

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 5x}$.
2. Cho bất phương trình $\sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{8+7x-x^2} \leq m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 8]$.

Câu 2. (5,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{x^2 + x - 5}{\sqrt{x-1} - 1} = \frac{(x+5\sqrt{x-1})(x-1)}{x-2}$.
2. Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có bốn ghế. Xếp ngẫu nhiên 8 học sinh, gồm 4 nam và 4 nữ, ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Tính xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ.

Câu 3. (6,0 điểm)

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi với $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $BC = a$. Biết tam giác SAB đều, tam giác SCD vuông tại C và nằm trong mặt phẳng hợp với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD) theo a .
2. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có các đường cao AD , BE và CF đồng quy tại H . Gọi G là giao điểm BH và DF , L là giao điểm của BC và EF , O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCH , K là trung điểm của BC . Chứng minh H là trực tâm tam giác AKL và LG vuông góc AO .

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho dãy số (x_n) thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_{n+1} = \frac{5x_n + 3\sqrt{x_n^2 + 16}}{4} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

Tìm số hạng tổng quát của (x_n) và tính giới hạn của dãy số $(\sqrt[n]{x_n})$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho ba số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 5$.

Chứng minh rằng $\frac{17}{4} \leq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \leq 1 + 4\sqrt{2}$.

----- HẾT -----

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay)

Câu 1. (5 điểm) Thầy Tâm Nguyễn

1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 5x}$

Lời giải

Hàm số có nghĩa khi: $-x^2 + 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 5]$

$$y' = \frac{-2x+5}{\sqrt{-x^2+5x}}, \text{ cho } y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+5}{\sqrt{-x^2+5x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \in [0; 5]$$

Ta có:
$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(5) = 0 \\ f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \max_{[0;5]} y = \frac{5}{2}.$$

2. Cho bất phương trình $\sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{8+7x-x^2} \leq m$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình có nghiệm đúng với mọi $x \in [-1; 8]$

Lời giải

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{8+7x-x^2} \leq m \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x}$; với điều kiện $-1 \leq x \leq 8$

$$\Rightarrow t' = \frac{7-2x}{2\sqrt{(1+x)(8-x)}(\sqrt{8-x} + \sqrt{1+x})}$$

$$\text{Cho } t' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \Rightarrow t = 3\sqrt{2}$$

$$t(-1) = t(8) = 3$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$\frac{7}{2}$	8	$+\infty$
t'			+	0	-
t			$3\sqrt{2}$		
			3		3

Dựa vào bảng biến thiên

$$\Rightarrow 3 \leq t \leq 3\sqrt{2}$$

$$\text{Khi đó } \stackrel{(1)}{\Rightarrow} m \geq t + \frac{t^2 - 9}{2} \forall t \in [3; 3\sqrt{2}]$$

$$f(t) = t + \frac{t^2 - 9}{2} \Rightarrow f'(t) = t + 1 \geq 0 \forall t \in [3; 3\sqrt{2}]$$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[3; 3\sqrt{2}]$

$$m \geq \max_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t) = f(3\sqrt{2}) = \frac{9 + 6\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 2. (5,0 điểm) Thầy Cao Văn Kiên – Trương Đức Thịnh

$$1) \text{ Giải phương trình } \frac{x^2 + x - 5}{\sqrt{x-1} - 1} = \frac{(x + 5\sqrt{x-1})(x-1)}{x-2}.$$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \frac{x^2 + x - 5}{\sqrt{x-1} - 1} = \frac{(x + 5\sqrt{x-1})(x-1)}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 5}{x-2} = \frac{(x + 5\sqrt{x-1})(x-1)}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} \quad (\text{vì } \sqrt{x-1} + 1 > 0)$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 5 = \frac{(x + 5\sqrt{x-1})(x-1)}{\sqrt{x-1} + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + x - 5}{x-1} = \frac{x + 5\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} + 1} \quad (\text{Do } x=1 \text{ không là nghiệm của phương trình})$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2 + 5(x-2) + 1}{(x-2) + 1} = \frac{(\sqrt{x-1})^2 + 5\sqrt{x-1} + 1}{\sqrt{x-1} + 1} \quad (*)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t^2 + 5t + 1}{t + 1}, t \in (-1; +\infty).$$

$$\text{Có } f'(t) = \frac{t^2 + 2t + 4}{(t+1)^2} = \frac{(t+1)^2 + 3}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in (-1; +\infty).$$

$$\Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } (-1; +\infty).$$

$$(*) \Leftrightarrow f(x-2) = f(\sqrt{x-1}) \Leftrightarrow x-2 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ (x-2)^2 = x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \text{ (Thỏa mãn điều kiện).} \end{cases}$$

$$\text{Kết luận: } S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Bài toán phát triển

$$\text{Giải phương trình } \sqrt{x+1} = \frac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \sqrt{x+1} = \frac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 2 = \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 2 = \frac{(x-3)(x+2)}{\sqrt[3]{2x+1} - 3} = \frac{(\sqrt{x+1} + 2)(\sqrt{x+1} - 2)(x+2)}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(x+2)}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} - 3 = (\sqrt{x+1} - 2)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{x+1}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Hàm số $f(t)$ đồng biến, phương trình trở thành $f(\sqrt[3]{2x+1}) = f(\sqrt{x+1})$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(l) \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}(l) \\ x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}(t/m) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Kết luận: } S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

2) Có hai dãy ghế ngồi đối diện nhau, mỗi dãy có 4 ghế. Xếp ngẫu nhiên 8 học sinh gồm 4 nam và 4 nữ ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Tính xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ.

Lời giải

Ta có không gian mẫu là $n(\Omega) = 8!$

Gọi A là biến cố “Mỗi học sinh nam ngồi đối diện với học sinh nữ”.

Trước hết ta xếp các bạn nam vào một bên, xếp các bạn nữ vào một bên sau đó đổi chỗ các bạn ngồi đối diện, theo quy tắc nhân ta có $n(A) = 4! \cdot 4! \cdot 2^4$

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{4! \cdot 4! \cdot 2^4}{8!} = \frac{8}{35}.$$

Bài tập tương tự :

Câu 1: Có hai dãy ghế ngồi đối diện nhau, mỗi dãy có 4 ghế. Xếp ngẫu nhiên 8 học sinh gồm 4 nam và 4 nữ ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Tính xác suất để ít nhất có một cặp học sinh nam và nữ ngồi đối diện với nhau.

Lời giải

Ta có không gian mẫu là $n(\Omega) = 8!$

Gọi A là biến cố “ít nhất có một cặp học sinh nam và nữ ngồi đối diện với nhau”.

Suy ra $\overline{A}$ là biến cố “không có một cặp học sinh nam và nữ ngồi đối diện với nhau”.
tức là nam ngồi đối diện nhau và nữ ngồi đối diện nhau.

Trước hết ta chọn 2 trong 4 cặp ghế để xếp các học sinh nam sau đó xếp các bạn nữ vào 4 ghế còn lại, theo quy tắc nhân ta có $n(A) = C_4^2 \cdot 4! \cdot 4!$

$$\text{Do đó } P(\overline{A}) = \frac{C_4^2 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} = \frac{3}{35} \Rightarrow P(A) = \frac{32}{35}$$

Câu 2: Trong cuộc gặp mặt dặn dò trước khi lên đường tham gia kì thi HSG có 10 bạn trong đội tuyển gồm 2 bạn đến từ lớp 12A1, 3 bạn từ 12A2, 5 bạn còn lại đến từ các lớp khác nhau. Thầy giáo xếp ngẫu nhiên các bạn kể trên ngồi vào một bàn dài mà mỗi bên có 5 ghế xếp đối diện nhau. Tính xác suất sao cho không có học sinh nào cùng lớp ngồi đối diện nhau.

A. $\frac{73}{126}$.

B. $\frac{38}{63}$.

C. $\frac{5}{9}$.

D. $\frac{53}{126}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có không gian mẫu là $n(\Omega) = 10!$

Gọi A là biến cố “không có học sinh nào cùng lớp ngồi đối diện nhau”

$\overline{A}$ là biến cố “có học sinh nào cùng lớp ngồi đối diện nhau”

A_1 là biến cố “học sinh A_1 ngồi đối diện nhau”; A_2 là biến cố “học sinh A_1 ngồi đối diện nhau”.

$$\text{Khi đó } n(\overline{A}) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_1 \cap A_2).$$

Xét biến cố A_1 : Trước hết chọn 1 trong 5 cặp ghế để xếp 2 hs A_1 ngồi, đổi chỗ 2 bạn này có 2! cách., 8 người còn lại có 8!. Theo quy tắc nhân có $n(A_1) = C_5^1 \cdot 2! \cdot 8!$

Tương tự $n(A_2) = C_5^1 \cdot A_3^2 \cdot 8!$; $n(A_1 \cap A_2) = A_5^2 \cdot 2! \cdot A_3^2 \cdot 6!$ thay vào ta được

$$P(\overline{A}) = \frac{25}{63} \Rightarrow P(A) = \frac{38}{63}.$$

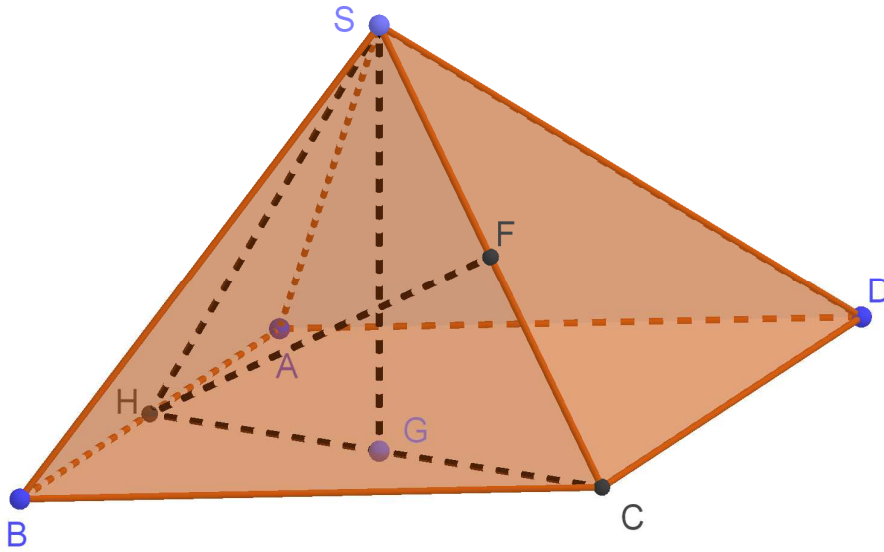
Câu 3. (6,0 điểm) Thầy Lục Minh Tân

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi với $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $BC = a$. Biết tam giác SAB đều, tam giác SCD vuông tại C và nằm trong mặt phẳng hợp với mặt phẳng đáy một góc 60° .

Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD) theo a

Lời giải

Gọi H, F lần lượt là trung điểm của AB, SC . Kẻ $SG \perp HC (G \in HC)$



Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} AB \perp SC \quad (AB \parallel DC, DC \perp SC) \\ AB \perp CH \end{array} \right. \Rightarrow AB \perp (SHC) \\ \begin{array}{l} \Rightarrow (ABCD) \perp (SHC) \\ (ABCD) \cap (SHC) = HC \\ SG \perp CH \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow SG \perp (ABCD)$$

Hay SG là đường cao hình chóp

$$* \text{ Ta có: } ((SCD), (ABCD)) = (HC, SC) = \widehat{SCG} = 60^\circ$$

$SH = HC \Rightarrow \triangle SHC$ cân tại H và $\widehat{SCH} = 60^\circ$ nên $\triangle SCH$ đều.

$$\Rightarrow G \text{ là trung điểm của } CH \text{ và } SG = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$$

$$* V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot 2 \left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \right) \cdot \frac{3a}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$

$$* V_{S.ABD} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$$

$$\text{Ta có: } SD = \sqrt{SC^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Chu vi } \triangle SAD \text{ là } p = \frac{SA + AD + SD}{2} = \frac{a + a + \frac{a\sqrt{7}}{2}}{2}$$

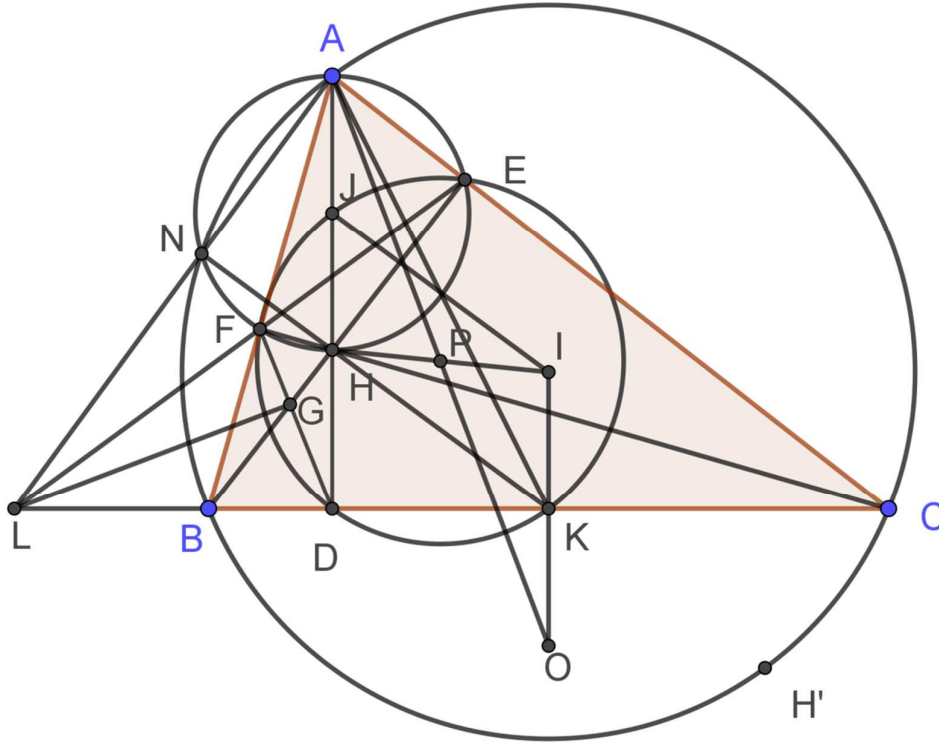
$$\text{Diện tích } \triangle SAD \text{ là } S = \sqrt{p(p-SA)(p-SD)(p-AD)} = \frac{3a^2\sqrt{7}}{16}$$

Khoảng cách từ B đến SAD là:

$$V_{B.SAD} = \frac{1}{3} d(B, (SAD)) \cdot S_{SAD} \Rightarrow d(B, (SAD)) = \frac{3V}{S_{SAD}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{16}}{\frac{3a^2 \sqrt{7}}{16}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

2. Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Gọi G là giao điểm của BH và DF , I là giao điểm của BC và FE ; O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCH ; K là trung điểm của BC . Chứng minh H là trực tâm của tam giác AKL và LG vuông góc với AO .

Lời giải



* Gọi J là trung điểm của AH và I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

Ta có: $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} \Rightarrow AFHE$ nội tiếp đường tròn tâm J , với J là trung điểm của AH .

$\Rightarrow HN \perp AN$ (1)

* Gọi N là giao điểm của đường tròn (J, JA) và đường thẳng AL ($N \neq A$)

Ta có: $LN \cdot LA = LF \cdot LE$

Mặt khác: $BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm $K \Rightarrow LB \cdot LC = LF \cdot LE$

$\Rightarrow LN \cdot LA = LB \cdot LC \Rightarrow A, N, B, C$ nội tiếp đường tròn tâm I

* Đường tròn (J, JA) và (I, IA) có trục đẳng phương là $AN \Rightarrow JI \perp AN$

Mà $JI \parallel HK \Rightarrow HK \perp AN$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow N, H, K$ thẳng hàng và $KN \perp AN$

* Xét $\triangle AKL$ có AD, KN lần lượt là đường cao và đồng quy tại H

$\Rightarrow H$ là trực tâm của AKL

b. Gọi P là tâm của đường tròn Ôle của tam giác ABC

$\Rightarrow I \in AO$

$$* LB.LC = LE.LF \Rightarrow P_{L(P)} = P_{L(O)}$$

$$GD.GF = GH.GB \Rightarrow P_{G(P)} = P_{G(O)}$$

$$\Rightarrow LG \perp OI \Rightarrow LG \perp AO$$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho dãy số (x_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ x_{n+1} = \frac{5x_n + 3\sqrt{x_n^2 + 16}}{4} \quad (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1). \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát của (x_n) và tìm giới hạn dãy số $(\sqrt[n]{x_n})$.

Cách 1: Cô Nguyễn Thị Hồng Gấm

Từ giả thiết ta tính được $x_1 = 3 = \frac{2^2 - 1}{2^0} = 2^2 - \frac{1}{2^0}$; $x_2 = \frac{15}{2} = \frac{2^4 - 1}{2} = 2^3 - \frac{1}{2}$;

$x_3 = \frac{63}{4} = \frac{2^6 - 1}{2^2} = 2^4 - \frac{1}{2^2}$, do vậy ta dự đoán $x_n = 2^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}}$ (1), $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$.

Ta sẽ chứng minh công thức (1) đúng bằng qui nạp.

Hiển nhiên (1) đúng với $n = 1, n = 2, n = 3$.

Giả sử (1) đúng với $n = k$ ($k \geq 1, k \in \mathbb{N}$) tức là ta có $x_k = 2^{k+1} - \frac{1}{2^{k-1}}$

Xét

$$x_{k+1} = \frac{5x_k + 3\sqrt{x_k^2 + 16}}{4} = \frac{5\left(2^{k+1} - \frac{1}{2^{k-1}}\right) + 3\sqrt{\left(2^{k+1} - \frac{1}{2^{k-1}}\right)^2 + 16}}{4} = \frac{5\left(2^{k+1} - \frac{1}{2^{k-1}}\right) + 3\sqrt{\left(2^{k+1} + \frac{1}{2^{k-1}}\right)^2}}{4}$$

$$= \frac{8 \cdot 2^{k+1} - \frac{2}{2^{k-1}}}{4} = 2^{k+1+1} - \frac{1}{2^{k+1-1}}. \text{ Vậy (1) cũng đúng với } n = k+1.$$

Theo giả thiết quy nạp ta được (1) đúng $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.

Khi đó ta có $2 < \sqrt[n]{x_n} < 2 \cdot 2^{\frac{1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ đồng thời $\lim 2 \cdot 2^{\frac{1}{n}} = 2$ nên theo nguyên lý kẹp ta có $\lim(\sqrt[n]{x_n}) = 2$.

Cách 2: Thầy Ngô Thanh Tòng

Ta có $x_{n+1} = \frac{5x_n + 3\sqrt{x_n^2 + 16}}{4} \Leftrightarrow (4x_{n+1} - 5x_n)^2 = 9(x_n^2 + 16) \Leftrightarrow 2x_{n+1}^2 - 5x_{n+1}x_n + 2x_n^2 = 18.$

Vậy $\begin{cases} 2x_{n+1}^2 - 5x_{n+1}x_n + 2x_n^2 - 18 = 0 \\ 2x_{n+2}^2 - 5x_{n+2}x_{n+1} + 2x_{n+1}^2 - 18 = 0 \end{cases}, \forall n \geq 1$ nên x_{n+2}, x_n là hai nghiệm của phương trình $2x^2 - 5x_{n+1}x + 2x_{n+1}^2 - 18 = 0.$

Theo Vi-et ta có $x_{n+2} + x_n = \frac{5x_{n+1}}{2} \Leftrightarrow 2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = 0$

$\Leftrightarrow x_{n+2} - 2x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_{n+1} - 2x_n) = \dots = \frac{1}{2^n}(x_2 - 2x_1) = \frac{3}{2^{n+1}}, \forall n \geq 1.$

(ý tưởng sử lí: $2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = 0 \Leftrightarrow x_{n+2} + ax_{n+1} = \frac{-1}{2a}(x_{n+1} + ax_n)$)

Do đó $x_{n+1} - 2x_n = \frac{3}{2^n} \Leftrightarrow x_{n+1} + \frac{1}{2^n} = 2\left(x_n + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \dots = 2^{n-1}\left(x_2 + \frac{1}{2}\right) = 2^{n+2}.$

(ý tưởng sử lí: $x_{n+1} - 2x_n = \frac{3}{2^n} \Leftrightarrow x_{n+1} + \frac{a}{2^{n+1}} = 2\left(x_n + \frac{a}{2^n}\right)$)

Vậy $x_n = 2^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}}, \forall n \geq 1.$

*) Tìm giới hạn dãy số $\left(\sqrt[n]{x_n}\right).$

Ta có $\sqrt[n]{x_n} = \sqrt[n]{2^{n+1} - \frac{1}{2^{n-1}}}$ nên dễ thấy $\sqrt[n]{2^n} < \sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{2^{n+1}}$, hay $2 < \sqrt[n]{x_n} < 2.2^{\frac{1}{n}}$. Mà $\lim 2^{\frac{1}{n}} = 2$ nên theo định lý kẹp thì $\lim \sqrt[n]{x_n} = 2.$

Cách 3: Thầy Aki Le

Từ hệ thức truy hồi, ta suy ra dãy số dương, dãy tăng. Hơn nữa, với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$(4x_{n+1} - 5x_n)^2 = 9(x_n^2 + 16) \Leftrightarrow x_{n+1}^2 - \frac{5}{2}x_{n+1}x_n + x_n^2 = 9$$

Do đó,

$$\begin{cases} x_{n+1}^2 + x_n^2 = 9 + \frac{5}{2}x_{n+1}x_n \\ x_{n+2}^2 + x_{n+1}^2 = 9 + \frac{5}{2}x_{n+2}x_{n+1} \end{cases} \Rightarrow x_{n+2}^2 - x_n^2 = \frac{5}{2}x_{n+1}(x_{n+2} - x_n) \Rightarrow x_{n+2} + x_n = \frac{5}{2}x_{n+1}.$$

Vì thế, dãy truy hồi cấp một “phi tuyến” trên chính là dãy truy hồi tuyến tính cấp hai:

$$\begin{cases} x_1 = 3, x_2 = \frac{15}{2}, \\ x_{n+2} - \frac{5}{2}x_{n+1} + x_n = 0, \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Dãy truy hồi được viết lại

Vì phương trình đặc trưng $\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1 = 0$ có hai nghiệm $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ và $\lambda_2 = 2$ nên

$$x_n = \frac{a}{2^n} + b \cdot 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do $x_1 = 3, x_2 = \frac{15}{2}$ nên $x_n = -\frac{1}{2^{n-1}} + 2^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

Suy ra

$$2 < \sqrt[n]{x_n} < 2 \cdot 2^{1/n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Và $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot 2^{1/n} = 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2$. Vì thế, theo định lý kẹp, dãy $(\sqrt[n]{x_n})$ hội tụ về 2.

Bình luận.

- Dãy truy hồi tuyến (x_n) :
$$\begin{cases} x_1 = 3, x_2 = \frac{15}{2}, \\ x_{n+2} - \frac{5}{2}x_{n+1} + x_n = 0, \forall n \geq 1, \end{cases}$$
 có thể giải nhờ vào cấp số

nhân (ý tưởng của thầy **Ngô Thanh Tòng**). Ta có

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_{n+1} - 2x_n), \forall n \geq 1. \text{ Do đó}$$

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} = \frac{1}{2^n} \cdot (x_2 - 2x_1) = \frac{3}{2^{n+1}}, \forall n \geq 0.$$

Từ $x_{n+1} - 2x_n = \frac{3}{2^n}, \forall n \geq 1$, ta thu được

$$x_{n+1} + \frac{1}{2^n} = 2 \cdot \left(x_n + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 2^{n-1} \left(x_2 + \frac{1}{2} \right) = 2^{n+2}, \forall n \geq 1.$$

Vì thế, $x_n = -\frac{1}{2^n} + 2^{n+1}.$

- Ngoài ra, việc tìm công thức tổng quát của dãy (x_n) có thể tiếp cận theo 3 cách khác: (i) dự đoán quy luật số hạng tổng quát của dãy rồi dùng phương pháp qui nạp của cô **Nguyễn Thị Hồng Gấm**; (ii) Sử dụng dãy số phụ thông qua

ý tưởng “thoát căn” của thầy **SongMinh Nguyễn**: $x_n = 2 \left(a_n - \frac{1}{a_n} \right)$; (iii) sử dụng

hàm sinhhyperbolic (một hình thức khác của cách ii)), xét $\alpha_1 : \sinh(\alpha_1) = \frac{3}{4}$. Khi

đó, $u_n = \sinh(\alpha_n)$ với $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha, n \geq 1$. (Hàm $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.)

Câu 5. (2,0 điểm) Cho ba số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 5$.

Chứng minh rằng $\frac{17}{4} \leq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \leq 1 + 4\sqrt{2}$.

Lời giải

Cách 1: Thầy Nguyễn Bá Trình

Đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$. Ta có $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \\ x + y + z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ yz = \frac{1}{x} \\ y + z = 5 - x \end{cases}$

Suy ra $0 < x < 5$ và $(y + z)^2 \geq 4yz \Leftrightarrow (5 - x)^2 \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^3 - 10x^2 + 25x - 4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(x^2 - 6x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 4 \\ x > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 4$$

Khi đó $P = \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = xy + yz + zx = x(5 - x) + \frac{1}{x} = -x^2 + 5x + \frac{1}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = -x^2 + 5x + \frac{1}{x}$ trên đoạn $[3 - 2\sqrt{2}; 4]$.

$$f'(x) = \frac{-2x^3 + 5x^2 - 1}{x^2} = \frac{(2x - 1)(-x^2 + 2x + 1)}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} < 0 \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$3-2\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$1+\sqrt{2}$	4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$1+4\sqrt{2}$		$1+4\sqrt{2}$		
		$\frac{17}{4}$		$\frac{17}{4}$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\frac{17}{4} \leq P \leq 1 + 4\sqrt{2}$.

Cách 2 : Thầy Đào Văn Tiến

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 5$.

Chứng minh rằng $\frac{17}{4} \leq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \leq 1 + 4\sqrt{2}$.

Lời giải

Đặt $x = \frac{a}{b}; y = \frac{b}{c}; z = \frac{c}{a}$ với $x, y, z > 0$.

Ta có $\begin{cases} xyz = 1 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$.

Vì

$$x + y + z = 5 \Rightarrow x < 5, xyz = 1 \Rightarrow 1 = xyz \leq x \left(\frac{y+z}{2} \right)^2 \Rightarrow 1 \leq x \left(\frac{5-x}{2} \right)^2 \Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{2} \leq x \leq 4.$$

Khi đó $P = \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} = xy + yz + zx$. Vậy theo định lý Viet ta có x, y, z là nghiệm dương

của phương trình $t^3 - 5t^2 + Pt - 1 = 0 \Leftrightarrow P = -t^2 + 5t + \frac{1}{t}$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 5t + \frac{1}{t}, t \in [3 - 2\sqrt{2}; 4]$. ta có

$$f'(t) = -2t + 5 - \frac{1}{t^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow -2t + 5 - \frac{1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = 1 + \sqrt{2} \\ t = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

BBT:

t	$3 - 2\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$1 + \sqrt{2}$	4
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0
$f(t)$	$1 + 4\sqrt{2}$	$\frac{17}{4}$	$1 + 4\sqrt{2}$	$\frac{17}{4}$

Quan sát bảng biến thiên ta thấy để có ba nghiệm dương thì $\frac{17}{4} \leq P \leq 1 + 4\sqrt{2}$.