

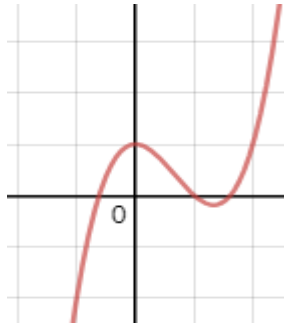
BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM VÀ NHẬN DẠNG ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ CÓ TRỊ TUYỆT ĐỐI.

BIÊN SOẠN: PHẠM NGỌC TÍNH – NHÓM CASIOTUDUY.
LUYỆN THI THPT QUỐC GIA TP.TUY HÒA – 01698160150.

I. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$.

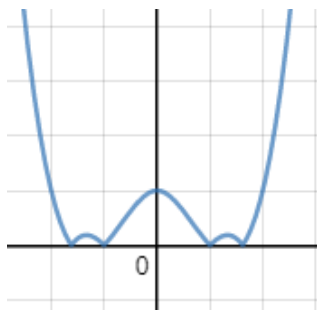
Ta quan sát các hình dạng sau đây và rút ra quy luật.

$$y = x^3 - 2x^2 + 1.$$



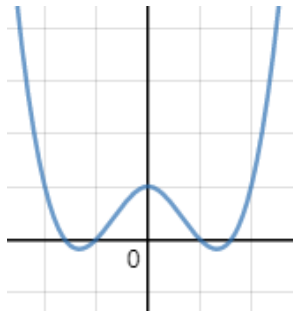
(hình 1)

$$y = |x^3 - 2x^2 + 1|.$$



(hình 4)

$$y = |x|^3 - 2|x|^2 + 1 = |x^3| - 2|x^2| + 1.$$



(hình 2)

$$y = |x^3 - 2x^2 + 1|$$



(hình 3)

Cách đọc:

- Đối với hàm $y = |f(x)|$: lấy đối xứng phần đồ thị dưới trục hoành lên phía trên trục hoành.
- Đối với hàm $y = f(|x|)$: bỏ hết phần đồ thị bên trái trục tung, lấy đối xứng phần đồ thị bên phải trục tung qua trục tung. Đối với loại này, các kí hiệu: $\begin{cases} |x^2| = |x|^2 \\ |x^3| = |x|^3 \end{cases}$ là như nhau.
- Đối với hàm $y = |f(|x|)|$ ta vẽ hàm $y = f(|x|)$ (h2) trước hoặc như hình 3 trước, sau đó mới vẽ đồ thị hàm $y = |f(|x|)|$. Kết quả như hình 4.

Các hình dáng còn lại thao tác tương tự như trên.

Ngoài ra, ta còn có các hàm dạng $h(x) = |g(x)| \cdot f(x)$. Trong chương trình học và thi hiện tại, chúng ta

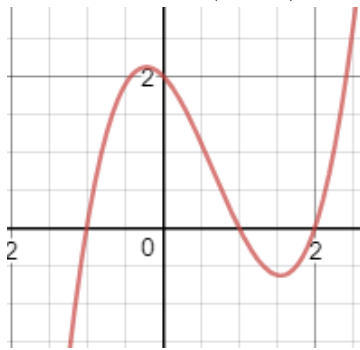
chỉ xét đối với hàm $\begin{cases} g(x) = ax + b \\ f(x) = cx^2 + dx + e, (c \neq 0) \end{cases}$.

Khi đó $h(x) = |g(x)| \cdot f(x)$ là hàm số bậc ba. Muốn vẽ đồ thị hàm số $h(x)$ ta phải xét hai trường hợp khi bỏ dấu tuyệt đối của $|g(x)|$

Ta quan sát các ví dụ dưới đây.

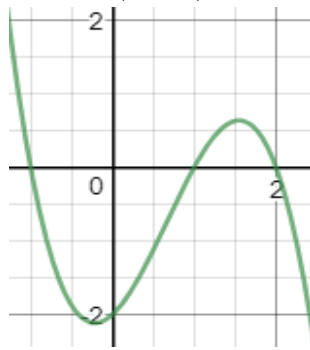
Ví dụ 1. (Đề minh họa lần 3 Bộ GD-ĐT)

$$y = (x-2)(x^2-1)$$



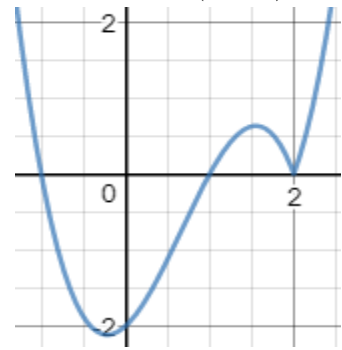
(hình 1)

$$y = -(x-2)(x^2-1)$$



(hình 2)

$$y = |x-2|(x^2-1)$$



(hình 3)

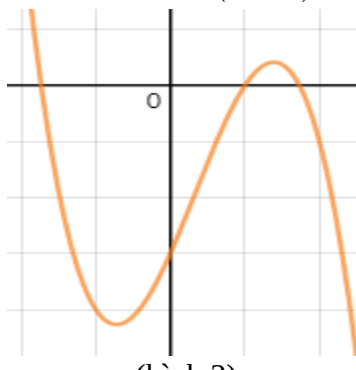
Ví dụ 2. Ta tiếp tục quan sát đồ thị hàm số sau:

$$y = (x-1)(x^2-3)$$



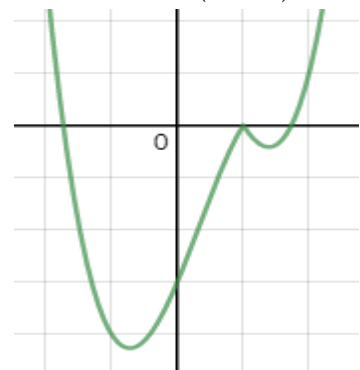
(hình 1)

$$y = -(x-1)(x^2-3)$$



(hình 2)

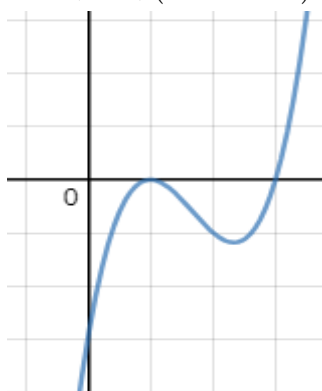
$$y = |x-1|(x^2-3)$$



(hình 3)

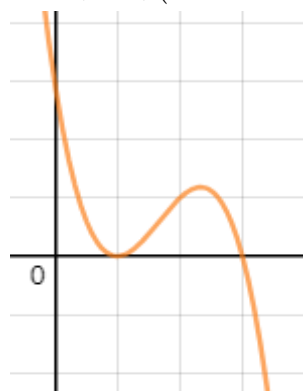
Ví dụ 3. Ta tiếp tục quan sát hàm số sau:

$$y = (x-1)(x^2-4x+3)$$



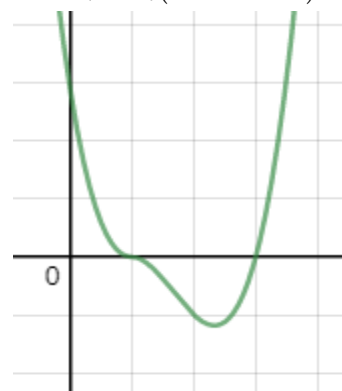
(hình 1)

$$y = -(x-1)(x^2-4x+3)$$



(hình 2)

$$y = |x-1|(x^2-4x+3)$$



(hình 3)

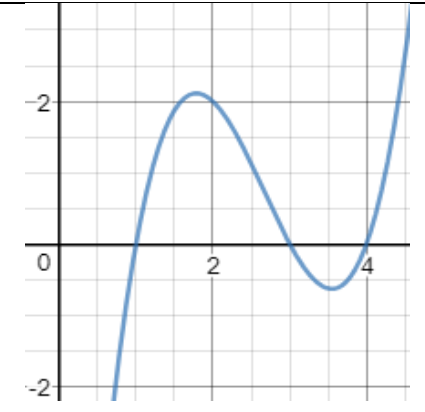
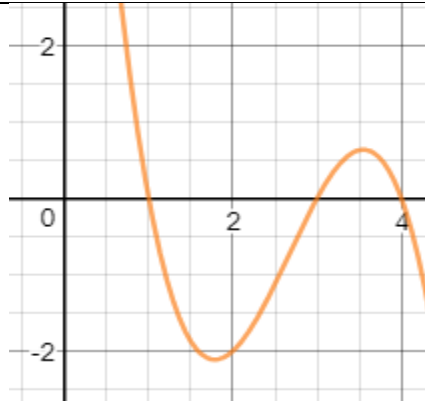
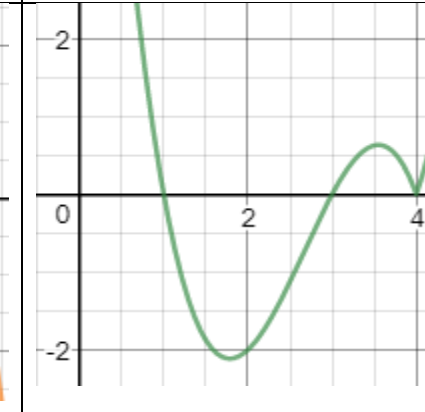
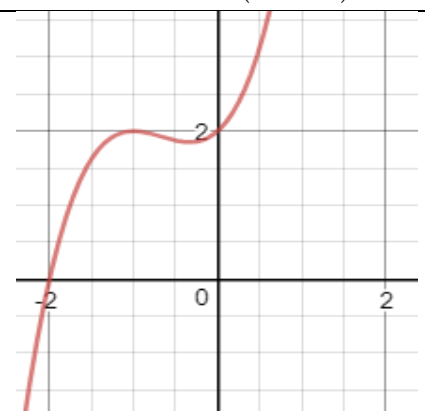
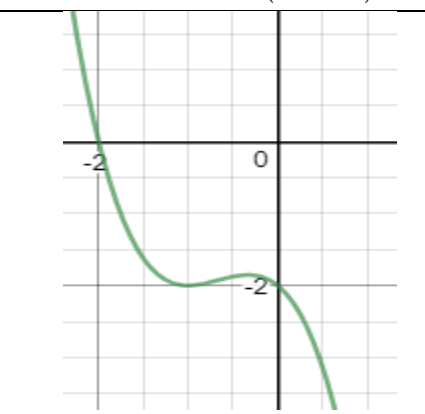
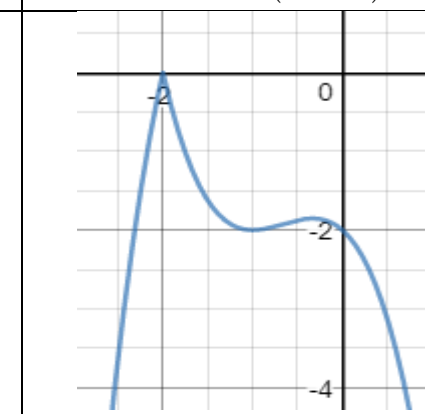
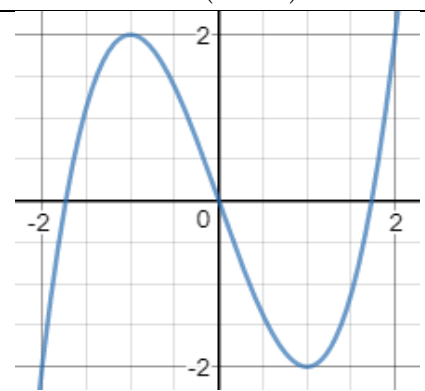
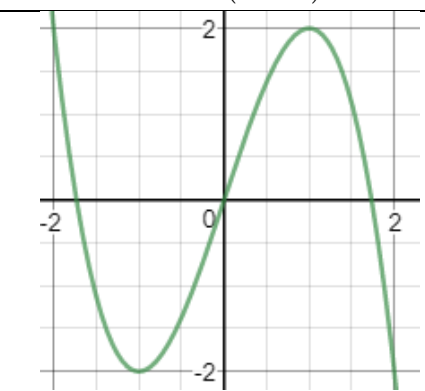
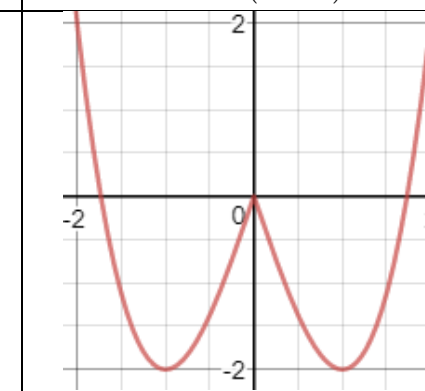
Ta xét các ví dụ trên. Bây giờ bắt đầu phân tích và tìm ra tính chất của nó.

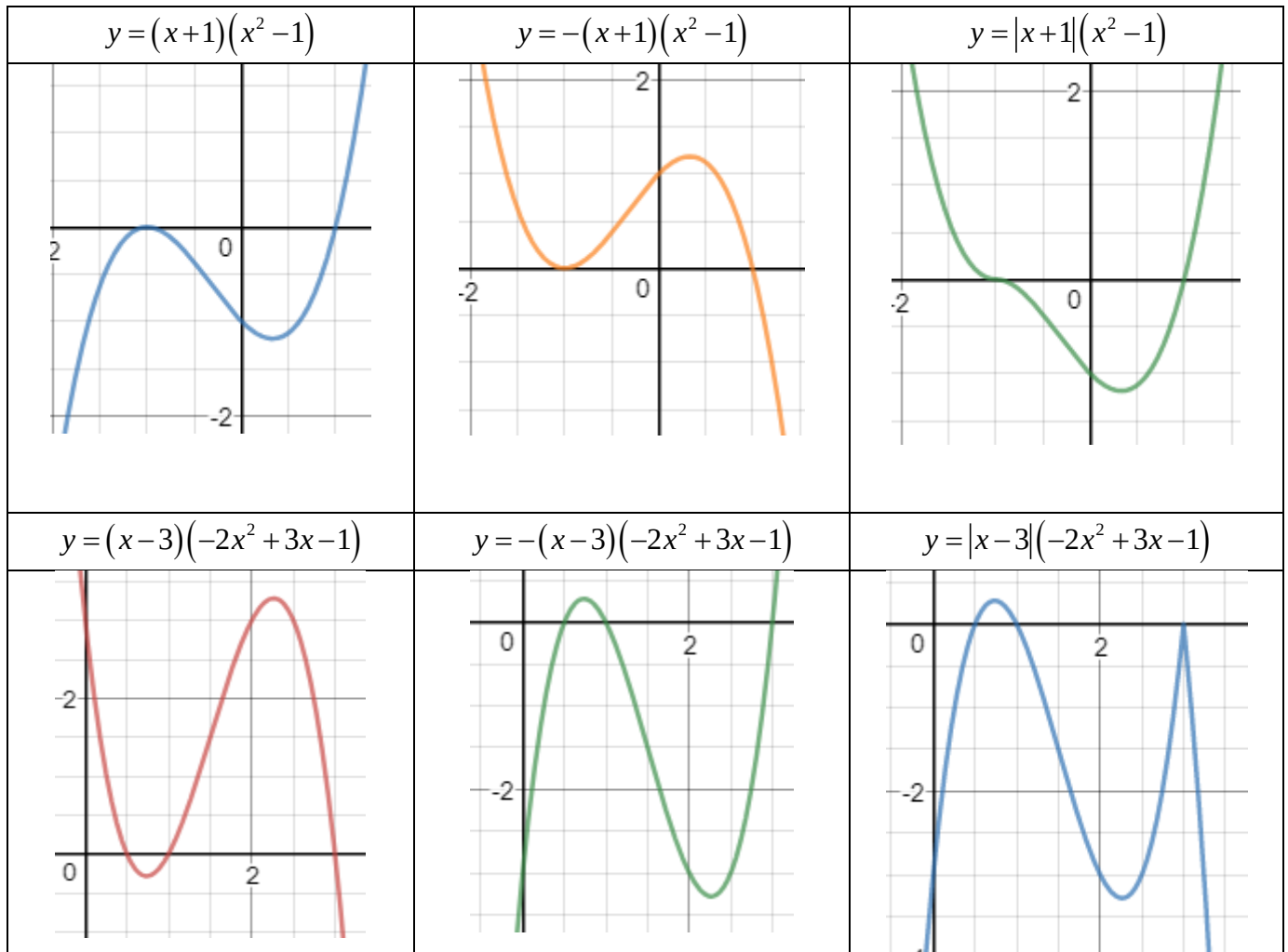
- Ở cả 3 ví dụ trên, các hình 2 đều lấy ngược lại so với đồ thị ở hình 1. Và điều giống nhau nữa là ở hình 3, đồ thị giống hình 2 từ trái sang phải, trừ đoạn đồ thị cong sang phải ra. Và đây cũng là vấn đề mà ta cần quan tâm là cong lên phía trên hay xuống phía dưới.

- Ở ví dụ 1 và ví dụ 2. Ta thấy có dạng $y = |x - \alpha|(x^2 - \beta)$ (chỉ nói riêng cho ví dụ 1 và 2).
 - + Ở ví dụ 1 có $\alpha > \beta$, khi đó ta giữ nguyên phần cong đồ thị như ở hình 2 và lấy nhánh còn lại lên phía trên.
 - + Ở ví dụ 2 có $\alpha < \beta$, khi đó ta lấy đối xứng phần cong đồ thị ở hình 2 xuống phía dưới và lấy nhánh còn lại lên phía trên.

(Ví dụ 3 và vấn đề giải thích tổng quát sẽ được giảng ở lớp off)

Ta làm các bài tập mẫu sau:

$y = (x-4)(x^2 - 4x + 3)$ 	$y = -(x-4)(x^2 - 4x + 3)$ 	$y = x-4 (x^2 - 4x + 3)$ 
$y = (-x-2)(-x^2 - 1)$ 	$y = -(-x-2)(-x^2 - 1)$ 	$y = -x-2 (-x^2 - 1)$ 
$y = x(x^2 - 3)$ 	$y = -x(x^2 - 3)$ 	$y = x (x^2 - 3)$ 

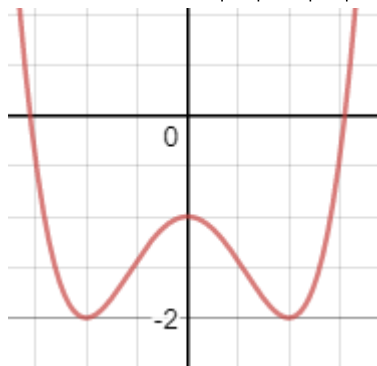


II. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$.

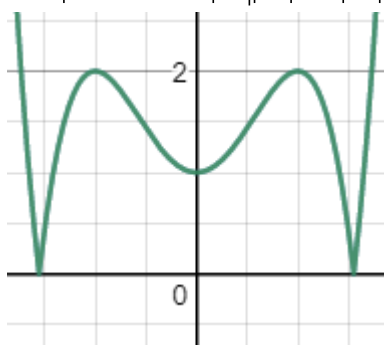
Vì hàm số ta học là hàm số trùng phương nên ta cũng có $\begin{cases} |x^4| = |x|^4 \\ |x^2| = |x|^2 \end{cases}$.

Ta quan sát ví dụ sau đây.

$$y = x^4 - 2x^2 - 1 = |x^4| - 2|x^2| - 1$$



$$y = |x^4 - 2x^2 - 1| = ||x^4| - 2|x^2| - 1|$$

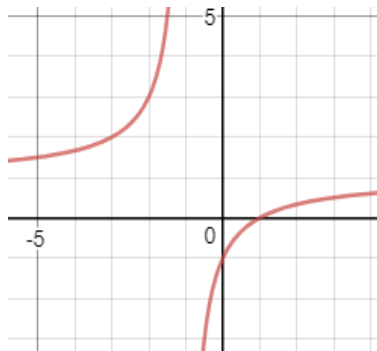


Về vấn đề hàm bậc 4 trùng phương ta sẽ không đề cập đến nhiều mà chỉ nhớ dạng cơ bản như bên.

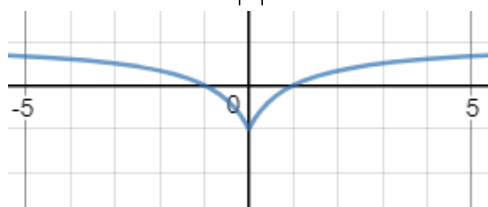
III. Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$).

Ta cũng quan sát các ví dụ sau đây.

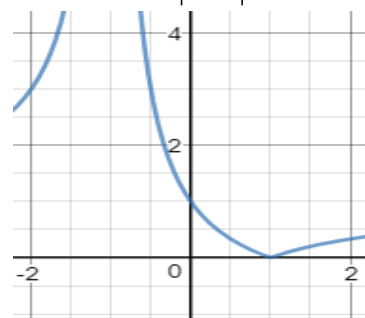
$$y = \frac{x-1}{x+1}.$$



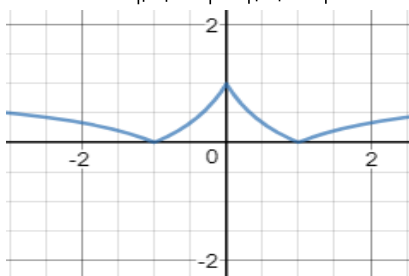
$$y = \frac{|x|-1}{|x|+1}.$$



$$y = \frac{|x-1|}{|x+1|}.$$

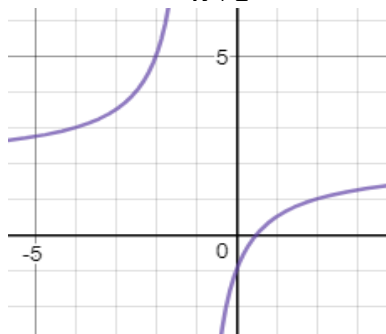


$$y = \frac{||x|-1|}{||x|+1|} = \frac{|x|-1}{|x|+1}.$$

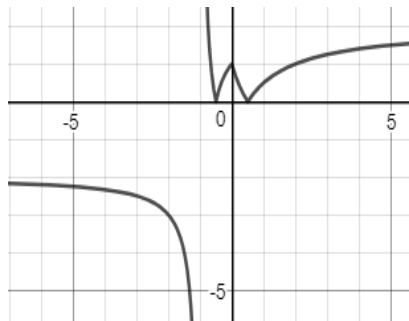


Ngoài ra, ta cũng cần để ý đến điều kiện $a \neq 1$. Ví dụ hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

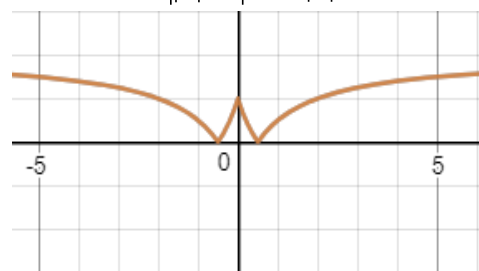
$$y = \frac{2x-1}{x+1}.$$



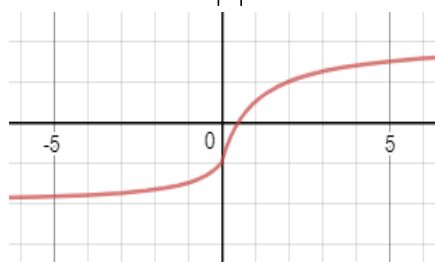
$$y = \frac{|2|x|-1|}{|x|+1}$$



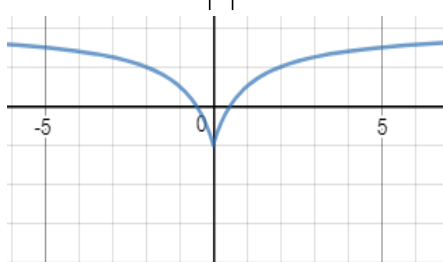
$$y = \frac{|2|x|-1|}{||x|+1|} = \frac{|2|x|-1|}{|x|+1}$$



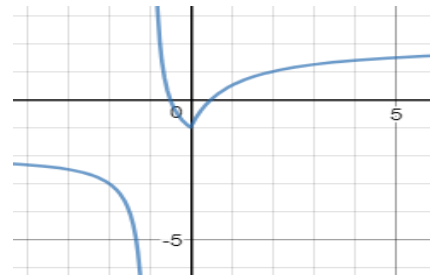
$$y = \frac{2x-1}{|x|+1}.$$



$$y = \frac{2|x|-1}{|x|+1}.$$



$$y = \frac{2|x|-1}{x+1}.$$



MỘT SỐ TÍNH CHẤT ĐẶC BIỆT CẦN LƯU Ý.

I. VỀ ĐIỂM UỐN CỦA HÀM SỐ BẬC 3.

Tính lồi lõm của đồ thị.

Đạo hàm bậc hai: $y'' = 6ax_0 + 2b = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{3a}$. Như vậy ta có hoành tọa độ điểm uốn của đồ

thị hàm số $U\left(-\frac{b}{3a}; \frac{y_{CD} + y_{CT}}{2}\right)$ hoặc $U\left(-\frac{b}{3a}; f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$.

Từ các dạng của đồ thị hàm bậc 3, ta có các nhận xét đáng nhớ sau:

- + Đồ thị hàm bậc 3 cắt trục hoành *ít nhất tại một điểm phân biệt*.
- + Đồ thị *cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt* chỉ khi nó có cực đại và cực tiểu ở hai phía trục Ox hay nói cách khác chúng trái dấu nhau.
- + Đồ thị cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt cách đều nhau chỉ khi *điểm uốn nằm trên trục hoành* và có *giá trị cực đại và giá trị cực tiểu trái dấu nhau*.
- + Nói chung hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, hệ số góc tiếp tuyến tại điểm uốn sẽ *nhỏ nhất nếu $a > 0$ và lớn nhất nếu $a < 0$* .

Bài toán đặc biệt với hàm bậc 3: "Tìm điều kiện của tham số để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt tạo thành cấp số cộng"

Ta có 3 cách giải như sau.

♦ **Cách 1:** Thực hiện các bước sau:

Bước 1: Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

Bước 2: Để đồ thị hàm số cắt Ox tại ba điểm phân biệt với hoành độ lập thành cấp số cộng thì phương trình (1) có ba nghiệm lần lượt là

$$x_0 - \alpha, \quad x_0, \quad x_0 + \alpha.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a[x - (x_0 - \alpha)] \cdot (x - x_0) [x - (x_0 + \alpha)] \\ &= (x - x_0) [(x - x_0)^2 - \alpha^2] \\ &= ax^3 - 3ax_0x^2 + a(3x_0^2 - \alpha^2)x - a.x_0^3 + a.\alpha^2.x_0 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{cases} b = -3ax_0 \\ c = a(3x_0^2 - \alpha^2) \\ d = -a.x_0^3 + a.\alpha^2.x_0 \end{cases} \Rightarrow x_0, \quad \alpha \text{ và tham số.}$$

- ♦ **Cách 2:** Sử dụng kết quả của định lý: "Nếu đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ cắt trục hoành tại 3 điểm cách đều nhau thì điểm uốn nằm trên trục hoành"

Đi chứng minh định lý sẽ cho ta công thức giải rất nhanh. Ta quan sát bài chứng minh.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox :

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1).$$

- + Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm A, B, C cách đều nhau khi và chỉ khi (1) có ba nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3$ thỏa mãn:

$$\frac{x_1 + x_3}{2} = x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_3 = 2x_2 \quad (2)$$

- + Theo định lý Vi-ét ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có:

$$x_2 = -\frac{a}{3} \text{ và } f(x_2) = 0 \Leftrightarrow f\left(-\frac{a}{3}\right) = 0$$

Ta có: $y' = 3x^2 + 2ax \Rightarrow y'' = 6x + 2a = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{3}$.

Đó là hoành độ điểm uốn U của đồ thị hàm số, mà $f\left(-\frac{a}{3}\right) = 0$ nên $U \in Ox$.

Vậy ta có công thức nhớ nhanh là $f\left(-\frac{a}{3}\right) = 0$.

- ♦ **Cách 3:** Sử dụng định lý Vi-ét và thực hiện theo các bước sau.

Bước 1: Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

Bước 2: Điều kiện cần

- + Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3$. Khi đó:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

- + Để phương trình có ba nghiệm phân biệt với hoành độ lập thành cấp số cộng thì

$$x_1 + x_3 = 2x_2 \Leftrightarrow 3x_2 = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x_2 = -\frac{b}{3a}$$

- + Với $x_2 = -b/3a$ thay vào phương trình (1) ta tìm được tham số m .

Bước 3: Điều kiện đủ: ta thay m lại phương trình (1).

Phương pháp trên cũng được áp dụng cho bài toán: "Xác định tham số để đồ thị hàm số $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại ba điểm tạo thành cấp số nhân". Ta quan sát các ví dụ.

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$. Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt với hoành độ lập thành cấp số cộng.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x^3 + ax + b$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt với hoành độ tạo thành cấp số nhân.

Giải.

Xét đường thẳng $(d): y = kx + m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với (d) là:

$$x^3 + ax + b = kx + m \Leftrightarrow x^3 + (a - k)x + b - m = 0 \quad (1)$$

Giả sử (d) cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân khi và chỉ khi phương trình (1) có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = a - k \\ x_1x_2x_3 = m - b \\ x_2^2 = x_3x_1 \end{cases}$$

Từ hệ suy ra

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Điều này mâu thuẫn với giả thuyết x_1, x_2, x_3 phân biệt.

Vậy không có đường thẳng nào cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt lập thành cấp số nhân.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y = x - \frac{4}{3}$. Tích các phần tử của tập S có giá trị bằng.

Giải.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 1$ có 2 nghiệm $x_1 = m - 1, x_2 = m + 1$.

Xét $y'' = 2x - 2m = 0 \Leftrightarrow x = m \Rightarrow y(m) = \frac{1}{3}m^3 - m$.

Vậy ta có điểm uốn $U\left(m; \frac{1}{3}m^3 - m\right) \in y = x - \frac{4}{3}$. Khi đó:

$$\frac{1}{3}m^3 - m = m - \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = -1 + \sqrt{3} \\ m_2 = -1 - \sqrt{3} \\ m_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow m_1.m_2.m_3 = -4.$$

II. VẤN ĐỀ VỀ HÀM SỐ BẬC 4.

Đầu tiên, ta xét ví dụ sau đây.

Ví dụ. Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m + 3$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < 2 < x_4$. Khi đó, tích các phần tử thuộc S có giá trị bằng.

Giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục Ox là:

$$x^4 + 2mx^2 + m + 3 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$. Khi đó, phương trình (1) có dạng:

$$f(t) = t^2 + 2mt + m + 3 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm thỏa mãn $0 < t_1 < t_2$.

Khi đó, bốn nghiệm của phương trình (1) là $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$.

Theo giả thuyết ta có:

$$x_1 < x_2 < x_3 < 1 < 2 < x_4 \Leftrightarrow -\sqrt{t_2} < -\sqrt{t_1} < \sqrt{t_1} < 1 < 2 < \sqrt{t_2} \Leftrightarrow 0 < t_1 < 1 < 4 < t_2$$

Vậy để phương trình có bốn nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < 2 < x_4$ điều kiện là:

$$\begin{cases} a.f(0) > 0 \\ a.f(1) < 0 \\ a.f(4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 > 0 \\ 1+2m+m+3 < 0 \\ 16+8m+m+3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < -\frac{4}{3} \Rightarrow m = \{-2; -1\}$$

Vấn đề còn lại là bài toán: "Tìm điều kiện của tham số m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt lập thành cấp số cộng". Đối với bài toán này, ta chú ý các công thức giải nhanh sau:

Xét phương trình $f(x) = ax^4 + bx^2 + c \Rightarrow f(t) = at^2 + bt + c, (t \geq 0)$. Ta chú ý

$$+ \begin{cases} t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} \\ t_1 t_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \wedge t_2 = 9t_1 \Rightarrow t_1 = -\frac{b}{10a}.$$

$$+ \text{ Điều này suy ra từ chú ý trên rằng: } b^2 = \frac{100}{9}.a.c.$$

$$+ \text{ Có điểm cực trị cách đều trục hoành: } b^2 = 8ac.$$

Ví dụ. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1$. Xác định m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

“Hãy thay đổi trước khi quá muộn. Vì khi nhìn lại, ta sẽ không còn thời gian để thành công”

GV. Phạm Ngọc Tính.

BẢNG TỔNG KẾT PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ CƠ BẢN.

