 0$. Khi đó I và B nằm cùng phía so với mặt phẳng (P) ($AH = d(A; (P)) < 3$) nên loại.

Với $m = -21 \longrightarrow$ mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 21 = 0$. Khi đó I và B nằm khác phía so với mặt phẳng (P) ($AH = d(A; (P)) > 3$) nên nhận.

Vậy $b = 2, c = 1, d = -21 \longrightarrow S = -18$. **Chọn A.**

Câu 30. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 25$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 4 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (T) , CD là một đường kính cố định của (T) , A là điểm thay đổi trên (T) (A khác C và D). Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P) cắt (S) tại B . Giá trị lớn nhất của khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng

A. $\frac{12}{\sqrt{13}}$.

B. $\sqrt{13}$.

C. $\frac{15}{4}$.

D. 11.

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;3)$ và bán kính $R=5$.

Gọi J là trung điểm của CD , vì $\triangle ACD$ vuông tại

$$A \longrightarrow IJ \perp (ACD) \longrightarrow IJ \parallel AB \quad (1).$$

Vì I là tâm của mặt cầu $(S) \longrightarrow I$ nằm trên mặt phẳng trung trực của AB (2).

$$\text{Từ (1) và (2)} \longrightarrow AB = 2 \cdot IJ = 2 \cdot d(I; (P)) = 6.$$

$$\text{Ta có } CD = 2 \cdot CJ = 2\sqrt{R^2 - IJ^2} = 8.$$

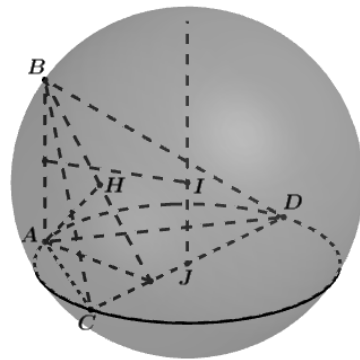
$$\text{Đặt } AH \perp (BCD) \longrightarrow AH = d(A; (BCD)).$$

Vì AB, AC, AD đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} \geq \frac{1}{AB^2} + \frac{4}{AC^2 + AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{4}{CD^2} = \frac{1}{36} + \frac{1}{16} = \frac{13}{144}.$$

$$\Rightarrow AH^2 \leq \frac{144}{13} \longrightarrow AH \leq \frac{12}{\sqrt{13}}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow AC = AD = 4\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } AH_{\max} = \frac{12}{\sqrt{13}}. \text{ Chọn A.}$$



Phần 4. Bài toán cực trị sử dụng tâm tỷ cự

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-1;3;5), B(2;6;-1), C(-4;-12;5)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức $T = |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết rằng $M(x_0; y_0; z_0)$, hỏi x_0 thuộc khoảng nào trong các khoảng sau.

- A. $(0;2)$. B. $(2;4)$. C. $(-4;-1)$. D. $(-5;-4)$.

Lời giải. Gọi điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \longrightarrow I(-1; -1; 3)$

và điểm J sao cho $\overrightarrow{JA} - 4\overrightarrow{JB} = \vec{0} \longrightarrow J(3; 7; -3)$.

Ta có $T = |\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}| + |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |-3\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} - 4\overrightarrow{JB}| + |3\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}| = 3(MJ + MI)$.

Ta có $[-1+2.(-1)-2.3][3+2.7-2(-3)] = -9.23 < 0 \longrightarrow I, J$ nằm về hai phía của (P) .

Suy ra $T_{\max}$ khi và chỉ khi M, I, J thẳng hàng hay $M = IJ \cap (P)$.

$\overrightarrow{IJ} = (4; 8; -6)$, phương trình đường thẳng $IJ: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-3}$.

Từ đó ta tìm được $M\left(\frac{3}{4}; \frac{5}{2}; \frac{3}{8}\right)$. **Chọn A.**

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;3), B(-3;1;3), C(1;5;1)$ và $M(x; y; 0)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $T_{\min}$ của biểu thức $T = 2|\overrightarrow{MA}| + |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$.

- A. $T_{\min} = 2\sqrt{35}$. B. $T_{\min} = 2\sqrt{37}$. C. $T_{\min} = 2\sqrt{38}$. D. $T_{\min} = 12$.

Lời giải. Phải nhận thấy được

- $M(x; y; 0) \in$ mặt phẳng (Oxy) .
- Gọi I là trung điểm của BC , suy ra $I(-1; 3; 2)$.

Khi đó $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

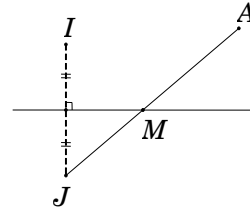
Ta có $T = 2|\overrightarrow{MA}| + |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 2(MA + MI)$.

Vì $z_A = 3 > 0$ và $z_I = 2 > 0 \rightarrow A$ và I nằm về cùng phía đối với mp (Oxy) .

Lấy đối xứng điểm $I(-1; 3; 2)$ qua mp (Oxy) , ta được điểm $J(-1; 3; -2)$.

Khi đó $MI = MJ$, suy ra $T = 2(MA + MJ) \geq 2AJ = 2\sqrt{38}$.

Dấu "=" xảy ra khi $M = MJ \cap (Oxy) \longrightarrow M\left(-\frac{1}{9}; \frac{9}{5}; 0\right)$. Vậy $T_{\min} = 2\sqrt{38}$. **Chọn C.**



Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;0), B(-2;0;1), C(0;0;2)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+z+4=0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $Q = a + b + 6c$.

- A. $Q = 2$. B. $Q = -2$. C. $Q = 0$. D. $Q = 1$.

Lời giải. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , ta có $\begin{cases} G\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1\right) \\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \end{cases}$.

Theo đề bài, ta có

$$\begin{aligned} S &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) \\ &= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} \\ &= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \vec{0} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3MG^2 + 0 + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} \\
&= 3MG^2 + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}.
\end{aligned}$$

Vì $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$ là một hằng số nên ta có S đạt giá trị nhỏ nhất khi MG đạt giá trị nhỏ nhất hay M là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P) .

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm G và vuông góc với mặt phẳng (P) , ta có $M = \Delta \cap (P)$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta \text{ là } \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = \frac{1}{3} + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} \Delta \\ (P) \end{cases} \Rightarrow M = \left(-\frac{11}{9}; -\frac{13}{9}; \frac{1}{9} \right) \longrightarrow Q = a + b + 6c = -\frac{11}{9} - \frac{13}{9} + \frac{6}{9} = -2.$$

Chọn B.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(0;21;-19)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $S = a + b + c$.

$$\text{A. } S = 0. \quad \text{B. } S = \frac{12}{5}. \quad \text{C. } S = \frac{14}{5}. \quad \text{D. } S = \frac{16}{5}.$$

Lời giải. Gọi $M(a;b;c) \in (S) \Rightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 1$ và I là điểm thỏa $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I(1;4;-3)$.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } T &= 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\
&= 6MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + 3IA^2 + 2IB^2 + IC^2 = 6MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2 + IC^2.
\end{aligned}$$

Do đó để T đạt giá trị nhỏ nhất thì MI đạt giá trị nhỏ nhất (do $3IA^2 + 2IB^2 + IC^2$ không đổi).
Cách tìm điểm M như sau:

- Viết phương trình đường thẳng d qua I và tâm $J(1;1;1)$ của mặt cầu (S) .
- Tìm giao điểm của d với (S) ta được hai điểm M_1 và M_2 .
- So sánh IM_1 và IM_2 giá trị nào nhỏ hơn thì thỏa mãn (giá trị còn lại là đáp án của bài toán hỏi biểu thức T đạt giá trị lớn nhất).

Làm theo các bước trên ta được điểm $M\left(1; \frac{8}{5}; \frac{1}{5}\right)$ thỏa mãn. Suy ra $a + b + c = \frac{14}{5}$. **Chọn C.**

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;1;-1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;-2)$. Giả sử $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 861$ sao cho $P = 2MA^2 - 7MB^2 + 4MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $T = |a| + |b| + |c|$ bằng

$$\text{A. } T = 49. \quad \text{B. } T = 51. \quad \text{C. } T = 55. \quad \text{D. } T = 47.$$

Lời giải. Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} - 7\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \longrightarrow I = (-21; 16; 10)$. Ta thấy $I \in (S)$.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } P &= 2MA^2 - 7MB^2 + 4MC^2 = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - 7(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\
&= (2IA^2 - 7IB^2 + 4IC^2) - MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (2\overrightarrow{IA} - 7\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}) = (2IA^2 - 7IB^2 + 4IC^2) - MI^2 \\
&\leq 2IA^2 - 7IB^2 + 4IC^2.
\end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } MI = 0 \Rightarrow M \equiv I \Rightarrow M = (-21; 16; 10) \Rightarrow \begin{cases} a = -21 \\ b = 16 \\ c = 10 \end{cases} \longrightarrow T = |a| + |b| + |c| = 47.$$

Chọn D.

Phần 5. Bài toán hỏi số mặt phẳng, số mặt cầu

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + z - 2 = 0$, $(Q): 4y + 5z - 8 = 0$. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa giao tuyến của (P) và (Q) , đồng thời cắt $x'Ox$, $z'Oz$ lần lượt tại A, B (khác O) thỏa mãn $OA = OB$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Gọi $\begin{cases} A(a; 0; 0) \in x'Ox \\ B(0; 0; b) \in z'Oz \end{cases}$ với $ab \neq 0$, vì $OA = OB \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$.

Chọn $M(1; 2; 0)$ và $N(3; 7; -4)$ thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .

Suy ra $\overrightarrow{MA} = (a - 1; -2; 0)$, $\overrightarrow{MB} = (-1; -2; b)$, $\overrightarrow{MN} = (2; 5; -4)$.

Vì M, N, A, B cùng thuộc một mặt phẳng $\longrightarrow [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}] \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow 8a - 4b + 5b(1 - a) = 0$.

(1)

● Trường hợp 1. $a = b$ khi đó (1) trở thành $5a^2 - 9a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{9}{5} \end{cases} \longrightarrow a = b = \frac{9}{5}$.

Suy ra có một mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

● Trường hợp 2. $a = -b$ khi đó (1) trở thành $5a^2 + 7a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -\frac{7}{5} \end{cases} \longrightarrow a = -b = -\frac{7}{5}$.

Suy ra có một mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy có 2 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán. **Chọn B.**

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = 2OB = 3OC \neq 0$?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 8.

Lời giải. Gọi tọa độ các điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ lần lượt là tọa độ các giao điểm của mặt phẳng (P) cắt các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$.

Suy ra phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ nên ta có phương trình $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$ (1).

Mặt khác $OA = 2OB = 3OC \longrightarrow |a| = 2|b| = 3|c| \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b = 3c \\ a = -2b = -3c \\ a = 2b = -3c \\ a = -2b = 3c \end{cases}$ (2).

Từ (1) và (2) ta tìm được 4 bộ nghiệm $(a; b; c) \longrightarrow$ có 4 mặt phẳng thỏa. **Chọn A.**

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 2 = 0$, $(Q): x - 2y + z + 2 = 0$, $(R): x + y - 2z + 2 = 0$ và $(T): x + y + z = 0$. Hỏi có nhiều mặt cầu có tâm thuộc (T) và tiếp xúc với (P) , (Q) , (R) ?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Giả sử mặt cầu (S) có tâm $I = (a; b; c) \in (T) \longrightarrow a + b + c = 0$.

Theo đề bài, ta có $d[I, (P)] = d[I, (Q)] = d[I, (R)]$

$$\longleftrightarrow \frac{|2a - b - c - 2|}{\sqrt{6}} = \frac{|a - 2b + c + 2|}{\sqrt{6}} = \frac{|a + b - 2c + 2|}{\sqrt{6}}$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} |2a - b - c - 2| = |a - 2b + c + 2| \\ |2a - b - c - 2| = |a + b - 2c + 2| \end{cases} \xleftrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} |3a - 2| = |3b - 2| \\ |3a - 2| = |3c - 2| \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 3a + 3b = 4 \\ a = c \\ 3a + 3c = 4 \end{cases}.$$

Trường hợp 1. $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a = b \\ a = c \end{cases} \longrightarrow I(0; 0; 0).$

Tương tự cho ba trường hợp còn lại. **Chọn D.**

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(3; 7; 1), B(8; 3; 8)$ và $C(3; 3; 0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3 và (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng 6. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đi qua C và tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. Phương trình mặt phẳng đi qua C là $(P): a(x - 3) + b(y - 3) + cz = 0 (a^2 + b^2 + c^2 > 0)$.

Theo yêu cầu bài toán (P) tiếp xúc với cả hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$, suy ra

$$\begin{cases} d(A; (P)) = 3 \\ d(B; (P)) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4b + c| = 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ |5a + 8c| = 6\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |4b + c| = 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ 5a = 8b - 6c \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} |4b + c| = 3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ 5a = -8b - 10c \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Hệ (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c \\ b = \frac{262}{401}c \end{cases} \longrightarrow \text{có hai mặt phẳng thỏa là } \begin{cases} (P)_1: 2x + 2y + z - 12 = 0 \\ (P)_2: 62x - 262y - 401z + 600 = 0 \end{cases}$$

Hệ (1) $\Leftrightarrow b = c = 0 \longrightarrow$ không có mặt phẳng nào thỏa yêu cầu.

Vậy có 2 mặt phẳng thỏa yêu cầu. **Chọn B.**

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm

$A(1; 2; -3), B\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right), C(1; 1; 4), D(5; 3; 0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3, (S_2) là

mặt cầu tâm B bán kính bằng $\frac{3}{2}$. Có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với 2 mặt cầu $(S_1), (S_2)$

đồng thời song song với đường thẳng đi qua C và D .

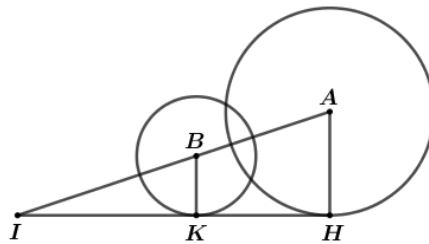
A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. Vô số.

Lời giải.



Ta tính được $AB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, lại có $R_1 + R_2 = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ nên giao tuyến hai mặt cầu là một đường tròn.

Gọi $I = AB \cap (\alpha)$ với (α) là mặt phẳng thỏa mãn bài toán. Hạ BK, AH vuông góc với mặt phẳng (α) . Khi đó ta có I nằm ngoài AB và B là trung điểm AI vì

$$R_2 = \frac{3}{2} = \frac{1}{2} R_1 \longrightarrow BK = \frac{1}{2} AH.$$

Suy ra $I(2;1;2)$. Gọi phương trình mặt phẳng

$$(\alpha): a(x-2) + b(y-1) + c(z-2) = 0, (a^2 + b^2 + c^2 > 0).$$

Vì $(\alpha) // CD$ mà $\overrightarrow{CD} = (4; 2; -4)$ nên ta có $2a + b - 2c = 0 \Leftrightarrow b = 2c - 2a$.

$$\text{Khi đó } d(A, (\alpha)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|-a + b - 5c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 3 \Leftrightarrow (c+a)^2 = a^2 + (2c-2a)^2 + c^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2c \rightarrow b = -2c \\ a = \frac{1}{2}c \rightarrow b = c \end{cases}.$$

Khi đó ta có

$$\text{Trường hợp 1. } b = -2c; a = 2c \Rightarrow (\alpha): 2c(x-2) - 2c(y-1) + c(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y + z - 4 = 0.$$

Vì $C \in (\alpha) \longrightarrow$ mặt phẳng $2x - 2y + z - 4 = 0$ không thỏa.

$$\text{Trường hợp 2. } b = c; a = \frac{1}{2}c \Rightarrow (\alpha): \frac{1}{2}c(x-2) + c(y-1) + c(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 8 = 0.$$

Ta thấy $C, D \notin (\alpha) \longrightarrow x + 2y + 2z - 8 = 0$ thỏa.

Vậy $x + 2y + 2z - 8 = 0$. **Chọn A.**

Phần 6. Bài toán quỹ tích

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;0)$ và mặt cầu $(S): x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 8$. Đường thẳng (Δ) thay đổi qua A và tiếp xúc với (S) tại B . Biết khi (Δ) thay đổi thì B thuộc một đường cong (ω) cố định. Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đường cong (ω) bằng

- A. 2π . B. $\frac{8}{3}\pi$. C. 3π . D. 4π .

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm là $I(0;-1;2)$ và bán kính

$$R = 2\sqrt{2} = IB.$$

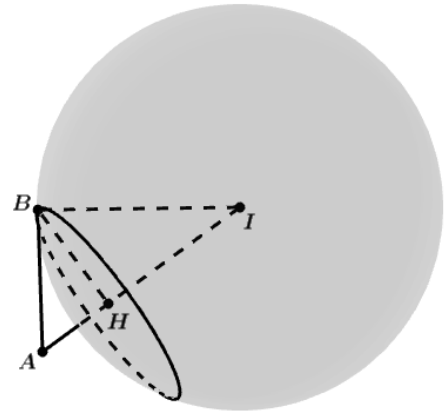
Theo đề ta suy ra $IB \perp AB$ và B nằm trên đường tròn (ω) có tâm H bán kính HB như hình vẽ.

$$\text{Ta tính được } IA = 2\sqrt{3} \Rightarrow AB = \sqrt{IA^2 - IB^2} = 2.$$

$$\text{Từ đó tính được } HB = \frac{IB \cdot AB}{AI} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đường cong (ω) là

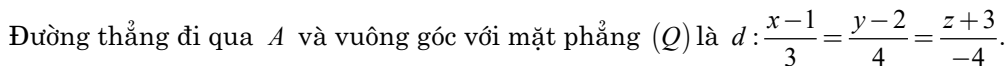
$$S = \pi HB^2 = \frac{8}{3}\pi. \text{ **Chọn B.}**$$



Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;-3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x + 2y - z + 9 = 0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x + 4y - 4z + 5 = 0$ cắt (P) tại điểm B . Điểm M nằm trong mặt phẳng (P) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông và độ dài MB lớn nhất. Tính độ dài MB .

- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. B. $\sqrt{5}$. C. $\frac{\sqrt{41}}{2}$. D. $\sqrt{41}$.

Lời giải.



Điểm M nằm trong mặt phẳng (P) sao cho M luôn nhìn AB dưới một góc vuông nên M nằm trên đường tròn (C) là giao của mặt cầu đường kính AB với mặt phẳng (P) . Khi đó độ dài MB lớn nhất khi và chỉ khi độ dài MB bằng đường kính của (C) . Gọi bán kính của đường tròn (C) là r , trung điểm của AB là $I \longrightarrow I\left(-\frac{1}{2}; 0; -1\right), d_{(I, (P))} = 3$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M thuộc mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$ và ba điểm $A(1;0;0); B(2;1;3); C(0;2;-3)$. Biết rằng quỹ tích các điểm M thỏa mãn $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 8$ là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

- Lời giải.** Mặt cầu (S) có tâm $I(3;3;2)$, bán kính $R=3$. Gọi $M(x,y,z)$, khi đó

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9 \quad (S').$$

Do đó M thuộc đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu (S) và (S') có bán kính

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c dương. Biết A, B, C di động trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $a + b + c = 2$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Khoảng cách từ $M(2019;0;0)$ tới mặt phẳng (P) bằng

- Lời giải.** Gọi M là trung điểm $AB \longrightarrow M\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle OAB$.

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng $(OAB) \equiv (Oxy) \longrightarrow d: \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \\ z = t \end{cases}$.

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn $OC \longrightarrow (\alpha): z - \frac{c}{2} = 0$.

Khi đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là giao điểm của d và (α) có tọa độ là nghiệm

$$\text{của hệ } \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \\ z = t \\ z - \frac{c}{2} = 0. \end{cases} \longrightarrow I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right).$$

Ta có $x_I + y_I + z_I = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{2}{2} = 1 \longrightarrow x_I + y_I + z_I - 1 = 0$. Điều này chứng tỏ tâm I của mặt cầu luôn thuộc mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$. Khi đó $d[M, (P)] = \frac{|2019-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2018}{\sqrt{3}}$. **Chọn B.**

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$ và điểm $M(1; 3; -1)$. Biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới mặt cầu đã cho luôn thuộc vào đường tròn (C) . Tìm tâm J và bán kính r của đường tròn (C) .

A. $J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right)$ và $r = \frac{12}{25}$.

B. $J\left(\frac{41}{25}; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right)$ và $r = \frac{12}{5}$.

C. $J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right)$ và $r = \frac{12}{5}$.

D. $J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{73}{25}\right)$ và $r = \frac{12}{25}$.

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 2)$ và bán kính $R = 3$.

Ta tính được $IM = \sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2} = 5$.

Gọi A là một tiếp điểm, ta tính được $MA = \sqrt{IM^2 - IA^2} = 4$.

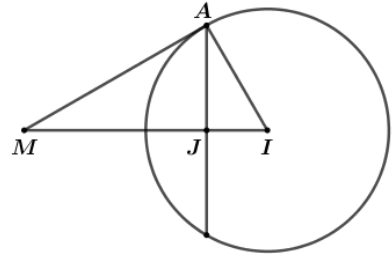
Gọi $A(x; y; z)$ là một tiếp điểm.

Vì $MA = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$.

Tọa độ của A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9 \end{cases} \longrightarrow 4y - 3z + 1 = 0.$$

Vậy $A \in (P): 4y - 3z + 1 = 0 \longrightarrow r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \frac{12}{5}$, J là hình chiếu vuông góc của I lên (P) .



Tọa độ của J là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4y - 3z + 1 = 0 \\ x = 1 \\ y = -1 + 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{11}{25} \\ z = \frac{23}{25} \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 3 = 0$ và hai điểm $A(1; 1; 1)$, $B(-3; -3; -3)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với (P) tại điểm C . Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R = \frac{2\sqrt{11}}{3}$.

B. $R = \frac{2\sqrt{33}}{3}$.

C. $R = 4$.

D. $R = 6$.

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-4; -4; -4)$, phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$

$$\text{Gọi } I = AB \cap (P) \longrightarrow \text{tọa độ } I \text{ thỏa mãn } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{t=2} \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases}, \text{ suy ra } I(3, 3, 3).$$

Suy ra $IA = 2\sqrt{3}$ và $IB = 6\sqrt{3}$.

Theo đề IC tiếp xúc với mặt cầu (S) nên $IC^2 = IA \cdot IB = 36 \longrightarrow IC = 6$. Điều này chứng tỏ điểm C luôn cách điểm I một khoảng bằng 6 (không đổi). **Chọn D.**

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P_m): (m-1)x + (2-m)y - mz + 2m - 1 = 0$ thay đổi. Hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 0; 3)$ lên mặt phẳng (P_m) luôn thuộc một đường tròn cố định có bán kính là

$$\text{A. } R = 1. \quad \text{B. } R = \frac{1}{2}. \quad \text{C. } R = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \text{D. } R = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Lời giải. Ta có $(P_m): (m-1)x + (2-m)y - mz + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m(x - y - z + 2) + (-x + 2y - 1) = 0$.

Suy ra mặt phẳng (P_m) chứa giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - y - z + 2 = 0$ và $(\beta): x - 2y + 1 = 0$.

$$\text{Suy ra } d: \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases} \subset (P_m).$$

Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng d , ta tìm được $H(1; 1; 2)$.

Gọi K là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P_m) , suy ra $AK \perp (P_m) \Rightarrow AK \perp KH \Rightarrow \triangle AKH$ vuông tại $K \longrightarrow K$ nằm trên đường tròn đường kính AH .

Ta tính được $AH = \sqrt{2} \longrightarrow$ hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (P_m) luôn thuộc một đường tròn cố định có bán kính $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn C.**

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 11; -5)$ và mặt phẳng $(P): 2mx + (m^2 + 1)y + (m^2 - 1)z - 10 = 0$. Biết khi m thay đổi thì tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với (P) và cùng đi qua A . Tổng bán kính của hai mặt cầu đó là

$$\text{A. } 4\sqrt{2}. \quad \text{B. } 5\sqrt{3}. \quad \text{C. } 6\sqrt{3}. \quad \text{D. } 12\sqrt{2}.$$

Lời giải. Gọi $I(a, b, c)$, R lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) và đi qua A .

$$\text{Suy ra } R = d(I, (P)) = \frac{|2ma + (m^2 + 1)b + (m^2 - 1)c - 10|}{\sqrt{4m^2 + m^4 + 2m^2 + 1 + m^4 - 2m^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| b + c - \frac{2ma - 2c - 10}{m^2 + 1} \right|.$$

$$\text{Vì } (S) \text{ là mặt cầu cố định nên } R \text{ không đổi} \longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -2c - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -5 \end{cases} \longrightarrow I(0; b; -5).$$

$$\text{Ta có } d(I, (P)) = IA \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} |b - 5| = \sqrt{4 + (b - 1)^2} \Leftrightarrow b^2 - 34b + 225 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 25 \\ b = 9 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} I(0; 25; -5) \rightarrow R = 10\sqrt{2} \\ I(0; 9; -5) \rightarrow R = 2\sqrt{2} \end{cases}. \text{ Vậy tổng bán kính hai mặt cầu đó là } 12\sqrt{2}. \text{ **Chọn D.**}$$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm A, B, C (không trùng O) lần lượt thay đổi trên các trục Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn điều kiện: tỉ số giữa diện tích của tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3}{2}$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 1.

Lời giải.

Cách 1. Ta có $\frac{S_{ABC}}{V_{OABC}} = \frac{S_{ABC}}{\frac{1}{3}S_{ABC} \cdot d(O, (ABC))} = \frac{3}{d(O, (ABC))}$, mà $\frac{S_{ABC}}{V_{OABC}} = \frac{3}{2}$

$\longrightarrow d(O, (ABC)) = 2$. Vậy mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc mặt cầu tâm O có bán kính $R = 2$.

Chọn B.

Cách 2. Giả sử $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ (với $abc \neq 0$).

$$\longrightarrow \begin{cases} V_{OABC} = \frac{1}{6}|abc| \\ (ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \rightarrow (ABC): bcx + cay + abz - abc = 0 \end{cases}$$

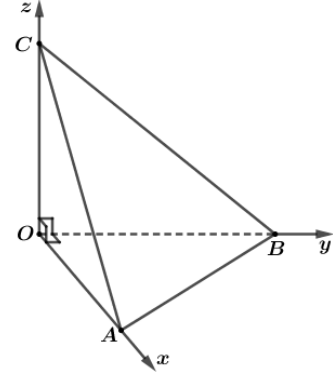
Lại có $\overrightarrow{AB} = (-a; b; 0), \overrightarrow{AC} = (-a; 0; c), [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (bc, ca, ab)$

$$\longrightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}.$$

Theo đề, ta có

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{V_{OABC}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{|abc|}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}} = 2 \longrightarrow d(O, (ABC)) = 2.$$

Vậy mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm O bán kính $R = 2$. **Chọn B.**



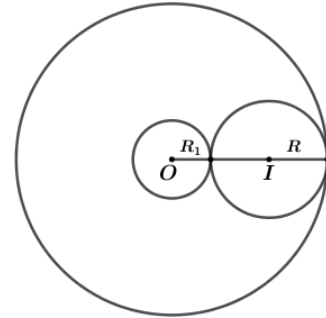
Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - \cos \alpha \sin \beta)^2 + (y - \sin \alpha \sin \beta)^2 + (z - \cos \beta)^2 = \frac{1}{4}$, với α, β là các góc thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $\alpha, \beta \in [0; 2\pi]$. Khi đó mặt cầu (S) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định $(S_1), (S_2)$. Tính tổng thể tích của hai khối cầu (S_1) và (S_2) đó.

A. 16π .B. $\frac{21\pi}{8}$.C. $\frac{14\pi}{3}$.D. $\frac{67\pi}{3}$.

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm $I(\cos \alpha \sin \beta; \sin \alpha \sin \beta; \cos \beta)$ và bán kính $R = \frac{1}{2}$.

Ta thấy $OI^2 = \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow (S_1), (S_2)$ có cùng tâm O .

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = IO - R = \frac{1}{2} \\ R_2 = IO + R = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{4}{3}\pi(R_1)^3 = \frac{\pi}{6} \\ V_2 = \frac{4}{3}\pi(R_2)^3 = \frac{9\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow V_1 + V_2 = \frac{14\pi}{3}.$$

**Chọn C.**

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 2; 2)$ và $B(2; -2; 0)$. Gọi $I(1; 1; -1)$ và $J(3; 1; 1)$ là tâm của hai đường tròn nằm trên hai mặt phẳng khác nhau và có chung một dây cung AB . Biết rằng luôn có một mặt cầu (S) đi qua cả hai đường tròn ấy. Tính bán kính R của (S) .

A. $R = 2\sqrt{2}$.B. $R = 2\sqrt{6}$.C. $R = \frac{\sqrt{129}}{3}$.D. $R = \frac{\sqrt{219}}{3}$.

Lời giải. Ta tính được $IA = IB = JA = JB = \sqrt{11}$. Suy ra tâm H của mặt cầu (S) nằm trên đường thẳng đi qua trung điểm $M(1; 0; 1)$ của AB và trung điểm $N(2; 1; 0)$ của IJ .

Phương trình đường thẳng $MN: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Suy ra $H(1+h; h; 1-h)$.

Ta tính được $\overrightarrow{IA} = (-1; 1; 3)$, $\overrightarrow{IH} = (h; h-1; 2-h)$

Vì mặt cầu (S) đi qua đường tròn tâm I và cung AB nên $IH \perp IA \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{IA} = 0$

$$\longrightarrow h \cdot (-1) + (h-1) \cdot 1 + (2-h) \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow h = \frac{5}{3} \longrightarrow H\left(\frac{8}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right) \Rightarrow HA = \frac{\sqrt{129}}{3} = R. \text{ Chọn C.}$$

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 9$ và điểm $M(2; -3; 5)$. Ba tia Mx, My, Mz thay đổi, đôi một vuông góc với nhau và cắt mặt cầu (S) tại 3 điểm A, B, C . Biết rằng hình chiếu của M lên mỗi đường thẳng AB, BC, CA cùng thuộc một mặt cầu bán kính R . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

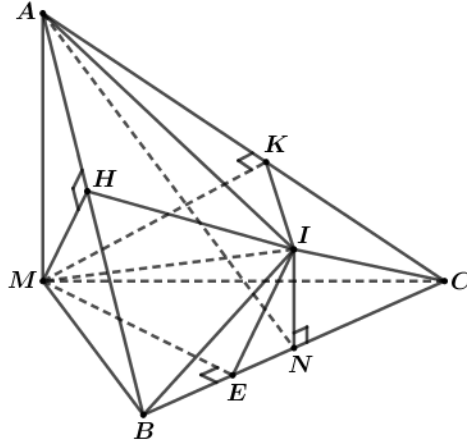
A. $R = \frac{3}{2}$.

B. $R = 3$.

C. $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

D. $R = \frac{3}{4}$.

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 3)$ và bán kính $r = 3$.



Gọi N là trung điểm của BC và ba điểm H, K, E lần lượt là hình chiếu của M trên AB, AC, BC .

Ta có $M(2; -3; 5) \in (S)$.

Suy ra $IN \perp (MBC) \longrightarrow IN \perp ME \longrightarrow ME \perp IE$.

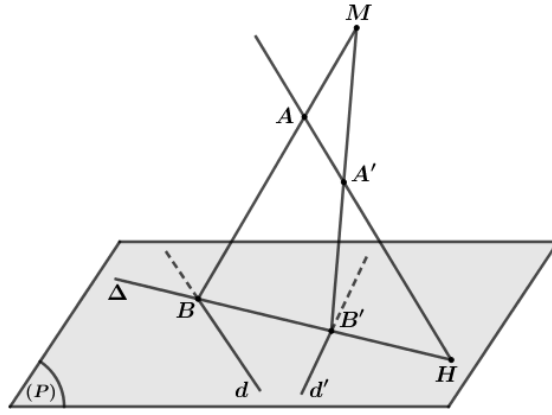
Chứng minh tương tự ta có $MH \perp IH$ và $MK \perp IK$.

Suy ra H, K, E cùng thuộc mặt cầu đường kính $IM = 3$. Vậy $R = \frac{3}{2}$. **Chọn A.**

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{1}$,

$d': \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{1}$ và hai điểm $A(a; 0; 0), A'(0; 0; b)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và d' ,

H là giao điểm của đường thẳng AA' và mặt phẳng (P) . Một đường thẳng Δ thay đổi trên (P) nhưng luôn đi qua H đồng thời Δ cắt d và d' lần lượt tại B, B' . Hai đường thẳng $AB, A'B'$ cắt nhau tại điểm M . Biết điểm M luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (15; -10; -1)$ (tham khảo hình vẽ). Tính $T = a + b$.



A. $T = 8$.

B. $T = 9$.

C. $T = -9$.

D. $T = 6$.

Lời giải. Gọi $I = d \cap d'$, ta tìm được $I(1;3;1)$.

Gọi $\text{mp}(\alpha) \equiv \text{mp}(d, A), \text{mp}(\beta) \equiv \text{mp}(d', A')$. Ta thấy $(\alpha) \cap (\beta) = IM$. Vì điểm M luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định có vé-tơ chỉ phương $\vec{u} = (15; -10; -1)$ nên $\vec{u}$ là một véc-tơ chỉ phương IM .

$\text{mp}(\alpha)$ chứa d và IM nên ta viết được phương trình $(\alpha): x + 2y - 5z - 10 = 0$.

$\text{mp}(\beta)$ chứa d' và IM nên ta viết được phương trình $(\beta): 3x + 4y + 5z - 20 = 0$.

Vì $A \in (\alpha) \Rightarrow A(2;0;0) \longrightarrow a = 2, A' \in (\beta) \Rightarrow A'(0;0;4) \longrightarrow b = 4$.

Vậy $T = a + b = 6$. **Chọn D.**

Câu 14. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;2;3), N(3;4;5)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng (P) , các điểm H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N trên Δ . Biết rằng khi $MH = NK$ thì trung điểm của HK luôn thuộc một đường thẳng d cố định, phương trình của d là

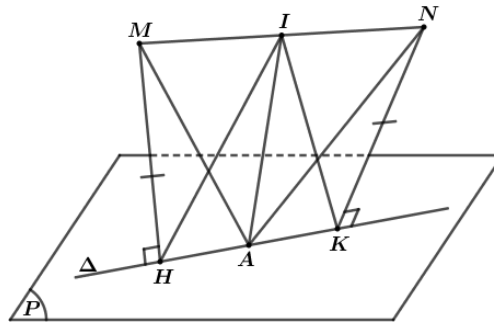
A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = t \\ y = 13 + 2t \\ z = -4 + t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 - t \end{cases}$

Lời giải.



Gọi I, A lần lượt là trung điểm của MN và HK . Ta chứng minh được $AI \perp MN \longrightarrow AI$ luôn thuộc mặt phẳng trung trực (α) của đoạn thẳng $MN \longrightarrow d$ là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (α) .

$\overrightarrow{MN} = (2;2;2), I(2;3;4)$. Phương trình mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 9 = 0$.

$$\begin{cases} (\alpha): x + y + z - 9 = 0 \\ (P): x + 2y + 3z - 14 = 0 \end{cases} \longrightarrow d: \begin{cases} x = t \\ y = 13 - 2t \\ z = -4 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R}). \text{ Chọn B.}$$

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;0)$. Giả sử B, C là các điểm thay đổi nằm trên các trục Ox và Oz . Gọi M là trung điểm của AC . Biết rằng khi B và C thay đổi nhưng nằm trên các trục Ox và Oz thì hình chiếu vuông góc H của M trên đường thẳng AB luôn nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn đó?

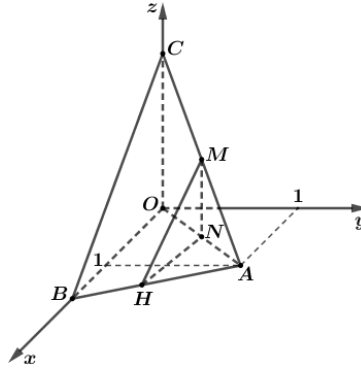
A. $R = \frac{1}{4}$.

B. $R = \frac{1}{2}$.

C. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $R = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm của $OA \longrightarrow NA = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\left. \begin{array}{l} MN \perp (ABC) \\ MH \perp AB \end{array} \right\} \longrightarrow NH \perp AB$. Suy ra H nằm trên đường tròn (C) đường kính NA

$\longrightarrow$ bán kính đường tròn (C) là $R = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **Chọn D.**

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{-1}$ và điểm $A(1;1;1)$. Hai điểm B, C di động trên đường thẳng d sao cho mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt phẳng (OAC) . Gọi điểm B' là hình chiếu vuông góc của điểm B lên đường thẳng AC . Biết rằng quỹ tích các điểm B' là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

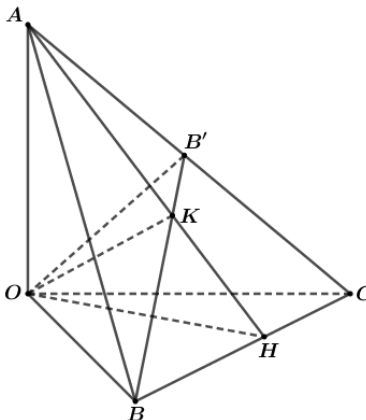
A. $r = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

B. $r = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

C. $r = \frac{\sqrt{70}}{10}$.

D. $r = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Lời giải.



Ta có $\vec{u}_d = (2; -1; -1)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng d . Ta thấy $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{u}_d = 0 \longrightarrow OA \perp d$.

Lại có $H(0;1;-1) \in d$ và $\overrightarrow{OH} \cdot \vec{u}_d = 0$ nên H là hình chiếu của O lên đường thẳng d .

$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \longrightarrow OH \perp OA \longrightarrow OA \perp (OBC) \longrightarrow OB \perp OA \longrightarrow OB \perp (OAC)$ (1).

Vì B' là hình chiếu vuông góc của B lên $AC \longrightarrow AB' \perp BB'$ (2).

Từ (1),(2) $\longrightarrow OB' \perp AB' \longrightarrow B'$ nằm trên mặt cầu (S) đường kính OA .

Phương trình mặt cầu $(S): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

Mà $B' \in (A, d): 2x + 5y - z - 6 = 0$ nên B' thuộc đường tròn (C) , với $(C) = (S) \cap (A, d)$.

Từ đó tính được $r = \frac{3\sqrt{5}}{10}$. **Chọn D.**

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 8$ và hai điểm $A(4; 4; 3), B(1; 1; 1)$. Gọi (C) là tập hợp các điểm $M \in (S)$ để cho $|MA - 2MB|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Biết rằng (C) là một đường tròn bán kính R . Tính R .

- A. $\sqrt{7}$. B. $\sqrt{6}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải. Mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; 3)$ và bán kính $R = 4\sqrt{2}$.

Gọi C trên đoạn IA thỏa mãn $IC = \frac{1}{4}IA \longrightarrow C(1; 1; 3)$.

Xét $\triangle IAM$ và $\triangle IMC$, ta có

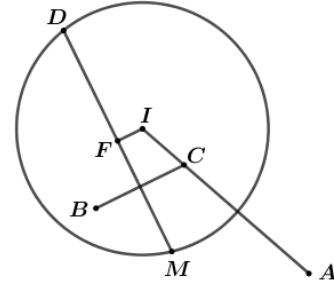
$$\begin{cases} \hat{I} \text{ chung} \\ \frac{IA}{IM} = \frac{IM}{IC} = 2 \end{cases} \Rightarrow \triangle IAM \sim \triangle IMC \longrightarrow MA = 2MC.$$

Từ đó $P = |MA - 2MB| = 2|MC - MB| \geq 0$.

Dấu "=" xảy ra khi M nằm trên mặt phẳng trung trực của BC .

Mặt phẳng trung trực (P) của BC là $(P): z = 2$.

Khi đó M nằm trên đường tròn có bán kính $(R')^2 = \sqrt{R^2 - d(I, (P))^2} = \sqrt{8 - 1} = \sqrt{7}$. **Chọn A.**



Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6)$, điểm M thay đổi trên mặt phẳng $(ABC), N$ là điểm trên tia OM sao cho $OM.ON = 12$. Biết khi M thay đổi thì điểm N luôn nằm trên mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó

- A. $\frac{7}{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải. Phương trình mặt phẳng $(ABC): 6x + 3y + 2z = 12$.

Giả sử $N(x; y; z) \Rightarrow ON = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Vì N là điểm trên tia OM và thỏa $OM.ON = 12$, suy

$$\text{ra } \overrightarrow{OM} = \frac{12}{\overrightarrow{ON}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{12}{ON^2} \Leftrightarrow \overrightarrow{ONOM} = \frac{12}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \overrightarrow{ON}$$

$$\longrightarrow N \left(\frac{12x}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{12y}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{12z}{x^2 + y^2 + z^2} \right).$$

$$\text{Vì } N \in (ABC) \Rightarrow \frac{6.12x}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{3.12y}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{2.12z}{x^2 + y^2 + z^2} = 12 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z - 1)^2 = \frac{49}{4}.$$

Vậy N thuộc mặt cầu cố định bán kính $R = \frac{7}{2}$. **Chọn A.**

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S_1) có tâm O (O là gốc tọa độ) bán kính là $\sqrt{3}$ và mặt cầu (S_2) có tâm $O'(2; 3; 6)$ và bán kính bằng 4. Biết tập hợp các điểm A trong không gian mà độ dài tiếp tuyến kẻ từ A tới (S_1) và (S_2) bằng nhau là một mặt phẳng (còn gọi là mặt phẳng đẳng phương). Viết phương trình mặt phẳng đó.

- A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$. B. $\frac{x}{9} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$. C. $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$. D. $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1$.

Lời giải.

Cách 1. Mặt phẳng đẳng phương là mặt phẳng tập hợp tất cả các điểm có cùng phương tích với hai mặt cầu không đồng tâm. Và mặt đẳng phương vuông góc với trục nối hai tâm của mặt cầu.

Gọi (P) là mặt phẳng đẳng phương của (S_1) và $(S_2) \Rightarrow (P)$ nhận $\Rightarrow \overrightarrow{OO'}(2,3,6)$ là vectơ pháp tuyến $\Rightarrow \vec{n}_p = \overrightarrow{OO'}(2,3,6)$.

Mặt khác mặt phẳng đẳng phương (P) của (S_1) và (S_2) đi qua một điểm M thuộc OO' có cùng phương tích với hai mặt cầu.

$$\text{Phương trình đường thẳng } OO' \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 6t \end{cases} \longrightarrow M(2t; 3t; 6t).$$

$$\text{Mà } P_{M/(O,R)} = P_{M/(O',R')} \Rightarrow MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2$$

$$\Rightarrow (2t)^2 + (3t)^2 + (6t)^2 - 3 = (2t-2)^2 + (3t-3)^2 + (6t-6)^2 - 16 \longrightarrow t = \frac{18}{49} \longrightarrow M\left(\frac{36}{49}; \frac{54}{49}; \frac{108}{49}\right).$$

$$\text{Vậy : } \Rightarrow (P): 2x + 3y + 6z - 18 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{9} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1.$$

Cách 2. Gọi $A(x; y; z)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Gọi H, K lần lượt là tiếp điểm các tiếp tuyến kẻ từ A tới mặt cầu tâm O, O' .

Khi đó ta có $AH = AK \Leftrightarrow AO^2 - 3 = AO'^2 - 16$.

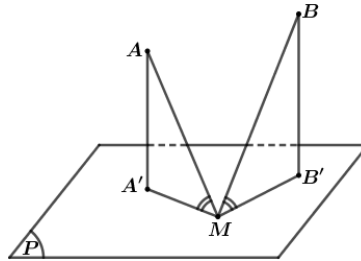
$$\longrightarrow AO^2 - AO'^2 + 13 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - (x-2)^2 - (y-3)^2 - (z-6)^2 + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 6y + 12z - 36 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{9} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1. \text{ Chọn C.}$$

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 4 = 0$ và các điểm $A(2; 1; 2); B(3; -2; 2)$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho các đường thẳng MA, MB luôn tạo với mặt phẳng (P) các góc bằng nhau. Biết rằng điểm M luôn thuộc đường tròn (C) cố định. Tìm tọa độ tâm của đường tròn (C) .

$$\text{A. } \left(\frac{10}{3}; -3; \frac{14}{3}\right). \quad \text{B. } \left(\frac{17}{21}; -\frac{17}{21}; \frac{17}{21}\right). \quad \text{C. } \left(\frac{74}{27}; -\frac{97}{27}; \frac{62}{27}\right). \quad \text{D. } \left(\frac{32}{9}; -\frac{49}{9}; \frac{2}{9}\right).$$

Lời giải.



Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên (P) .

$$\text{Khi đó ta có } \widehat{AMA'} = \widehat{BMB'}. \text{ Suy ra } \triangle AMA' \sim \triangle BMB' \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{d_{(A;(P))}}{d_{(B;(P))}} = 2 \longrightarrow MA = 2MB.$$

Gọi $M(x; y; z)$. Khi đó ta có

$$MA = 2MB \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2}.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{20}{3}x + 6y - 4z + 59 = 0 \quad (S).$$

Suy ra M thuộc đường tròn giao tuyến của (P) với mặt cầu (S) . Mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{10}{3}; -3; 2\right)$.

Tâm H của đường tròn (C) là hình chiếu vuông góc của I trên (P) .

Từ đó ta tìm được $H\left(\frac{74}{27}; -\frac{97}{27}; \frac{62}{27}\right)$. **Chọn C.**

----- **HẾT** -----