

TOÁN 11	KHOẢNG CÁCH
1H3-5	

Contents

A. CÂU HỎI	1
DẠNG 1. KHOẢNG CÁCH CỦA HAI ĐIỂM VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN	1
DẠNG 2. KHOẢNG CÁCH TỪ 1 ĐIỂM ĐẾN 1 MẶT PHẪNG	3
Dạng 2.1 Khoảng cách từ hình chiếu của đỉnh đến mặt phẳng bên	3
Dạng 2.2 Khoảng cách từ 1 điểm bất kỳ đến mặt phẳng	6
DẠNG 3. KHOẢNG CÁCH CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG	11
B. LỜI GIẢI	18
DẠNG 1. KHOẢNG CÁCH CỦA HAI ĐIỂM VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN	18
DẠNG 2. KHOẢNG CÁCH TỪ 1 ĐIỂM ĐẾN 1 MẶT PHẪNG	22
Dạng 2.1 Khoảng cách từ hình chiếu của đỉnh đến mặt phẳng bên	22
Dạng 2.2 Khoảng cách từ 1 điểm bất kỳ đến mặt phẳng	34
DẠNG 3. KHOẢNG CÁCH CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG	54

A. CÂU HỎI

DẠNG 1. KHOẢNG CÁCH CỦA HAI ĐIỂM VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

- Câu 1.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là $a\sqrt{2}$ và tam giác SAC đều. Tính độ dài cạnh bên của hình chóp.
- A. $2a$. B. $a\sqrt{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. a .
- Câu 2.** (Hội 8 trường chuyên ĐBSH - Lần 1 - Năm học 2018 - 2019) Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = 3a, BD = 4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Biết AC vuông góc BD . Tính MN .
- A. $MN = \frac{5a}{2}$. B. $MN = \frac{7a}{2}$. C. $MN = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. D. $MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.
- Câu 3.** (Ngô Quyền - Hải Phòng lần 2 - 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là 60° . Độ dài cạnh SA bằng
- A. $\frac{3a}{2}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.
- Câu 4.** (ĐỀ KT NĂNG LỰC GV THUẬN THÀNH 1 BẮC NINH 2018-2019) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm của $B'C'$. Tính theo a khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AD = 2a$, $CD = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Đường chéo AC' có độ dài bằng

A. $a\sqrt{5}$. B. $a\sqrt{7}$. C. $a\sqrt{6}$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AD = 2a$, $CD = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Đường chéo AC' có độ dài bằng:

A. $a\sqrt{5}$. B. $a\sqrt{7}$. C. $a\sqrt{6}$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 7. (Hội 8 trường chuyên ĐBSH - Lần 1 - Năm học 2018 - 2019) Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABD đều cạnh bằng 2, tam giác ABC vuông tại B , $BC = \sqrt{3}$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và CD bằng $\frac{\sqrt{11}}{2}$. Khi đó độ dài cạnh CD là

A. $\sqrt{2}$. B. 2. C. 1. D. $\sqrt{3}$.

Câu 8. Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt cùng phía so với $(ABCD)$ song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng (β) lần lượt cắt các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt tại A', B', C', D' thỏa mãn $AA' = 2, BB' = 3, CC' = 4$. Hãy tính DD' .

A. 3. B. 7. C. 2. D. 5.

Câu 9. (Chuyên ĐBSH lần 1-2018-2019) Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABD đều cạnh bằng 2, tam giác ABC vuông tại B , $BC = \sqrt{3}$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và CD bằng $\frac{\sqrt{11}}{2}$. Khi đó độ dài cạnh CD là

A. $\sqrt{2}$. B. 2. C. 1. D. $\sqrt{3}$.

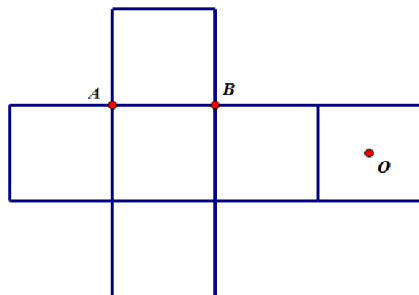
Câu 10. (THPT THUẬN THÀNH 1) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng $4\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng 12. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AA' và BC , gọi P và Q là hai điểm chạy trên đáy $(A'B'C')$ sao cho $PQ = 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = MP + NQ$ bằng

A. $8\sqrt{3}$. B. $3\sqrt{37}$. C. $3\sqrt{61}$. D. $6\sqrt{29}$.

Câu 11. (LẦN 01_VĨNH YÊN_VĨNH PHÚC_2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Gọi O là tâm của $ABCD$, tính khoảng cách từ O đến SC .

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 12. Một hình lập phương được tạo thành khi xếp miếng bìa carton như hình vẽ bên.



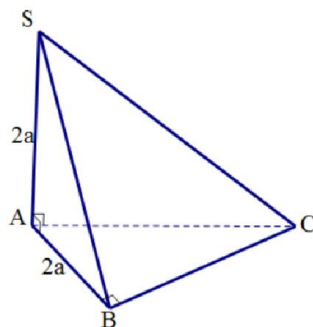
Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng AB sau khi xếp, biết rằng độ dài đoạn thẳng AB bằng $2a$.

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. D. $a\sqrt{5}$.

DẠNG 2. KHOẢNG CÁCH TỪ 1 ĐIỂM ĐẾN 1 MẶT PHẪNG

Dạng 2.1 Khoảng cách từ hình chiếu của đỉnh đến mặt phẳng bên

- Câu 13.** (THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh lần 1 năm 18-19) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = AB = 2a$, tam giác ABC vuông tại B (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng



- A. $a\sqrt{3}$. B. a . C. $2a$. D. $a\sqrt{2}$.

- Câu 14.** (Chuyên Lam Sơn-KSCL-lần 2-2018-2019) Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. B. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. C. $\frac{2a\sqrt{3}}{19}$. D. $\frac{2a\sqrt{38}}{19}$.

- Câu 15.** (TH&TT LẦN 1 – THÁNG 12) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $2SA = AC = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là

- A. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

- Câu 16.** (THPT NGUYỄN TRÃI-THANH HOÁ - Lần 1.Năm 2018&2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SB = 3a$, $AB = 4a$, $BC = 2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

- A. $\frac{12\sqrt{61}a}{61}$. B. $\frac{3\sqrt{14}a}{14}$. C. $\frac{4a}{5}$. D. $\frac{12\sqrt{29}a}{29}$.

Câu 17. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}a}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$. D. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 18. (Mã đề 103 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}a}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}a}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Câu 19. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C , $BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\sqrt{2}a$. B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

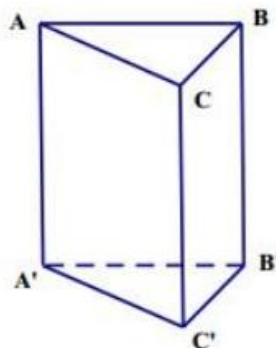
Câu 20. (THPT QUỐC GIA 2018 - MÃ ĐỀ 102) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{a}{2}$. B. a . C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 21. (HKII-CHUYÊN NGUYỄN HUỆ-HN-2018-2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BDA') .

- A. $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $d = \frac{\sqrt{6}}{4}$. C. $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $d = \sqrt{3}$.

Câu 22. (Thi thử lần 4-chuyên Bắc Giang 18-19) Cho hình lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$, (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ là



- A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 23. (Thi thử Đại học Hồng Đức – Thanh Hóa – 07-05 - 2019) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Khoảng cách từ tâm O của đáy tới $mp(SCD)$ bằng

A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a}{\sqrt{6}}$. D. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Câu 24. (Bạch Đằng-Quảng Ninh- Lần 1-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , SA vuông góc với mặt đáy. Hỏi mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $d(B, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$. B. $d(A, (SBD)) = d(B, (SAC))$.
C. $d(C, (SAB)) = d(C, (SAD))$. D. $d(S, (ABCD)) = SA$.

Câu 25. (Yên Định 1 - Thanh Hóa - 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC là tam giác vuông tại A , $AC = a\sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Góc giữa SC và mặt phẳng ABC bằng 60° . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{35}}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$. C. $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}$. D. $\frac{3a}{\sqrt{5}}$.

Câu 26. (SỞ GD ĐỒNG NAI HKI KHỐI 12-2018-2019) Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy là hình vuông cạnh $MN = 3a\sqrt{2}$, SM vuông góc với mặt phẳng đáy, $SM = 3a$, với $0 < a \in \mathbb{R}$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SNP) bằng

A. $a\sqrt{3}$. B. $2a\sqrt{6}$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $a\sqrt{6}$.

Câu 27. (TRƯỜNG THPT THANH THỦY 2018 -2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SA = 2a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông ở A và D , $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{2a}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{2a}{3}$. D. $a\sqrt{2}$.

Câu 28. (Đề thi HSG 12-Sở GD&ĐT Nam Định-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB và K là hình chiếu của điểm A trên cạnh SC . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AGK) . Tính $\cos \alpha$, biết rằng khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (KBC) bằng $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

A. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 29. (Thi thử SGD Bình Phước - 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Biết $AB = BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

A. $\frac{3a}{2}$. B. $\frac{a}{2}$. C. a . D. $2a$.

Câu 30. (Chuyên Quốc Học Huế lần 2 - 2018-2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ theo a .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 31. (KSCL Sở Hà Nam - 2019) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{12}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 32. (Sở giáo dục Cần Thơ - 2019) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AA' = AC = a$ và $AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Câu 33. (Thi Thử Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-Lần 2-2019) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Biết $OA = a, OB = 2a, OC = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. C. $\frac{a\sqrt{17}}{\sqrt{19}}$. D. $\frac{a}{\sqrt{19}}$.

Câu 34. (KSNLGV - THUẬN THÀNH 2 - BẮC NINH NĂM 2018 - 2019) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O ; mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD) . Biết khoảng cách từ O đến các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD)$ lần lượt là $1; 2; \sqrt{5}$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SAD) .

A. $d = \sqrt{\frac{19}{20}}$.

B. $d = \sqrt{\frac{20}{19}}$.

C. $d = \sqrt{2}$.

D. $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dạng 2.2 Khoảng cách từ 1 điểm bất kỳ đến mặt phẳng

Câu 35. (Yên Định 1 - Thanh Hóa - 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC . Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng nào?

A. IB . B. IC . C. IA . D. IO .

Câu 36. (Gia Bình I Bắc Ninh - L3 - 2018) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Gọi M là trung điểm của SD . Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAC) bằng

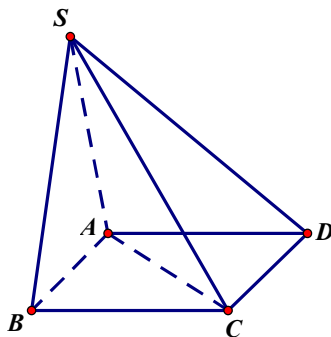
A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a}{4}$.

Câu 37. (THPT NÔNG CÔNG - THANH HÓA LẦN 1_2018-2019) Cho tứ diện đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$, gọi M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $DM = 2MA$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (BCD) .

A. $\frac{2a\sqrt{6}}{9}$. B. $a\sqrt{6}$. C. $\frac{4a\sqrt{6}}{9}$. D. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

- Câu 38. (THPT THUẬN THÀNH 1)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) bằng:
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.
- Câu 39. (THPT Chuyên Thái Bình - lần 3 - 2019)** Trong không gian cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 90^\circ$, $AB = a$. Dựng AA' , CC' ở cùng một phía và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính khoảng cách từ trung điểm của $A'C'$ đến (BCC') .
- A. $\frac{a}{2}$. B. a . C. $\frac{a}{3}$. D. $2a$.
- Câu 40. (Thi thử Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AB = 4a$, $AD = 3a$, $SB = 5a$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) .
- A. $\frac{12\sqrt{41}a}{41}$. B. $\frac{\sqrt{41}a}{12}$. C. $\frac{12\sqrt{61}a}{61}$. D. $\frac{\sqrt{61}a}{12}$.
- Câu 41. (Bạch Đằng-Quảng Ninh- Lần 1-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) .
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. a .
- Câu 42. (Chuyên Tự Nhiên Lần 1 - 2018-2019)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng.
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. a . C. $a\sqrt{3}$. D. $2a$.
- Câu 43. (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-HKI 18-19)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $4a$. Gọi H là điểm thuộc đường thẳng AB sao cho $3\vec{HA} + \vec{HB} = \vec{0}$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SHC) đều vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHC) .
- A. $\frac{5a}{6}$. B. $\frac{12a}{5}$. C. $\frac{6a}{5}$. D. $\frac{5a}{12}$.
- Câu 44. (LÊ HỒNG PHONG HKI 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi F là trung điểm của cạnh SA . Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (FCD) ?
- A. $\frac{1}{2}a$. B. $\sqrt{\frac{1}{5}}a$. C. $\sqrt{\frac{2}{11}}a$. D. $\sqrt{\frac{2}{9}}a$.
- Câu 45. (TRƯỜNG CHUYÊN QUANG TRUNG- BÌNH PHƯỚC 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $SA = a$ và $BA = BC = a$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua AC . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng
- A. $\frac{\sqrt{21}}{7}a$. B. $\frac{2\sqrt{21}}{7}a$. C. $\frac{\sqrt{21}}{14}a$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

- Câu 46. (Thi thử lần 1 trường THPT Hậu Lộc 2 năm 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi H là hình chiếu của A lên SB . Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) bằng
- A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{3a\sqrt{6}}{8}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{3a\sqrt{6}}{16}$.
- Câu 47. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi tâm O cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = \frac{3a}{2}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng
- A. $\frac{3a}{8}$. B. $\frac{5a}{8}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{5a}{4}$.
- Câu 48. (Trường THPT Chuyên Lam Sơn_2018-2019)** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là điểm I thuộc cạnh BC . Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng $(A'BC)$.
- A. $\frac{2}{3}a$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$. D. $\frac{1}{3}a$.
- Câu 49. (THPT Cẩm Bình 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .
- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. a .
- Câu 50. (101 - THPT 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng
- A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$. B. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. D. $\frac{\sqrt{21}a}{28}$.
- Câu 51. (102 - THPT 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng
- A. $\frac{\sqrt{21}a}{28}$. B. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$. C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. D. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.
- Câu 52. (103 - THPT 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng



A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{28}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 53. (104 - THPT 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. B. $\frac{\sqrt{21}a}{28}$. C. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. D. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$.

Câu 54. (Tham khảo THPTQG 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{a\sqrt{15}}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Câu 55. (Đề minh họa lần 1 2017) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD)

A. $h = \frac{2}{3}a$ B. $h = \frac{4}{3}a$ C. $h = \frac{8}{3}a$ D. $h = \frac{3}{4}a$

Câu 56. (THPT Mai Anh Tuấn_Thanh Hóa - Lần 1 - Năm học 2018_2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy, mặt bên (SCD) tạo với mặt đáy một góc bằng 60° , M là trung điểm BC . Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 57. (Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$, hình chiếu của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC , góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$ là 60° . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{3a}{2\sqrt{7}}$. B. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$. C. $\frac{9a}{2\sqrt{7}}$. D. $\frac{a}{2\sqrt{7}}$.

Câu 58. (THPT THUẬN THÀNH 3 - BẮC NINH) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B biết $BC = a\sqrt{3}$, $BA = a$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh AC và biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. Tính khoảng cách d từ C đến mặt phẳng (SAB) .

A. $d = \frac{a\sqrt{30}}{5}$. B. $d = \frac{2a\sqrt{66}}{11}$. C. $d = \frac{a\sqrt{30}}{10}$. D. $d = \frac{a\sqrt{66}}{11}$.

Câu 59. (Thi HK2 THPT Chuyên Bắc Giang 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD) .

A. $h = \frac{3}{4}a$. B. $h = \frac{2}{3}a$. C. $h = \frac{8}{3}a$. D. $h = \frac{4}{3}a$.

Câu 60. (Thi thử SGD Hưng Yên) Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = 2a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) .

A. $\frac{4a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{4a\sqrt{5}}{25}$. C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{8a\sqrt{5}}{25}$.

Câu 61. (Kim Liên - Hà Nội lần 2 năm 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, đáy lớn AB . Biết $AD = DC = CB = a$, $AB = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy và mặt phẳng (SBD) tạo với đáy góc 45° . Gọi I là trung điểm cạnh AB . Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBD) .

A. $d = \frac{a}{4}$. B. $d = \frac{a}{2}$. C. $d = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. D. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 62. (SGD Điện Biên - 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tâm O . Biết $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{4a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

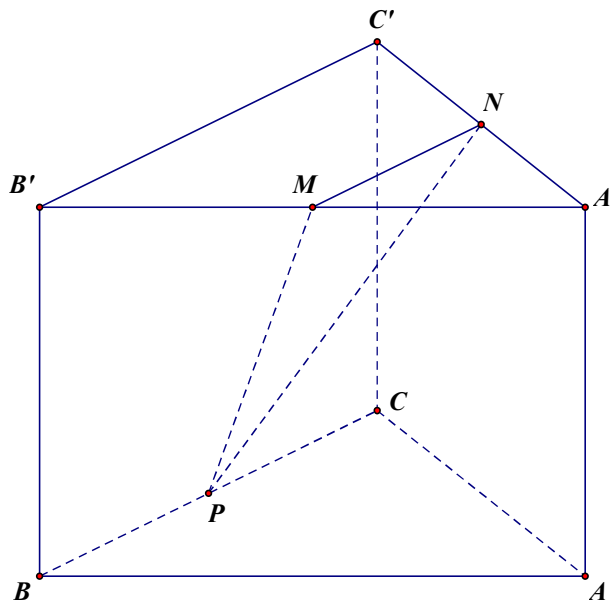
Câu 63. (SP Đồng Nai - 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) .

A. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. B. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 64. (Thi thử Nguyễn Huệ- Ninh Bình- Lần 3- 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SA . Biết $AD = a\sqrt{3}$, $AB = a$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (MBD) bằng

A. $\frac{2a\sqrt{15}}{10}$. B. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. C. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. D. $\frac{a\sqrt{15}}{10}$.

Câu 65. (Gia Bình I Bắc Ninh - L3 - 2018) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ dưới). Khoảng cách từ A đến (MNP) bằng



- A. $\frac{17}{65}$. B. $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. C. $\frac{\sqrt{13}}{65}$. D. $\frac{12}{5}$.

Câu 66. (Kim Liên - Hà Nội - Lần 1 - 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại C và D , $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Biết $AC = a$, $CD = \frac{a}{2}$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $a\sqrt{6}$.
B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.
C. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.
D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

DẠNG 3. KHOẢNG CÁCH CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Câu 67. (KSCL LẦN 1 CHUYÊN LAM SƠN - THANH HÓA_2018-2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và CD' .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. a . C. $a\sqrt{2}$. D. $2a$.

Câu 68. (TH&TT LẦN 1 – THÁNG 12) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 69. (SỞ GD ĐỒNG NAI HKI KHỐI 12-2018-2019) Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy là hình vuông, $MN = 3a$, với $0 < a \in \mathbb{R}$, biết SM vuông góc với đáy, $SM = 6a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng NP và SQ bằng

- A. $6a$. B. $3a$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $3a\sqrt{2}$.

Câu 70. (SỞ GD ĐỒNG NAI HKI KHỐI 12-2018-2019) Cho hình hộp chữ nhật $EFGH.E'F'G'H'$ có $EF = 3a, EH = 4a, EE' = 12a$, với $0 < a \in \mathbb{R}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng EF' và GH' bằng

- A. $12a$. B. $3a$. C. $2a$. D. $4a$.

Câu 71. (HKI- BÙI THỊ XUÂN-TP HCM 2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SB và CD .

- A. $d = 2a$. B. $d = a\sqrt{3}$. C. $d = a\sqrt{2}$. D. $d = a$.

Câu 72. (Thi thử Bạc Liêu – Ninh Bình lần 1) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'C'$ bằng

- A. $a\sqrt{2}$. B. a . C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

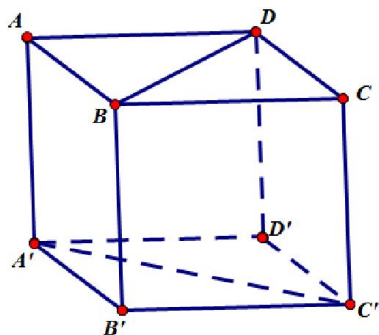
Câu 73. (Thi thử THPT lần 2-Yên Dũng 2-Bắc Giang) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm SD . Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và CM .

- A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 74. (THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, các mặt (SAB) , (SAD) vuông góc với đáy. Góc giữa (SCD) và đáy bằng 60° , $BC = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. B. $2\sqrt{\frac{3}{13}}a$. C. $\frac{a}{2}$. D. $2\sqrt{\frac{3}{5}}a$.

Câu 75. (Tham khảo 2018) Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



- A. $\sqrt{3}a$. B. a . C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. D. $\sqrt{2}a$.

Câu 76. (THPT QUỐC GIA 2018 - MÃ ĐỀ 102) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD , SC bằng

$$\text{A. } \frac{a\sqrt{30}}{6} \quad \text{B. } \frac{4\sqrt{21}a}{21} \quad \text{C. } \frac{2\sqrt{21}a}{21} \quad \text{D. } \frac{a\sqrt{30}}{12}$$

Câu 77. (Ngô Quyền - Hải Phòng lần 2 - 2018-2019) Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = 2a$. Khoảng cách giữa AB' và CC' bằng

$$\text{A. } \frac{2a\sqrt{5}}{5} \quad \text{B. } a \quad \text{C. } a\sqrt{3} \quad \text{D. } \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Câu 78. (Chuyên ĐH Vinh-lần 2-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD .

$$\text{A. } \frac{\sqrt{6}a}{6} \quad \text{B. } \frac{\sqrt{6}a}{2} \quad \text{C. } \frac{\sqrt{6}a}{3} \quad \text{D. } \frac{\sqrt{3}a}{3}$$

Câu 79. (Thi thử hội 8 trường chuyên lần 3 - 23 - 5 - 2019) Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 2a$; $BC = 2a\sqrt{3}$. Tam giác $A'BC$ vuông cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC). Khoảng cách giữa hai AA' và BC bằng

$$\text{A. } a\sqrt{3} \quad \text{B. } \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{C. } \frac{a\sqrt{5}}{2} \quad \text{D. } \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Câu 80. (HKI-Chuyên Vinh 18-19) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD bằng

$$\text{A. } \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \text{B. } \frac{a\sqrt{6}}{4} \quad \text{C. } \frac{2a\sqrt{5}}{5} \quad \text{D. } a\sqrt{6}$$

Câu 81. (TRIỆU QUANG PHỤC HÙNG-2018-2019) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng:

$$\text{A. } \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{B. } \frac{2a\sqrt{5}}{5} \quad \text{C. } a \quad \text{D. } \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Câu 82. (Bạch Đằng-Quảng Ninh- Lần 1-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với đường chéo $AC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng ($ABCD$). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

$$\text{A. } \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{B. } \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{C. } a\sqrt{2} \quad \text{D. } a\sqrt{3}$$

Câu 83. (Chuyên Lê Thánh Tông-Quảng Nam-2018-2019) Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = a, BC = 2a, \widehat{ACB} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của BB' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CC' theo a .

$$\text{A. } a\frac{\sqrt{3}}{7} \quad \text{B. } a\sqrt{3} \quad \text{C. } a\frac{\sqrt{7}}{7} \quad \text{D. } a\sqrt{\frac{3}{7}}$$

Câu 84. (HKI CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG 2018-2019) Cho tứ diện $SABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = a, SB = 2a, SC = 3a$. Gọi I là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AI theo a .

$$\text{A. } a \quad \text{B. } a\sqrt{2} \quad \text{C. } \frac{3a\sqrt{2}}{2} \quad \text{D. } \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

- Câu 85. (Chuyên Lào Cai Lần 3 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của AB . Khoảng cách giữa đường thẳng SE và đường thẳng BC bằng bao nhiêu?
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.
- Câu 86. (Bình Minh - Ninh Bình - Lần 4 - 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SD .
- A. $2a$. B. $a\sqrt{2}$. C. a . D. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.
- Câu 87. (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-HKI 18-19)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = 2a$. Mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD . Tính khoảng cách giữa AH và SC biết $AH = a$.
- A. $\frac{\sqrt{19}}{19}a$. B. $\frac{2\sqrt{19}a}{19}$. C. $\frac{\sqrt{73}}{73}a$. D. $\frac{2\sqrt{73}}{73}a$.
- Câu 88. (NGÔ GIA TỰ_VĨNH PHÚC_LẦN 1_1819)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$, $\widehat{SBC} = 60^\circ$ và $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD .
- A. $d = 4\sqrt{11}$. B. $d = 2\sqrt{22}$. C. $d = \frac{\sqrt{22}}{2}$. D. $d = \sqrt{22}$.
- Câu 89. (NGÔ GIA TỰ_LẦN 1_2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$, $\widehat{SBC} = 60^\circ$ và $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD ?
- A. $d = 4\sqrt{11}$. B. $d = 2\sqrt{22}$. C. $d = \frac{\sqrt{22}}{2}$. D. $d = \sqrt{22}$.
- Câu 90. (TRƯỜNG THPT THANH THỦY 2018 -2019)** Cho hình chóp đáy là hình vuông cạnh a , $SD = \frac{a\sqrt{17}}{2}$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $ABCD$ là điểm H trung điểm của đoạn AB . Gọi K là trung điểm của đoạn AD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD theo a .
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{5}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{45}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{25}$.
- Câu 91. (ĐỀ THI THỬ ĐỒNG ĐẬU-VĨNH PHÚC LẦN 01 - 2018 – 2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , I là trung điểm của AB , hình chiếu S lên mặt đáy là trung điểm H của CI , góc giữa SA và đáy là 45° . Khoảng cách giữa SA và CI bằng:
- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{77}}{22}$. D. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$.
- Câu 92. (CHUYÊN THÁI BÌNH_LẦN 1_2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB .

$$\text{A. } d = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \quad \text{B. } d = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \quad \text{C. } d = \frac{a\sqrt{22}}{11}. \quad \text{D. } d = \frac{a\sqrt{22}}{22}.$$

Câu 93. (SGD Nam Định) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng SB và AC .

$$\text{A. } h = \frac{a\sqrt{7}}{3}. \quad \text{B. } h = \frac{a\sqrt{21}}{7}. \quad \text{C. } h = a\sqrt{3}. \quad \text{D. } h = \frac{a\sqrt{7}}{21}.$$

Câu 94. (Thi thử Bạc Liêu – Ninh Bình lần 1) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . M là trung điểm của AA' . Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng MB' và BC .

$$\text{A. } \frac{a}{2}. \quad \text{B. } \frac{a\sqrt{3}}{2}. \quad \text{C. } \frac{a\sqrt{6}}{3}. \quad \text{D. } a.$$

Câu 95. (Cụm liên trường Hải Phòng-L1-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Gọi I là trung điểm của AB , hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI , góc giữa SA và mặt đáy bằng 45° . Gọi G là trọng tâm tam giác $\triangle SBC$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CG bằng

$$\text{A. } \frac{a\sqrt{21}}{14}. \quad \text{B. } \frac{a\sqrt{14}}{8}. \quad \text{C. } \frac{a\sqrt{77}}{22}. \quad \text{D. } \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 96. (THPT Minh Khai - lần 1) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

$$\text{A. } \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad \text{B. } \frac{a\sqrt{3}}{2}. \quad \text{C. } a\sqrt{2}. \quad \text{D. } a\sqrt{3}.$$

Câu 97. (Chuyên - Vĩnh Phúc - lần 3 - 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB .

$$\text{A. } \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad \text{B. } 2a. \quad \text{C. } \frac{a\sqrt{7}}{7}. \quad \text{D. } \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Câu 98. (Chuyên Đại học Vinh - Lần 1 - Năm học 2018 - 2019) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Gọi E là trung điểm của AB . Cho biết $AB = 2a$, $BC = \sqrt{13}a$, $CC' = 4a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CE bằng

$$\text{A. } \frac{4a}{7}. \quad \text{B. } \frac{12a}{7}. \quad \text{C. } \frac{6a}{7}. \quad \text{D. } \frac{3a}{7}.$$

Câu 99. (THPT Chuyên Thái Bình - lần 3 - 2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD' .

$$\text{A. } a\sqrt{2}. \quad \text{B. } 2a. \quad \text{C. } \frac{a\sqrt{3}}{3}. \quad \text{D. } \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 100. (TRƯỜNG THPT HÀM RỒNG NĂM HỌC 2018 – 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 45° . Gọi E là trung điểm BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC .

$$\text{A. } \frac{a\sqrt{5}}{5}. \quad \text{B. } \frac{a\sqrt{5}}{19}. \quad \text{C. } \frac{a\sqrt{38}}{5}. \quad \text{D. } \frac{a\sqrt{38}}{19}.$$

- Câu 101. (Mã đề 101 BGD&ĐT NĂM 2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a, BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng
- A. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$. B. $\frac{2a}{3}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a}{3}$.
- Câu 102. (THPT THUẬN THÀNH 3 - BẮC NINH)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 120^\circ$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Biết góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC .
- A. $\frac{3a\sqrt{39}}{26}$. B. $\frac{a\sqrt{14}}{6}$. C. $\frac{a\sqrt{39}}{26}$. D. $\frac{3a\sqrt{39}}{13}$.
- Câu 103. (Nho Quan A - Ninh Bình - lần 2 - 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Tính khoảng cách d giữa BD và MN .
- A. $d = 3\sqrt{5}$. B. $d = \sqrt{5}$. C. $d = 5$. D. $d = 10$.
- Câu 104. (Đề thi thử Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk lần 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC) trùng với trung điểm H của AB . Biết góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60° . Khoảng cách giữa AB và SC
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 105. (Thi Thử Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-Lần 2-2019)** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1, gọi M là trung điểm AD và N trên cạnh BC sao cho $BN = 2NC$. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng MN và CD .
- A. $\frac{2\sqrt{2}}{9}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{9}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{9}$.
- Câu 106. (Chu Văn An - Hà Nội - lần 2 - 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh là $2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tam giác SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng
- A. $\frac{\sqrt{30}}{10}a$. B. $\frac{\sqrt{30}}{5}a$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. D. $\frac{\sqrt{3}}{4}a$.
- Câu 107. (HKI - SGD BẠC LIÊU 2017-2018)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $\triangle SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$ có diện tích $84\pi \text{ (cm}^2\text{)}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD là
- A. $\frac{3\sqrt{21}}{7} \text{ (cm)}$. B. $\frac{2\sqrt{21}}{7} \text{ (cm)}$. C. $\frac{\sqrt{21}}{7} \text{ (cm)}$. D. $\frac{6\sqrt{21}}{7} \text{ (cm)}$.
- Câu 108. (THPT Yên Mỹ Hưng Yên lần 1 - 2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. M, N, P lần lượt là trung điểm SB, BC, SD . Tính khoảng cách giữa AP và MN
- A. $\frac{3a}{\sqrt{15}}$. B. $\frac{3a\sqrt{5}}{10}$. C. $4a\sqrt{15}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 109. (LƯƠNG TÀI 2 BẮC NINH LẦN 1-2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành và $SA = SB = SC = 11$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$, $\widehat{SBC} = 60^\circ$ và $\widehat{SCA} = 45^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SD .

- A. $d = 4\sqrt{11}$. B. $d = 2\sqrt{22}$. C. $d = \frac{\sqrt{22}}{2}$. D. $d = \sqrt{22}$

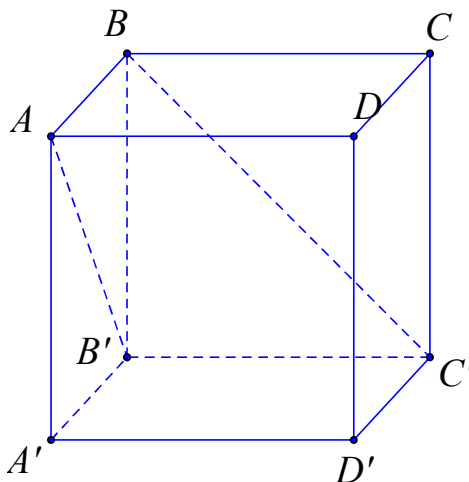
Câu 110. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có các mặt phẳng (SAB) , (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy là hình thang vuông tại các đỉnh A và B , có $AD = 2AB = 2BC = 2a$, $SA = AC$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 111. (Mã đề 104 BGD&ĐT NĂM 2018) Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$ và $OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. B. a . C. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. D. $\frac{\sqrt{6}a}{3}$.

Câu 112. (THPT Cộng Hiền - Lần 1 - 2018-2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $a\sqrt{2}$.

Câu 113. (THI THỬ L4-CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ-HÒA BÌNH-2018-2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tam giác ASO cân tại S , mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SD và $(ABCD)$ bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng

- A. $\frac{3a}{4}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. $\frac{6a}{7}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 114. [THPT THẮNG LONG-HÀ NỘI-LẦN 2-2018-2019] Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$. Hình chiếu của S trên mặt đáy là trung điểm của OA . Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 45° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC .

A. $a\sqrt{6}$.

B. $a\sqrt{2}$.

C. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

B. LỜI GIẢI

DẠNG 1. KHOẢNG CÁCH CỦA HAI ĐIỂM VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Câu 1. Chọn A

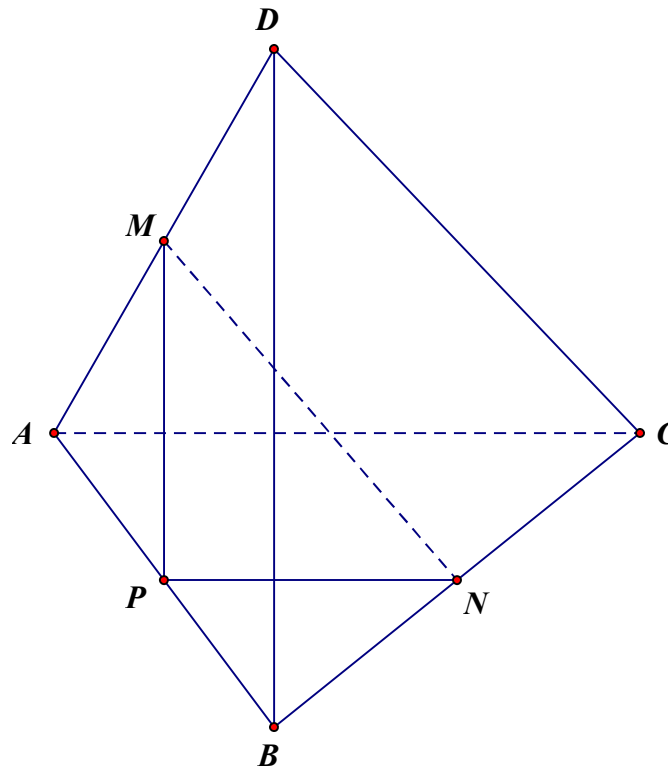
Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nên $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ nên $AC = 2a$.
Tam giác SAC đều nên cạnh bên $SA = AC = 2a$.

Câu 2. Chọn A

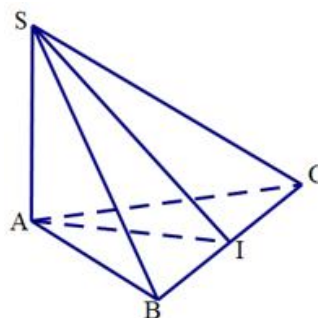
Gọi P là trung điểm AB

$$\text{Ta có } \begin{cases} AC \parallel PN \\ BD \parallel PM \end{cases} \Rightarrow PN \perp PM \text{ và } PN = \frac{AC}{2} = \frac{3a}{2}; PM = \frac{BD}{2} = 2a$$

$$MN = \sqrt{PM^2 + PN^2} = \frac{5a}{2}$$



Câu 3. Chọn A



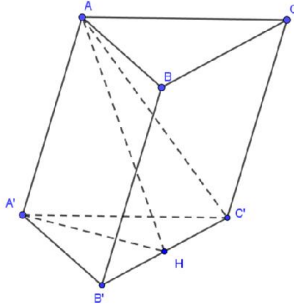
Gọi I là trung điểm BC , khi đó $BC \perp AI$

Mặt khác $BC \perp AI, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là $\widehat{SIA}$.

Tam giác SIA vuông tại A nên $\tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} \Leftrightarrow SA = IA \cdot \tan \widehat{SIA} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.

Câu 4.



Chọn A.

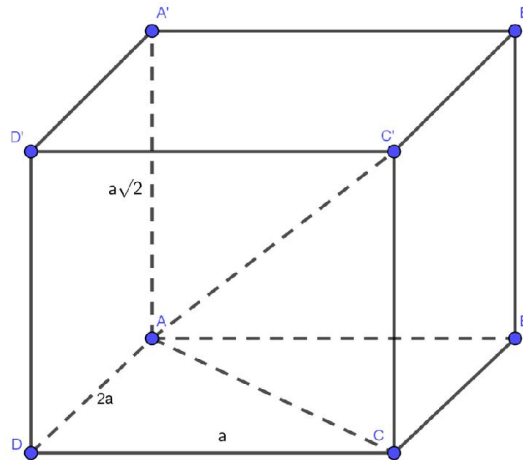
Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° nên $\widehat{AA'H} = 30^\circ$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

$$AH = AA' \cdot \sin \widehat{AA'H} = AA' \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

Câu 5. Chọn B

$$AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{7}.$$

Câu 6. Chọn B



Ta có $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = a\sqrt{5}$. Nên $AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{5a^2 + 2a^2} = a\sqrt{7}$.

Câu 7. Chọn A

Dựng hình chữ nhật $ABCE$, gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CE , $MH \perp DN$ tại H

Ta có

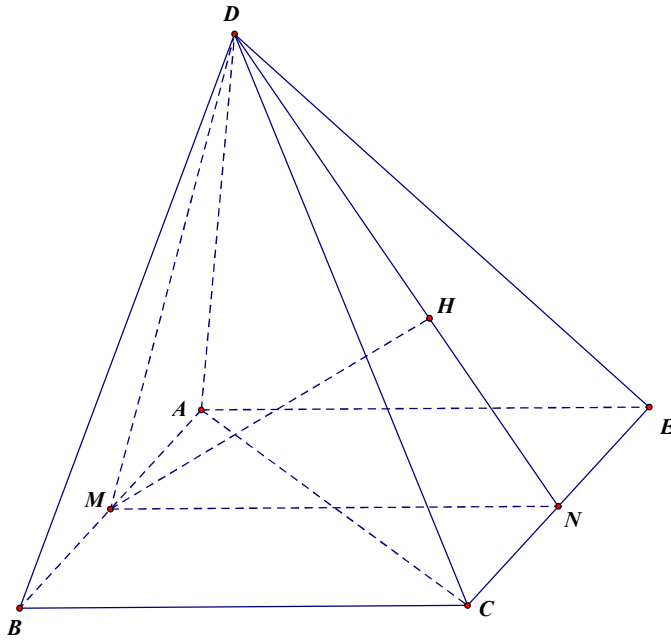
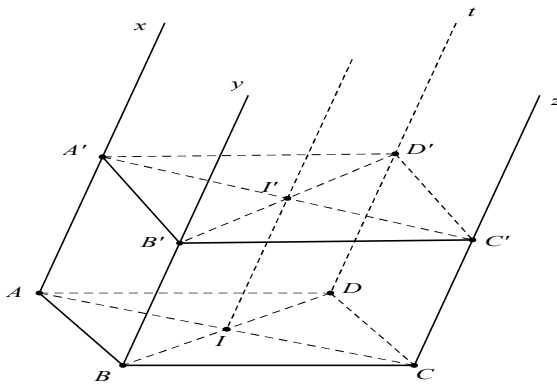
$$\begin{cases} AB \perp DM \\ AB \perp MN \end{cases} \Rightarrow AB \perp (DMN) \Rightarrow CE \perp (DMN) \Rightarrow MH \perp CE$$

$$\begin{cases} MH \perp DN \\ MH \perp CE \end{cases} \Rightarrow MH \perp (CDE) \text{ tại } H \Rightarrow d(AB, CD) = d[M; (CDE)] = MH = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

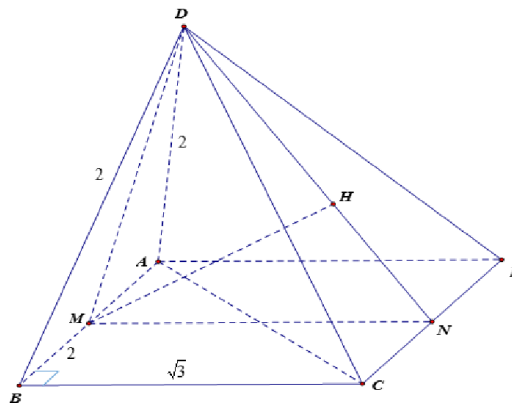
Tam giác DMN có $DM = MN = \sqrt{3} \Rightarrow H$ là trung điểm DN , mà $HN = \sqrt{MN^2 - MH^2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow DN = 1$

Xét tam giác DNC vuông tại N $CD = \sqrt{DN^2 + CN^2} = \sqrt{2}$.

**Câu 8. Chọn C**

Gọi I là giao của AC và BD . I' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Khi đó II' là đường trung bình của các hình thang $ACC'A'$ và $BDD'B'$. Theo tính chất của hình thang ta có $2II' = BB' + DD' = AA' + CC' = 2 + 4 = 6 \Rightarrow DD' = 3$.

Câu 9. Chọn A

Dựng hình chữ nhật $ABCE$, gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CE , $MH \perp DN$ tại H

Ta có

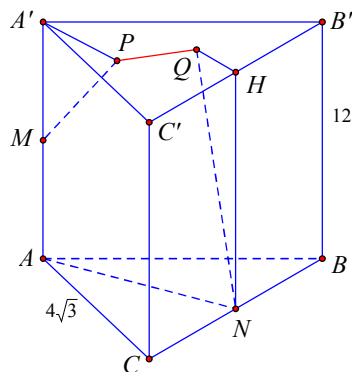
$$\begin{cases} AB \perp DM \\ AB \perp MN \end{cases} \Rightarrow AB \perp (DMN) \Rightarrow CE \perp (DMN) \Rightarrow MH \perp CE$$

$$\begin{cases} MH \perp DN \\ MH \perp CE \end{cases} \Rightarrow MH \perp (CDE) \text{ tại } H \Rightarrow d(AB, CD) = d[M; (CDE)] = MH = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Tam giác DMN có $DM = MN = \sqrt{3} \Rightarrow H$ là trung điểm DN , mà $HN = \sqrt{MN^2 - MH^2} = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow DN = 1$

Xét tam giác DNC vuông tại N $CD = \sqrt{DN^2 + CN^2} = \sqrt{2}$.

Câu 10. Chọn B



Chiều cao của tam giác đáy: $AN = A'H = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của N lên $B'C'$.

Đặt $A'P = x$, $QH = y$.

Ta có: $A'P + PQ + QH \geq A'H \Leftrightarrow A'P + 3 + QH \geq 6 \Leftrightarrow x + y \geq 3$.

Dấu "=" xảy ra khi P, Q nằm trên đoạn $A'H$.

Lại có: $MP = \sqrt{6^2 + x^2}$, $NQ = \sqrt{12^2 + y^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Min-côp-xki:

$$\forall x, y, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2}.$$

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} ay = bx \\ ax + by \geq 0 \end{cases}$.

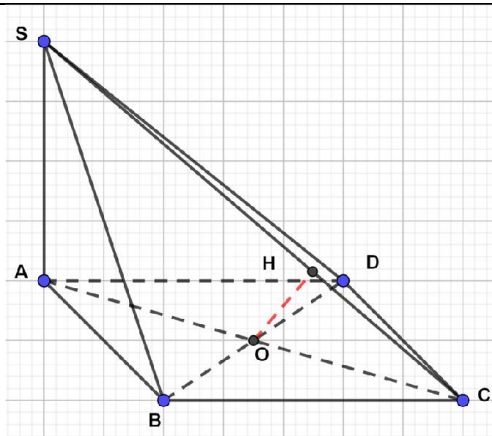
Ta có:

$$T = MP + NQ = \sqrt{6^2 + x^2} + \sqrt{12^2 + y^2} \geq \sqrt{(6+12)^2 + (x+y)^2} \geq \sqrt{18^2 + 3^2} = 3\sqrt{37}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} x + y = 3 \\ 6y = 12x \\ 6 \cdot 12 + xy \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } T_{\min} = 3\sqrt{37}.$$

Câu 11. Chọn B

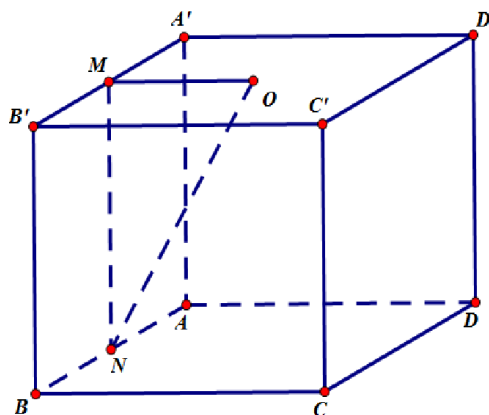


Kẻ $OH \perp SC \Rightarrow d(O, SC) = OH$.

$$OC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$$

$$\triangle OHC \approx \triangle SAC \Rightarrow \frac{OH}{OC} = \frac{SA}{SC} \Rightarrow OH = \frac{OC \cdot SA}{SC} = \frac{a\sqrt{2} \cdot 2a}{2a\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Câu 12. Chọn D



Sau khi xếp miếng bìa lại ta được hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$, O là tâm của $A'B'C'D'$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, A'B$.

$$\Rightarrow MN = AA' = 2a, OM = \frac{1}{2} A'D' = a.$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} AB \perp OM \\ AB \perp MN \end{cases} \Rightarrow AB \perp ON \Rightarrow d(O, AB) = ON = \sqrt{OM^2 + MN^2} = a\sqrt{5}.$$

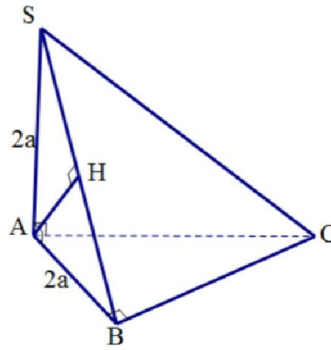
DẠNG 2. KHOẢNG CÁCH TỪ 1 ĐIỂM ĐẾN 1 MẶT PHẪNG

Dạng 2.1 Khoảng cách từ hình chiếu của đỉnh đến mặt phẳng bên

Câu 13.

Lời giải

Chọn D

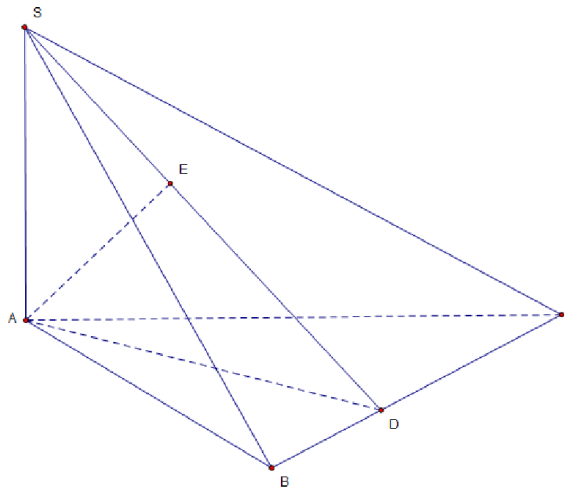


Gọi H là trung điểm cạnh SB .

$$\begin{cases} AH \perp BC \quad (BC \perp (SAB)) \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC).$$

Do đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $AH = \frac{SB}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Câu 14. Chọn B



Từ A kẻ $AD \perp BC$ mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SBC)$ mà $(SAD) \cap (SBC) = SD$

$\Rightarrow$ Từ A kẻ $AE \perp SD \Rightarrow AE \perp (SBC)$

$\Rightarrow d(A; (SBC)) = AE$

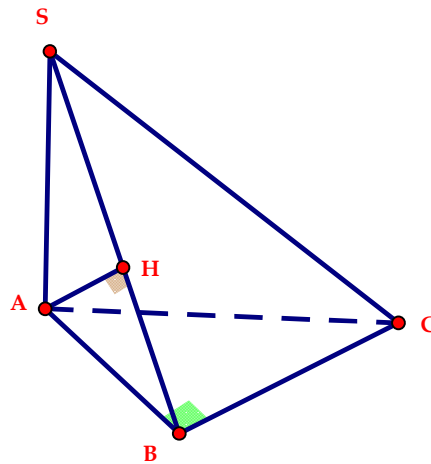
Trong $\triangle ABC$ vuông tại A ta có: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{4}{3a^2}$

Trong $\triangle SAD$ vuông tại A ta có: $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow AE = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$

Câu 15.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $AH \perp SB (H \in SB)$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA (SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \subset (SAB)$.

Vì $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

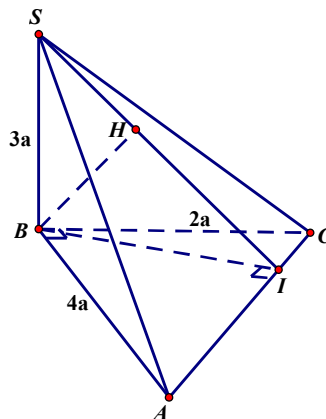
Do đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $d_{(A, (SBC))} = AH$.

Xét tam giác ABC vuông cân tại B , có $AC = 2a \Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$.

Xét tam giác SAB vuông tại A , ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2}$
 $\Rightarrow AH^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{6}a}{3}$.

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $d_{(A, (SBC))} = AH = \frac{\sqrt{6}a}{3}$.

Câu 16. Chọn A

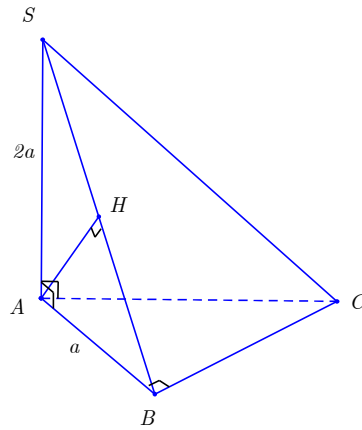


Từ B kẻ $BI \perp AC$ nối S với I và kẻ $BH \perp SI$ để thấy BH là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC)

Ta có $B.SAC$ là tam diện vuông tại B nên:

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BS^2} + \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BA^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{16a^2} = \frac{61}{144a^2} \Rightarrow BH = \frac{12\sqrt{61}a}{61}$$

Câu 17. Chọn A



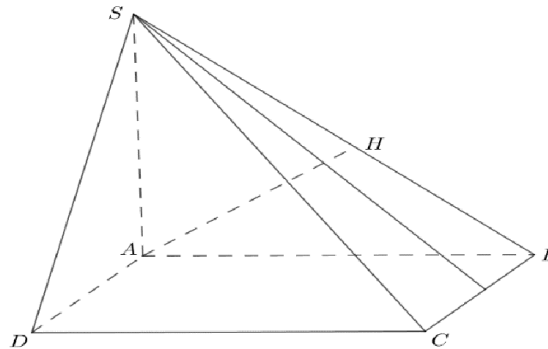
Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

Kẻ $AH \perp SB$. Khi đó $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{4a^2}{5} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

Câu 18. Chọn B



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

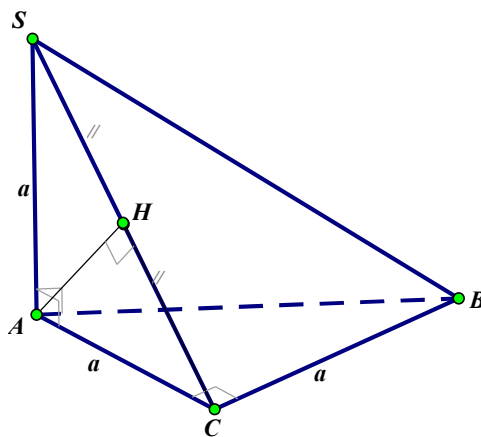
$$\Rightarrow \begin{cases} (SAB) \perp (SBC) \\ (SAB) \cap (SBC) = SB \end{cases}$$

Trong mặt phẳng (SAB) : Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH = d(A, (SBC))$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2}.$$

$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Câu 19. Chọn B



$$\text{Vì } \begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$$

Khi đó $(SBC) \perp (SAC)$ theo giao tuyến là SC .

Trong (SAC) , kẻ $AH \perp SC$ tại H suy ra $AH \perp (SBC)$ tại H .

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng AH .

Ta có $AC = BC = a$, $SA = a$ nên tam giác SAC vuông cân tại A .

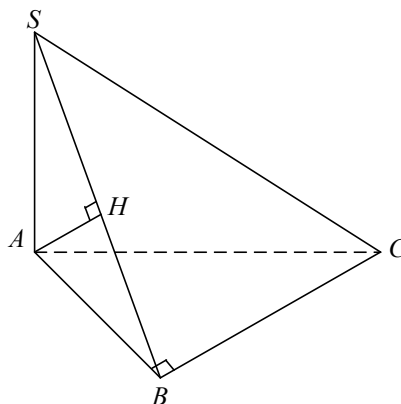
$$\text{Suy ra } AH = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.$$

$$\text{Cách 2: Ta có } d(A, (SBC)) = \frac{3V_{A.SBC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}}.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SC \text{ nên tam giác } SBC \text{ vuông tại } C.$$

$$\text{Suy ra } d(A, (SBC)) = \frac{3V_{A.SBC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{3}SA \cdot \frac{1}{2}CA^2}{\frac{1}{2}SC \cdot BC} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 20. Chọn D

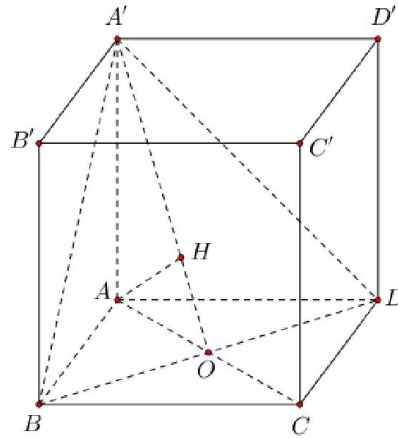


Kẻ $AH \perp SB$ trong mặt phẳng (SBC)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 21. Chọn A



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'O)$$

Suy ra $(BDA') \perp (AA'O)$.

Kê $AH \perp A'O \Rightarrow AH \perp (BDA')$.

Suy ra $AH = d(A, (BDA'))$.

$$\text{Xét tam giác } AA'O \text{ vuông tại } A \text{ có } AA' = 1, AO = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}: AH = \frac{AA' \cdot AO}{\sqrt{AA'^2 + AO^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(A, (BDA')) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 22. Chọn C

Vì lăng trụ $ABCA'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $(ABC) \perp (BCC'B')$.

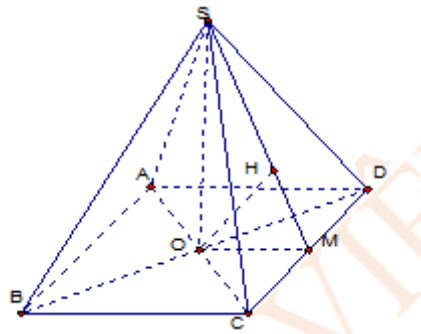
Do đó kẻ $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$.

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ là đoạn AH .

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a.$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Câu 23. Chọn C



Gọi M là trung điểm của CD ; H là hình chiếu vuông góc của O lên $SM \Rightarrow OH \perp SM (*)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} OM \perp CD \\ SM \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM) \Rightarrow CD \perp OH(**)$$

Từ (*), (**) suy ra $OH \perp (SCD)$ khi đó $d(O, (SCD)) = OH$.

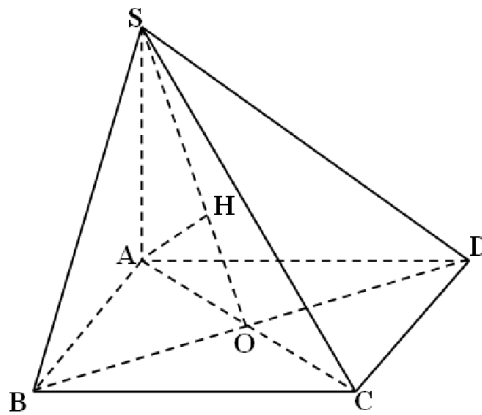
$$\text{Ta có } SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; OM = \frac{a}{2}; SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta lại có } OH \cdot SM = SO \cdot OM \Rightarrow OH = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Cách khác: Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (SCD) . Vì OC, OD, OS đôi một vuông góc nên ta

$$\text{có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OS^2} \text{ (không cần xác định chính xác vị trí của điểm H)}$$

Câu 24. Chọn B



- Vì O là trung điểm của BD nên $d(B, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$. Do đó câu A đúng.

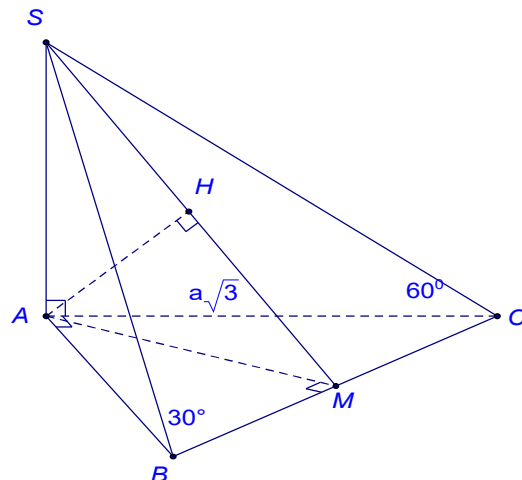
- Kẻ AH vuông góc với SO mà hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) vuông góc với nhau theo giao tuyến SO , suy ra AH vuông góc với mặt phẳng (SBD) .

Ta có $d(A, (SBD)) = AH < OA$ và $d(B, (SAC)) = OB = OA$ nên $d(A, (SBD)) < d(B, (SAC))$. Do đó câu B sai.

- Ta có $d(C, (SAB)) = CB$ và $d(C, (SAD)) = CD$ nên $d(C, (SAB)) = d(C, (SAD))$. Do đó câu C đúng.

- Vì SA vuông góc với mặt đáy nên $d(S, (ABCD)) = SA$. Do đó câu D đúng.

Câu 25. Chọn D



Dựng $AM \perp BC$; $AH \perp SM$

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} AM \perp BC \\ SA \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow AH \perp BC \text{ và } AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SBC) \\ \Rightarrow d(A; SBC) = AH$$

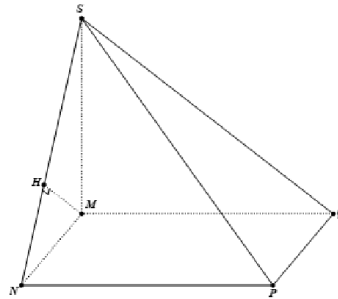
$$\text{Tam giác } SAC \text{ vuông tại } A \Rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3a$$

$$\Delta SAC = \Delta BAC \text{ (g-c-g)} \Rightarrow SA = BA = 3a$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông tại } A \Rightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{9a^2}$$

$$\text{Tam giác } SAM \text{ vuông tại } A \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{4}{9a^2} = \frac{5}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{\sqrt{5}}$$

Câu 26. Chọn D



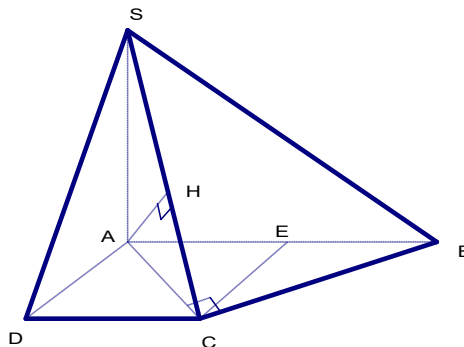
Gọi H là hình chiếu của M trên SN . Ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} NP \perp MN \\ NP \perp SM \end{array} \right. \Rightarrow NP \perp (SMN) \text{ mà } SH \subset (SMN) \Rightarrow NP \perp SH.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} SH \perp NP \\ SH \perp SN \end{array} \right. \Rightarrow SH \perp (SNP) \text{ hay khoảng cách từ điểm } M \text{ đến mặt phẳng } (SNP) \text{ bằng } MH.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SMN \text{ có } MH = \frac{MN \cdot SM}{\sqrt{MN^2 + SM^2}} = \frac{3a \cdot 3a\sqrt{2}}{\sqrt{9a^2 + 18a^2}} = a\sqrt{6}.$$

Câu 27. Chọn A



+ Lấy E là trung điểm $AB \Rightarrow$ tứ giác $ADCE$ là hình vuông cạnh bằng a

$$\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$$

$$+ \Delta BCE \text{ vuông cân } CE \perp EB, CE = EB = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$$

$$\Delta ACB \text{ có: } AC^2 + BC^2 = (a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2 = 4a^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta ACB \text{ vuông tại } C$$

$$\Rightarrow BC \perp AC \text{ (1)}$$

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow BC \perp SA \quad (2)$$

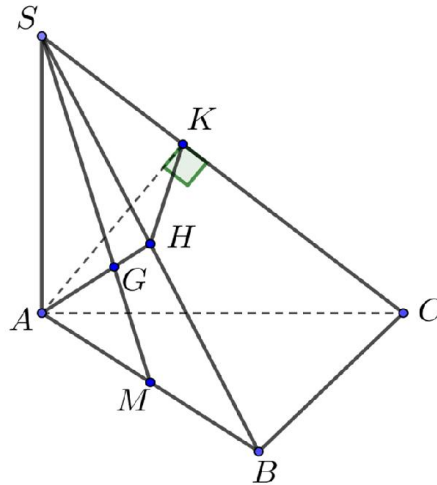
$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow BC \perp (SAC)$$

$$+ \text{Dựng } AH \perp SC, \text{ có } AH \perp BC \text{ (vì } BC \perp (SAC), (SAC) \supset AH)$$

$$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AH$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{3}} = d(A; (SBC))$$

Câu 28. Chọn D



Tam giác ABC vuông cân tại B mà $AC = a\sqrt{2}$ suy ra $AB = BC = a$.

Do $BC \perp BA$, $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$) nên $BC \perp (SAB)$.

Gọi H là hình chiếu của điểm A lên SB , thì $AH \perp SB$, $AH \perp BC$ (vì $BC \perp (SAB)$) nên

$$AH \perp (SAB) \text{ hay } AH = d(A; (SBC)) = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông SAB với đường cao AH , ta được:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SA = a \text{ nên tam giác } SAB \text{ vuông cân tại } A$$

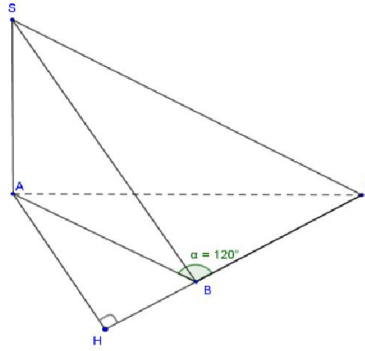
do đó trọng tâm G thuộc AH .

Từ $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ và $AK \perp SC$ nên $SC \perp (AHK)$ hay $SC \perp (AGK)$.

Vì $SC \perp (AGK)$ và $SA \perp (ABC)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (AGK) và (ABC) chính là góc giữa hai đường thẳng SC và SA hay $\alpha = \widehat{CSA}$.

$$\text{Theo trên ta có } SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{3} \text{ suy ra } \cos \alpha = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 29. Chọn A



Gọi S là diện tích tam giác ABC ta có $S = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin 120^\circ = a^2 \sqrt{3}$. Nên thể tích khối chóp

$$S.ABC \text{ là } V = \frac{1}{3} Bh = a^2 \sqrt{3} \cdot 3a = 3a^3 \sqrt{3}.$$

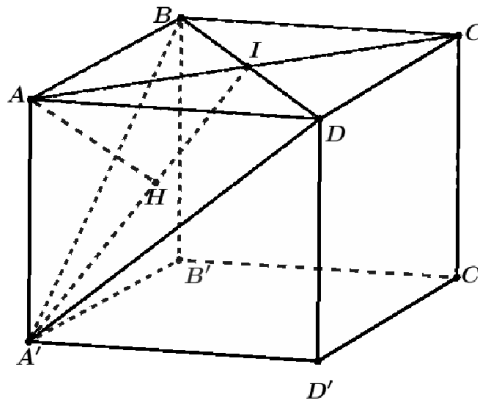
Gọi AH là đường cao trong tam giác ABC khi đó ta có $AH = \frac{2S}{BC} = \frac{2a^2 \sqrt{3}}{2a} = a\sqrt{3}$.

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 2a\sqrt{3}.$$

Vì $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$. Nên diện tích tam giác SBC là $S_1 = \frac{1}{2} BC \cdot SH = 2a^2 \sqrt{3}$.

Vậy khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) là $d = \frac{3V}{S_1} = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{2a^2 \sqrt{3}} = \frac{3a}{2}$.

Câu 30. Chọn A



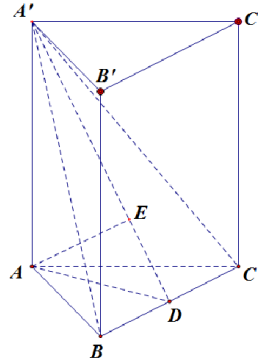
Gọi $I = AC \cap BD$ và H là hình chiếu của A lên đường thẳng $A'I$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AI \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp AH$

$\Rightarrow \begin{cases} AH \perp BD \\ AH \perp A'I \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BD) \Rightarrow d(A, (A'BD)) = AH$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 31. Chọn B



Gọi D là trung điểm cạnh BC , E là hình chiếu của A lên $A'D$.

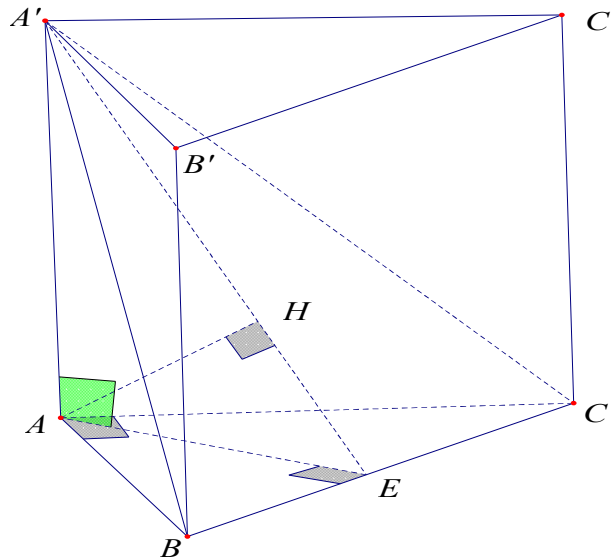
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADA') \Rightarrow BC \perp AE$.

$\begin{cases} AE \perp BC \\ AE \perp A'D \end{cases} \Rightarrow AE \perp (A'BC)$, suy ra $d(A, (A'BC)) = AE$.

Trong tam giác $A'AD$ có: $AA' = a, AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 32. Chọn A



Kê $AE \perp BC$ ($E \in BC$); $AH \perp A'E$ ($H \in A'E$).

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AE) \Rightarrow BC \perp AH$.

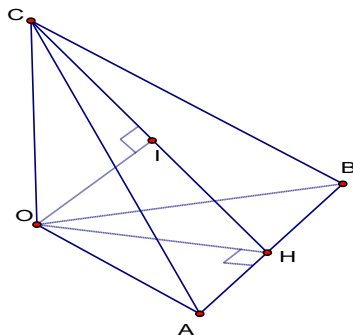
Mà $AH \perp A'E \Rightarrow AH \perp (A'BC)$.

Do đó khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng AH .

Xét tam giác ABC vuông tại A ta có $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{4}{3a^2}$.

Xét tam giác $A'AE$ vuông tại A ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{A'A^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 33. Chọn B



Trong tam giác OAB dựng đường cao OH , trong tam giác OCH dựng đường cao $OI \Rightarrow OI \perp CH(1)$. Mặt khác ta có $\begin{cases} BC \perp OH \\ BC \perp OA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp OI(2)$. Từ (1) và (2) suy ra $OI \perp (ABC) \Rightarrow d(O; (ABC)) = OI$.

Xét tam giác OAB vuông tại O có $OA = a, OB = 2a \Rightarrow OH = \sqrt{\frac{OA^2 \cdot OB^2}{OA^2 + OB^2}} = \sqrt{\frac{4a^4}{5a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

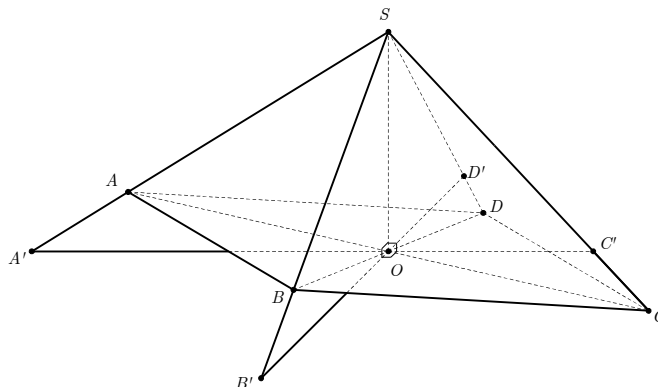
Xét tam giác OCH vuông tại O có

$$OC = a\sqrt{3}, OH = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow OI = \sqrt{\frac{OC^2 \cdot OH^2}{OC^2 + OH^2}} = \sqrt{\frac{12a^4}{19a^2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}.$$

$$\text{Vậy } d(O; (ABC)) = OI = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}.$$

Câu 34. Chọn B

Cách 1:



Gọi p, q, u, v lần lượt là các khoảng cách từ O đến các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$.

Trong mặt phẳng (SAC) dựng đường thẳng qua O vuông góc với đường thẳng SO cắt hai đường thẳng SA, SC lần lượt tại A', C'

Trong mặt phẳng (SBD) dựng đường thẳng qua O vuông góc với đường thẳng SO cắt hai đường thẳng SB, SD lần lượt tại B', D' .

Do $(SAC) \perp (SBD), (SAC) \cap (SBD) = SO, A'C' \perp SO$ nên $A'C' \perp (SBD)$

$\Rightarrow A'C' \perp B'D'$.

Khi đó tứ diện $OSA'B'$ có OS, OA', OB' đôi một vuông góc nên ta chứng minh được

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OA'^2} + \frac{1}{OB'^2} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự: $\frac{1}{q^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB'^2} + \frac{1}{OC'^2} \quad (2);$

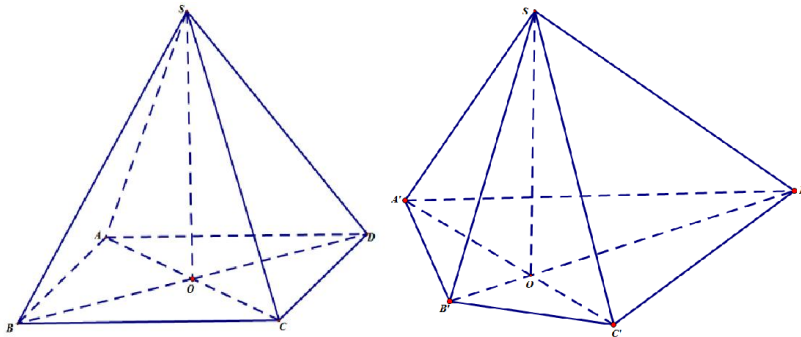
$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OC'^2} + \frac{1}{OD'^2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD'^2} + \frac{1}{OA'^2} \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) ta có $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{v^2}.$

$$\text{Với } p=1; q=2; u=\sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{v^2} \Rightarrow \frac{1}{v^2} = \frac{19}{20} \Rightarrow d=v=\sqrt{\frac{20}{19}}.$$

Cách 2:



Dựng mặt phẳng qua O , vuông góc với SO , cắt các đường thẳng SA, SB, SC, SD lần lượt tại $A', B', C', D' \Rightarrow SO \perp (A'B'C'D').$

Vi $(SAC) \perp (SBD) \Rightarrow A'C' \perp B'D'.$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OA'^2} + \frac{1}{OB'^2} = \frac{1}{d(O, (SA'B'))} = 1. \quad (1)$$

$$\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OB'^2} + \frac{1}{OC'^2} = \frac{1}{d(O, (SB'C'))} = \frac{1}{4}. \quad (2)$$

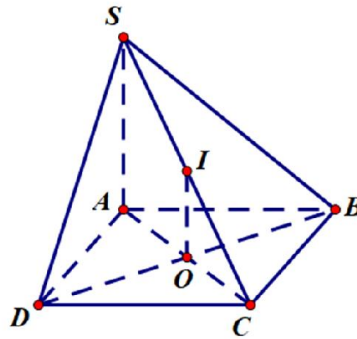
$$\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OC'^2} + \frac{1}{OD'^2} = \frac{1}{d(O, (SC'D'))} = \frac{1}{5}. \quad (3)$$

$$\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OD'^2} + \frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{d(O, (SD'A'))} = \frac{1}{d^2}. \quad (4)$$

$$(1), (2), (3), (4) \Rightarrow 1 + \frac{1}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{d^2} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{20}{19}}.$$

Dạng 2.2 Khoảng cách từ 1 điểm bất kỳ đến mặt phẳng

Câu 35. Chọn D

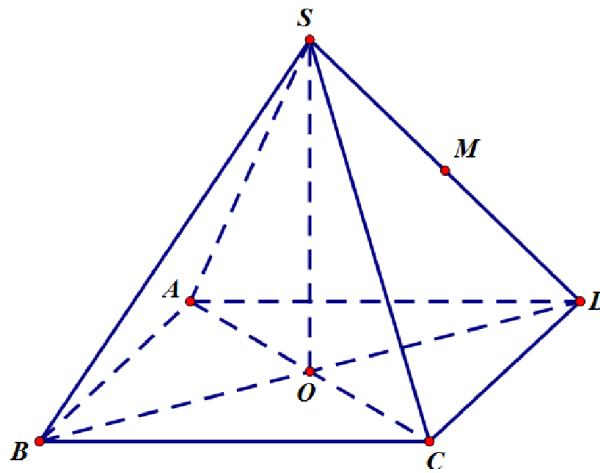


Từ giả thiết suy ra OI là đường trung bình của $\triangle SAC$, do đó $OI \parallel SA$.

Ta có $\begin{cases} IO \parallel SA \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow IO \perp (ABCD)$.

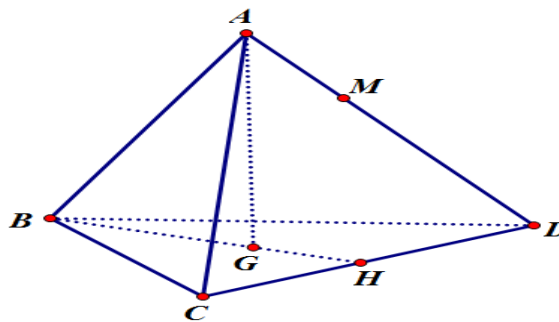
Vậy $d(I, (ABCD)) = OI$.

Câu 36. Chọn B



$$d(M, (SAC)) = \frac{1}{2} d(D, (SAC)) = \frac{1}{2} DO = \frac{1}{4} BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 37. Chọn C



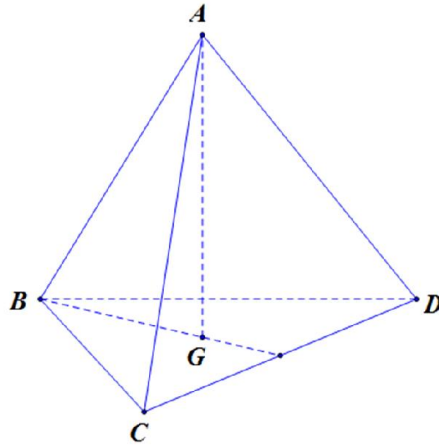
Gọi H là trung điểm BC , G là trọng tâm tam giác BCD , AG là đường cao của tứ diện

Xét tam giác đều BCD có $BH = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow BG = \frac{2}{3} BH = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Xét tam giác vuông ABG có $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Mà $d(M, (BCD)) = \frac{2}{3} d(A, (BCD)) = \frac{2}{3} AG = \frac{4\sqrt{6}}{9}a$.

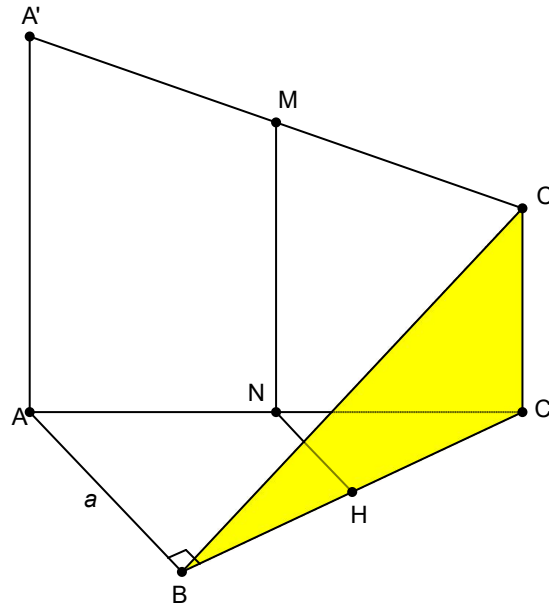
Câu 38. Chọn C



Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Ta có $AG \perp (BCD)$ tại G nên $d(A, (BCD)) = AG$.

Xét tam giác ABG vuông tại G có $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 39. Chọn A

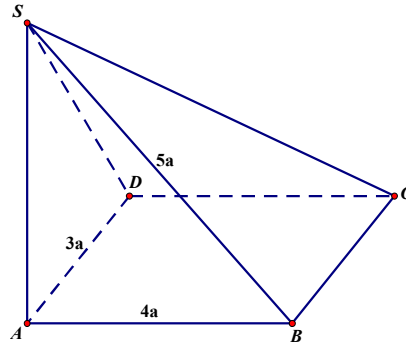


• Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm của $A'C', AC, BC$.

$\Rightarrow MN \parallel CC' \subset (BCC') \Rightarrow MN \parallel (BCC')$

$\Rightarrow d(M; (BCC')) = d(N; (BCC')) = NH = \frac{a}{2}$

Câu 40. Chọn A



Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{(5a)^2 - (4a)^2} = 3a$.

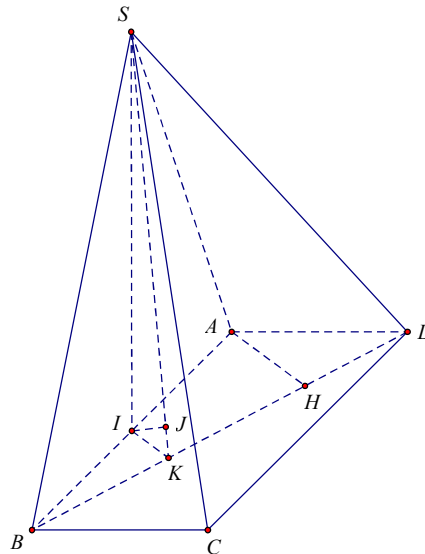
Ta có $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD)) = h$.

Tứ diện $ASBD$ có các cạnh AB, AD, AS đôi một vuông góc với nhau và $AB = 4a, AD = 3a, AS = 3a$ nên ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{16a^2} + \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{9a^2} = \frac{41}{144a^2} \Rightarrow h = \frac{12a\sqrt{41}}{41}$$

Vậy $d(C, (SBD)) = \frac{12a\sqrt{41}}{41}$.

Câu 41. Chọn B



Kẻ $SI \perp AB$.

Do tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$.

$\Rightarrow I$ là trung điểm của AB và $SI \perp (ABCD)$.

ΔSAB đều cạnh $2a \Rightarrow SI = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Kẻ $IK \perp BD$ ($K \in BD$), $AH \perp BD$ ($H \in BD$) $\Rightarrow IK = \frac{1}{2}AH$

Kẻ $IJ \perp SK$, ($J \in SK$) (1).

Ta có $\begin{cases} IK \perp BD \\ SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SIK) \Rightarrow BD \perp IJ$ (2).

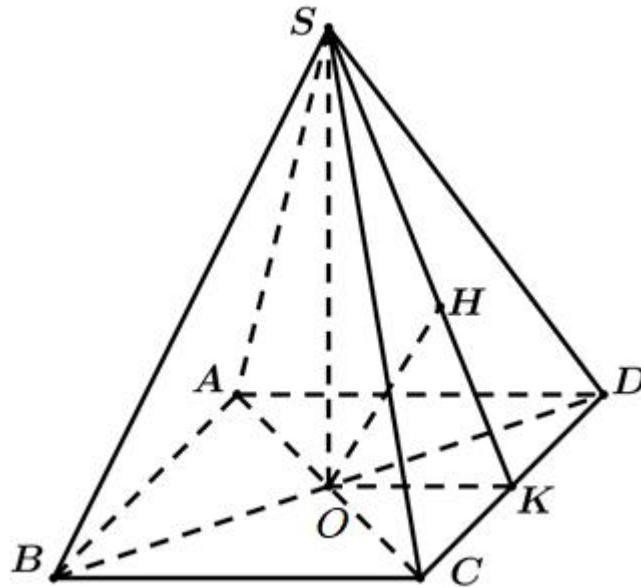
Từ (1) và (2) suy ra $IJ \perp (SBD) \Rightarrow d(I, (SBD)) = IJ$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow IK = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

$$\frac{1}{IJ^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} \Rightarrow \frac{1}{IJ^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow IJ = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d(I, (SBD)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$I \text{ là trung điểm } AB \Rightarrow d(A, (SBD)) = 2d(I, (SBD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 42. Chọn C



Vì chóp $SABCD$ là chóp đều nên $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$.

Gọi O là tâm hình vuông, ta có $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$.

Gọi K trung điểm $CD \Rightarrow OK \perp CD$. Lại có $CD \perp SO$.

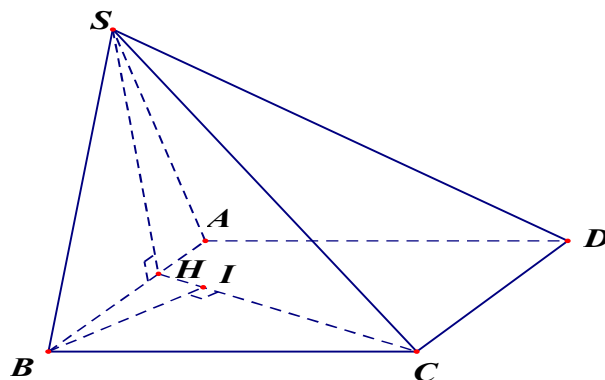
Suy ra $CD \perp (SOK)$ suy ra $(SCD) \perp (SOK)$.

Trong (SOK) kẻ $OH \perp SK \Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow d(O, (SCD)) = OH$.

Xét $\triangle SOK$ vuông tại O , đường cao OH , ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(A, (SCD)) = 2OH = a\sqrt{3}.$$

Câu 43. Chọn B



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng $BI \perp HC$.

Ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (SHC) = SH \\ (SAB) \perp (ABCD); (SHC) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$

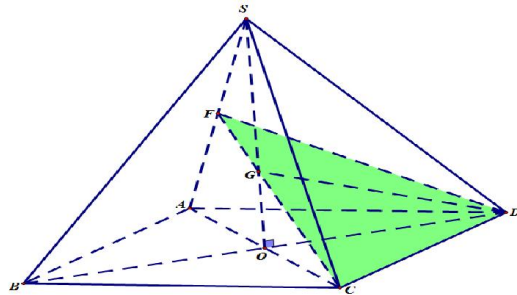
Khi đó: $\begin{cases} BI \perp HC \\ BI \perp SH \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SHC) \Rightarrow d(B, (SHC)) = BI.$

Xét trong tam giác BHC vuông tại B ta có:

$$\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{BH^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{(3a)^2} + \frac{1}{(4a)^2} = \frac{25}{144a^2} \Rightarrow BI = \frac{12a}{5}.$$

Suy ra: Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHC) bằng $\frac{12a}{5}$.

Câu 44. Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$, $G = SO \cap FC \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác SAC .

$$\text{Do đó: } \frac{d(S, (FCD))}{d(O, (FCD))} = \frac{SG}{OG} = 2 \Rightarrow d(S, (FCD)) = 2d(O, (FCD)) = 2h.$$

Lại có: $ABCD$ là hình thoi nên O là trung điểm của AC, BD và $OC \perp OD$.

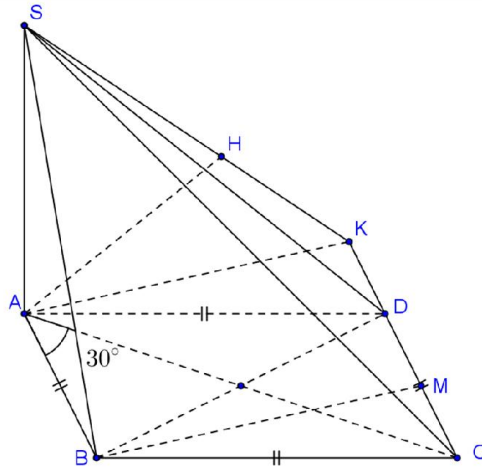
$$\text{Mà: } SA = SB = SC = SD \Rightarrow \begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ OA = OB = OC = OD \end{cases} \Rightarrow ABCD \text{ là hình vuông.}$$

$$\Rightarrow OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OS = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OG = \frac{1}{3}OS = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Khi đó: } O.GCD \text{ là tứ diện vuông đỉnh } O \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OG^2} = \frac{22}{a^2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{1}{22}}a.$$

$$\text{Vậy } \Rightarrow d(S, (FCD)) = 2h = \sqrt{\frac{2}{11}}a.$$

Câu 45. Chọn A



Do D là điểm đối xứng với B qua AC và $\triangle ABC$ cân tại B nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Suy ra $\triangle BCD$ là tam giác đều cạnh a .

Gọi M là trung điểm của CD , suy ra $BM \perp CD$ và $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Qua điểm A , dựng đường thẳng song song với BM và cắt CD tại K .

Khi đó $AK \perp CD$ và $AK = BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AK \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAK) \Rightarrow (SCD) \perp (SAK)$.

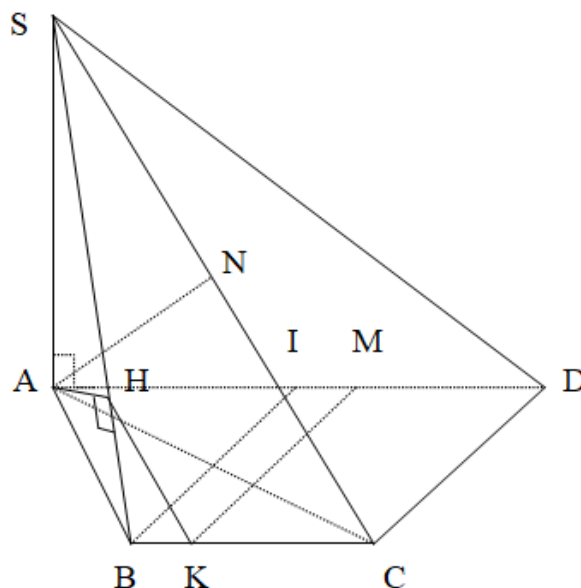
Trong mặt phẳng (SAK) , dựng $AH \perp SK$, với $H \in SK$. Suy ra $AH \perp (SCD)$ tại H .

Do AB song song với mặt phẳng (SCD) nên $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AH$.

Xét $\triangle SAK$ vuông tại A , ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{21}}{7}a.$$

Câu 46. Chọn D



Do $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AD nên tứ giác $ABCD$ cũng nội tiếp đường tròn đường kính AD . Gọi I là trung điểm AD thì các tam giác $\triangle IAB, \triangle IBC, \triangle ICD$ đều

cạnh a và $AC \perp CD$ nên $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3}$. Lấy $K \in BC; M \in AD$ sao cho $HK \parallel SC; KM \parallel CD \Rightarrow d(H; (SCD)) = d(K; (SCD)) = d(M; (SCD))$

$$\Delta SAB \text{ vuông tại } A \text{ có } SB = 2a \text{ và } SH \cdot SB = SA^2 \Leftrightarrow SH = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{3}{4} = \frac{KC}{CB} = \frac{MD}{DI}.$$

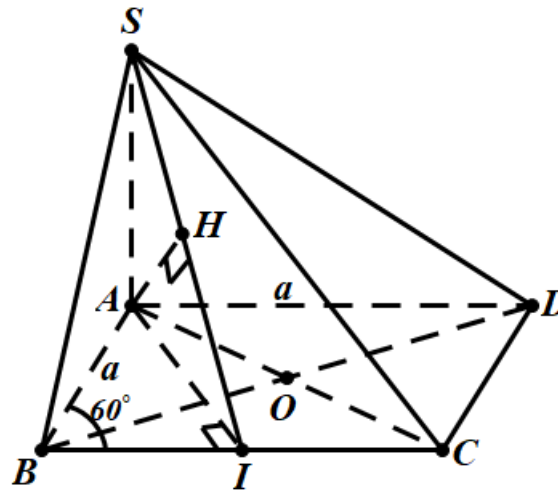
$$\text{Vậy } \frac{MD}{AD} = \frac{MD}{2DI} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{d(M; (SCD))}{d(A; (SCD))} = \frac{3}{8}. \text{ Do } \begin{cases} AC \perp CD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC).$$

Trong $mp(SAC)$ kẻ $AN \perp SC$ tại N thì $AN \perp (SCD) \Rightarrow d(A; (SCD)) = AN$.

$$\Delta SAC \text{ vuông cân tại } A \text{ (Do } SA = AC = a\sqrt{3}) \text{ nên } AN = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(H; (SCD)) = d(M; (SCD)) = \frac{3}{8} \cdot AN = \frac{3a\sqrt{6}}{16}$$

Câu 47. Chọn A



Cách 1:

Xét ΔABC đều do $\widehat{ABC} = 60^\circ$ và $AB = BC$.

Lấy I là trung điểm BC , kẻ $AH \perp SI$ tại H .

Ta có: $AI \perp BC$, mà $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAI)$, $AH \subset (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$.

Từ và $\Rightarrow AH \perp (SBC)$ tại $H \Rightarrow AH = d(A, (SBC))$.

$$\text{Ta có: } \Delta ABC \text{ đều cạnh } a \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Xét ΔSAI vuông tại A có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{4}{9a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{4} = d(A, (SBC)).$$

Ta có:

$$\frac{d(O, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{OC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(O, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC)) = \frac{3a}{8}.$$

Cách 2:

$$\text{Tương tự cách 1 ta có } \Delta ABC \text{ đều cạnh } a \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Diện tích ΔOBC là: $S_{OBC} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{8}$.

Thể tích của khối chóp $S.OBC$ là: $V_{S.OBC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta OBC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{8} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{16}$.

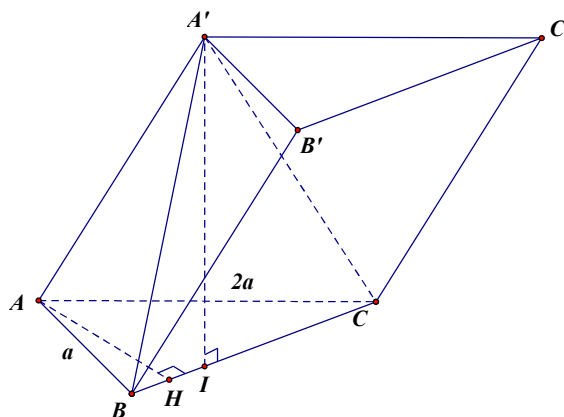
Xét ΔSAI vuông tại A : $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}a$.

Xét ΔSAI có $SA = SC$ (do $\Delta SAB = \Delta SAC$) $\Rightarrow SI$ là đường cao

$\Rightarrow S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2} SI \cdot BC = a^2 \sqrt{3}$.

Ta có: $d(O; (SBC)) = \frac{3V_{S.OBC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{\frac{3a^3 \sqrt{3}}{16}}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{3a}{8}$.

Câu 48. Chọn C



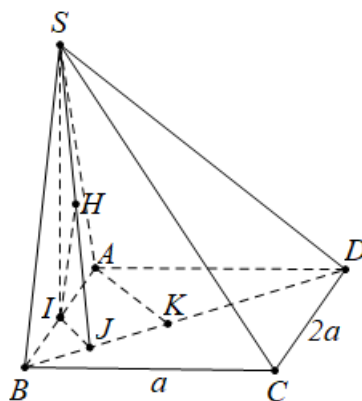
Xét tam giác ABC có $AB = a$, $AC = 2a \Rightarrow BC = a\sqrt{5}$.

Trong mp(ABC) kẻ $AH \perp BC$, $H \in BC$.

Ta có: $\begin{cases} (ABC) \perp (A'BC) \\ (ABC) \cap (A'BC) = BC \Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow d(A, (A'BC)) = AH \\ AH \perp BC \end{cases}$

Trong tam giác vuông ABC ta có $AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a \Rightarrow d(A, (A'BC)) = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$.

Câu 49. Chọn B



Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow SI \perp AB$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SI \perp AB \\ (SAB) \perp (ABCD) (gt) \Rightarrow SI \perp (ABCD). \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases}$$

Xét $\triangle SAB$ đều có cạnh bằng $2a \Rightarrow SI = a\sqrt{3}$

$$\text{Kẻ } AK \perp BD \text{ tại } K. \text{ Ta xét } \triangle BAD \text{ có: } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Kẻ } JI \perp BD \text{ tại } J \Rightarrow JI \parallel AK \Rightarrow JI = \frac{1}{2}AK = \frac{\sqrt{5}a}{5}. \text{ Ta có: } BD \perp SI \Rightarrow BD \perp (SJI).$$

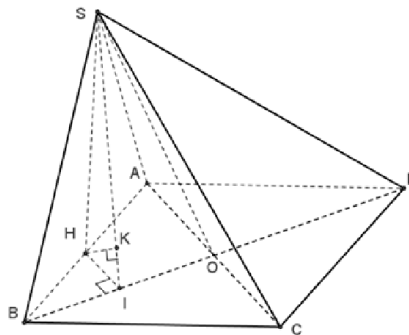
$$\text{Kẻ } HI \perp SJ \text{ tại } H \Rightarrow IH \perp (SBD) \text{ tại } H \Rightarrow d(I; (SBD)) = IH.$$

$$\text{Xét } \triangle SJI \text{ có: } \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{JI^2} + \frac{1}{SI^2} = \frac{5}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Do I là trung điểm của AB nên:

$$\frac{d(A; (SBD))}{d(I; (SBD))} = \frac{AB}{AI} = 2 \Rightarrow d(A; (SBD)) = 2d(I; (SBD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 50. Chọn B



Gọi H là trung điểm AB . Suy ra $SH \perp (ABCD)$.

$$\text{Ta có } \frac{d(H; (SBD))}{d(A; (SBD))} = \frac{BH}{BA} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(A; (SBD)) = 2d(H; (SBD)).$$

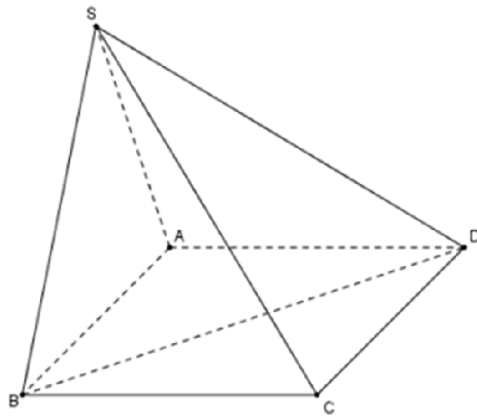
Gọi I là trung điểm OB , suy ra $HI \parallel OA$ (với O là tâm của đáy hình vuông).

$$\text{Suy ra } HI = \frac{1}{2}OA = \frac{a\sqrt{2}}{4}. \text{ Lại có } \begin{cases} BD \perp HI \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHI).$$

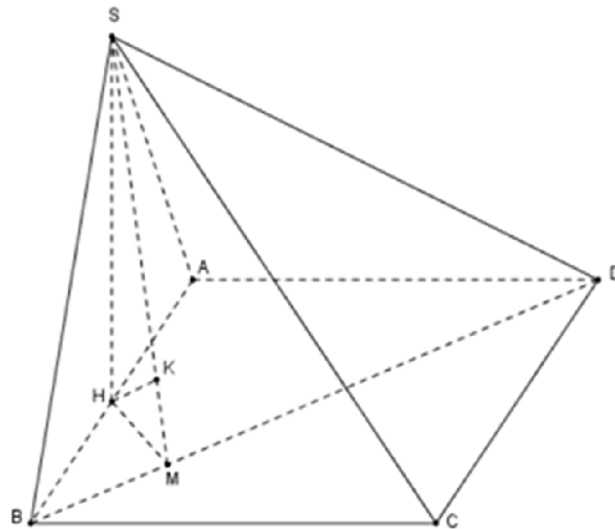
$$\text{Vẽ } HK \perp SI \Rightarrow HK \perp (SBD). \text{ Ta có } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

$$\text{Suy ra } d(A; (SBD)) = 2d(H; (SBD)) = 2HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 51.



Chọn D



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Từ H kẻ $HM \perp BD$, M là trung điểm của BI và I là tâm của hình vuông.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp HM \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHM)$.

Từ H kẻ $HK \perp SM \Rightarrow HK \perp BD$ (Vì $BD \perp (SHM)$).

$\Rightarrow HK \perp (SBD) \Rightarrow d(H; (SBD)) = HK$.

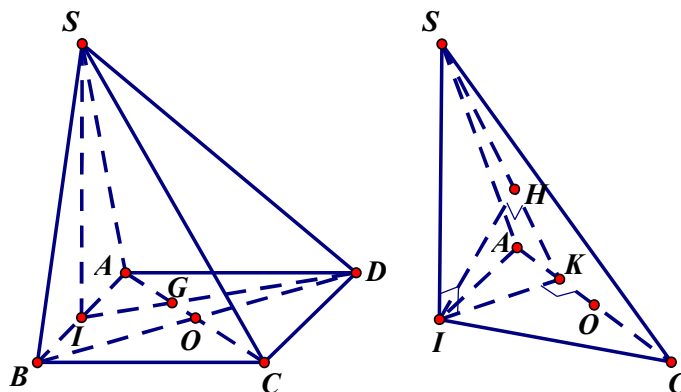
Ta có: $HM = \frac{AI}{2} = \frac{AC}{4} = \frac{\sqrt{2}a}{4}$, $SH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

$$HK = \frac{HM \cdot HS}{\sqrt{HM^2 + HS^2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}a}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{21}a}{14} \dots$$

$$d(C; (SBD)) = d(A; (SBD)) = 2d(H; (SBD)) = 2HK = 2 \cdot \frac{\sqrt{21}a}{14} = \frac{\sqrt{21}a}{7} \dots$$

$$\text{Vậy: } d(C; (SBD)) = \frac{\sqrt{21}a}{7} \dots$$

Câu 52. Chọn D



* Gọi $O = AC \cap BD$ và G là trọng tâm tam giác ABD , I là trung điểm của AB ta có

$$SI \perp (ABCD) \text{ và } \frac{d(D; (SAC))}{d(I; (SAC))} = \frac{DG}{IG} = 2 \Rightarrow d(D; (SAC)) = 2.d(I; (SAC)).$$

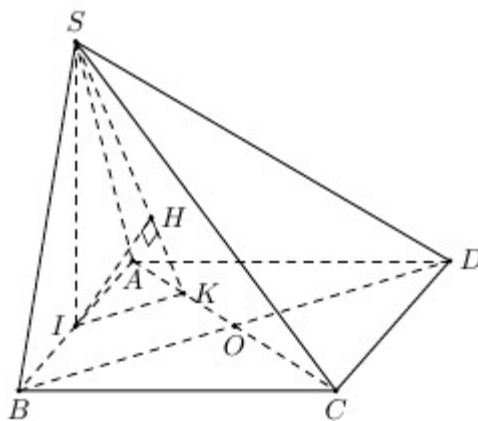
* Gọi K là trung điểm của AO , H là hình chiếu của I lên SK ta có $IK \perp AC$; $IH \perp (SAC)$
 $\Rightarrow d(D; (SAC)) = 2.d(I; (SAC)) = 2.IH$

* Xét tam giác SIK vuông tại I ta có: $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $IK = \frac{BO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{16}{2a^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow d(D; (SAC)) = 2.d(I; (SAC)) = 2.IH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 53. Chọn C



Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm của AB .

Kẻ $IK \parallel BD, K \in AC$; kẻ $IH \perp SK, H \in SK$ (1).

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ và tam giác SAB đều nên $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp AC$

Lại có $IK \perp AC$, suy ra $AC \perp (SIK) \Rightarrow AC \perp IH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IH \perp (SAC)$ suy ra IH là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SAC) bằng

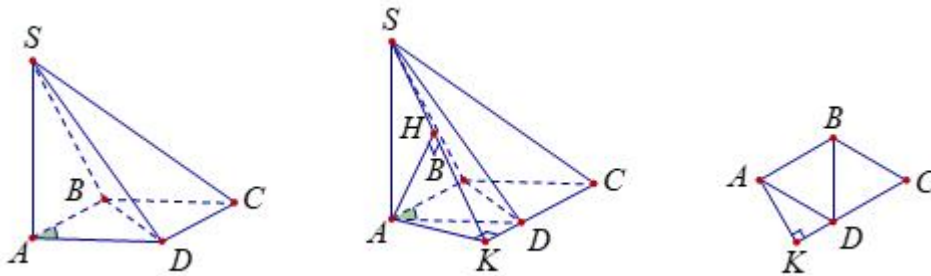
Ta có $IK = \frac{1}{2}BO = \frac{\sqrt{2}a}{4}$, tam giác SIK vuông tại I nên

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{3}a}{2\sqrt{7}}$$

Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng hai lần khoảng cách từ H đến mặt phẳng

(SAC) nên khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) là $d = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 54. Chọn A



Cách 1 Diện tích hình thoi $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích hình chóp $S.ABCD : V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Ta có $SD = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$, $SC = 2a$.

Nửa chu vi ΔSCD là $p_{\Delta SCD} = \frac{3a + a\sqrt{2}}{2}$.

$$S_{\Delta SCD} = \sqrt{p(p-a)(p-2a)(p-a\sqrt{2})} = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}$$

$$d(B, (SCD)) = \frac{3V_{S.BCD}}{S_{\Delta SCD}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{6}}{\frac{a^2\sqrt{7}}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Cách 2 Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$, suy ra $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $AK \perp CD$ tại K .

Trong mặt phẳng (SAK) , kẻ $AH \perp SK$ tại H .

Suy ra $AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AH$.

Tam giác SAK vuông tại A , AH là đường cao, suy ra:

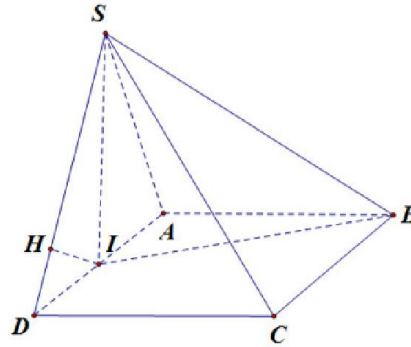
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AK^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}, \text{ do } AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(B, (SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 55.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của AD . Tam giác SAD cân tại S

$$\Rightarrow SI \perp AD$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} SI \perp AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$

$\Rightarrow SI$ là đường cao của hình chóp.

$$\text{Theo giả thiết } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{4}{3} a^3 = \frac{1}{3} SI \cdot 2a^2 \Leftrightarrow SI = 2a$$

Vì AB song song với (SCD)

$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(I, (SCD))$$

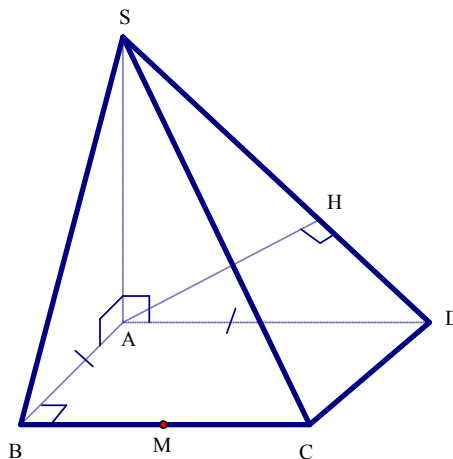
Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên SD .

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} SI \perp DC \\ ID \perp DC \end{cases} \Rightarrow IH \perp DC. \text{ Ta có } \begin{cases} IH \perp SD \\ IH \perp DC \end{cases} \Rightarrow IH \perp (SCD) \Rightarrow d(I, (SCD)) = IH$$

$$\text{Xét tam giác } SID \text{ vuông tại } I: \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{ID^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{2a^2} \Rightarrow IH = \frac{2a}{3}$$

$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(I, (SCD)) = \frac{4}{3} a.$$

Câu 56. Chọn C



$$+ d(M, (SCD)) = \frac{1}{2} d(B, (SCD)) \text{ (vì } M \text{ là trung điểm } BC).$$

Vì $AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(B; (SCD)) = d(A; (SCD))$.

Kê $AH \perp SD$

$AH \perp CD$ vì $CD \perp (SAD)$ (do $CD \perp AD; CD \perp SA$)

$\Rightarrow AH \perp (SCD)$.

$\Rightarrow d(A; (SCD)) = AH$.

+ $(ABCD) \cap (SCD) = CD$

$CD \perp (SAD)$

$\Rightarrow$ góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SDA}$, $\widehat{SDA} = 60^\circ$.

Gọi cạnh của hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng x .

Tam giác vuông SAD có: $\tan 60^\circ = \frac{SA}{AD} \Rightarrow SA = x\sqrt{3}$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot x\sqrt{3} \cdot x^2 = \frac{x^3\sqrt{3}}{3}.$$

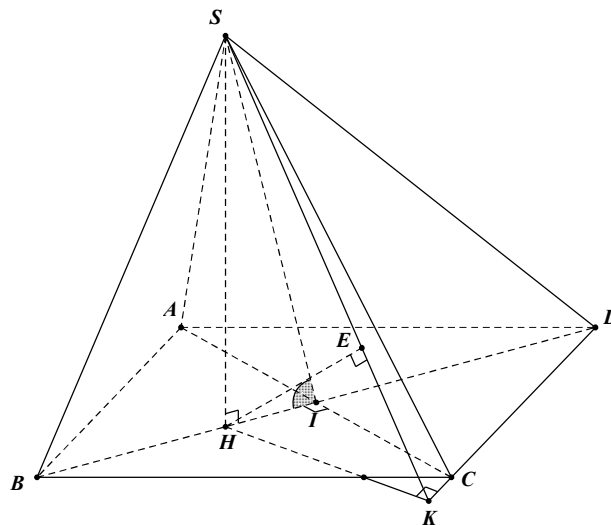
Mà thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{x^3\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = AD = a$ và $SA = a\sqrt{3}$.

+ Tam giác vuông SAD có đường cao AH :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 57. Chọn A



Gọi $I = AC \cap BD$, H là trọng tâm của tam giác ABC .

Do $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $\triangle ABC, \triangle ACD$ là các tam giác đều cạnh a .

$\Rightarrow \left(\widehat{(SAC), (ABCD)} \right) = \widehat{SIH} = 60^\circ$.

Ta có: $BI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow IH = \frac{1}{3} BI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $SH = IH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a}{2}$; $HD = \frac{2}{3} BD = \frac{4}{3} BI = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

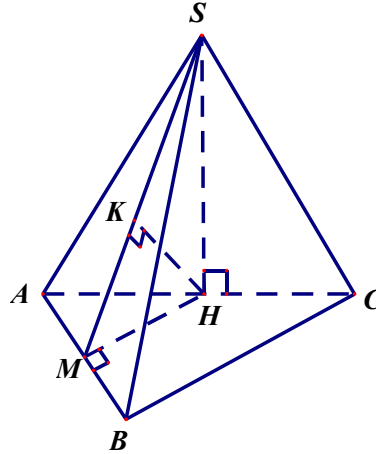
Kê $HK \perp CD, HE \perp SK \Rightarrow d(H, (SCD)) = HE$.

Trong tam giác vuông HKD ta có $HK = HD \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$\text{Do đó } d(H, (SCD)) = HE = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{d(B, (SCD))}{d(H, (SCD))} = \frac{BD}{HD} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(B, (SCD)) = \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{7}} = \frac{3a}{2\sqrt{7}}.$$

Câu 58. Chọn B



Ta có: $SH \perp (ABC)$.

$$\text{Mà } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH \Leftrightarrow \frac{a^3 \sqrt{6}}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \sqrt{3} \cdot SH \Leftrightarrow SH = a\sqrt{2}.$$

Vì H là trung điểm của cạnh $AC \Rightarrow d(C, (SAB)) = 2d(H, (SAB))$.

Gọi M là trung điểm của cạnh $AB \Rightarrow HM \perp AB$.

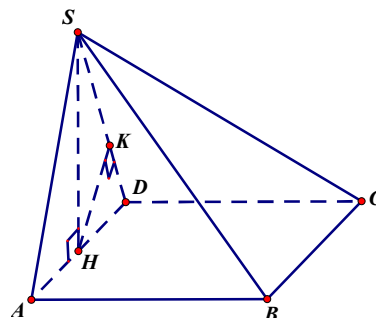
$$\text{Mà } AB \perp SH \Rightarrow AB \perp (SHM) \text{ và } HM = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Kẻ $KH \perp SM$ tại K .

Do $AB \perp (SHK) \Rightarrow AB \perp HK \Rightarrow HK \perp (SAB)$ tại K .

$$\Rightarrow d(H, (SAB)) = HK = \frac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2a^2 + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{66}}{11} \Rightarrow d(C, (SAB)) = \frac{2a\sqrt{66}}{11}.$$

Câu 59. Chọn D



Gọi H là trung điểm của AD . Vì ΔSAD cân nên $SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Trong mp (SAD) kẻ $HK \perp SD$ (1). Vì $\left. \begin{matrix} CD \perp AD \\ CD \perp SH \end{matrix} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp HK$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $HK \perp (SCD) \Rightarrow HK = d(H, (SCD))$.

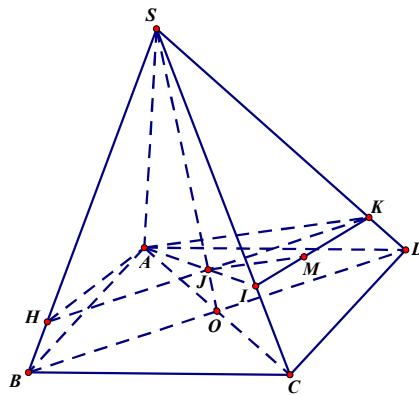
Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{4}{3} a^2 \Rightarrow SH = 2a$. Xét tam giác SHD vuông tại H ta có

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{\frac{a^2}{2}} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow HK = \frac{2a}{3} \Rightarrow d(H, (SCD)) = \frac{2a}{3}.$$

Vì $AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$. Mặt khác H là trung điểm của AD

$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(H, (SCD)) = \frac{4a}{3}. \text{ Vậy } h = \frac{4a}{3}.$$

Câu 60. Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Dựng $AK \perp SD$ tại $K \Rightarrow CD \perp AD, CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK \Rightarrow AK \perp (SCD)$

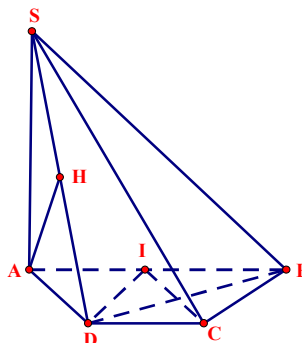
Ta có: $\triangle SAB = \triangle SAD \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow HK \parallel BD$.

$\triangle SBD$ cân đỉnh S , gọi $J = HK \cap SO \Rightarrow HJ = JK$. Dựng AJ cắt SC tại I . Dựng $JM \parallel AK \Rightarrow JM \perp (SCD) \Rightarrow d(H; (SCD)) = 2d(J; (SCD)) = 2JM$.

$$\text{Ta có: } AH = AK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}; AI = \frac{2a\sqrt{3}}{3}; SO = \frac{3a\sqrt{2}}{2}; AJ = \frac{2a\sqrt{3}}{5}; IJ = \frac{4a\sqrt{3}}{15}; HJ = \frac{2a\sqrt{2}}{5}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{IJ}{AI} = \frac{JM}{AK} \Rightarrow JM = \frac{4a\sqrt{5}}{25} \Rightarrow d(H; (SCD)) = \frac{8a\sqrt{5}}{25}.$$

Câu 61. Chọn C



Hai tứ giác $ADCI$ và $BCDI$ là hình thoi $\Rightarrow \begin{cases} AD \parallel CI \\ CI \perp BD \end{cases} \Rightarrow AD \perp BD$

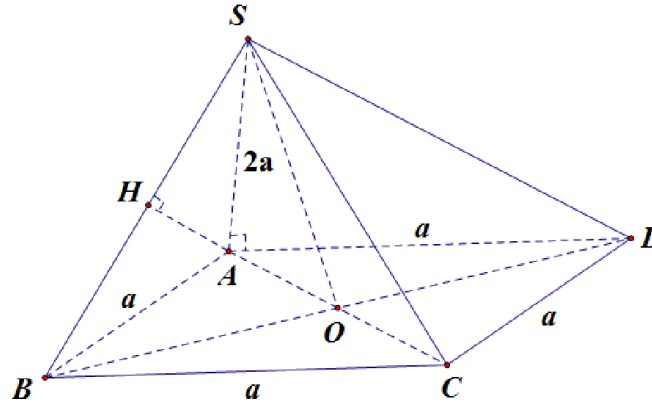
$\Rightarrow BD \perp (SAD) \Rightarrow SD \perp BD$. Suy ra góc giữa mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SDA} = 45^\circ$.

Do đó $SA = AD = a$. Gọi H là hình chiếu của A lên $SD \Rightarrow AH \perp (SBD)$

$$\Rightarrow d(A, (SBD)) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ta có } \frac{d(I, (SBD))}{d(A, (SBD))} = \frac{IB}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(I, (SBD)) = \frac{1}{2} d(A, (SBD)) = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 62. Chọn A



$$\text{Ta có: } d(O, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC)).$$

$$\text{Kê } AH \perp SB \quad (1).$$

$$+) \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

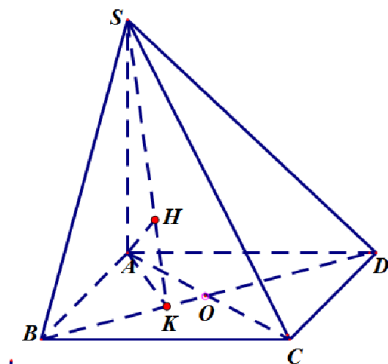
$$\Rightarrow AH \perp BC \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH.$$

$$+) \text{ Xét tam giác } SAB, \text{ ta có: } AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} a.$$

$$\text{Vậy khoảng cách từ điểm } O \text{ đến mặt phẳng } (SBC) \text{ bằng } \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 63. Chọn A



$$\text{Gọi } O = AC \cap BD. \text{ Suy ra, } O \text{ là trung điểm của } AC \text{ nên } d(C, (SBD)) = d(A, (SBD)).$$

Kẻ $AK \perp BD$, $AH \perp SK$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BD \\ AK \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAK) \Rightarrow (SBD) \perp (SAK)$.

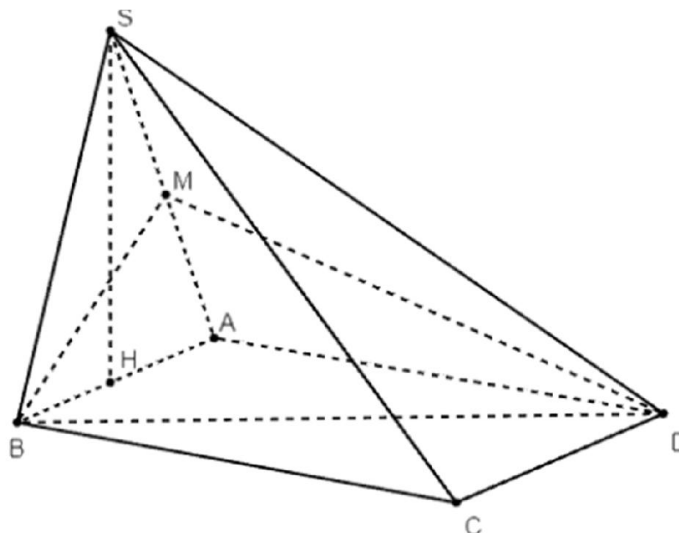
Lại do $\begin{cases} (SBD) \cap (SAK) = SK \\ AH \perp SK \end{cases}$, suy ra $AH \perp (SBD)$ nên $d(A, (SBD)) = AH$.

$$\text{Ta có } AK = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

Vậy khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) là $d(C, (SBD)) = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 64. Chọn B



Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AD \cdot AB = a^2\sqrt{3}$.

$\triangle SAB$ đều cạnh $AB = a$, gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$, $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ SH \subset (SAB), SH \perp AB \end{cases}$.

Thể tích hình chóp $S.ABCD$ là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{2}$.

Gọi M là trung điểm $SA \Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và thể tích tứ diện $MBCD$ là:

$$V_{MBCD} = \frac{1}{3}d(M, (BCD)) \cdot S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}d(S, (ABCD)) \cdot \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{8}.$$

Hình chữ nhật $ABCD$ có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$.

Có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AD$, mà $AB \perp AD \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SA$.

$$\Rightarrow \triangle MAD \text{ vuông tại } A, MD = \sqrt{MA^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

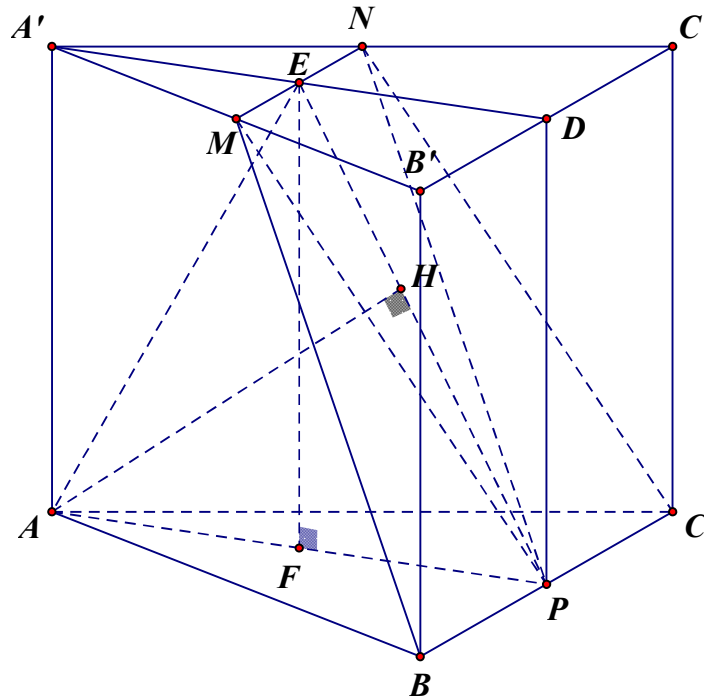
$\Rightarrow \Delta MBD$ có $MB^2 + MD^2 = BD^2 \Rightarrow \Delta MBD$ vuông tại M .

Diện tích tam giác MBD là $S_{\Delta MBD} = \frac{1}{2} MB \cdot MD = \frac{a^2 \sqrt{39}}{8}$.

Mà thể tích tứ diện $CMBD$ là: $V_{CMBD} = \frac{1}{3} d(C, (MBD)) \cdot S_{\Delta MBD}$

$$\Rightarrow d(C, (MBD)) = \frac{3V_{CMBD}}{S_{\Delta MBD}} = \frac{3V_{MBCD}}{S_{\Delta MBD}} = \frac{\frac{3}{8} a^3}{\frac{a^2 \sqrt{39}}{8}} = \frac{a \sqrt{39}}{13}.$$

Câu 65. Chọn D



- Gọi D là trung điểm của $B'C'$ $\Rightarrow \begin{cases} MN \perp A'D \\ MN \perp DP \end{cases} \Rightarrow MN \perp (A'DPA) \Rightarrow (MNP) \perp (A'DPA)$

- Gọi $E = MN \cap A'D \Rightarrow EP$ là giao tuyến của (MNP) và $(A'DPA)$.

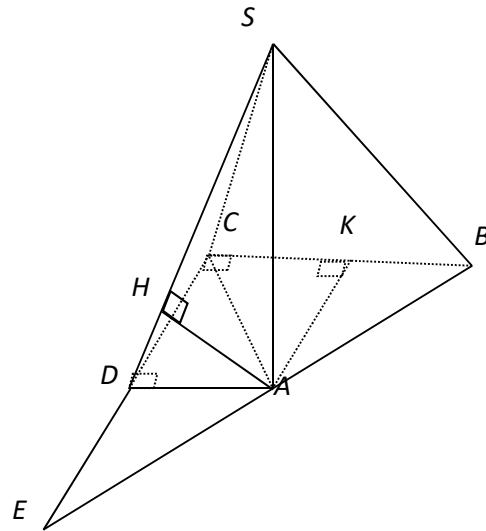
- Dựng $AH \perp EP \Rightarrow AH \perp (MNP) \Rightarrow AH = d(A; (MNP))$.

- Gọi F là trung điểm của $AP \Rightarrow EF \perp AP$ và $EF = A'A = 2$, $FP = \frac{AP}{2} = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow EP = \sqrt{EF^2 + FP^2} = \frac{5}{2} \Rightarrow AH = \frac{EF \cdot AP}{EP} = \frac{2 \cdot 3}{\frac{5}{2}} = \frac{12}{5}.$$

$$\text{Vậy } d(A; (MNP)) = \frac{12}{5}.$$

Câu 66. Chọn B



Gọi E là giao điểm của AB và CD ; H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SD, BC . Ta có

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = CK, \quad KB = AK \cdot \cot \widehat{ABC} = CD \cdot \cot 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$BC = BK + KC = a\sqrt{3}.$$

Tam giác EBC có $AD \parallel BC$ và $BC = 2AD$ nên AD là đường trung bình, suy ra A là trung điểm của cạnh EB .

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH.$$

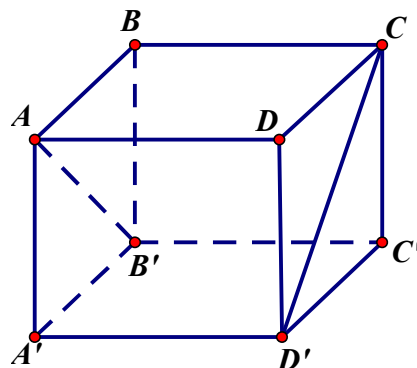
$$\begin{cases} AH \perp CD \\ AH \perp SD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AH.$$

$$\text{Tam giác } SAD \text{ vuông cân tại } A \text{ nên } AH = \frac{AD\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(B, (SCD)) = \frac{EB}{EA} \cdot d(A, (SCD)) = 2AH = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

DẠNG 3. KHOẢNG CÁCH CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

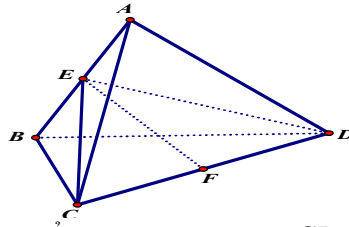
Câu 67. Chọn B



* Do $AB' \parallel (CDD'C')$ nên ta có:

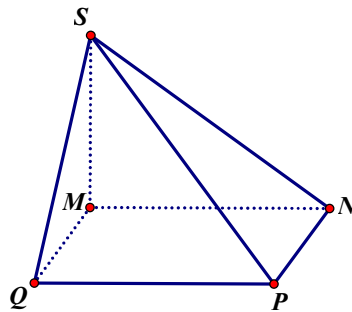
$$d(AB'; CD') = d(AB'; (CDD'C')) = d(A; (CDD'C')) = AD = a.$$

Câu 68. Chọn B



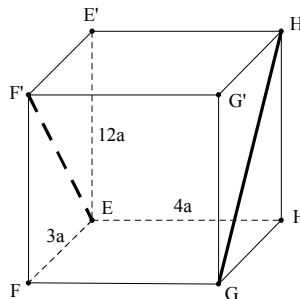
Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD . Do tứ diện $ABCD$ đều cạnh a nên $DE = CE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Xét trong tam giác cân ECD tại E có $EF^2 = ED^2 - FD^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$. Do tam giác ABC, ABD đều nên $ED \perp AB, EC \perp AB$ suy ra $EF \perp AB$ mà tam giác ECD cân tại E nên $EF \perp CD$. Vậy khoảng cách giữa AB và CD bằng độ dài đoạn EF . Tức bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 69. Chọn B



Do $MN \perp SM$ (giả thiết SM vuông góc với đáy) và $MN \perp MQ$ (do $MNPQ$ là hình vuông) vậy $MN \perp (SMQ)$ suy ra $d(NP, SQ) = d(NP, (SMQ)) = d(N, (SMQ)) = NM = 3a$.

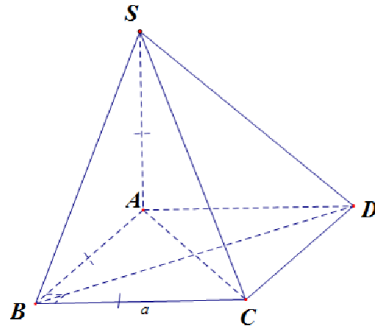
Câu 70. Chọn D



Ta có:
$$\begin{cases} EF' \subset (EFF'E') \\ GH' \subset (GHH'G') \\ (EFF'E') \parallel (GHH'G') \end{cases} \Rightarrow d(EF', GH') = d((EFF'E'), (GHH'G')) = d(E, (GHH'G')).$$

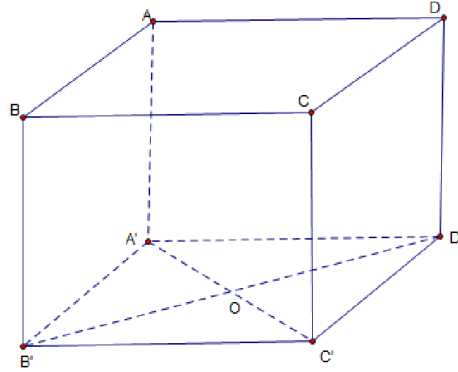
Vì $EH \perp (GHH'G') \Rightarrow d(E, (GHH'G')) = EH = 4a$.

Câu 71. Chọn D



Vì $CD \parallel AB$ nên $CD \parallel (SAB)$. Do đó $d(CD; SB) = d(CD; (SAB)) = d(D; (SAB)) = DA = a$.

Câu 72. Chọn D

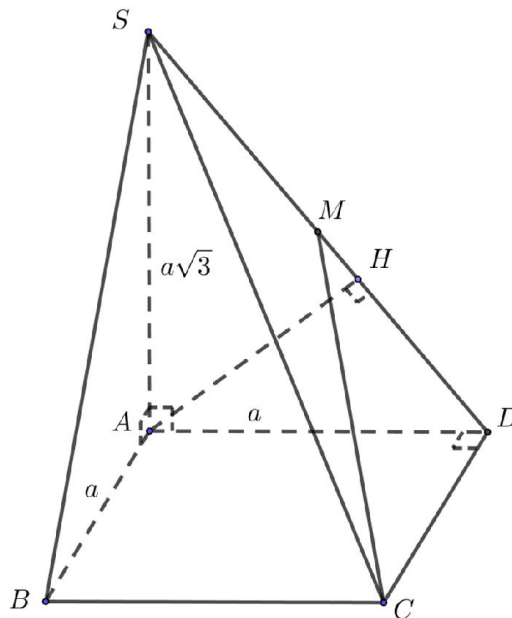


Gọi $O = A'C' \cap B'D'$.

Ta có $BB' \perp B'O$, $A'C' \perp B'O \Rightarrow B'O = d(BB', A'C')$.

$$B'O = \frac{1}{2}B'D' = \frac{1}{2}\sqrt{B'C'^2 + C'D'^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 73. Chọn B



*) Trong tam giác $\triangle SAD$, kẻ đường cao $AH \Rightarrow AH \perp SD$ (1).

$CD \perp AD \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ (2).

$CD \perp SA$

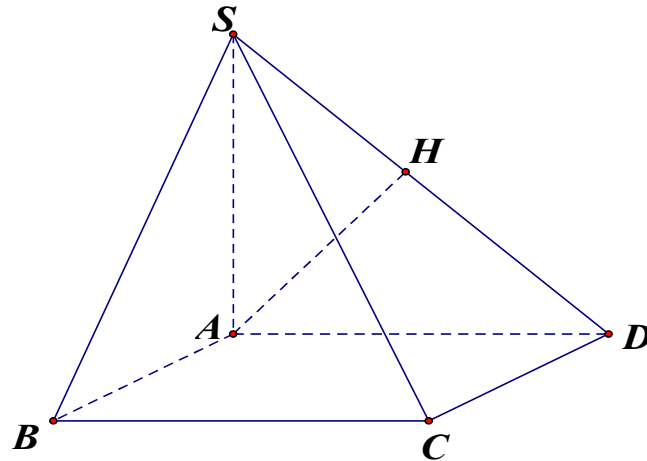
Từ (1), (2) $\Rightarrow AH \perp (SCD)$.

Có $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD)$, mà $CM \subset (SCD)$

$\Rightarrow d(AB, CM) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AH$.

$$*) \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 74. Chọn A



Theo giả thiết các mặt (SAB) , (SAD) vuông góc với đáy nên suy ra $SA \perp (ABCD)$.

Xét 2 mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ có:
$$\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ AD \perp CD (gt) \\ SD \perp CD (vì CD \perp (SAD)) \end{cases}$$

Suy ra $((SCD), (ABCD)) = (AD, SD) = \widehat{SDA} = 60^\circ$.

Mặt khác, $AB // CD \subset (SCD) \Rightarrow AB // (SCD) \Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Trong (SAD) , từ A dựng $AH \perp SD$ tại H thì $AH \perp (SCD)$ nên $d(A, (SCD)) = AH$.

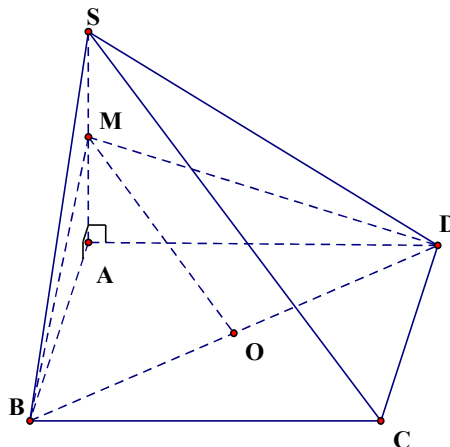
Xét tam giác SAD vuông tại A có:

$$AD = a, SA = AD \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 75. Chọn B

Ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BD và $A'C'$ bằng khoảng cách giữa mặt phẳng song song $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ thứ tự chứa BD và $A'C'$. Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng a .

Câu 76. Chọn C



Gọi O là tâm hình chữ nhật và M là trung điểm SA , ta có: $SC \parallel (BMD)$.

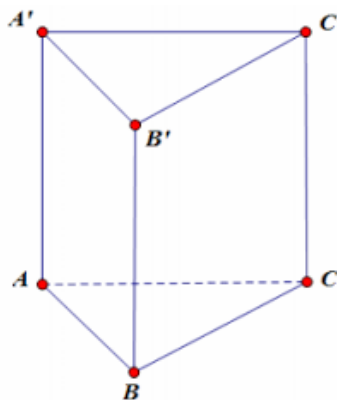
Do đó $d(SC, BD) = d(SC, (BMD)) = d(S, (BMD)) = d(A, (BMD)) = h$

Ta có: AM, AB, AD đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2}$$

$$\text{Suy ra: } h = \frac{2a\sqrt{21}}{21}.$$

Câu 77. Chọn D



Gọi I là trung điểm của AB .

Ta có: $CC' \parallel BB'$ nên $CC' \parallel (ABB'A')$.

Vì $AB' \subset (ABB'A')$ nên $d(CC', AB') = d(CC', (ABB'A')) = CI$.

Do lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ nên tam giác ABC đều cạnh a nên $CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Nên } d(CC', AB') = CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 78. Chọn C

Kẻ $Dx \parallel AC$, $Dx \cap AB = \{I\}$.

$AC \parallel DI$; $AC \not\subset mp(SDI) \Rightarrow AC \parallel mp(SDI)$

Khi đó $d(AC, SD) = d(A, (SDI))$

Kẻ AH vuông góc với DI tại H , do $SA \perp DI$

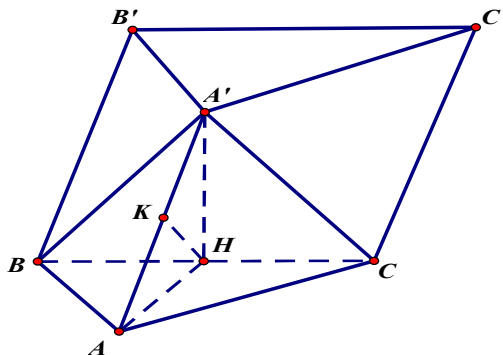
nên $DI \perp mp(SAH) \Rightarrow mp(SAH) \perp mp(SDI) = SH$

Trong $mp(SAH)$, kẻ $AP \perp SH = \{P\}$ suy ra $d(A; (SDI)) = AP$

Ta có, trong $mp(ABCD)$: $AH \parallel CD = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác: SAH vuông tại A , có AP là đường cao

$$\Rightarrow \frac{1}{AP^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d(AC; SD) = AP = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



Câu 79.

Chọn D

Gọi H là trung điểm của BC và K là hình chiếu của H trên $A'A$.

Theo giả thiết ta có tam giác ABC cân tại A nên $BC \perp AH$ (1) và

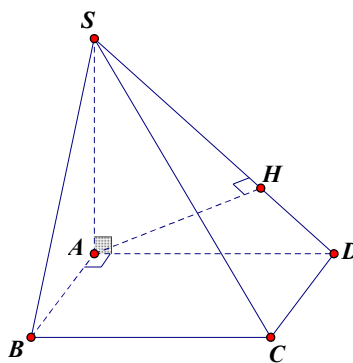
$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$. Mặt khác $(A'BC) \perp (ABC)$ và tam giác $A'BC$ vuông cân

tại A' nên $A'H \perp BC$ (2) và $A'H = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{3}$. Từ (1) và (2) suy ra

$BC \perp (AHA') \Rightarrow BC \perp HK$ nên HK là đoạn vuông góc chung của $A'A$ và BC .

$$\text{Vậy } d(A'A, BC) = HK = \frac{AH \cdot A'H}{\sqrt{AH^2 + A'H^2}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 80. Chọn C



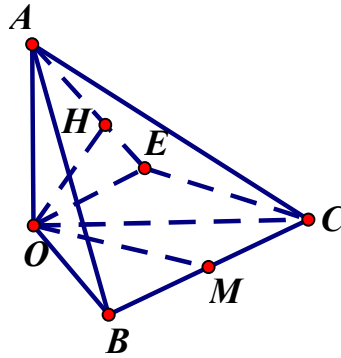
Trong tam giác SAD kẻ đường cao AH ta có

$$AD \cdot AS = AH \cdot SD \Rightarrow AH = \frac{AD \cdot AS}{SD} = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Dễ thấy AH chính là đường vuông góc chung của AB và SD

$$\text{Vậy } d(AB, SD) = AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

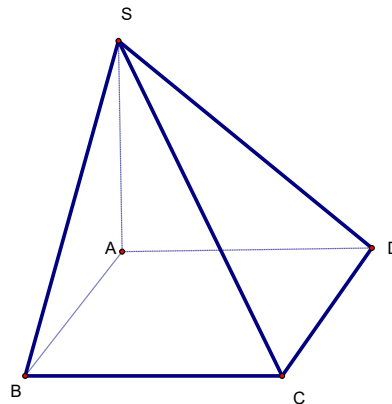
Câu 81. Chọn D



- Ta có được $OA \perp (OBC)$.
- Trong mặt phẳng (OBC) , dựng điểm E sao cho $OMCE$ là hình bình hành thì $OMCE$ cũng là hình vuông (do OBC là tam giác vuông cân tại O).
- Lại có: $\begin{cases} CE \perp OE \\ CE \perp OA \end{cases} \Rightarrow CE \perp (AOE)$.
- Kê $OH \perp AE$ tại H thì $OH \perp (AEC)$.

$$\text{Vì } OM \parallel (AEC) \text{ nên } d(AC; OM) = d(O; (ACE)) = OH = \frac{OA \cdot OE}{\sqrt{OA^2 + OE^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + 2a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 82. Chọn C



$$\text{Ta có } \begin{cases} DA \perp SA \\ DA \perp AB \end{cases} \Rightarrow DA \perp (SAB).$$

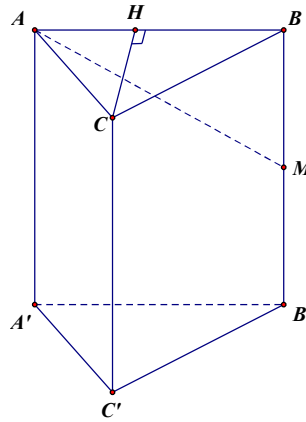
$$\text{Mặt khác } \begin{cases} CD \not\subset (SAB) \\ CD \parallel AB \end{cases} \Rightarrow CD \parallel (SAB).$$

Từ đó suy ra khoảng cách giữa SB và CD bằng khoảng cách giữa (SAB) và CD và bằng DA .

Từ giác $ABCD$ là hình vuông với đường chéo $AC = 2a$ suy ra $DA = \sqrt{2}a$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là $a\sqrt{2}$.

Câu 83. Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB .

Có $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên $CH \perp (ABB'A') \Rightarrow d(C, (ABB'A')) = CH$

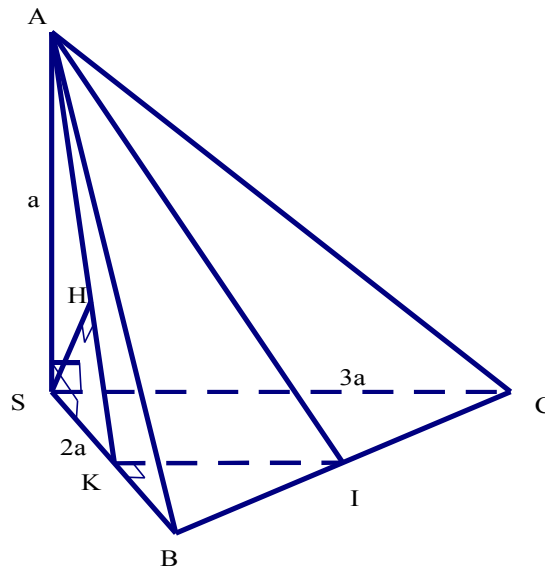
$CC' \parallel BB' \Rightarrow CC' \parallel (ABB'A')$ nên $d(CC', AM) = d(CC', (ABB'A')) = d(C, (ABB'A')) = CH$

Xét tam giác ABC có $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2.CA.CB.\cos 120^\circ = 7a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{7}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}CA.CB.\sin C = \frac{1}{2}AB.CH \Rightarrow a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{7}.CH \Rightarrow CH = a\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

$$\text{Vậy } d(AM, CC') = a\sqrt{\frac{3}{7}}$$

Câu 84. Chọn D



Trong (SBC) kẻ $IK \parallel SC \Rightarrow SC \parallel (AIK)$

Khoảng cách $d(SC; AI) = d(SC; (AIK)) = d(S; (AIK))$.

SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau $\Rightarrow SC \perp (SAB)$, mà $IK \parallel SC \Rightarrow IK \perp (SAB)$.

Trong (SAB) kẻ $SH \perp AK$

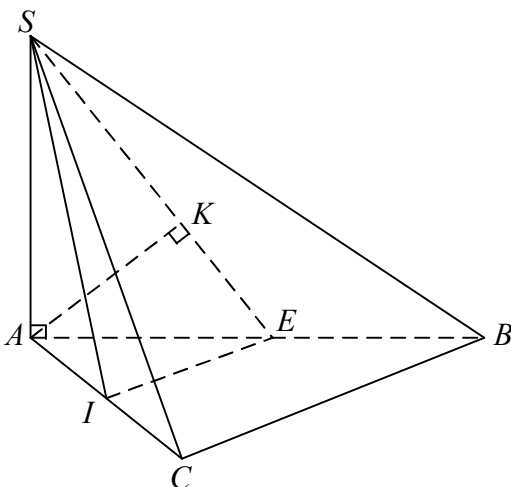
$SH \perp IK$ ($IK \perp (SAB)$)

$\Rightarrow SH \perp (AIK) \Rightarrow d(S; (AIK)) = SH$.

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow SH = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(SC; AI) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 85. Chọn D

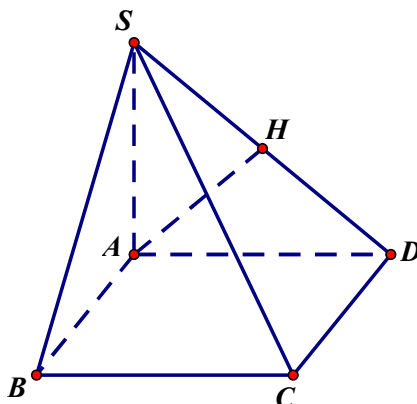


Gọi I là trung điểm của AC , ta có $EI \parallel BC$ nên

$$d(BC, SE) = d(BC, (SEI)) = d(B, (SEI)) = d(A, (SEI)) = AK \text{ (hình vẽ).}$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SAE \text{ ta có } AK = \frac{AS \cdot AE}{\sqrt{AS^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 86. Chọn B



Gọi H là hình chiếu của A trên cạnh SD . Ta có

$$\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AH.$$

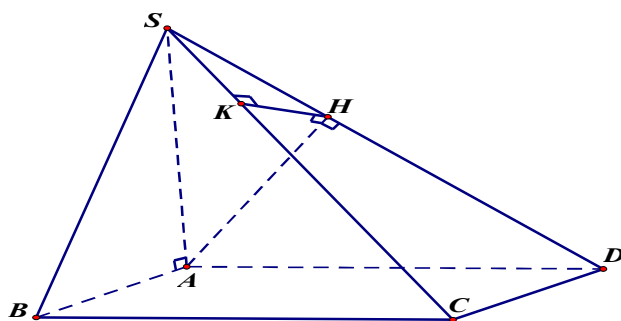
Suy ra AH là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau AB và SD . Do đó $d(AB, SD) = AH$.

$\triangle SAD$ vuông cân tại A có AH là đường cao nên H là trung điểm của SD , suy ra

$$AH = \frac{1}{2}SD = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } d(AB, SD) = a\sqrt{2}.$$

Câu 87. Chọn A



$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAC) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAC) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD).$$

$$* \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH, \text{ mà } AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD).$$

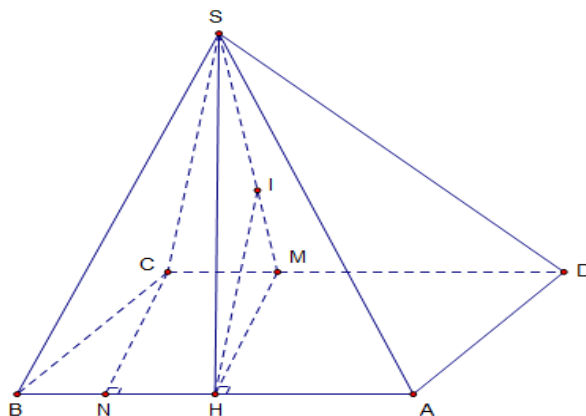
Trong (SCD) kẻ $HK \perp SC$ tại $K \Rightarrow AH \perp HK$.

$\Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của AH và SC .

$$* \text{ Ta có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AD^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow SA^2 = \frac{4a^2}{3}.$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5}; \quad SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{\sqrt{57}a}{3}.$$

$$\Delta SHK \sim \Delta SCD \text{ (g - g)} \Leftrightarrow \frac{HK}{SH} = \frac{CD}{SC} \Leftrightarrow HK = \frac{SH \cdot CD}{SC} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a \cdot \frac{3}{\sqrt{57}a} = \frac{\sqrt{19}}{19}a$$



Câu 88.

Chọn D

Do $SB = SC = 11$ và $\widehat{SBC} = 60^\circ$ nên ΔSBC đều, do đó $BC = 11$.

Ta lại có, $SA = SC = 11$ và $\widehat{SCA} = 45^\circ$ nên ΔSAC vuông cân tại S , hay $AC = 11\sqrt{2}$.

Mặt khác, $SA = SB = 11$ và $\widehat{SAB} = 30^\circ$ nên $AB = 11\sqrt{3}$.

Từ đó, ta có $AB^2 = BC^2 + AC^2$ suy ra ΔABC vuông tại C .

Gọi H là trung điểm của AB . Khi đó, H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Vì $SA = SB = SC$ nên $SH \perp (ABC)$.

Gọi M là điểm trên CD sao cho $HM \perp AB$, suy ra $HM \perp CD$. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AB . Khi đó, $HM \parallel CN$ và $HM = CN$. Do ΔABC vuông tại C nên theo công thức tính diện tích ta có:

$$HM = CN = \frac{CA \cdot CB}{\sqrt{CA^2 + CB^2}} = \frac{11\sqrt{6}}{3}$$

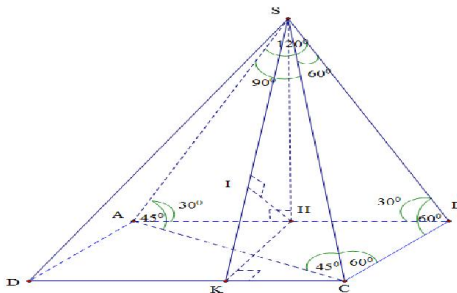
Ta lại có, $CH = \frac{1}{2} AB = \frac{11\sqrt{3}}{2}$ nên $SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \frac{11}{2}$.

Trong tam giác vuông SHM , dựng đường cao HI ($I \in SM$), suy ra $HI \perp (SCD)$. Khi đó,

$$d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HI = \frac{SH \cdot HM}{\sqrt{SH^2 + HM^2}} = \sqrt{22}.$$

Vậy $d(AB, SD) = \sqrt{22}$.

Câu 89. Chọn D



Theo giả thiết: $SA = SB = SC = 11$, $\widehat{SAB} = 30^\circ$, $\widehat{SBC} = 60^\circ$ và $\widehat{SCA} = 45^\circ$ nên ta được các góc có số đo như hình vẽ.

Trong tam giác SAB : $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos 120^\circ} = 11\sqrt{3}$.

Tam giác SBC đều nên $BC = 11$.

Tam giác SAC vuông tại C : $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = 11\sqrt{2}$.

Từ đó $\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C . Gọi H là trung điểm của AB .

Do $SA = SB = SC$ nên hình chiếu của S xuống đáy trùng với tâm H của đáy.

Do $AB \parallel CD$ nên $d(AB, SD) = d(AB, (SDC)) = d(H, (SDC))$.

Từ H kẻ $HK \perp DC$, mà $DC \perp SH$ nên $DC \perp (SHK)$.

Từ H kẻ $HI \perp SK$, $HI \perp DC$ (vì $DC \perp (SHK)$) $\Rightarrow HI \perp (SDC)$.

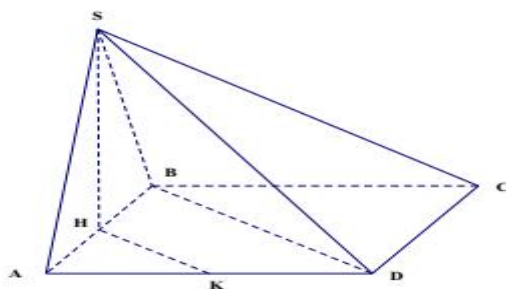
$HI = d(H, (SDC))$.

$$HK = d(C, AB) = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{11\sqrt{2} \cdot 11}{11\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{6}}{3}.$$

Trong tam giác vuông SAH , $\widehat{SAH} = 30^\circ \Rightarrow SH = \frac{1}{2} SA = \frac{11}{2}$.

Ta có: $HI = \frac{HK \cdot HS}{\sqrt{HK^2 + HS^2}} = \sqrt{22}$.

Câu 90. Chọn A



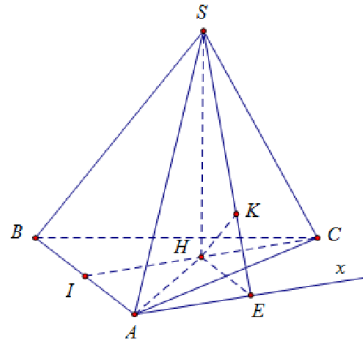
$$\text{Ta có } SH^2 = SD^2 - HD^2 = SD^2 - AH^2 - AD^2 = \frac{17a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - a^2 = 3a^2$$

Do $HK \parallel (SBD) \Rightarrow d(HK; (SBD)) = d(H; (SBO)) = h$, với O là giao điểm hai đường chéo

$$\text{Do tứ diện } HSBO \text{ vuông tại O nên } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HO^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{25}{3a^2}$$

$$\text{Vậy } h = \frac{a\sqrt{3}}{5}$$

Câu 91. Chọn C



Kẻ đường thẳng Ax song song với IC , kẻ $HE \perp Ax$ tại E .

Vì $IC \parallel (SAE)$ nên $d(IC; SA) = d(IC; (SAE)) = d(H; (SAE))$.

Kẻ $HK \perp SE$ tại K , $K \in SE$. (1)

$Ax \perp HE$, $Ax \perp SH \Rightarrow Ax \perp (SEA) \Rightarrow Ax \perp HK$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $HK \perp (SAE)$. Vậy $d(H; (SAE)) = HK$.

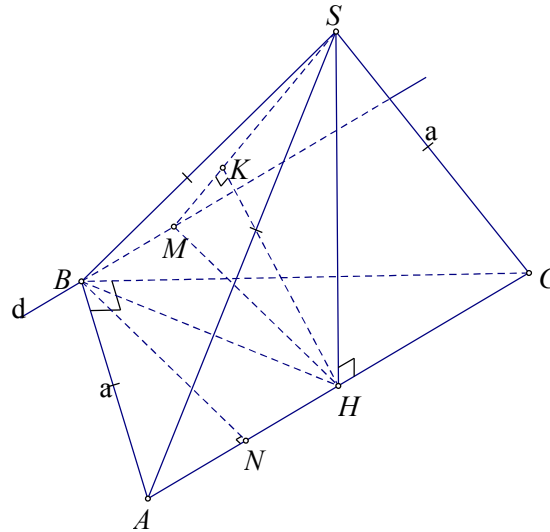
$$CH = IH = \frac{1}{2}IC = \frac{1}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}; \quad AH = \sqrt{IH^2 + IA^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

$$\left(\widehat{SA; (ABC)}\right) = \widehat{SAH} = 45^\circ \Rightarrow \triangle SAH \text{ vuông cân tại } H \text{ nên } SH = AH = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

Ta có $HE = IA = \frac{a}{2}$ (vì tứ giác $AIHE$ là hình chữ nhật)

$$HK = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{77}}{22}.$$

Câu 92. Chọn C



Ta có $AB = SA = SB = a$; $BC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$; $AC = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{3}$

Suy ra $AC^2 = AB^2 + BC^2$, hay $\triangle ABC$ vuông tại B .

Gọi H là trung điểm của AC thì $HA = HB = HC$, mặt khác $SA = SB = SC$ nên SH là trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, do đó $SH \perp (ABC)$.

Gọi d là đường thẳng qua B và song song với AC , (α) là mặt phẳng xác định bởi SB và d . Khi đó $AC \parallel (\alpha) \Rightarrow d(AC; SB) = d(SC; (\alpha)) = d(H; (\alpha))$.

Gọi M là hình chiếu vuông góc của H lên d và K là hình chiếu vuông góc của H lên SM , dễ thấy $d(H; (\alpha)) = HK$.

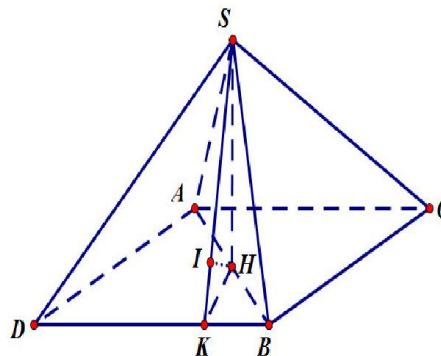
Gọi N là chân đường cao hạ từ B xuống AC thì

$$\frac{1}{BN^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow BN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Ta có } HM = BN = \frac{a\sqrt{6}}{3}, SH = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$$

$$\text{Trong tam giác vuông } SHM \text{ ta có: } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{3}{2a^2} = \frac{11}{2a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{22}}{11}.$$

Câu 93. Chọn B



Gọi H là trung điểm cạnh $AB \Rightarrow SH \perp AB$. Kết hợp giả thiết $(SAB) \perp (ABC)$ suy ra $SH \perp (ABC)$.

Dựng hình bình hành $ACBD$, kẻ $HK \perp BD$ ($K \in BD$), kẻ $HI \perp SK$ ($I \in SK$).

Ta có $AC \parallel (SBD) \Rightarrow d(SB, AC) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD))$.

Ta có $AH \cap (SBD) = B$ và $AB = 2HB$ suy ra $d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD))$ (1)

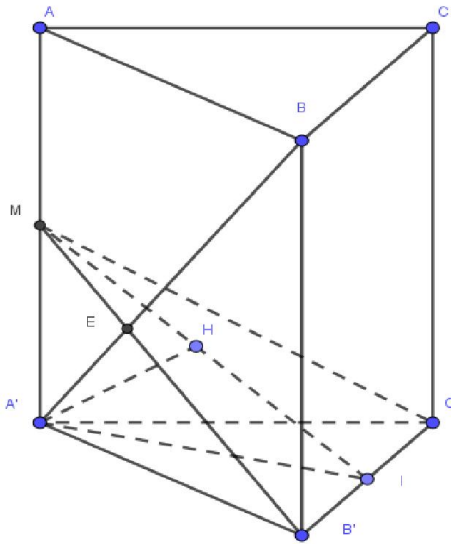
Ta có $\begin{cases} BD \perp HK \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHK) \Rightarrow BD \perp HI$ mà $HI \perp SK \Rightarrow HI \perp (SBD)$
 $\Rightarrow d(H, (SBD)) = HI$ (2)

Tính HI dựa vào tam giác vuông SHK có đường cao HI , với $SH = \frac{a}{2}$; $HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Theo công thức $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{16}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{\sqrt{21}}{14}a$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $d(SB, AC) = \frac{\sqrt{21}}{7}a$.

Câu 94. Chọn B

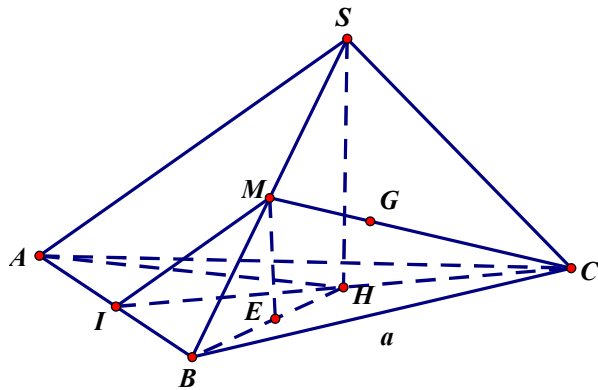


Do $BC \parallel B'C'$ nên $d(B'M; BC) = d(BC; (MB'C')) = d(B; (MB'C')) = 2d(A; (MB'C'))$ (do $\frac{BE}{AE} = \frac{BB'}{AM} = 2$).

$d(A; (MB'C')) = A'H$, ta có $A'I = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'M = \frac{a}{2}$ suy ra $A'H = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Vậy $d(B'M; BC) = 2A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 95.



Chọn C

Gọi giao điểm của CG với SB là M . Suy ra M là trung điểm của SB .

Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ M xuống mặt phẳng (ABC) .

Ta có $AS \parallel IM \Rightarrow AS \parallel (IMC)$.

Suy ra $d(SA, CG) = d(SA, (IMC)) = d(S, (IMC)) = d(B, (IMC))$.

Theo bài ra ta có $CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ suy ra $IH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $AH = \sqrt{AI^2 + IH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.

Do góc $(\widehat{SA, (ABC)}) = 45^\circ$ suy ra tam giác $\triangle SHA$ vuông cân tại H .

Suy ra $SH = AH = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.

Suy ra $SA = AH\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Xét tam giác $\triangle SBC$ có:

Dễ thấy $SB = SA = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.

$SC = SI = \sqrt{SH^2 + IH^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Suy ra $CM = \sqrt{\frac{2SC^2 + 2BC^2 - SB^2}{4}} = \frac{a\sqrt{38}}{8}$.

Xét tam giác $\triangle IMC$ có:

$IM = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{14}}{8}$, $CM = \frac{a\sqrt{38}}{8}$, $CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

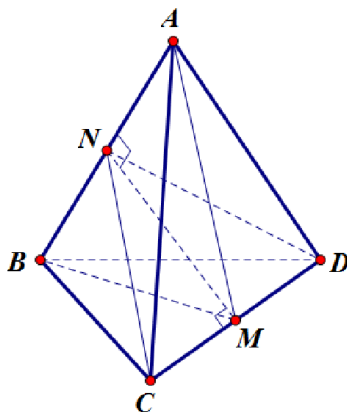
Suy ra $S_{\triangle IMC} = \frac{\sqrt{33}}{32} a^2$.

Thể tích khối chóp $MIBC$ là:

$V_{MIBC} = \frac{1}{3} ME \cdot S_{\triangle IMC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{SH}{2} \cdot \frac{1}{2} IC \cdot IB = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{192} a^3$.

Suy ra $d(S, (MIC)) = d(B, (MIC)) = \frac{3V_{MIBC}}{S_{\triangle IMC}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{21}}{192} a^3}{\frac{\sqrt{33}}{32} a^2} = \frac{\sqrt{77}}{22} a$.

Câu 96. Chọn C



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Tam giác CND cân tại $N \Rightarrow MN \perp CD$ (1)

Tam giác AMB cân tại $M \Rightarrow MN \perp AB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MN$ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD
 $\Rightarrow d(AB, CD) = MN$

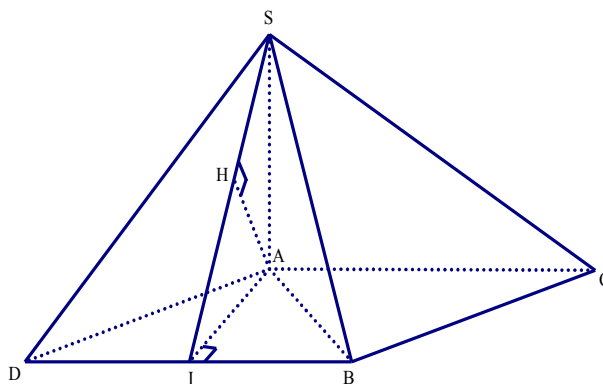
Ta có $MD = \frac{CD}{2} = a$; $ND = a\sqrt{3}$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông NMD ta có:

$$MN = \sqrt{ND^2 - MD^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - a^2} = a\sqrt{2}$$

Vậy $d(AB, CD) = a\sqrt{2}$

Câu 97. Chọn D



* $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SB, (ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 60^\circ$, do đó $AS = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$ Trong mp (ABC) lấy điểm D sao cho tứ giác $ACBD$ là hình bình hành

* Ta có $AC \parallel (SBD)$ nên $d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD))$

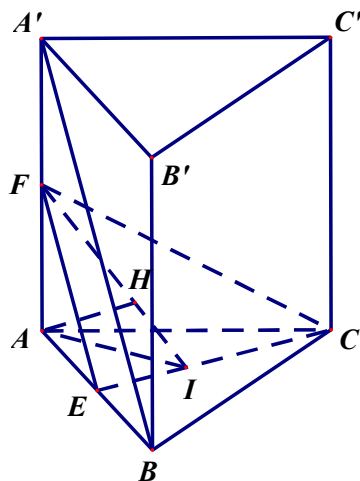
* Gọi I là trung điểm của BD , H là hình chiếu của A trên SI

Tam giác ABC đều và tứ giác $ACBD$ là hình bình hành nên $AB = AD = BD = a$ hay tam giác ABD đều $\Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $AI \perp BD$ mà $SA \perp BD$ nên $BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp AH$, lại có $AH \perp SI$ nên $AH \perp (SBD)$

$$\text{Vậy } d(AC, SB) = d(A, (SBD)) = AH = \frac{\sqrt{SA^2 \cdot AI^2}}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

Câu 98. Chọn C



Gọi F là trung điểm AA' .

Ta có $(CEF) \parallel A'B$ nên $d(CE, A'B) = d(A'B, (CEF)) = d(A', (CEF)) = d(A, (CEF))$.

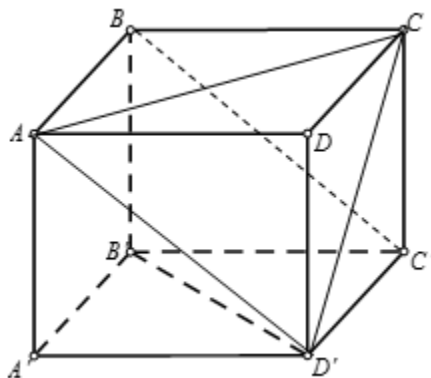
Kê $AI \perp CE$; $AH \perp FI$ thì $AH \perp (CEF)$ hay $d(A, (CEF)) = AH$.

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{49}{36a^2}.$$

Suy ra

$$d(CE, A'B) = d(A, (CEF)) = AH = \frac{6a}{7}.$$

Vậy khoảng cách giữa $A'B$ và CE là $\frac{6a}{7}$.



Câu 99.

Chọn C

Ta có $BC' \parallel AD' \Rightarrow BC' \parallel (ACD')$.

Do đó

$$\begin{aligned} d(BC', CD') &= d(BC', (ACD')) \\ &= d(B, (ACD')) = d(D, (ACD')) = h \end{aligned}$$

Vì DA, DC, DD' đôi một vuông góc nên ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DD'^2} \Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{3}{a^2} \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(BC', CD') = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

GHI CHÚ : Ta chứng minh bài toán sau

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC) , ta có H là trực tâm tam giác ABC và $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Thật vậy, từ giả thiết ta có

$$\left. \begin{array}{l} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{array} \right\} \Rightarrow OA \perp (OBC)$$

Khi đó

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp OA \\ BC \perp OH \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH \quad (1)$$

Tương tự $OB \perp (OAC)$

$$\text{Mà } \left. \begin{array}{l} AC \perp OB \\ AC \perp OH \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH \quad (2)$$

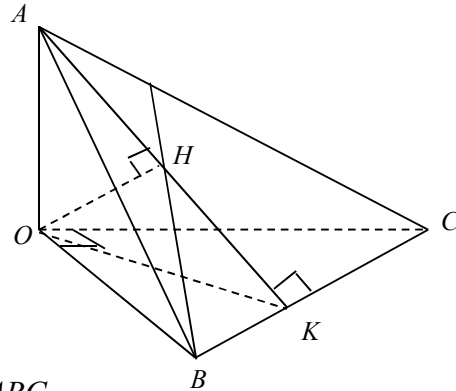
Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm của tam giác ABC .

Gọi K là giao điểm của AH và BC , ta suy ra $BC \perp OK$ (định lý ba đường vuông góc).

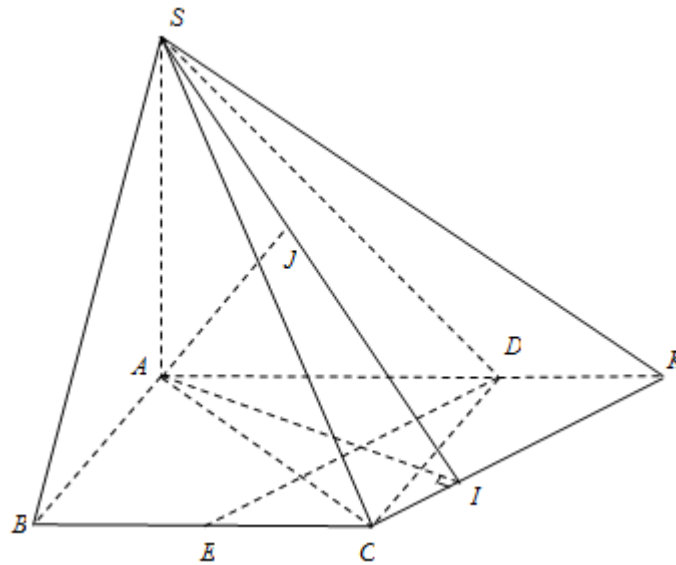
Xét trong tam giác vuông OBC có: $\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Xét trong tam giác vuông OAK ta lại có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2}$

Từ đó suy ra $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ (Đpcm).



Câu 100. Chọn D



Dựng hình bình hành $DKCE$, khi đó $DE \parallel (SCK)$.

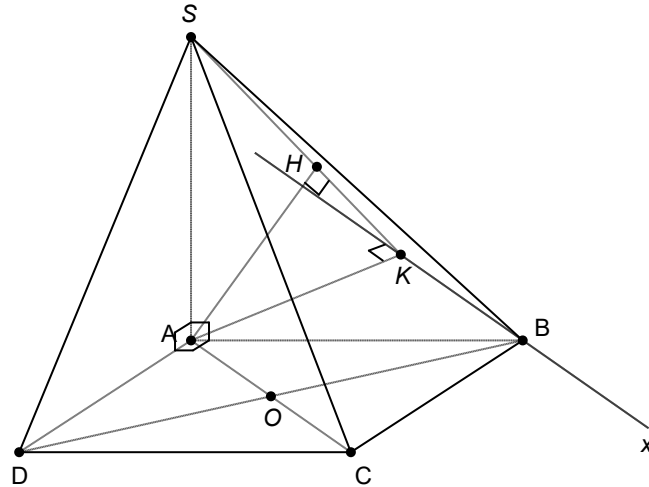
$$d(DE; SC) = d(DE; (SCK)) = d(D; (SCK)) = \frac{1}{3} d(A; (SCK)).$$

$$\text{Kẻ } AI \perp CK \Rightarrow CK \perp (SAI) \Rightarrow (SCK) \perp (SAI).$$

$$\text{Kẻ } AJ \perp SI \Rightarrow AJ \perp (SCK) \Rightarrow d(A; (SCK)) = AJ.$$

$$\text{Ta có } S_{\Delta ACK} = \frac{3a^2}{4}, CK = DE = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \text{ suy ra } AI = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 101. Chọn B

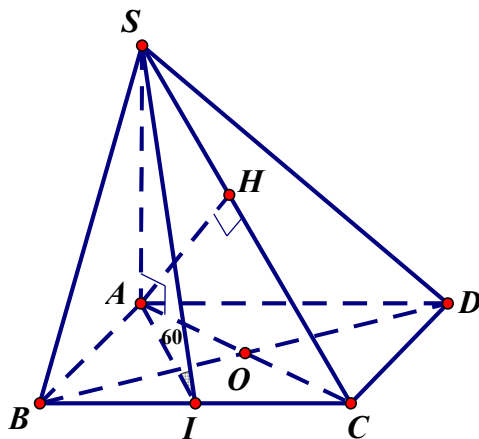


Từ B kẻ

Vậy $d(AC, SB) = \frac{2a}{3} \dots$

Câu 102. Chọn A

$$\begin{cases} AI \perp BC \\ SI \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((SBC); (ABCD)) = (AI; SI) = \widehat{SIA} = 60^\circ$$



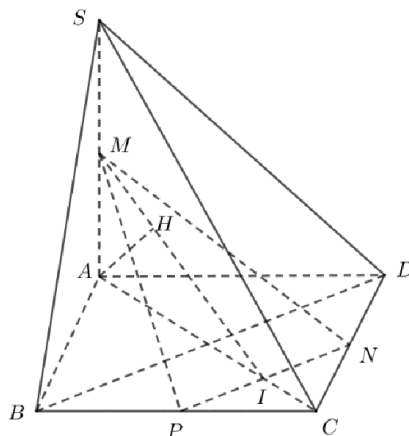
Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SAC)$ là mặt phẳng chứa SC và $\perp BD$
 $\Rightarrow d(SC; BD) = d(O; SC) = \frac{1}{2} d(A; SC) = \frac{1}{2} AH$

Xét tam giác SAC vuông tại A ta có $SA = AI \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$; $AC = AB = a\sqrt{3}$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{4}{27a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{13}{27a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{3a\sqrt{39}}{13}$$

$$\Rightarrow d(SC; BD) = \frac{1}{2} AH = \frac{3a\sqrt{39}}{26}.$$

Câu 103. Chọn B



Gọi P là trung điểm của $BC \Rightarrow BD \parallel NP \Rightarrow BD \parallel (MNP)$

$$\Rightarrow d(BD, MN) = d(BD, (MNP)) = d(D, (MNP)) = d(C, (MNP)) = \frac{1}{3} d(A, (MNP)).$$

Gọi $I = AC \cap NP$. Kẻ $AH \perp MI$ tại H .

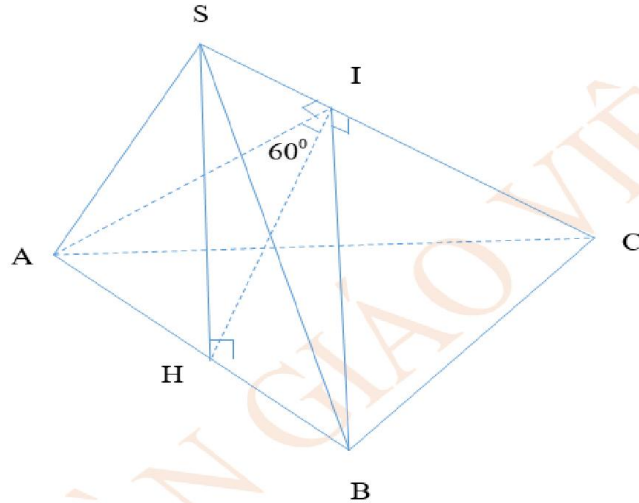
$$\text{Ta có } \begin{cases} NP \perp SA \\ NP \perp AC \end{cases} \Rightarrow NP \perp (SAC) \Rightarrow NP \perp AH.$$

$$\begin{cases} AH \perp MI \\ AH \perp NP \end{cases} \Rightarrow AH \perp (MNP) \Rightarrow d(A, (MNP)) = AH.$$

$$\text{Ta có } SA^2 = SC^2 - AC^2 = (10\sqrt{5})^2 - (10\sqrt{2})^2 = 300.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{\left(\frac{SC}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{3AC}{4}\right)^2} = \frac{4}{300} + \frac{16}{1800} = \frac{20}{900} \Rightarrow AH = \frac{30}{2\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy } d(BD, MN) = \frac{1}{3} AH = \sqrt{5}.$$

Câu 104. Chọn A

Có $(SAC) \cap (SBC) = SC$.

Từ giả thiết ta có $\begin{cases} AB \perp SH \\ AB \perp HC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHC) \Rightarrow AB \perp SC$

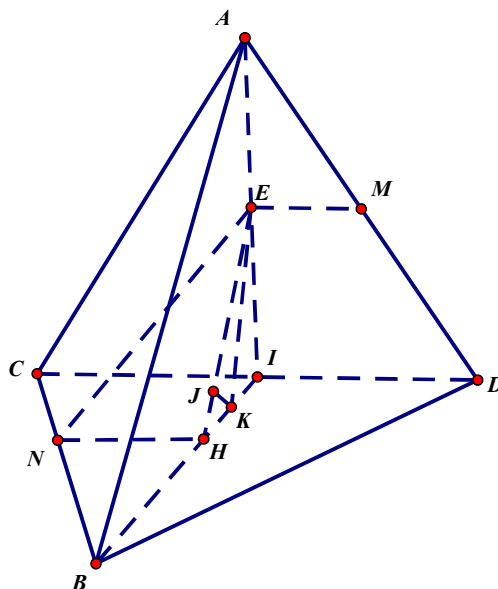
Hạ $AI \perp SC$ ta có $\begin{cases} AB \perp SC \\ SC \perp AI \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AIB) \Rightarrow SC \perp BI$ do đó góc giữa (SAC) và (SBC) là $\widehat{AIB}$ hoặc $180^\circ - \widehat{AIB}$. Nhận thấy ABC là tam giác đều nên ABI không thể là tam giác đều. Vì thế $\widehat{AIB} = 120^\circ$.

Từ $\begin{cases} AB \perp (SHC) \\ SC \perp (AIB) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \perp HI \\ SC \perp HI \end{cases} \Rightarrow d(AB, HC) = HI$.

Tam giác ABI cân tại I nên HI cũng là phân giác góc $\widehat{AIB}$, suy ra $\widehat{AIH} = 60^\circ$.

Xét tam giác AIH vuông tại H có $HI = \frac{AH}{\tan 60^\circ} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 105. Chọn C



Gọi H là tâm tam giác ABC khi đó $AH \perp (ABC)$. Có $BN = 2NC \Rightarrow NH \parallel CD$.

Gọi I là trung điểm CD , từ M kẻ đường thẳng $\parallel CD$ cắt AI tại E .

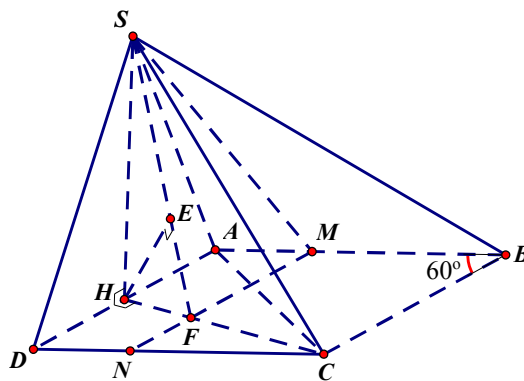
Gọi K là trung điểm HI , J là hình chiếu của K lên HE .

Khi đó $d(MN, CD) = d(I, (EMHN)) = 2d(K, (EMHN)) = 2KJ$.

$$\text{Ta có } KH = \frac{1}{2}HI = \frac{1}{6}BI = \frac{\sqrt{3}}{12}; EK = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}\sqrt{AI^2 - IH^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{KJ^2} = \frac{1}{KH^2} + \frac{1}{KE^2} = \frac{144}{3} + 6 = 54 \Rightarrow KJ = \sqrt{\frac{1}{54}} = \frac{\sqrt{6}}{18} \Rightarrow d(MN, CD) = \frac{\sqrt{6}}{9}.$$

Câu 106. Chọn B



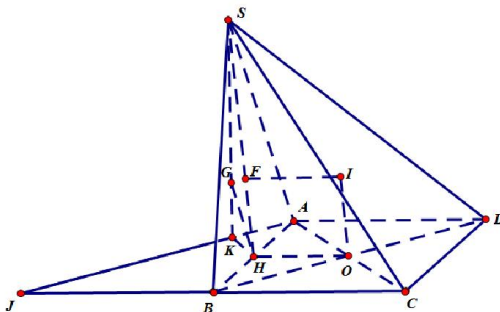
Dựng MN song song $BC \Rightarrow d(SM, BC) = d(BC, (SMN)) = d(C, (SMN))$

$FC = 2FH, HE \perp (SMN) \Rightarrow d(C, (SMN)) = 2d(H, (SMN)) = 2HE$

$$HC = a\sqrt{3} \Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{3}}{3}, SH = a\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HF^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{3}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{10}{3a^2} \Rightarrow HE = \frac{\sqrt{30}}{10}a \Rightarrow d(SM, BC) = \frac{\sqrt{30}}{5}a.$$

Câu 107. Chọn D



Gọi H là trung điểm của AB thì $SH \perp (ABCD)$, Gọi F là trọng tâm tam giác (SAB), O là trung điểm AC và I là đỉnh của hình chữ nhật OHFI thì OI là trục của đường tròn ABCD và FI là trục của đường tròn (SAB) nên tâm của mặt cầu là I và bán kính của mặt cầu là IA.

Diện tích của mặt cầu là $4\pi R^2 = 84\pi$ nên $R^2 = 21$.

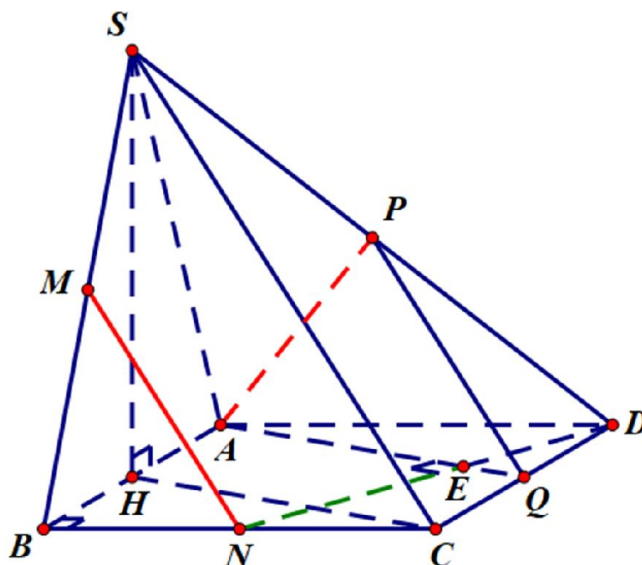
$$\text{Đặt } AB = x > 0 \text{ thì } R^2 = IA^2 = IO^2 + OA^2 = HF^2 + OA^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 21 \Rightarrow x = 6$$

Kẻ hình bình hành BDAJ thì khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD là khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (JAS) và gấp hai lần khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (JAS).

Kẻ $HK \perp JA$ ở K, kẻ HG vuông góc với SK ở G thì HG là khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (JAS). Tam giác AHK vuông cân ở H, AH=3 nên $HK = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Có

$$\frac{1}{HG^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{2}{9} + \frac{1}{\left(\frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{7}{27} \Rightarrow HG = \frac{3\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy khoảng cách cần tính là $\frac{6\sqrt{21}}{7}$.



Câu 108.

Gọi Q là trung điểm CD, ta có $PQ \parallel SC \parallel MN$ nên có $MN \parallel (APQ)$

$$\Rightarrow d(MN, PQ) = d(MN, (APQ)) = d(N, (APQ))$$

$$\text{Vi } \begin{cases} ND \perp HC \\ ND \perp SH \end{cases} \Rightarrow ND \perp (SHC) \Rightarrow ND \perp SC \Rightarrow ND \perp PQ$$

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{ND} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ}) \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}) = \vec{0} \Rightarrow AQ \perp ND$$

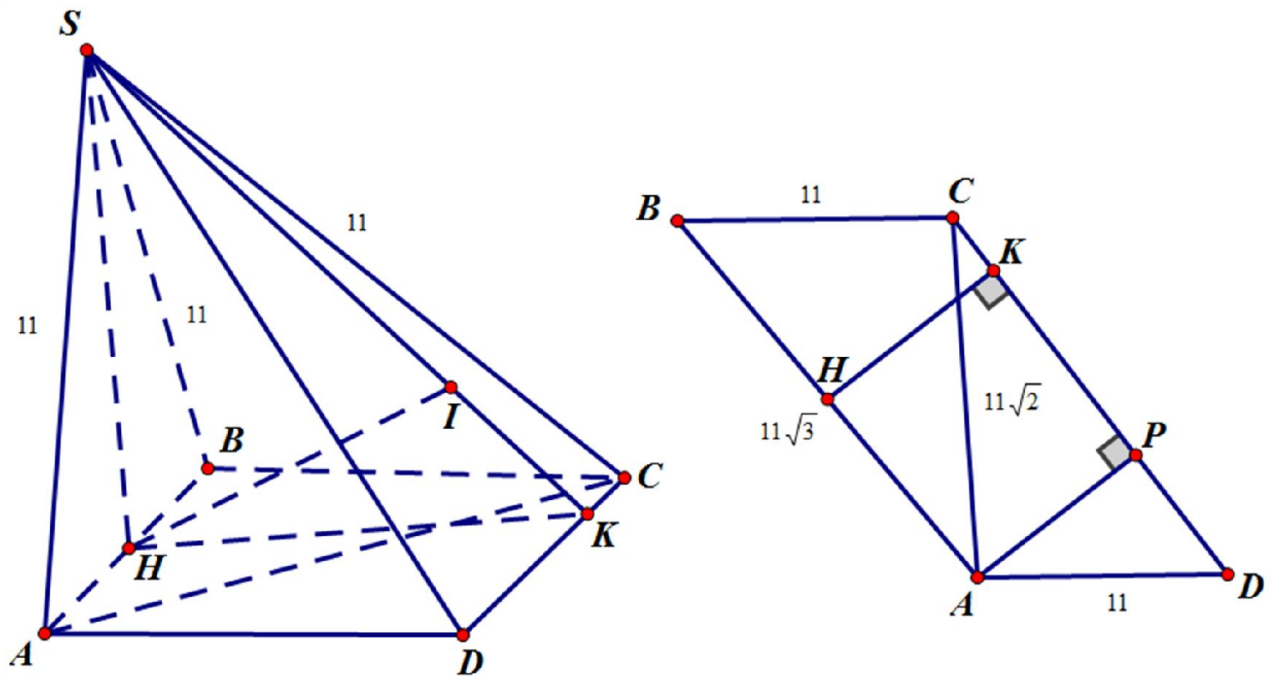
$$\text{Vậy có } \left. \begin{array}{l} ND \perp PQ \\ ND \perp AQ \end{array} \right\} \Rightarrow ND \perp (APQ) \text{ tại } E \Rightarrow d_{(MN, AP)} = NE$$

$$\text{mà có } \frac{1}{DE^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DQ^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow DE = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

$$\text{và } DN = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow EN = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$$

$$\text{Vậy } d(MN, AP) = \frac{3a\sqrt{5}}{10}.$$

Câu 109. Chọn D



Dựa vào định lý cosin ta dễ dàng tính được $AB = 11\sqrt{3}, BC = 11, AC = 11\sqrt{2}$. Khi đó $\triangle ABC$ vuông tại C. Do $SA = SB = SC$, nên hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của AB. Nên $SH \perp (ABCD)$. $SH = SA \cdot \sin \angle SAB = \frac{11}{2}$.

Kẻ $HK \perp CD, AP \perp CD$, tứ giác $APKH$ là hình chữ nhật,

$$HK = AP = \frac{11\sqrt{6}}{3} \left(\frac{1}{AP^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AC^2} \right).$$

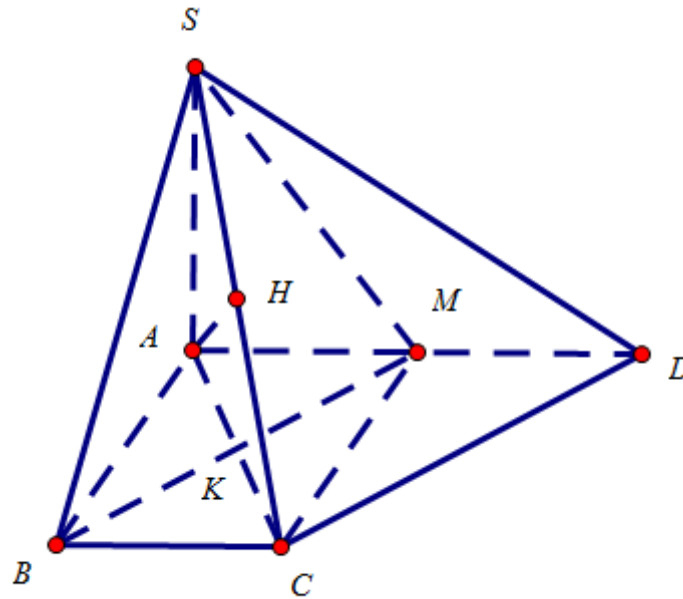
Trong tam giác vuông SHK, kẻ $HI \perp SK$.

Do $AB \parallel CD$ nên $d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HI$.

$$\text{Ta có, } \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \sqrt{22}.$$

$$\text{Vậy } d(AB, SD) = \sqrt{22}.$$

Câu 110. Chọn D



Theo giả thiết $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$; $SA = AC = a\sqrt{2}$.

Gọi M là trung điểm của AD . Ta có: $BM \parallel CD \Rightarrow CD \parallel (SBM)$
 $\Rightarrow d(CD; SB) = d(CD; (SBM)) = d(C; (SBM)) = d(A; (SBM))$.

Theo giả thiết và theo cách dựng ta có $ABCM$ là hình vuông cạnh a .

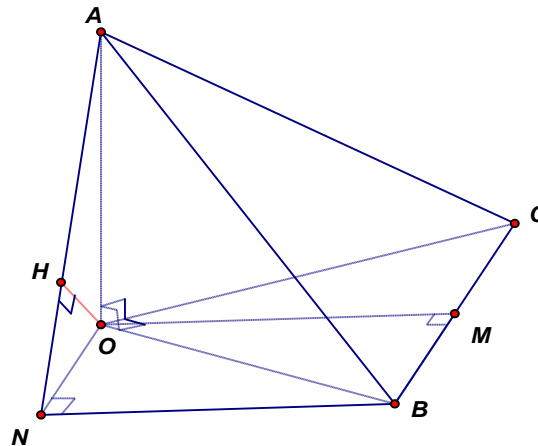
Gọi $K = AC \cap BM \Rightarrow AK \perp BM \Rightarrow BM \perp (SAC)$.

Dựng $AH \perp SB$. Khi đó: $d(A; (SBM)) = AH$

Xét tam giác SAC vuông tại A , đường cao AH có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{2}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Câu 111. Chọn D



Ta có $\triangle OBC$ vuông cân tại O , M là trung điểm của BC
 $\Rightarrow OM \perp BC$

Dựng hình chữ nhật $OMBN$, ta có $\begin{cases} OM \parallel BN \\ BN \subset (ABN) \end{cases} \Rightarrow OM \parallel (ABN)$

$\Rightarrow d(AB, OM) = d(OM, (ABN)) = d(O, (ABN))$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên AN ta có:

$$\text{Xét } \triangle OHC \sim \triangle C'HA' \quad (g - g) \Rightarrow \frac{HC}{A'H} = \frac{OC}{A'C'} = \frac{OC}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{HC}{A'C} = \frac{HC}{A'H + HC} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} \Rightarrow HC = \frac{1}{3} A'C$$

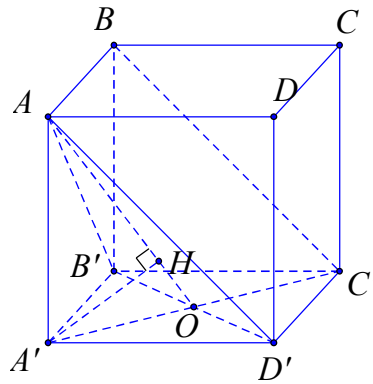
$$\text{Tương tự ta có: } A'K = \frac{1}{3} A'C$$

Vậy Hai mặt phẳng $(AB'D')$ và (BDC') song song với nhau, vuông góc với đoạn $A'C$ và chia $A'C$ thành 3 phần bằng nhau. Do đó khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và (BDC') bằng

$$\frac{A'C}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2:



Ta có $AD' \parallel BC' \Rightarrow BC' \parallel (AB'D')$

$$\Rightarrow d(BC', AB') = d(BC', (AB'D')) = d(C', (AB'D')) = d(A', (AB'D'))$$

Gọi $A'C' \cap B'D' = O$

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} A'O \perp B'D' \\ AA' \perp B'D' \end{array} \right\} \Rightarrow B'D' \perp (AA'O)$$

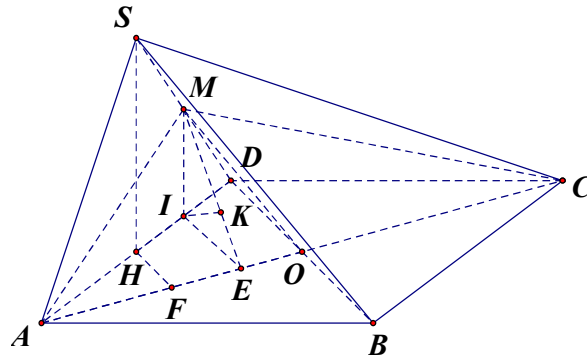
Kẻ $A'H \perp AO$ và ta có $(AA'O) \cap (AB'D') = AO$ nên ta có $A'H \perp AO$

$$\Rightarrow d(A', (AB'D')) = A'H$$

$\triangle AA'O$ vuông tại A' có $A'H$ là đường cao xuất phát từ đỉnh góc vuông nên ta có:

$$\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{A'O^2} \Rightarrow \frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow A'H^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Câu 113. Chọn A



Kẻ $SH \perp AD$ tại H , suy ra $SH \perp (ABCD)$, do $SA = SO \Rightarrow HA = HO$ nên H thuộc trung trực AO . Góc giữa SD và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDH} = 60^\circ$.

Ta có $AO = 2AH \cdot \cos \widehat{HAO} = 2AH \cdot \cos 30^\circ = AH\sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{AO}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow HD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$
 $\Rightarrow SH = 2a$.

Lấy M là trung điểm SD , kẻ $MI \parallel SH (I \in AD)$, kẻ $IE \perp AC, IK \perp ME$

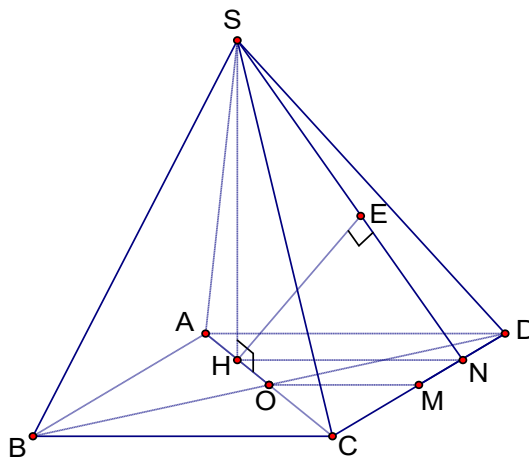
Khi đó $d(AC, SB) = d(B, (MAC)) = d(D, (MAC)) = \frac{3}{2} d(I, (MAC)) = \frac{3}{2} IK$.

Ta có: $MI = \frac{1}{2} SH = a$

$IE = 2HF = 2 \cdot AF \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{IK^2} = \frac{1}{IM^2} + \frac{1}{IE^2} \Rightarrow IK = \frac{a}{2} \Rightarrow d(SB, AC) = \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3a}{4}$.

Câu 114. Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và MD .

$\Rightarrow HN \perp CD \Rightarrow SN \perp CD$ (do HN là hình chiếu của SN lên $(ABCD)$).

Ta có $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ HN \perp CD \\ SN \perp CD \end{cases}$, suy ra góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SNH} = 45^\circ$.

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$ nên $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

$$\text{Mà } \frac{d(H, (SCD))}{d(A, (SCD))} = \frac{CH}{CA} = \frac{3}{4} \Rightarrow d(A, (SCD)) = \frac{4}{3} d(H, (SCD)).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} (SHN) \perp (SCD) \\ (SHN) \cap (SCD) = SN \end{cases}. \text{ Kẻ } HE \perp SN \Rightarrow HE \perp (SCD).$$

$$\text{Suy ra } d(H, (SCD)) = HE.$$

$$\text{Ta có } \frac{HN}{AD} = \frac{CH}{CA} = \frac{3}{4} \Rightarrow HN = \frac{3}{4} AD = \frac{3}{4} \cdot 2a = \frac{3a}{2}$$

$$\text{Do đó } SH = HN = \frac{3a}{2}, \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HN^2} = \frac{4}{9a^2} + \frac{4}{9a^2} = \frac{8}{9a^2} \Rightarrow HE = \frac{3a}{2\sqrt{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(AB, SC) = \frac{4}{3} d(H, (SCD)) = a\sqrt{2}.$$