

HỆ - BẤT - PHƯƠNG TRÌNH TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ NĂM 2016

Bài 1: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{3-x} + \sqrt{y+1} = x^3 + 2y^2 - 9x - 5 \\ x^3 - y^3 + 12x - 3y = 3y^2 - 6x^2 - 7 \end{cases}$$

Lần 2 – THPT ANH SƠN 2

Lời giải tham khảo

Điều Kiện :
$$\begin{cases} x \leq 3 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

Phương trình thứ 2 tương đương với $(x+2)^3 = (y+1)^3 \Leftrightarrow y = x+1$ (3)

Thay (3) vào phương trình thứ nhất ta được:

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} = x^3 + 2x^2 - 5x - 3 \text{ điều kiện } -2 \leq x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} = x^3 + 2x^2 - 5x - 3 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} - 3 = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\sqrt{(3-x)(x+2)} - 2)}{\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} + 3} = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(-x^2 + x + 2)}{(\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} + 3)(\sqrt{(3-x)(x+2)} + 2)} = (x+1)(x-2)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(-x^2 + x + 2)}{(\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} + 3)(\sqrt{(3-x)(x+2)} + 2)} = (x^2 - x - 2)(x+3)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2) \left(\frac{2}{(\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} + 3)(\sqrt{(3-x)(x+2)} + 2)} + (x+3) \right) = 0$$

Do điều kiện $-2 \leq x \leq 3$ nên $\frac{2}{(\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} + 3)(\sqrt{(3-x)(x+2)} + 2)} + (x+3) > 0$

Suy ra $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 2$ thỏa mãn điều kiện.

Khi $x = -1 \Rightarrow y = 0$ TMĐK

Khi $x = 2 \Rightarrow y = 3$ TMĐK

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $(-1; 0), (2; 3)$

Bài 2: Giải phương trình $x^3 + x + 2(x^2 + 1)\sqrt{x} = 6$.

Lần 1 – THPT BẮC YÊN THÀNH

Lời giải tham khảo

ĐK: $x \geq 0$. Nhận thấy $(0; y)$ không là nghiệm của hệ phương trình. Xét $x > 0$.

Từ phương trình thứ 2 ta có $2y + 2y\sqrt{4y^2 + 1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}$ (1) Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 1}$

có $f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0$ nên hàm số đồng biến. Vậy (1) $\Leftrightarrow f(2y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2y = \frac{1}{x}$.

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 1}$ có $f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 1} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0$ nên hàm số đồng biến. Vậy

$$(1) \Leftrightarrow f(2y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2y = \frac{1}{x}.$$

Thay vào phương trình (1): $x^3 + x + 2(x^2 + 1)\sqrt{x} = 6$

Vế trái của phương trình là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên có nghiệm duy nhất

$x=1$ và hệ phương trình có nghiệm $\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

Bài 3: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + x = 3(xy + 1) + 2y \\ \frac{2}{3 + \sqrt{2x - y}} + \frac{2}{3 + \sqrt{4 - 5x}} = \frac{9}{2x - y + 9} \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}.$$

Lần 1 – THPT BẢO THẮNG SỐ 3

Lời giải tham khảo

ĐK:
$$\begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ x \leq \frac{4}{5} \end{cases}$$

Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ ta có :

$$2x^2 + y^2 + x = 3(xy + 1) + 2y \Leftrightarrow (x - y - 1)(2x - y + 3) = 0 \Leftrightarrow y = x - 1$$

Với $y = x - 1$ thay vào phương trình thứ hai ta được phương trình sau :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3 + \sqrt{x+1}} + \frac{2}{3 + \sqrt{4-5x}} &= \frac{9}{x+10} \\ \Rightarrow 2(x+10)(6 + \sqrt{x+1} + \sqrt{4-5x}) &= 9(9 + 3\sqrt{x+1} + 3\sqrt{4-5x} + \sqrt{x+1}\sqrt{4-5x}) \\ (\sqrt{x+1} + \sqrt{4-5x} - 3)(9\sqrt{x+1} + 9\sqrt{4-5x} - 4x + 41) &= 0 \textcircled{*} \end{aligned}$$

(Do $x \in \left[-1; \frac{4}{5}\right]$ nên $9\sqrt{x+1} + 9\sqrt{4-5x} - 4x + 41 > 0$)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{4-5x} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{4-5x} = 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}\sqrt{4-5x} = 4 + 4x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}(\sqrt{4-5x} - 2\sqrt{x+1}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 0 \\ \sqrt{4-5x} = 2\sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Với $x=0 \Rightarrow y=-1; x=-1 \Rightarrow y=-2$

Đối chiếu với điều kiện và thay lại hệ phương trình ban đầu ta thấy hệ đã cho có nghiệm : $(x, y) = (0; -1); (x, y) = (-1; -2)$

Bài 4: Giải phương trình:
$$\sqrt{x+1} = \frac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}.$$

Lần 1 – THPT BÌNH MINH

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \geq -1, x \neq 13$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 2 = \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt[3]{2x+1} - 3} \Leftrightarrow 1 = \frac{(x+2)(\sqrt{x+1} - 2)}{\sqrt[3]{2x+1} - 3} \quad (x=3 \text{ không là nghiệm})$$

$$\Leftrightarrow (2x+1) + \sqrt[3]{2x+1} = (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$$

Hàm số $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ do đó phương trình $\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt{x+1}$

$$\begin{cases} x \geq -1/2 \\ (2x+1)^2 = (x+1)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1/2 \\ x^3 - x^2 - x = 0 \end{cases} \textcircled{*}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1/2 \\ x=0, x=\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=0, x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm $S = \{0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$

Bài 5: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 32x^5 - 5\sqrt{y-2} = y(y-4)\sqrt{y-2} - 2x \\ (\sqrt{y-2}-1)\sqrt{2x+1} = 8x^3 - 13(y-2) + 82x - 29 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 2 – THPT Bồ Hạ

Lời giải tham khảo

Đặt đk $x \geq -\frac{1}{2}, y \geq 2$

$$+) (1) \Leftrightarrow (2x)^5 + 2x = (y^2 - 4y)\sqrt{y-2} + 5\sqrt{y-2} \Leftrightarrow (2x)^5 + 2x = (\sqrt{y-2})^5 + \sqrt{y-2} (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t^5 + t, f'(t) = 5t^4 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ (3) ta có

$$f(2x) = f(\sqrt{y-2}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{y-2} \textcircled{*} \text{Thay } 2x = \sqrt{y-2} (x \geq 0) \text{ vào (2) được}$$

Thay $2x = \sqrt{y-2} (x \geq 0)$ vào (2) được

$$(2x-1)\sqrt{2x+1} = 8x^3 - 52x^2 + 82x - 29$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{2x+1} = (2x-1)(4x^2 - 24x + 29) \Leftrightarrow (2x-1)(\sqrt{2x+1} - 4x^2 + 24x - 29) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \sqrt{2x+1} - 4x^2 + 24x - 29 = 0 \end{cases} (4)$$

Với $x = \frac{1}{2}$. Ta có $y=3$ $\textcircled{*}$

$$(4) \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1} - 2) - (4x^2 - 24x + 27) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{2x+1}+2} - (2x-3)(2x-9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/2 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+1}+2} (2x-9) = 0 \end{cases} (5)$$

Với $x = \frac{3}{2}$. Ta có $y=11$ $\textcircled{*}$ Xét (5). Đặt $t = \sqrt{2x+1} \geq 0 \Rightarrow 2x = t^2 - 1$. Thay vào (5) được

$$t^3 + 2t - 10 - 21 = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t^2 - t - 7) = 0. \text{ Tìm được } t = \frac{1+\sqrt{29}}{2}.$$

Xét (5). Đặt $t = \sqrt{2x+1} \geq 0 \Rightarrow 2x = t^2 - 1$. Thay vào (5) được

$$t^3 + 2t - 10 - 21 = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t^2 - t - 7) = 0. \text{ Tìm được } t = \frac{1+\sqrt{29}}{2}.$$

$$\text{Từ đó tìm được } x = \frac{13+\sqrt{29}}{4}, y = \frac{103+13\sqrt{29}}{2}$$

Bài 6: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 24x + 24y + 52 = 0 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$$

Lần 1 – THPT CAM RANH

Lời giải tham khảo

$$\text{Đk} \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Đặt $t = y + 2$. Biến đổi phương trình đầu về dạng: $x^3 - 3x^2 - 24x = t^3 - 3t^2 - 24t$ $\circledast$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$ liên tục trên $[-2; 2]$

Chứng minh được $x = t = y + 2$

$$\text{Hệ pt được viết lại: } \begin{cases} x = y + 2 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y = 0 \\ y = -4/5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ x = 6/5 \\ y = -4/5 \end{cases}$$

KẾT LUẬN:

Bài 7: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 13x = y^3 + y + 10 \\ \sqrt{2x + y + 5} - \sqrt{3 - x - y} = x^3 - 3x^2 - 10y + 6 \end{cases}$$

Lần 2 – THPT CAM RANH

Lời giải tham khảo

XÉT PT(1):

$$x^3 - 6x^2 + 13x = y^3 + y + 10 \Leftrightarrow (x - 2)^3 + (x - 2) = y^3 + y \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $(*) \Leftrightarrow y = x - 2$. Thay $y = x - 2$ vào (2) ta được: $\sqrt{3x + 3} - \sqrt{5 - 2x} = x^3 - 3x^2 - 10x + 26$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x + 3} - 3 + 1 - \sqrt{5 - 2x} = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 \quad (\text{ĐK: } -\frac{5}{2} \leq x \leq 1) \circledast$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x - 2)}{\sqrt{3x + 3} + 3} + \frac{2(x - 2)}{1 + \sqrt{5 - 2x}} = (x - 2)(x^2 - x - 12)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{3}{\sqrt{3x + 3} + 3} + \frac{2}{1 + \sqrt{5 - 2x}} = x^2 - x - 12 \end{cases} \quad (3)$$

PT (3) vô nghiệm vì với $-\frac{5}{2} \leq x \leq 1$ thì $x^2 - x - 12 < 0$.

$$\text{Hệ có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Bài 8: Giải bất phương trình:
$$\frac{x - 3}{3\sqrt{x + 1} + x + 3} \leq \frac{2\sqrt{9 - x}}{x}$$

Lần 1 – THPT CAO LÃNH 2

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 9; x \neq 0$

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x - 2\sqrt{9-x}(x+3+3\sqrt{x+1})}{x(x+3+3\sqrt{x+1})} \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2 - 9(x+1) - 2\sqrt{9-x}(x+3+3\sqrt{x+1})}{x(x+3+3\sqrt{x+1})} \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{(x+3+3\sqrt{x+1})(x+3-3\sqrt{x+1}-2\sqrt{9-x})}{x(x+3+3\sqrt{x+1})} \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x+3-3\sqrt{x+1}-2\sqrt{9-x}}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-3)+2(1-\sqrt{9-x})}{x} \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x-8}{x} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+3} + \frac{2}{1+\sqrt{9-x}} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-8}{x} \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 8
 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $0 < x \leq 8$ **Bài 9: Giải bất phương trình:** $x^2 + x - 1 \geq (x+2)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$

Lần 1 – THPT chuyên LÊ QUÝ ĐÔN - KH

Lời giải tham khảo

$$\text{TA CÓ : } x^2 - 2x - 7 + (x+2)(3 - \sqrt{x^2 - 2x + 2}) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 7) \left(\frac{\sqrt{(x-1)^2 + 1} - (x-1)}{3 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}} \right) \geq 0.$$

$$\text{Vì: } \sqrt{(x-1)^2 + 1} > |x-1| \geq x-1 \text{ nên: } \frac{\sqrt{(x-1)^2 + 1} - (x-1)}{3 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}} > 0, \forall x.$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 - 2\sqrt{2} \vee 1 + 2\sqrt{2} \leq x$$

$$\text{Vậy bất pt có tập nghiệm: } S = (-\infty; 1 - 2\sqrt{2}] \cup [1 + 2\sqrt{2}; +\infty)$$

Bài 10: Giải bất phương trình: $x^3 - x + 2 \leq 2\sqrt[3]{3x-2} ..$

Lần 1 – THPT chuyên NGUYỄN HUỆ

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned}
 &x^3 - x + 2 \leq 2\sqrt[3]{3x-2} \\
 &\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 \leq 2\sqrt[3]{3x-2} - 2x \\
 &\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 \leq 2 \frac{3x-2-x^3}{\sqrt[3]{3x-2}^2 + x\sqrt[3]{3x-2} + x^2} \\
 &\Leftrightarrow (x^3 - 3x + 2) \left(1 + \frac{2}{\sqrt[3]{3x-2}^2 + x\sqrt[3]{3x-2} + x^2} \right) \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 \leq 0 \left(1 + \frac{2}{\sqrt[3]{3x-2}^2 + x\sqrt[3]{3x-2} + x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \right)
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -2] \cup \{1\}$.

Bài 11: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 3x^2 + 3x - 6y - 4 = 0 \\ y(\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{7y+13}) = 3(x+1) \end{cases}$$

Lần 2 – THPT CHUYÊN NGUYỄN HUỆ

Lời giải tham khảo

Từ phương trình (1) ta có: $x^3 + 3x = (y+1)^3 + 3(y+1)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$, $f'(t) = 3t^2 + 3$

$f'(t) > 0$ với mọi t suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$f(x) = f(y+1) \Leftrightarrow x = y+1$ Thế $x = y+1$ vào phương trình (2) ta được:

Thế $x = y+1$ vào phương trình (2) ta được:

$$(x-1)(\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{7x+6}) = 3(x+1) \quad (3)$$

Ta có $x=1$ không là nghiệm phương trình. Từ đó:

$$(\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{7x+6}) = \frac{3(x+1)}{x-1}$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = (\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{7x+6}) - \frac{3(x+1)}{x-1}$$

$$\text{TXĐ: } D = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} + \frac{7}{3\sqrt[3]{(7x+6)^2}} + \frac{6}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) > 0 \forall x > -\frac{3}{2}; x \neq 1, g'\left(-\frac{3}{2}\right) \text{ không xác định.}$$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$ và $(1; +\infty)$.

Ta có $g(-1) = 0$; $g(3) = 0$. Từ đó phương trình $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm $x = -1$ và $x = 3$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(-1; -2)$ và $(3; 2)$.

Bài 12: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy(x+1) = x^3 + y^2 + x - y \\ 3y(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4y+2)(\sqrt{1+x+x^2} + 1) = 0 \end{cases}$$

Lần 1 – THPT CHUYÊN SƠN LA

Lời giải tham khảo

$$\text{Biến đổi PT (1)} \Leftrightarrow (x-y)(x^2 - y + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

$$3x\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) + (4x + 2)\left(\sqrt{1 + x + x^2} + 1\right) = 0$$

$$x = y \text{ thế vào PT (2) ta được: } \Leftrightarrow (2x + 1)\left(\sqrt{(2x + 1)^2 + 3} + 2\right) = (-3x)\left(2 + \sqrt{(-3x)^2 + 3}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(2x + 1) = f(-3x)$$

Xét $f(t) = t\left(\sqrt{t^2 + 3} + 2\right)$ có $f'(t) > 0, \forall t$.

f là hàm số đồng biến nên: $2x + 1 = -3x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5} \Rightarrow y = -\frac{1}{5} \text{ } \textcircled{*} y = x^2 + 1$

$$\bullet y = x^2 + 1$$

$$\text{Thế vào (2)} \quad 3(x^2 + 1)\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) + (4x^2 + 1 + 2)\left(\sqrt{1 + x + x^2} + 1\right) = 0$$

Vế trái luôn dương, PT vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $\left(-\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.

Bài 13: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + \frac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ 3x^2 - 8x - 3 = 4(x+1)\sqrt{y+1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 1 – THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC

Lời giải tham khảo

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 + x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \frac{x^3 + x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+2)\sqrt{y+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3 + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = (\sqrt{y+1})^3 + \sqrt{y+1}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f(\sqrt{y+1}) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1}. \text{ Thay vào (2) ta được } 3x^2 - 8x - 3 = 4x\sqrt{x+1}.$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 = (x+2\sqrt{x+1})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = x-1 \\ 2\sqrt{x+1} = 1-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 6x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{3} \\ x = \frac{5-2\sqrt{13}}{9} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } y = \frac{x^2}{x+1} - 1$$

$$\text{Với } x = 3 + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{4+3\sqrt{3}}{2}. \text{ Với } x = \frac{5-2\sqrt{13}}{9} \Rightarrow y = -\frac{41+7\sqrt{13}}{72}.$$

Các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện.

$$\text{Hệ phương trình có hai nghiệm } (x; y) = \left(3 + 2\sqrt{3}; \frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ \& } (x; y) = \left(\frac{5-2\sqrt{13}}{9}; -\frac{41+7\sqrt{13}}{72}\right).$$

Bài 14: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 8x - 8y = 3x^2 - 3y^2 \\ (5x^2 - 5y + 10)\sqrt{y+7} + (2y+6)\sqrt{x+2} = x^3 + 13y^2 - 6x + 32 \end{cases}$$

Lần 2 – THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ y+7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq -7 \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có $(x-1)^3 + 5(x-1) = (y-1)^3 + 5(y-1)$ (3)

Thay (4) vào (2) ta được pt: $(5x^2 - 5x + 10)\sqrt{x+7} + (2x+6)\sqrt{x+2} = x^3 + 13x^2 - 6x + 32$ (5) Đ/K $x \geq -2$

$(5x^2 - 5x + 10)(\sqrt{x+7} - 3) + (2x+6)(\sqrt{x+2} - 2) = x^3 - 2x^2 + 5x - 10$ (5)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 5t$, trên tập $\mathbb{R}$, $f'(t) = 3t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Từ (3): $f(x-1) = f(y-1) \Leftrightarrow x = y$

(4) $\otimes (5x^2 - 5x + 10)(\sqrt{x+7} - 3) + (2x+6)(\sqrt{x+2} - 2) = x^3 - 2x^2 + 5x - 10$ (5)

$(x-2)\left(\frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} + \frac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2}\right) = (x-2)(x^2 + 5)$

- $x = 2 \xrightarrow{(4)} y = 2 \Rightarrow (x; y) = (2; 2)$ (thỏa mãn đ/k)
- $\frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} + \frac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2} - \left(\frac{5x^2 - 5x + 10}{5} + \frac{2x+6}{2}\right) = 0$

$(x-2)\left(\frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} + \frac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2} - (x^2 + 5)\right) = 0 \otimes x = 2 \xrightarrow{(4)} y = 2 \Rightarrow (x; y) = (2; 2)$ (thỏa mãn đ/k)

$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3}\right)}_{>0, \forall x \geq -2} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x+7} + 3} - \frac{1}{5}\right)}_{<0, \forall x \geq -2} + \underbrace{\left(\frac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2}\right)}_{\leq 0, \forall x \geq -2} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} - \frac{1}{2}\right)}_{\leq 0, \forall x \geq -2} = 0$ (pt này vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình có một nghiệm duy nhất: $(x; y) = (2; 2)$

Bài 15: Giải bất phương trình:
$$\frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{6(x^2 + 2x + 4)} - 2(x+2)} \geq \frac{1}{2}$$

Lần 3 – THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \geq -2$

Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow 2(\sqrt{x+2} - 2) \geq \sqrt{6(x^2 + 2x + 4)} - 2(x+2)$
 $\Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} + 2x \geq \sqrt{12(x+2) + 6x^2}$ (1)

Ta có $\sqrt{6(x^2 + 2x + 4)} - 2(x+2) = \frac{2(x^2 - 2x + 4)}{\sqrt{6(x^2 + 2x + 4)} + 2(x+2)} > 0, \forall x \geq -2$ $\otimes$ Do đó bất phương trình

$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x+2} - 2) \geq \sqrt{6(x^2 + 2x + 4)} - 2(x+2)$

Nhận xét $x = -2$ không là nghiệm của bất phương trình

$$2 + 2t \geq \sqrt{12 + 6t^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2t \geq 0 \\ 4 + 8t + 4t^2 \geq 12 + 6t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ 2(t-2)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$$

Khi $x > -2$ chia hai vế bất phương trình (1) cho $\sqrt{x+2} > 0$ ta được

$$2 + 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x+2}} \geq \sqrt{12 + 6 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)^2} \quad (2). \text{Đặt } t = \frac{x}{\sqrt{x+2}} \text{ thì bất phương trình (2) được}$$

$$t = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+2}} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 4x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + 2\sqrt{3}.$$

Bất phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2 + 2\sqrt{3}$.

Bài 16: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x\sqrt{1-97y^2} + y\sqrt{1-97x^2} = \sqrt{97}(x^2 + y^2) \\ 27\sqrt{x} + 8\sqrt{y} = \sqrt{97} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 2 – THPT CHUYÊN HẠ LONG

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $0 \leq x, y \leq \frac{1}{\sqrt{97}}$

Thay $(x; y)$ bằng một trong các cặp số $(0; 0), \left(0; \frac{1}{\sqrt{97}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{97}}; 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{97}}; \frac{1}{\sqrt{97}}\right)$ vào (1), (2) ta thấy các cặp này đều không là nghiệm. Do đó $0 < x, y < \frac{1}{\sqrt{97}}$

Đặt $\sqrt{97}x = a, \sqrt{97}y = b$. Do $0 < x, y < \frac{1}{\sqrt{97}}$ nên $0 < a, b < 1$. Khi đó (1) trở thành

$$a\sqrt{1-b} + b\sqrt{1-a} = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a(a - \sqrt{1-b^2}) + b(b - \sqrt{1-a^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 1) \left(\frac{a}{a + \sqrt{1-b^2}} + \frac{b}{b + \sqrt{1-a^2}} \right) = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1. \text{ Suy ra } x^2 + y^2 = \frac{1}{97}.$$

Với các số dương a_1, a_2, b_1, b_2 , ta có $a_1b_1 + a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1b_2 = a_2b_1$. Thật vậy,

$$a_1b_1 + a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \Leftrightarrow (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2) \Leftrightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq 0$$

$$\text{Do đó } 27\sqrt{x} + 8\sqrt{y} \leq \sqrt{97} \sqrt{9x + 4y} \leq \sqrt{97} \sqrt{\sqrt{97} \sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{97} \quad (\text{do } x^2 + y^2 = \frac{1}{97})$$

Đẳng thức xảy ra khi $4x = 9y$ và $x^2 + y^2 = \frac{1}{97}$ Ⓢ Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của hệ

$$\text{pt đã cho là } (x; y) = \left(\frac{9}{97}; \frac{4}{97}\right)$$

$$\text{Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của hệ pt đã cho là } (x; y) = \left(\frac{9}{97}; \frac{4}{97}\right)$$

Bài 17: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x(x^2 + 3y^2) = 7 \\ x^2 + 6xy + y^2 = 5x + 3y \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT CHUYÊN LONG AN

Lời giải tham khảo

Đặt $\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2} \end{cases}$. Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 7(1) \\ 2u^2 - 4u = v^2 + v(2) \end{cases}$$

Lấy (2) nhân với -3 rồi cộng với (1) ta được:

$$u^3 - 6u^2 + 12u - 8 + v^3 + 3v^2 + 3v + 1 = 0 \Leftrightarrow (u-2)^3 + (v+1)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow u = 1 - v. \textcircled{*} \text{Thay vào phương trình (2), ta được: } v^2 - v - 2 = 0$$

Thay vào phương trình (2), ta được: $v^2 - v - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = -1 \\ v = 2 \end{cases} \textcircled{*} v = -1 \text{ suy ra } u = 2. \text{ Suy ra } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$+ v = -1 \text{ suy ra } u = 2. \text{ Suy ra } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$+ v = 2 \text{ suy ra } u = -1. \text{ Suy ra } (x, y) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

Bài 18: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 3y^2 + 3x - 6y - 4 = 0 \\ y(\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{7y+13}) = 3(x+1) \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT CHUYÊN NGUYỄN HUỆ

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \geq -\frac{3}{2}$

Từ pt(1) ta có $x^3 + 3x = (y+1)^3 + 3(y+1)$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t; f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \textcircled{*} f'(t) > 0$ với mọi t suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$f'(t) > 0$ với mọi t suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mà $f(x) = f(y+1)$ nên $x = y+1$

Thế $x = y+1$ vào pt(2) ta được: $(x-1)(\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{7x+6}) = 3(x+1) \quad (3)$

Ta có $x = 1$ không là nghiệm của pt(3). Từ đó $\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{7x+6} = \frac{3(x+1)}{x-1}$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{7x+6} - \frac{3(x+1)}{x-1}$

Tập xác định $D = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} + \frac{7}{3\sqrt[3]{(7x+6)^2}} + \frac{6}{(x-1)^2}$$

$g(x) > 0, \forall x > -\frac{3}{2}; x \neq 1, g'(-\frac{3}{2})$ không xác định.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\frac{3}{2}; 1)$ và $(1; +\infty)$. Ta có $g(-1) = 0; g(3) = 0$. Từ đó pt

$g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm $x = -1$ và $x = 3$.

Ta có $g(-1) = 0; g(3) = 0$. Từ đó pt $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm $x = -1$ và $x = 3$.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(-1; -2)$ và $(3; 2)$

Bài 19: Giải bất phương trình: $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3x^2-5}} \leq \frac{2}{\sqrt{x^2-2+1}}$.

Lần 1 – THPT ĐA PHÚC

Lời giải tham khảo

+) Đặt $t = x^2 - 2$, bpt trở thành: $\frac{1}{\sqrt{t+3}} + \frac{1}{\sqrt{3t+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{t+1}}$ ĐK: $t \geq 0$ với đk trên, bpt tương đương

$(\sqrt{t}+1)(\frac{1}{\sqrt{t+3}} + \frac{1}{\sqrt{3t+1}}) \leq 2$. Theo Cô-si ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+3}} &= \sqrt{\frac{t}{t+1} \cdot \frac{t+1}{t+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t+1} + \frac{t+1}{t+3} \right) & \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{3t+1}} &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{3t+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2t}{3t+1} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{t+3}} &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{t+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{t+3} \right) & \frac{1}{\sqrt{3t+1}} &= \sqrt{\frac{1}{t+1} \cdot \frac{t+1}{3t+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+1} + \frac{t+1}{3t+1} \right) \\ & \Rightarrow VT \leq 2 \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{3t+1}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{3t+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2t}{3t+1} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3t+1}} = \sqrt{\frac{1}{t+1} \cdot \frac{t+1}{3t+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+1} + \frac{t+1}{3t+1} \right)$$

$$\Rightarrow VT \leq 2 \forall t \geq 0.$$

+) Thay ẩn x được $x^2 \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty) \Rightarrow T = (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.

Bài 20: Giải phương trình: $32x^4 - 16x^2 - 9x - 9\sqrt{2x-1} + 2 = 0$.

Lần 2 – THPT ĐA PHÚC

Lời giải tham khảo

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$, phương trình đã cho tương đương

$$32x^4 - 32x^2 + 16x^2 - 16x + 7x - 7 + 9 - 9\sqrt{2x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 32x^2(x^2-1) + 16x(x-1) + 7(x-1) + 9(1-\sqrt{2x-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 32x^2(x-1)(x+1) + 16x(x-1) + 7(x-1) + \frac{9(2-2x)}{1+\sqrt{2x-1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left[32x^2(x+1) + 16x + 7 - \frac{18}{1+\sqrt{2x-1}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left[32x^3 + 32x^2 + 16x + 7 - \frac{18}{1+\sqrt{2x-1}} \right] = 0 (*)$$

Ta có

$$x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 32x^3 \geq \frac{32}{8} = 4 \\ 32x^2 \geq \frac{32}{4} = 8 \Rightarrow 32x^3 + 32x^2 + 16x + 7 \geq 27 \\ 16x \geq \frac{16}{2} = 8 \end{cases}$$

$$1 + \sqrt{2x-1} \geq 1 \Rightarrow -\frac{18}{1 + \sqrt{2x-1}} \geq -18$$

$$\Rightarrow 32x^3 + 32x^2 + 16x + 7 - \frac{18}{1 + \sqrt{2x-1}} \geq 9 > 0.$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow x=1$.**Kết luận:** Phương trình có nghiệm $x=1$.

Bài 21: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 3\sqrt{xy + x - y^2 - y} = 5y + 4 \\ \sqrt{4y^2 - x - 2} + \sqrt{y-1} = x-1 \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT PHƯỚC BÌNH

Lời giải tham khảo

Đk: $\begin{cases} xy + x - y^2 - y \geq 0 \\ 4y^2 - x - 2 \geq 0 \\ y-1 \geq 0 \end{cases}$. Ta có (1) $\Leftrightarrow x - y + 3\sqrt{(x-y)(y+1)} - 4(y+1) = 0$

Đặt $u = \sqrt{x-y}, v = \sqrt{y+1}$ ($u \geq 0, v \geq 0$)

Khi đó (1) trở thành: $u^2 + 3uv - 4v^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = -4v(vn) \end{cases}$ $\textcircled{\ast}$ Với $u = v$ ta có $x = 2y+1$, thay vào (2)

ta được: $\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + \sqrt{y-1} = 2y$

Với $u = v$ ta có $x = 2y+1$, thay vào (2) ta được: $\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + \sqrt{y-1} = 2y$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4y^2 - 2y - 3} - (2y-1) + (\sqrt{y-1} - 1) = 0 \quad \frac{2(y-2)}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{y-2}{\sqrt{y-1} + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2) \left(\frac{2}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{1}{\sqrt{y-1} + 1} \right) = 0 \Leftrightarrow y = 2$$

(vì $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{1}{\sqrt{y-1} + 1} > 0 \forall y \geq 1$)

Với $y=2$ thì $x=5$. Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của hệ PT là $(5;2)$

Bài 22: Giải bất phương trình:
$$\sqrt{x+1} \geq \frac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}.$$

Lần 2 – THPT PHƯỚC BÌNH

Lời giải tham khảo

- ĐK: $x \geq -1, x \neq 13$

$$\begin{aligned} \text{- Khi đó: } \sqrt{x+1} &\geq \frac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 2 \geq \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt[3]{2x+1} - 3} \\ &\Leftrightarrow 1 \geq \frac{(x+2)(\sqrt{x+1} - 2)}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}, (*) \end{aligned}$$

- Nếu $\sqrt[3]{2x+1} - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 13$ (1)

$$\text{thì } (*) \Leftrightarrow (2x+1) + \sqrt[3]{2x+1} \geq (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$$

Do hàm $f(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (*):

$$f(\sqrt[3]{2x+1}) \geq f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \geq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x \leq 0$$

$$\text{Suy ra: } x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \xrightarrow{DK(1)} \text{VN}$$

- Nếu $\sqrt[3]{2x+1} - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 13$ (2)

$$\text{thì } (2^*) \Leftrightarrow (2x+1) + \sqrt[3]{2x+1} \leq (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$$

Do hàm $f(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (2*):

$$f(\sqrt[3]{2x+1}) \leq f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \leq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} < x < 13 \\ (2x+1)^2 \leq (x+1)^3 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } x \in [-1; 0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \xrightarrow{DK(2)} x \in [-1; 0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 13\right)$$

$$\text{-KL: } x \in [-1; 0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 13\right)$$

Bài 23: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy(2y-1) = 2y^3 - 2y^2 - x \\ 6\sqrt{x-1} + y + 7 = 4x(y-1) \end{cases}.$$

Lần 3 – THPT PHƯỚC BÌNH

Lời giải tham khảo

ĐK: $x \geq 1$.

$$(1) \Leftrightarrow (2y^2 + x)(1 + x - y) = 0 \Leftrightarrow y = x + 1 \text{ vì } 2y^2 + x > 0, \forall x \geq 1$$

$$\text{Thay vào (2) ta được } 6\sqrt{x-1} + x + 8 = 4x^2 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} + 3)^2 = (2x)^2 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x-1} + 3$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 13x + 10 = 0 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$$

Vậy nghiệm của phương trình là $(x; y) = (2; 3)$.

Bài 24: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} & (1) \\ \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14-x}\sqrt{3-2y} + 1 & (2) \end{cases}.$$

Lời giải tham khảo

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của hệ, chia cả hai vế của (1) cho x^3 ta được

$$(1) \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 2(2-y)\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) = (3-2y)\sqrt{3-2y} + \sqrt{3-2y} \quad (*)$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$(*) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = \sqrt{3-2y} \quad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta được $\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{15-x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} - 3 + 2 - \sqrt[3]{15-x} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-7) \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+2}+3} + \frac{1}{4-2\sqrt[3]{x+15}+(\sqrt[3]{x+15})^2}}_{>0} \right) = 0$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(7; \frac{111}{98}\right)$.

Bài 25: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+y+6} = 1-y \\ 9\sqrt{1+x} + xy\sqrt{9+y^2} = 0 \end{cases}$$

Lời giải tham khảo

$$\text{Đk: } \begin{cases} x+y+6 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

+) Nếu $y \geq 0$, để hệ có nghiệm thì $1 \geq y \geq 0$.

$$\left. \begin{aligned} VT(1) &= 2\sqrt{x+y+6} \geq 2\sqrt{5} \\ VP(1) &= 1-y \leq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow VT(1) > VP(1) \text{ hệ vô nghiệm.}$$

+) Nếu $y < 0$, từ (2) suy ra $x > 0$

$$9\sqrt{1+x} + xy\sqrt{9+y^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\sqrt{9+\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2} = (-y)\sqrt{9+(-y)^2} \quad (3)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t\sqrt{9+t^2}, t > 0; f'(t) = \frac{9+2t^2}{\sqrt{9+t^2}} > 0 \forall t > 0$$

$$(3) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right) = f(-y) \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}} = -y \Leftrightarrow x = \frac{9}{y^2}$$

$$\text{Thế vào pt(1) ta có phương trình } 2\sqrt{\frac{9}{y^2} + y + 6} = 1 - y \quad (4). \text{ Hàm số } g(y) = 2\sqrt{\frac{9}{y^2} + y + 6}$$

đồng biến trên $(-\infty; 0)$; hàm số $h(y) = 1 - y$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và phương trình có nghiệm $y = -3$ nên pt(4) có nghiệm duy nhất $y = -3$. Vậy, hệ có nghiệm duy nhất $(1; -3)$.

Bài 26: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2\sqrt{x+y+4} = x^3 + x^2 + y + 3 \\ x^2 + x\sqrt{x-y+3} = 2x^2 + x + y + 1 \end{cases}$$

Lần 1 – THPT HÙNG VƯƠNG – BÌNH PHƯỚC**Lời giải tham khảo**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+y+4 \geq 0 \\ x-y+4 \geq 0 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow y = x - 1 \text{ thế (1) ta được: } (x+2)\sqrt{2x+3} = x^3 + x^2 + x + 2$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2(\sqrt{2x+3} - x - 1)(-4\sqrt{2x+3} - 2x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Hệ có nghiệm } (x; y) = (-1; -2), (\sqrt{2}; \sqrt{2} - 1)$$

Bài 27: Giải bất phương trình: $(x^2 - x - 6)\sqrt{x-1} + (x-2)\sqrt{x+1} \geq 3x^2 - 9x + 2$ **Lần 2 – THPT HÙNG VƯƠNG – BÌNH PHƯỚC****Lời giải tham khảo**

$$(x^2 - x - 6)\sqrt{x-1} + (x-2)\sqrt{x+1} \geq 3x^2 - 9x + 2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 6)(\sqrt{x-1} - 1) + (x-2)(\sqrt{x+1} - 2) \geq 2x^2 - 10x + 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - x - 6)(x-2)}{\sqrt{x-1} + 1} + \frac{(x-2)(x-3)}{\sqrt{x+1} + 2} \geq 2x^2 - 10x + 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - 5x + 6)(x+2)}{\sqrt{x-1} + 1} + \frac{(x^2 - 5x + 6)}{\sqrt{x+1} + 2} \geq 2(x^2 - 5x + 6)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 6) \left[\frac{x+2}{\sqrt{x-1} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} - 2 \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x + 6) \left[\frac{(\sqrt{x-1} - 1)^2}{\sqrt{x-1} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [1; 2] \cup [3; +\infty)$$

Bài 28: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{y-1} + 2y^2 + 1 = \sqrt{x} + x^2 + xy + 3y \\ \sqrt{x^2 + y} + \sqrt{3} = \sqrt{y^2 - 3x} + \sqrt{7} \end{cases}$$

Lần 1 – THPT ĐỒNG XOÀI**Lời giải tham khảo**

$$\text{Đk: } y \geq 1, x \geq 0, y^2 \geq 3x$$

$$\text{Từ pt (2) ta có: } (y-x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}} + 2y - 1 + x \right) = 0$$

$$\text{Suy ra, } y = x + 1$$

$$\text{Thay vào pt (1) ta được } \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{7} - \sqrt{3}$$

Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$

Chứng minh hàm số đồng biến

Ta có nghiệm duy nhất $x = 2$

Vậy nghiệm của hệ là (2;3)

Bài 29: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}.$$

Lần 2 – THPT ĐỒNG XOÀI

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x + y > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)^2 - 1 - 2xy \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 0 \Leftrightarrow (x+y-1)(x^2 + y^2 + x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+y-1=0 \text{ (vì } x+y>0 \text{ nên } x^2 + y^2 + x + y > 0)$$

$$\text{Thay } x=1-y \text{ vào (2) ta được: } 1=x^2-(1-x) \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 & \Rightarrow y=0 \\ x=-2 & \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

Vậy hệ có 2 nghiệm: $(x;y) = (1; 0), (x;y) = (-2; 3)$

Bài 30: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+2y+1} - \sqrt{5-x} + 2x^2 - 8x + 2y - 6 = 0 \\ x^3 - 2xy + y + 1 + 5x - 10y = 4y^2(y-1) \end{cases}.$$

Lần 3 – THPT ĐỒNG XOÀI

Lời giải tham khảo

+ Điều kiện:
$$\begin{cases} x+2y+1 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases}$$

+Ta có hệ
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2y+1} - \sqrt{5-x} + 2x^2 - 8x + 2y - 6 = 0 \\ x-2y \quad x^2 + 2xy + 2y^2 - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2y+1} - \sqrt{5-x} + 2x^2 - 8x + 2y - 6 = 0 \\ x-2y = 0 \\ x^2 + 2xy + 2y^2 - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Để thấy } x^2 + 2xy + 2y^2 - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + y^2 - 2y + 1 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 + (y-1)^2 + 4 = 0: \text{ vô nghiệm với } \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó hệ
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2y+1} - \sqrt{5-x} + 2x^2 - 8x + 2y - 6 = 0 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1} - \sqrt{5-x} + 2x^2 - 7x - 6 = 0 \quad (*) \\ x = 2y \end{cases}$$

Giải phương trình: $\sqrt{2x+1} - \sqrt{5-x} + 2x^2 - 7x - 7 = 0 \quad (*)$

+) Điều kiện: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 5$

$$\begin{aligned}
 &+) \text{ Phương trình } \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} - 3 + 1 - \sqrt{5-x} + 2x^2 - 7x - 4 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{2x-8}{\sqrt{2x+1}+3} + \frac{x-4}{1+\sqrt{5-x}} + (x-4)(2x+1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ \frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} + \frac{1}{1+\sqrt{5-x}} + (2x+1) = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Để thấy $\frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} + \frac{1}{1+\sqrt{5-x}} + (2x+1) > 0$ nên $x=4 \Rightarrow y=2$

Vậy hệ có nghiệm $x; y = 4; 2$.

Bài 31: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x^2 - y^2) + x^2 = 2\sqrt{(x-y^2)^3} \\ \sqrt{x + \frac{y^2+1}{x}} = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2(x-y^2) + x^2 + y^2 + 2}}{2x+1} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 2 – THPT CHUYÊN QUANG TRUNG

Lời giải tham khảo

ĐK: $x \geq y^2 \geq 0$

Từ PT(1) tìm được $x = \sqrt{x-y^2} \Rightarrow x^2 = x - y^2$

Thế vào (2) đưa về pt chỉ có ẩn x

Đưa được về hàm $\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)^3 + \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{2}{x} + \sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}$

Xét hàm $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ từ đó được pt $\sqrt{1+\frac{1}{x}} = \sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}$ giải được

$$x = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} (L), \quad x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} (N)$$

Nghiệm $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \pm\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$

Bài 32: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \\ \sqrt{x^2+y^2+1} = 3 + \sqrt{x^2-y^2} \end{cases}$$

Lần 1 – THPT NGUYỄN HỮU CẢNH

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x+y \geq 0, x-y \geq 0$

Đặt: $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ ta có hệ:
$$\begin{cases} \sqrt{u} - \sqrt{v} = 2 \quad (u > v) \\ \sqrt{\frac{u^2+v^2+2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\frac{u^2+v^2+2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 2\sqrt{uv} + 4 & (1) \\ \sqrt{\frac{(u+v)^2 - 2uv + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 & (2) \end{cases} \quad \text{Thế (1) vào (2) ta có:}$$

$$\sqrt{uv} + 8\sqrt{uv} + 9 - \sqrt{uv} = 3 \Leftrightarrow uv + 8\sqrt{uv} + 9 = (3 + \sqrt{uv})^2 \Leftrightarrow uv = 0.$$

$$\text{Kết hợp (1) ta có: } \begin{cases} uv = 0 \\ u + v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow u = 4, v = 0 \text{ (vì } u > v).$$

Từ đó ta có: $x = 2; y = 2$. (Thỏa đ/k)

KL: Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y) = (2; 2)$.

$$\text{Bài 33: Giải hệ phương trình: } \begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 3(x^2 + y^2) + 2 \\ 4\sqrt{x+2} + \sqrt{16-3y} = x^2 + 8 \end{cases}.$$

Lần 2 – THPT NGUYỄN HỮU CẢNH

Lời giải tham khảo

$$\text{ĐK: } x \geq -2, y \leq \frac{16}{3}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+1)^3 \Leftrightarrow y = x-2 \text{ Thay } y=x-2 \text{ vào (2) được}$$

$$4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = x^2 + 8 \Leftrightarrow \frac{4(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} = (x-2)(x+2) + \frac{3(x-2)}{\sqrt{22-3x}+4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{-4}{\sqrt{x+2}+2} + (x+2) + \frac{3}{\sqrt{22-3x}+4} = 0(*) \end{cases}$$

Xét $f(x) = VT(*)$ trên $[-2; 21/3]$, có $f'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến. suy ra $x = -1$ là nghiệm duy nhất của (*)

KL: HPT có 2 nghiệm $(2; 0), (-1; -3)$

$$\text{Bài 34: Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5} \\ x + y + x^2 + y^2 = 44 \end{cases}.$$

Lần 3 – THPT NGUYỄN HỮU CẢNH

Lời giải tham khảo

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt{t+2} + \sqrt{t+4}$ trên $[0; +\infty)$, có

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sqrt{t+2}} + \frac{1}{2\sqrt{t+4}} > 0, \forall t \in (0; +\infty)$$

$$\text{Nên (1)} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} = \sqrt{(y-5)+4} + \sqrt{(y-5)+2} + \sqrt{y-5} \Leftrightarrow x = y-5 (*)$$

$$\text{Thay (*) vào (2): } \sqrt{y+3} - \sqrt{y-2} = 1 \quad (3)$$

$$\text{Nhân (3) với lượng liên hợp: } 5 = \sqrt{y+3} + \sqrt{y-2} \quad (4)$$

$$(3), (4) \Rightarrow \sqrt{y+3} = 3 \Leftrightarrow y = 6$$

$$\text{ĐS: } (1; 6)$$

$$\text{Bài 35: Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x\sqrt{x^2 + y} + y = \sqrt{x^4 + x^3} + x \\ x + \sqrt{y} + \sqrt{x-1} + \sqrt{y(y-1)} = \frac{9}{2} \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT HÀ HUY TẬP

Lời giải tham khảo

$$\text{Đk: } x \geq 1; y \geq 0$$

$$pt(1) \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+y}+y=x\sqrt{x^2+x}+x \Leftrightarrow x(\sqrt{x^2+y}-\sqrt{x^2+x})=x-y$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}+1\right)=0 \circledast$$

Lập luận $\frac{x}{\sqrt{x^2+y}+\sqrt{x^2+x}}+1>0$ với $x \geq 1; y \geq 0$

Với $x=y$ thay vào pt(2): $x+\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x(x-1)}=\frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^2+2(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})-8=0 \quad (2') \circledast \text{Giải pt}(2') \text{ được: } x=\frac{25}{6} \Rightarrow y=\frac{25}{6}$$

Giải pt(2') được: $x=\frac{25}{6} \Rightarrow y=\frac{25}{6}$

Vậy hpt có nghiệm $\left(\frac{25}{6}; \frac{25}{6}\right)$

Bài 36: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + \frac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ 3x^2 - 8x - 3 = 4(x+1)\sqrt{y+1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 2 – THPT HÀ HUY TẬP

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^3+x^2+x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \frac{x^3+x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+2)\sqrt{y+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^3 + \frac{x}{\sqrt{x+1}} = (\sqrt{y+1})^3 + \sqrt{y+1}.$$

⊙ Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f(\sqrt{y+1}) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1}. \text{ Thay vào (2) ta được } 3x^2 - 8x - 3 = 4x\sqrt{x+1}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f(\sqrt{y+1}) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1}. \text{ Thay vào (2) ta được } 3x^2 - 8x - 3 = 4x\sqrt{x+1}.$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 = (x+2\sqrt{x+1})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = x-1 \\ 2\sqrt{x+1} = 1-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 6x - 3 = 0 \\ x \leq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 10x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{3} \\ x = \frac{5 - 2\sqrt{13}}{9} \end{cases}$$

Ta có $y = \frac{x^2}{x+1} - 1$

Với $x = 3 + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{4+3\sqrt{3}}{2}$. Với $x = \frac{5-2\sqrt{13}}{9} \Rightarrow y = -\frac{41+7\sqrt{13}}{72}$.

Các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện.

KL: Hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y) = \left(3 + 2\sqrt{3}; \frac{4+3\sqrt{3}}{2} \right)$

& $(x; y) = \left(\frac{5-2\sqrt{13}}{9}; -\frac{41+7\sqrt{13}}{72} \right)$.

Bài 37: Giải bất phương trình: $1 + x\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2 - x + 1}(1 + \sqrt{x^2 - x + 2})$.

Lần 2 – THPT ANH SƠN 2

Lời giải tham khảo

Bất phương trình đã cho tương đương

$$(x\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}\sqrt{x^2 - x + 2}) + (1 - \sqrt{x^2 - x + 1}) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x^2 - x + 2)}{x\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}\sqrt{x^2 - x + 2}} + \frac{x(1-x)}{1 + \sqrt{x^2 - x + 1}} > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{2x^2 - x + 2}{x\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}\sqrt{x^2 - x + 2}} - \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 - x + 1}} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \cdot A > 0 \quad (1) \text{ với } A = \frac{2x^2 - x + 2}{x\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}\sqrt{x^2 - x + 2}} - \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 - x + 1}}$$

Nếu $x \leq 0$ thì $\begin{cases} \sqrt{x^2 - x + 1} \geq \sqrt{x^2 + 1} \\ \sqrt{x^2 - x + 2} > -x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 1}\sqrt{x^2 - x + 2} \geq -x\sqrt{x^2 + 1}$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 1}\sqrt{x^2 - x + 2} + x\sqrt{x^2 + 1} > 0 \Rightarrow A > 0$$

Nếu $x > 0$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - x + 1}\sqrt{x^2 - x + 2} \leq \frac{x^2 - x + 1 + x^2 - x + 2}{2} = x^2 - x + \frac{3}{2} \\ x\sqrt{x^2 + 1} \leq \frac{x^2 + x^2 + 1}{2} = x^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 1}\sqrt{x^2 - x + 2} + x\sqrt{x^2 + 1} \leq 2x^2 - x + 2$$

$$\Rightarrow A \geq 1 - \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 - x + 1}} > 0 \text{ vì } \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 - x + 1}} < 1$$

Tóm lại, với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $A > 0$. Do đó (1) tương đương $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1; +\infty)$.

Chú ý: Cách 2. Phương pháp hàm số

Đặt $u = \sqrt{x^2 - x + 1} \Rightarrow u^2 = x^2 - x + 1$ thế vào bpt đã cho ta có

$$u^2 - x^2 + x + x\sqrt{x^2 + 1} > u(1 + \sqrt{u^2 + 1})$$

$$\Leftrightarrow u^2 - u - u\sqrt{u^2 + 1} > x^2 - x - x\sqrt{x^2 + 1}$$

Xét $f(t) = t^2 - t - t\sqrt{t^2 + 1}$

$$f'(t) = -(t - \sqrt{t^2 + 1})^2 - \sqrt{t^2 + 1} < 0 \forall t \text{ nên hàm nghịch biến trên } \mathbb{R}$$

Do đó bpt $\Leftrightarrow u < x \Leftrightarrow x > 1$

Bài 38: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 - 2(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} = 4x + 2y + 1 \\ xy + 2 = (y+1)\sqrt{x^2 + 2} - x \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 1 – THPT THỰC HÀNH CAO NGUYÊN

Lời giải tham khảo

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có: $y+1 = \sqrt{x^2 + 2} + x$

Thay vào phương trình thứ nhất ta được: $(x+1)\left[1 + \sqrt{(x+1)^2 + 2}\right] = -x\left[1 + \sqrt{(-x)^2 + 2}\right]$

$$f(t) = t\left[1 + \sqrt{t^2 + 2}\right] \rightarrow f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 2} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 2}} > 0, \forall t$$

Cho ta $x+1 = -x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$. Nghiệm của hệ: $(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

Bài 39: Giải bất phương trình: $(5x^2 - 5x + 10)\sqrt{x+7} + (2x+6)\sqrt{x+2} \geq x^3 + 13x^2 - 6x + 32.$

Lần 1 – THPT ĐOÀN THỊ ĐIỂM

Lời giải tham khảo

Điều kiện $x \geq -2$. Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$(5x^2 - 5x + 10)(\sqrt{x+7} - 3) + (2x+6)(\sqrt{x+2} - 2) + 3(5x^2 - 5x + 10) + 2(2x+6)$$

$$\geq x^3 + 13x^2 - 6x + 32$$

$$\Leftrightarrow (5x^2 - 5x + 10)(\sqrt{x+7} - 3) + (2x+6)(\sqrt{x+2} - 2) - x^3 + 2x^2 - 5x + 10 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} + \frac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2} - x^2 - 5\right) \geq 0$$

$$\text{Do } x \geq -2 \Rightarrow \sqrt{x+2} + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} \leq \frac{1}{2} \text{ và vì } 2x+6 > 0 \Rightarrow \frac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2} \leq \frac{2x+6}{2} = x+3 \quad (1)$$

$$\text{Do } x \geq -2 \Rightarrow \sqrt{x+7} + 3 \geq \sqrt{5} + 3 > 5 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+7} + 3} < \frac{1}{5} \text{ và vì } 5x^2 - 5x + 10 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} < \frac{5x^2 - 5x + 10}{5} = x^2 - x + 2 \Rightarrow \frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} - x^2 - 5 < -x - 3 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} + \frac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2} - x^2 - 5 < 0. \text{ Do đó } (*) \Leftrightarrow x-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$$

Kết hợp điều kiện $x \geq -2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Bài 40: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(y-1)(x+1) = x^3 + y^2 + x - 3y + 2 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{y+4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4} = y - 2 \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT ĐOÀN THƯỢNG

Lời giải tham khảo

$$\text{ĐKXD } x \geq -2, y \geq -4. (1) \Leftrightarrow y^2 - (x^2 + x + 3)y + x^3 + x^2 + 2x + 2 = 0$$

Giải pt bậc 2 ta được $y = x+1$ hoặc $y = x^2 + 2$ Với $y = x+1$ thay vào PT (2) ta được

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+5} - \sqrt{x^2 - 2x + 4} = x - 1$$

Với $y = x+1$ thay vào PT (2) ta được $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+5} - \sqrt{x^2 - 2x + 4} = x - 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{(\sqrt{x+2})^2 + 3} = x-1 + \sqrt{(x-1)^2 + 3} \text{ Xét hàm số } f(t) = t + \sqrt{t^2 + 3} \text{ có}$$

$$f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 3}} > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 3}$ có $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 3}} > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Vậy } f(\sqrt{x+2}) = f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \text{ Với } y = x^2 + 2 \text{ thay vào PT (2) ta được}$$

Với $y = x^2 + 2$ thay vào PT (2) ta được

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+6} - \sqrt{x^2-2x+4} = x^2 \Leftrightarrow (\sqrt{x+2}-1) + (\sqrt{x^2+6} - \sqrt{x^2-2x+4}) = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x+2}+1} + \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+6} + \sqrt{x^2-2x+4}} = (x+1)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \frac{1}{\sqrt{x+2}+1} + \frac{2}{\sqrt{x^2+6} + \sqrt{x^2-2x+4}} = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 3 \\ x = \frac{7}{4} \Rightarrow y = \frac{81}{16} \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ có 3 nghiệm là } \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}; \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right), (-1; 3), \left(\frac{7}{4}; \frac{81}{16} \right)$$

Bài 41: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (4-y)\sqrt{x-2} + \sqrt{7-2y} = \sqrt{85-50x-7y+13y^2-x^3} \\ \sqrt{2x^2+3xy+4y^2} + \sqrt{4x^2+3xy+2y^2} = 3(x+y) \end{cases}.$$

Lần 2 – THPT ĐOÀN THƯỢNG

Lời giải tham khảo

- Ta có $2x^2 + 3xy + 4y^2 = \left(\frac{7}{6}x + \frac{11}{6}y\right)^2 + \frac{23}{36}(x-y)^2 \geq \left(\frac{7}{6}x + \frac{11}{6}y\right)^2$.
- Nên $\sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} \geq \sqrt{\left(\frac{7}{6}x + \frac{11}{6}y\right)^2} = \left|\frac{7}{6}x + \frac{11}{6}y\right| \geq \frac{7}{6}x + \frac{11}{6}y$.
- Tương tự $\sqrt{4x^2 + 3xy + 2y^2} \geq \sqrt{\left(\frac{11}{6}x + \frac{7}{6}y\right)^2} = \left|\frac{11}{6}x + \frac{7}{6}y\right| \geq \frac{11}{6}x + \frac{7}{6}y$.
- Cộng lại ta được: $\sqrt{2x^2 + 3xy + 4y^2} + \sqrt{4x^2 + 3xy + 2y^2} \geq 3(x+y)$ dấu bằng xảy ra khi $x = y \geq 0$.

Chú ý: Cách tìm các hệ số $\frac{7}{6}; \frac{11}{6}; \frac{23}{36}$ trên như sau:

$$\text{Do tính đối xứng nên giả sử: } \begin{cases} 2x^2 + 3xy + 4y^2 = (ax + by)^2 + c.(x-y)^2 \\ 4x^2 + 3xy + 2y^2 = (bx + ay)^2 + c.(x-y)^2 \end{cases}$$

Khai triển và đồng nhất hệ số ta có hệ số của x là

$$\begin{cases} a^2 + c = 2 \\ b^2 + c = 4 \\ a + b = 3 \text{ do VP} = 3(x+y) \end{cases}$$

Trừ từng vế (1) cho (2) và kết hợp với (3), ta được

$$a = \frac{7}{6}; b = \frac{11}{6}; c = \frac{23}{36}.$$

- PT (1) $\Leftrightarrow (4-x)\sqrt{x-2} + \sqrt{7-2x} = \sqrt{85-57x+13x^2-x^3}$
- PT (1) $\Leftrightarrow (4-x)\sqrt{x-2} + \sqrt{7-2x} = \sqrt{85-57x+13x^2-x^3}$
- $\Leftrightarrow (4-x)\sqrt{x-2} + \sqrt{7-2x} = \sqrt{(5-x)\left[(x-4)^2+1\right]}$ • Áp dụng bất đẳng thức bunhia copki ta có :
- Áp dụng bất đẳng thức bunhia copki ta có :
- $$VT^2 \leq \left[(4-x)^2+1^2\right] \cdot \left[(x-2)+(7-2x)\right] = \left[(4-x)^2+1^2\right] \cdot (5-x)$$
- $\Leftrightarrow (4-x)\sqrt{x-2} + \sqrt{7-2x} \leq \sqrt{(5-x)\left[(x-4)^2+1\right]}$ • Dấu bằng xảy ra khi
- $\Leftrightarrow \frac{4-x}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{7-2x}} \Leftrightarrow x=3$, nghiệm $(x;y) = (3;3)$
- Dấu bằng xảy ra khi $\Leftrightarrow \frac{4-x}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{7-2x}} \Leftrightarrow x=3$, nghiệm $(x;y) = (3;3)$
-

Bài 42: Giải phương trình: $3(2+\sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$.

Lần 1 – THPT ĐÔNG DU

Lời giải tham khảo

ĐK: $x \geq 2$

$$3(2+\sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6} \Leftrightarrow 2(x-3) + \sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-3) - \frac{8(x-3)}{\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2 - \frac{8}{\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x = \frac{11-3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy pt có tập nghiệm $S = \{3\}$

Bài 43: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+7} - \sqrt{5-x} \geq \sqrt{3x-2}$.

Lần 2 – THPT ĐÔNG DU

Lời giải tham khảo

+ ĐK: $\frac{2}{3} \leq x \leq 5$. Biến đổi PT về dạng

$$\sqrt{2x+7} \geq \sqrt{3x-2} + \sqrt{5-x}$$

+ Bình phương hai vế, đưa về được $3x^2 - 17x + 14 \geq 0$

+ Giải ra được $x \leq 1$ hoặc $x \geq \frac{14}{3}$

+ Kết hợp với điều kiện, nhận được $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ hoặc $\frac{14}{3} \leq x \leq 5$

Bài 44: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y + 2 = 0 \\ x^3 + x - 3 = 2\sqrt{x+2} + y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 3 – THPT ĐÔNG DU

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \geq -2$.

(1) $\Leftrightarrow x^3 + x + 2 = y^3 - 3y^2 + 4y \Leftrightarrow x^3 + x + 2 = (y-1)^3 + (y-1) + 2$. Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$ trên $[-2; +\infty)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$ trên $[-2; +\infty)$.

Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in [-2; +\infty)$.

Mà $f(t)$ liên tục trên $[-2; +\infty)$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[-2; +\infty)$.

Do đó: $x = y - 1$. Thay $y = x + 1$ và phương trình (2) ta được: $x^3 - 3 = 2\sqrt{x+2} + 1$

Thay $y = x + 1$ và phương trình (2) ta được: $x^3 - 3 = 2\sqrt{x+2} + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 8 = 2(\sqrt{x+2} - 2) \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) = \frac{2(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} + 2)}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) = \frac{2(x-2)}{(\sqrt{x+2} + 2)} \Leftrightarrow (x-2) \left[x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{(\sqrt{x+2} + 2)} \right] = 0$$

$$\bullet \quad x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$$

$$\bullet \quad x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{(\sqrt{x+2} + 2)} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = \frac{2}{(\sqrt{x+2} + 2)} \quad (*)$$

$$\text{Ta có } VT = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3; VP = \frac{2}{\sqrt{x+2} + 2} \leq 1, \forall x \in [-2; +\infty)$$

Do đó phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 3)$.

Bài 45: Giải bất phương trình: $\sqrt{x}(x+1) \geq x^3 - 5x^2 + 8x - 6 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lần 1 – THPT ĐỒNG GIA

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x\sqrt{x} + x \geq (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) + (x^2 - 4x + 4) - 2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^3 + x + \sqrt{x} \geq (x-2)^3 + (x-2)^2 + (x-2) \quad (2) \text{ Xét hàm số } f(t) = t^3 + t^2 + t, \text{ có } f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 > 0, \forall t.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + t$, có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 > 0, \forall t$.

Do đó hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, mặt khác (2) có dạng

$$f(\sqrt{x}) \geq f(x-2) \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq x-2 \quad (3). \quad \text{+) Với } 0 \leq x \leq 2 \text{ là nghiệm của (3).}$$

+) Với $0 \leq x \leq 2$ là nghiệm của (3).

+) Với $x > 2$, bình phương hai vế (3) ta được $x^2 - 5x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$

Kết hợp nghiệm ta được $2 < x \leq 4$ là nghiệm của (3).

Vậy nghiệm của (3) là $0 \leq x \leq 4$, cũng là nghiệm của bất phương trình (1).

Bài 46: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + 2y = 2y^2 + 2x & (1) \\ y\sqrt{x-y+1} + x = 2. & (2) \end{cases}$$

Lần 2 – THPT ĐỒNG XÒÀI

Lời giải tham khảo

ĐK: $x - y + 1 \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - y^2 + xy - y^2 + 2y - 2x = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + 2y - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y & (3) \\ x = 2 - 2y & (4) \end{cases}$$

• Từ (3) & (2) ta có $x=y=1$.

• Từ (4) & (2) ta có $\begin{cases} x = 2 - 2y \\ y\sqrt{3-3y} = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0; x = 2 \\ y = -\frac{1}{3}; x = \frac{8}{3} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm $(x; y) = (1; 1); (x; y) = (2; 0); (x; y) = \left(\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Bài 47: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1 = \sqrt{y-1} - \sqrt{x} \\ 3(\sqrt{6-y} + \sqrt{2x+3y-7}) = 2x+7 \end{cases}$$

Lần 1 – THPT ĐỒNG ĐẬU

Lời giải tham khảo

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 \leq y \leq 6 \\ 2x + 3y - 7 \geq 0 \end{cases}$.

Với điều kiện trên ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}} + (y-1-x)(y-1+x) + y(y-1-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-1-x) \left(\frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}} + y-1+x+y \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x+1 \\ \frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}} + y-1+x+y = 0 (*) \end{cases}$$

+ Với $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 \leq y \leq 6 \end{cases}$, suy ra phương trình (*) vô nghiệm

+ Với $y = x+1$ thay vào (2) ta được $3\sqrt{5-x} + 3\sqrt{5x-4} = 2x+7$ (3)

Điều kiện $\frac{4}{5} \leq x \leq 5$ ta có :

$$\begin{aligned}
 (3) &\Leftrightarrow 7-x-3\sqrt{5-x}+3(x-\sqrt{5x-4})=0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{(7-x)^2-9(5-x)}{7-x+3\sqrt{5-x}}+\frac{3(x^2-5x+4)}{x+\sqrt{5x-4}}=0 \\
 &\Leftrightarrow (x^2-5x+4)\left(\frac{1}{7-x+3\sqrt{5-x}}+\frac{3}{x+\sqrt{5x-4}}\right)=0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases} \\ \frac{1}{7-x+3\sqrt{5-x}}+\frac{3}{x+\sqrt{5x-4}}=0(VN) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x; y) = (1; 2)$ và $(x; y) = (4; 5)$

Bài 48: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^3 + xy^2 + x = 2y^3 + 4x^2y + 2y & (1) \\ \sqrt{4x^2 + x + 6} - 5\sqrt{1+2y} = 1-4y & (2) \end{cases}$$

Lần 1 – THPT ĐỨC THỌ

Lời giải tham khảo

(1) $\Leftrightarrow (x-2y)(2x^2+y^2+1)=0 \Leftrightarrow x=2y$. Thay vào (2) ta có phương trình

$$\sqrt{4x^2+x+6}+2x=1+5\sqrt{x+1} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+x+6}-(1-2x)=5\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+6}+1-2x}=\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ \sqrt{4x^2+x+6}+1-2x=\sqrt{x+1} \end{cases} \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4) ta được $2\sqrt{x+1}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2-8x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{2+\sqrt{7}}{2}$

Kết luận: Phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x=-1$; $x=\frac{2+\sqrt{7}}{2}$

Bài 49: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3-2y+1=0 & (1) \\ (3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0 & (2) \end{cases}$$

Lần 1 – THPT CAM LÂM

Lời giải tham khảo

Điều kiện $x \leq 2$ và $y \geq \frac{1}{2}$

$$(2) \Leftrightarrow [1+(2-x)]\sqrt{2-x}=[1+(2y-1)]\sqrt{2y-1}$$

Xét hàm số $f(t)=(1+t^2)t=t^3+t$

$f'(t)=3t^2+1>0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số tăng trên $\mathbb{R}$

$$(2) \Leftrightarrow f(\sqrt{2-x})=f(\sqrt{2y-1}) \Leftrightarrow \sqrt{2-x}=\sqrt{2y-1} \Leftrightarrow 2-x=2y-1$$

$$\Leftrightarrow 2y=3-x$$

Thay vào (1): $x^3+x-2=0 \Leftrightarrow x=1$. Nghiệm của hệ (1;1)

Bài 50: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^5 + xy^4 = y^{10} + y^6 \\ \sqrt{4x+5} + \sqrt{y^2+8} = 6 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 2 – THPT CAM LÂM

Lời giải tham khảo

ĐK: $x \geq -\frac{5}{4}$

Nếu $y = 0$ thì từ phương trình (1) ta suy ra $x = 0$,

thế vào phương trình (2) ta thấy không thỏa mãn, vậy y khác 0. $\odot$

Đặt $x = ky$ ($k \in \mathbb{R}$) ta được (1) trở thành

$$k^5 y^5 + ky^5 = y^{10} + y^6 \Leftrightarrow k^5 + k = y^5 + y \quad (3).$$

Xét hàm số $f(t) = t^5 + t$ trên $\mathbb{R}$, ta có $f'(t) = 5t^4 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$,

$$\text{vậy } (3) \Leftrightarrow f(k) = f(y) \Leftrightarrow k = y \Rightarrow x = y^2. \odot \text{Thế vào (2) ta được}$$

Thế vào (2) ta được

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6 \Leftrightarrow 5x+13 + 2\sqrt{4x^2+37x+40} = 36$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4x^2+37x+40} = 23-5x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 23-5x \geq 0 \\ 16x^2+148x+160 = 25x^2-230x+529 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x \leq 23 \\ 9x^2-378x+369=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{23}{5} \\ x=1 \\ x=41 \end{cases} \quad \odot$$

Với $x=1$ thì $y = \pm 1$.

Vậy cặp nghiệm của hệ phương trình: $(x, y) = (1; 1); (x, y) = (1; -1) \odot$

Bài 51: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} = x+y & (1) \\ x\sqrt{2xy+5x+3} = 4xy-5x-3 & (2) \end{cases}$$

Lần 1 – THPT GDTX NHA TRANG

Lời giải tham khảo

Ta có

$$\frac{x^2+y^2}{2} = \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 \geq \frac{1}{4}(x+y)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{1}{2}|x+y| \geq \frac{1}{2}(x+y) \quad (3)$$

$$\text{và } \frac{x^2 + xy + y^2}{3} = \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{12}(x-y)^2 \geq \frac{1}{4}(x+y)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}} \geq \frac{1}{2}|x+y| \geq \frac{1}{2}(x+y) \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}} \geq x + y$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ và $x + y \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x = y \text{ và } x \geq 0.$$

Thay $y = x$ vào phương trình (2) ta được: $x\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = 4x^2 - 5x - 3 \quad (2')$.

+ Với $x = 0$ thì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (2').

$$+ \text{ Với } x > 0 \text{ thì } (2') \Leftrightarrow \sqrt{2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}} = 4 - \left(\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}, \quad (t \geq 0),$$

ta có phương trình: $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -3$ (loại)

$$- \text{ Với } t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}} = 2 \Leftrightarrow 2 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2} \text{ (loại)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (3; 3)$.

Bài 52: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x+y) + y^2 = 4x - 1 \\ x(x+y)^2 - 2y^2 = 7x + 2 \end{cases}$$

Lần 2 – THPT GDTX NHA TRANG

Lời giải tham khảo

+ nhận thấy $x=0$ không thỏa

$$+ \text{ Khi } x \neq 0 \text{ ta có hệ tương đương } \begin{cases} x + y + \frac{y^2 + 1}{x} = 4 \\ (x+y)^2 - 2\frac{y^2 + 1}{x} = 7 \end{cases}$$

$$+ \text{ Đặt } \begin{cases} x + y = a \\ \frac{y^2 + 1}{x} = b \end{cases} \text{ ta có hệ phương trình } \begin{cases} a + b = 4 \\ a^2 - 2b = 7 \end{cases}$$

$$\text{giải ra ta có } \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -5 \\ b = 9 \end{cases} \textcircled{*}$$

$$+ \text{ Từ đó tìm được } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ y = -2 \end{cases}$$

Bài 53: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 2x^3(2-y)\sqrt{3-2y} & (1) \\ \sqrt{x+2} = \sqrt[3]{14-x}\sqrt{3-2y} + 1 & (2) \end{cases}$$

Lời giải tham khảo

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của hệ, chia cả hai vế của (1) cho x^3 ta được

$$(1) \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 2(2-y)\sqrt{3-2y}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) = (3-2y)\sqrt{3-2y} + \sqrt{3-2y} \quad (*)$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + t$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$(*) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = \sqrt{3-2y} \quad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta được $\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{15-x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} - 3 + 2 - \sqrt[3]{15-x} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-7) \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+2}+3} + \frac{1}{4-2\sqrt[3]{x+15}+(\sqrt[3]{x+15})^2}}_{>0} \right) = 0$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(7; \frac{111}{98}\right)$.

Bài 54: Giải phương trình: $\sqrt{5+x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{5-4x-x^2} = \frac{x}{2} + \sqrt{x+6}$.

Lần 1 – THPT HOÀNG HOA THÁM

Lời giải tham khảo

ĐK: $-5 \leq x \leq 1$, đặt $y = \sqrt{5+x} + \sqrt{1-x} \geq 0$, PT $\Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 + y - 3 = \frac{1}{2}(\sqrt{x+6})^2 + \sqrt{x+6} - 3$ (*)

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}t^2 + t - 3, t \geq 0, f'(t) = t + 1 > 0, \forall t \geq 0$ nên hàm số luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$(*) \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{x+6})$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{x+6} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{41}-8}{5} \text{ (thỏa đk)}$$

Bài 55: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2(4x^3 - y^3) + 12x^2 + y^2 + 2x(y^2 + 3) + 1 = 0 \\ \sqrt{y+2} \cdot \sqrt[3]{x+5} = x^2 + x - 6 \end{cases}$$

Lần 2 – THPT HOÀNG HOA THÁM

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $y \geq -2$

Từ phương trình: $\Rightarrow (8x^3 + 12x^2 + 6x + 1) + y^2(2x + 1) - 2y^3 = 0$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^3 - y^3 + (2x+1)y^2 - y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1-y) \left[(2x+1)^2 + y(2x+1) + 2y^2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1-y) \left[(2x+1+\frac{y}{2})^2 + \frac{7y^2}{4} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x+1 \\ (2x+1+\frac{y}{2})^2 + \frac{7y^2}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Với } \left(2x+1+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{7y^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1+\frac{y}{2} = 0 \\ \frac{7y^2}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Thay vào phương trình $\sqrt{y+2}\sqrt[3]{x+5} = x^2 + x - 6 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6$ vô lý.

Với $y = 2x+1$

Suy ra: $\sqrt{2x+1}\sqrt[3]{x+5} = x^2 + x - 6$ Điều kiện: $\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x^2 + x - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 - \sqrt{2x+1}\sqrt[3]{x+5} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{2x+1})\sqrt[3]{x+5} + x(x - \sqrt[3]{x+5}) + 2x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - 2x - 3)\sqrt[3]{x+5}}{x + \sqrt{2x+1}} + \frac{x(x^3 - 3x^2 + 2x - 6)}{(x-1)^2 + (x-1)\sqrt[3]{x+5} + (\sqrt[3]{x+5})^2} + 2x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left[\frac{(x+1)\sqrt[3]{x+5}}{x + \sqrt{2x+1}} + \frac{x(x^2 + 2)}{\left(\sqrt[3]{x+5} + \frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{3(x-1)^2}{4}} + 2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{Vì } x \geq 2 \Rightarrow \frac{(x+1)\sqrt{2x+1}}{x + \sqrt{2x+1}} + \frac{x(x^2 + 2)}{\left(\sqrt[3]{x+5} + \frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{3(x-1)^2}{4}} + 4 > 0.$$

KẾT LUẬN:

Bài 56: Giải bất phương trình: $\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} > \frac{x-1}{x}.$

Lần 1 – THPT HỒNG LĨNH

Lời giải tham khảo

)+ĐK: $x \in [-1; 0) \cup [1; +\infty)$

Lúc đó: VP của (1) không âm nên (1) chỉ có nghiệm khi:

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} > \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \Rightarrow x - \frac{1}{x} > 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow x > 1. \text{ Vậy (1) chỉ có nghiệm trên } (1; +\infty).$$

$$\text{Trên } (1; +\infty): (1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 1 > \sqrt{\frac{x-1}{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} > 1.$$

Do $x+1-\frac{x-1}{x}=\frac{x^2+1}{x}>0$ khi $x>1$ nên:

$$(1) \quad \Leftrightarrow x+1+\frac{x-1}{x}-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}>1 \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}+1>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x}-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}+1>0 \Leftrightarrow (\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}-1)^2>0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy nghiệm BPT là: $\begin{cases} x>1 \\ x \neq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Bài 57: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 6x^3+3x^2+y=y^2+xy(3x-2) \\ \sqrt{4x^2-y-2}+\sqrt{x-1}=y-1 \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT HỒNG QUANG

Lời giải tham khảo

HD: Coi phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn y , gán $x=1000$ rồi bấm nghiệm ta được phân tích nhân dạng nhân tử: $(1) \Leftrightarrow (y+3x^2)(y-2x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3x^2 \\ y=2x+1 \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có: $y \geq 1$ nên $y=-3x^2$ không thỏa mãn.

Thay $y=2x+1$ vào phương trình (2) ta được $\sqrt{4x^2-2x-3}+\sqrt{x-1}=2x$

Khảo sát casio thấy $x=2$ là nghiệm đơn nên có thể truy ngược dấu để liên hợp, hoặc bình phương liên tiếp khử căn.

ĐS: $x=2 \Rightarrow y=5$

Bài 58: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (\sqrt{2016+x^2}+x)(\sqrt{504+y^2}+y)=1008 \\ x\sqrt{6x-4xy+1}=8xy+6x+1 \end{cases}.$$

Lần 2 – THPT HỒNG QUANG

Lời giải tham khảo

HD: Phương trình (1) tương đương:

$$\sqrt{2016+x^2}+x=\sqrt{2016+(-2y)^2}+(-2y)$$

$$\Leftrightarrow y=-\frac{x}{2}$$

(Chú ý: $\sqrt{x^2+a}>|x| \geq x \Rightarrow \sqrt{x^2+a}-x>0$ ($a>0$) để đảm bảo khác 0 khi liên hợp).

Thay vào (2):

$$\begin{aligned}
 & x\sqrt{2x^2 + 6x + 1} + 4x^2 - 6x - 1 = 0 \\
 & \Leftrightarrow \frac{25x^2}{4} - \left(\sqrt{2x^2 + 6x + 1} - \frac{x}{2} \right)^2 = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 + 6x + 1} = 3x \\ \sqrt{2x^2 + 6x + 1} = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3 + \sqrt{11}}{2} \end{cases} \\
 & \text{ĐS: } (x; y) = \left\{ \left(1; -\frac{1}{2} \right); \left(\frac{3 - \sqrt{11}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{11}}{4} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Bài 59: Giải phương trình: $(x^2 - x - 6)\sqrt{x-1} + (x-2)\sqrt{x+1} \geq 3x^2 - 9x + 2$.

Lần 3 – THPT HÙNG VƯƠNG – BÌNH PHƯỚC

Lời giải tham khảo

$$\begin{aligned}
 pt & \Leftrightarrow (x^2 - x - 6)(\sqrt{x-1} - 1) + (x-2)(\sqrt{x+1} - 2) \geq 2x^2 - 10x + 12 \\
 & \Leftrightarrow \frac{(x^2 - x - 6)(x-2)}{\sqrt{x-1} + 1} + \frac{(x-2)(x-3)}{\sqrt{x+1} + 2} \geq 2x^2 - 10x + 12 \\
 & \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 5x + 6)(x+2)}{\sqrt{x-1} + 1} + \frac{(x^2 - 5x + 6)}{\sqrt{x+1} + 2} \geq 2(x^2 - 5x + 6) \\
 & \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 6) \left[\frac{x+2}{\sqrt{x-1} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} - 2 \right] \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 6) \left[\frac{(\sqrt{x-1} - 1)^2}{\sqrt{x-1} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} \right] \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow x \in [1; 2] \cup [3; +\infty)
 \end{aligned}$$

Bài 60: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 3\sqrt{xy + x - y^2 - y} = 5y + 4 \\ \sqrt{4y^2 - x - 2} + \sqrt{y-1} = x-1 \end{cases}$$

Lần 1 – THPT KHÁNH SƠN

Lời giải tham khảo

$$\text{Đk: } \begin{cases} xy + x - y^2 - y \geq 0 \\ 4y^2 - x - 2 \geq 0 \\ y - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow x - y + 3\sqrt{(x-y)(y+1)} - 4(y+1) = 0$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x-y}, v = \sqrt{y+1} \quad (u \geq 0, v \geq 0)$$

$$\text{Khi đó (1) trở thành: } u^2 + 3uv - 4v^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = -4v(vn) \end{cases} \text{ Với } u = v \text{ ta có } x = 2y + 1, \text{ thay vào (2)}$$

$$\text{ta được: } \sqrt{4y^2 - 2y - 3} + \sqrt{y-1} = 2y$$

Với $u = v$ ta có $x = 2y + 1$, thay vào (2) ta được : $\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + \sqrt{y - 1} = 2y$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4y^2 - 2y - 3} - (2y - 1) + (\sqrt{y - 1} - 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(y - 2)}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{y - 2}{\sqrt{y - 1} + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 2) \left(\frac{2}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{1}{\sqrt{y - 1} + 1} \right) = 0$$

$$\frac{2(y - 2)}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{y - 2}{\sqrt{y - 1} + 1} = 0 \Leftrightarrow (y - 2) \left(\frac{2}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{1}{\sqrt{y - 1} + 1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \text{ (vì } \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{1}{\sqrt{y - 1} + 1} > 0 \forall y \geq 1)$$

Với $y = 2$ thì $x = 5$. Đối chiếu Đk ta được nghiệm của hệ PT là $(5; 2)$

Bài 61: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 8\sqrt{2x-1}(2x-\sqrt{2x-1}) = y(y^2-2y+4) \\ 4xy + 2\sqrt{(y+2)(y+2x)} = 5y + 12x - 6 \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$$

Lần 1 – THPT KHOÁI CHÂU

Lời giải tham khảo

ĐK: $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ (y+2)(y+2x) \geq 0 \end{cases}$. Từ pt (1) $\Rightarrow$ để pt có nghiệm thì $y \geq 0$

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow (2\sqrt{2x-1})^3 - 2(2\sqrt{2x-1})^2 + 4(2\sqrt{2x-1}) = y^3 - 2y^2 + 4y \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t^2 + 4t$ ($t \geq 0$) có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 4 = 2t^2 + (t-2)^2 > 0 \quad \forall t \geq 0$ nên $f(t)$ luôn đồng biến. Từ pt (*) $\Rightarrow f(2\sqrt{2x-1}) = f(y) \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = y$

$$\text{Từ pt (*)} \Rightarrow f(2\sqrt{2x-1}) = f(y) \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = y$$

Thay vào pt (2) ta được pt $y^3 + 2(y+2)\sqrt{y+2} = 3y(y+2)$. Đặt $z = \sqrt{y+2}$ ta được pt

$$y^3 + 2z^3 = 3yz^2 \Leftrightarrow (y-z)^2(y+2z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z & (\text{loại}) \\ y = z & (t/m) \end{cases}$$

$$\text{Đặt } z = \sqrt{y+2} \text{ ta được pt } y^3 + 2z^3 = 3yz^2 \Leftrightarrow (y-z)^2(y+2z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z & (\text{loại}) \\ y = z & (t/m) \end{cases}$$

Với $y = z$ ta được $y = \sqrt{y+2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1$ (t/m)

Bài 62: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = \sqrt{4x-y} & (1) \\ \sqrt{x^2-9} = 3\sqrt{y-3x+3} - 2 & (2) \end{cases}$$

Lần 1 – THPT KINH MÔN

Lời giải tham khảo

$$\text{Đk: } \begin{cases} y \geq 0; x \geq \sqrt{y}; 4x \geq y \\ x^2 \geq 9; y \geq 3x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 3; y \geq 0 \\ \frac{y+3}{3} \geq x \geq \sqrt{y}; 4x \geq y; \end{cases}$$

Từ (1) suy ra VT(1) ≥ 0 nên bình phương hai vế ta có :

$$2x - 2\sqrt{x^2 - y} = 4x - y \Leftrightarrow y - 2x = 2\sqrt{x^2 - y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2x \\ y^2 - 4xy + 4x^2 = 4(x^2 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2x \\ y = 0(I) \\ y = 4x - 4 \end{cases}$$

Thay $y = 4x - 4$ vào (2) ta có: $\sqrt{x^2 - 9} = 3\sqrt{x - 1} - 2$ (3) Giải (3):

$$(3) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 9} - 4 = 3(\sqrt{x - 1} - 2) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 - 9} + 4} = \frac{3(x - 5)}{(\sqrt{x - 1} + 2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \Rightarrow y = 16 \\ \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 - 9} + 4} = \frac{3}{(\sqrt{x - 1} + 2)} \end{cases} (4)$$

Do $x \geq 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 9} < x \Rightarrow \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 - 9} + 4} > \frac{x + 5}{x + 4} > 1$ và $\frac{3}{(\sqrt{x - 1} + 2)} < 1 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow x > 2$ luôn

đúng khi $x \geq 3$ nên (4) vô nghiệm.

Vậy $x = 5$; $y = 16$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

Bài 63: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 3\sqrt{xy + x - y^2 - y} = 5y + 4 \\ \sqrt{4y^2 - x - 2} + \sqrt{y - 1} = x - 1 \end{cases}$$

Lần 1 – THPT LAM KINH

Lời giải tham khảo

$$\text{Đk: } \begin{cases} xy + x - y^2 - y \geq 0 \\ 4y^2 - x - 2 \geq 0 \\ y - 1 \geq 0 \end{cases} \quad . \text{ Ta có (1)} \Leftrightarrow x - y + 3\sqrt{(x - y)(y + 1)} - 4(y + 1) = 0$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x - y}, v = \sqrt{y + 1} \quad (u \geq 0, v \geq 0)$$

$$\text{Khi đó (1) trở thành: } u^2 + 3uv - 4v^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = -4v(vn) \end{cases}$$

Với $u = v$ ta có $x = 2y + 1$, thay vào (2) ta được: $\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + \sqrt{y - 1} = 2y$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4y^2 - 2y - 3} - (2y - 1) + (\sqrt{y - 1} - 1) = 0 \quad \frac{2(y - 2)}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{y - 2}{\sqrt{y - 1} + 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 2) \left(\frac{2}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{1}{\sqrt{y - 1} + 1} \right) = 0 \Leftrightarrow y = 2$$

$$\Leftrightarrow y = 2$$

$$(vì \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{1}{\sqrt{y - 1} + 1} > 0 \forall y \geq 1)$$

Với $y = 2$ thì $x = 5$. Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của hệ PT là $(5; 2)$

Bài 64: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy - 5x + y + 2 = \sqrt{y - 2x + 1} - \sqrt{3 - 3x} \\ x^2 - y - 1 = \sqrt{4x + y + 5} - \sqrt{x + 2y - 2} \end{cases}$$

Lần 2 – THPT LÊ LỢI

Lời giải tham khảo

* ĐK: $y - 2x + 1 \geq 0, 4x + y + 5 \geq 0, x + 2y - 2 \geq 0, x \leq 1$

* Xét trường hợp: $\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ 3 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -1 = \sqrt{10} - 1 \end{cases}$ (Không TM hệ)

* Xét trường hợp: $x \neq 1, y \neq 1$. Đưa PT(1) về dạng tích ta được

$$(x + y - 2)(2x - y - 1) = \frac{x + y - 2}{\sqrt{y - 2x + 1} + \sqrt{3 - 3x}}$$

$$(x + y - 2) \left[\frac{1}{\sqrt{y - 2x + 1} + \sqrt{3 - 3x}} + y - 2x + 1 \right] = 0. \text{ Do } y - 2x + 1 \geq 0$$

$$\text{nên } \frac{1}{\sqrt{y - 2x + 1} + \sqrt{3 - 3x}} + y - 2x + 1 > 0 \Rightarrow x + y - 2 = 0$$

* Thay $y = 2 - x$ vào PT(2) ta được $x^2 + x - 3 = \sqrt{3x + 7} - \sqrt{2 - x}$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = \sqrt{3x + 7} - 1 + 2 - \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = \frac{3x + 6}{\sqrt{3x + 7} + 1} + \frac{2 + x}{2 + \sqrt{2 - x}}$$

$$\Leftrightarrow (x + 2) \left[\frac{3}{\sqrt{3x + 7} + 1} + \frac{1}{2 + \sqrt{2 - x}} + 1 - x \right] = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$$

$$(vì x \leq 1 \text{ nên } \frac{3}{\sqrt{3x + 7} + 1} + \frac{1}{2 + \sqrt{2 - x}} + 1 - x > 0)$$

* $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 4$ (TMĐK). Nghiệm của hệ là $(x; y) = (-2; 4)$

Bài 65: Giải hệ phương trình:
$$\sqrt{7x^2 + 25x + 19} - \sqrt{x^2 - 2x - 35} = 7\sqrt{x + 2}.$$

Lần 1 – THPT LÊ LỢI

Lời giải tham khảo

Điều kiện $x \geq 7$

Phương trình tương đương $\sqrt{7x^2 + 25x + 19} = 7\sqrt{x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x - 35}.$

Bình phương 2 vế suy ra: $3x^2 - 11x - 22 = 7\sqrt{(x + 2)(x + 5)(x - 7)}$

$$3(x^2 - 5x - 14) + 4(x + 5) = 7\sqrt{(x + 5)(x^2 - 5x - 14)}$$

Đặt $a = \sqrt{x^2 - 5x - 14}; b = \sqrt{x + 5}. (a, b \geq 0)$ Khi đó ta có phương trình

$$3a^2 + 4b^2 = 7ab \Leftrightarrow 3a^2 - 7ab + 4b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 3a = 4b \end{cases}$$

Với $a = b$ suy ra $x = 3 + 2\sqrt{7} (t/m); x = 3 - 2\sqrt{7} (l).$

Với $3a = 4b$ suy ra $x = \frac{61 + \sqrt{11137}}{18} (t/m); x = \frac{61 - \sqrt{11137}}{18} (l)$.

Đs: $x = 3 + 2\sqrt{7}; x = \frac{61 + \sqrt{11137}}{18}$.

Bài 66: Giải hệ phương trình: $\frac{3(x^2 + 2x - 3)}{\sqrt{x+4} - 1} - \frac{7x^2 - 19x + 12}{\sqrt{12-7x}} = 16x^2 + 11x - 27$.

Lần 1 – THPT LÊ QUÝ ĐÔN

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} -4 \leq x < \frac{12}{7} \\ x \neq -3 \end{cases} (*)$

$(1) \Leftrightarrow (x-1)(3\sqrt{x+4} + \sqrt{12-7x} - 16x - 24) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3\sqrt{x+4} + \sqrt{12-7x} - 16x - 24 = 0 \end{cases} (2)$

$(2) \Leftrightarrow 3\sqrt{x+4} + \sqrt{12-7x} = 9(\sqrt{x+4})^2 - (\sqrt{12-7x})^2$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+4} + \sqrt{12-7x} = (3\sqrt{x+4} + \sqrt{12-7x})(3\sqrt{x+4} - \sqrt{12-7x})$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x+4} - \sqrt{12-7x} = 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x+4} = \sqrt{12-7x} + 1$

$\Leftrightarrow 9(x+4) = 12-7x+1+2\sqrt{12-7x}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{12-7x} = 16x+23 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{23}{16} \leq x < \frac{12}{7} \\ 48-28x = 256x^2 + 736x + 529 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{23}{16} \leq x < \frac{12}{7} \\ 256x^2 + 764x + 481 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{23}{16} \leq x < \frac{12}{7} \\ x = \frac{-382 \pm 6\sqrt{633}}{256} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-382 + 6\sqrt{633}}{256}$

Kết luận nghiệm của phương trình là: $x = 1, x = \frac{-382 + 6\sqrt{633}}{256}$

Bài 67: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{xy+x+3y+3} + x+1 = 2y + \sqrt{y+1} \\ (x-3)(y+1) = (y-1)(x^2-2x+3)(\sqrt{x+1}-2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$

Lần 3 – THPT LƯƠNG TÀI 2

Lời giải tham khảo

Pt(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)(y+1)} + x - 2y + 1 = \sqrt{y+1}$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+3} \\ b = \sqrt{y+1} \end{cases} (a, b \geq 0)$, (1) trở thành: $a^2 - 2b^2 + ab + a - b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + 2b + 1 = 0 \end{cases}$

+ $a + 2b + 1 = 0$ vô nghiệm do $a, b \geq 0$

+ Xét $a = b \Rightarrow y = x + 2$ thay vào (2) ta được:

$(x-3)(x+3) = (x+1)(x^2-2x+3)(\sqrt{x+1}-2)$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+3) = (x+1)(x^2 - 2x + 3) \cdot \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \Rightarrow y=5(tm) \\ (x+3)(\sqrt{x+1}+2) = (x+1)(x^2 - 2x + 3) (*) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \left[(\sqrt{x+1})^2 + 2 \right] (\sqrt{x+1}+2) = [(x-1)+2] [(x-1)^2 + 2]$$

Xét hàm số $f(t) = (t+2)(t^2+2)$, $t \geq 0$ có $f'(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ đồng biến mà $f(\sqrt{x+1}) = f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=5$$

Vậy hpt có nghiệm: (3;5)

Bài 68: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy - y^2 + 2y - x - 1 = \sqrt{y-1} - \sqrt{x} \\ 3\sqrt{6-y} + 3\sqrt{2x+3y-7} = 2x+7 \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT LÝ THÁI TỔ

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \geq 0, 1 \leq y \leq 6, 2x+3y-7 \geq 0$ (*)

Nhận thấy $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ không là nghiệm của hệ phương trình $\Rightarrow \sqrt{y-1} + \sqrt{x} \neq 0$ ☉ Khi đó,

$$PT(1) \Leftrightarrow x(y-1) - (y-1)^2 = \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}}$$

$$\text{Khi đó, } PT(1) \Leftrightarrow x(y-1) - (y-1)^2 = \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow (y-1)(x-y+1) = \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1) \left(y-1 + \frac{1}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-y+1=0 \Leftrightarrow y=x+1 \text{ (do *)}$$

Thay vào PT (2) ta được: $3\sqrt{5-x} + 3\sqrt{5x-4} = 2x+7$ ĐK: $4/5 \leq x \leq 5$ (**)

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{5-x} - (7-x) + 3(\sqrt{5x-4} - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4+5x-x^2}{3\sqrt{5-x} + (7-x)} + \frac{3(-4+5x-x^2)}{\sqrt{5x-4} + x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-4+5x-x^2) \left(\frac{1}{3\sqrt{5-x} + (7-x)} + \frac{3}{\sqrt{5x-4} + x} \right) = 0 \text{ ☉}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0 \text{ (do (**))}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0 \text{ (do (**))}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=4 \Rightarrow y=5 \end{cases} \text{ (thỏa mãn (*), (**))}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: (1;2), (4;5).

Bài 69: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^3 + 20x^2 + 4x} + 4x \leq 2x\sqrt{x} + 4\sqrt{x}$.

Lần1 – THPT LÝ THƯỜNG KIỆT

Lời giải tham khảo

$$: pt \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x^2 + 20x + 4} + \sqrt{x} - 2x - 4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x^2 + 20x + 4} + \sqrt{x} - 2x - 4 \leq 0, \quad (*) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{4}{x} + 20} + 1 - 2\left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) \leq 0; \text{Đặt } t = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}; t \geq 2\sqrt{2}$$

$$\text{Ta được bất phương trình } \begin{cases} t \geq \frac{1}{2} \\ 3t^2 - 4t - 15 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 3$$

Đáp số: $S = [0;1] \cup [4; +\infty)$

Bài 70: Giải phương trình: $\frac{2x^5 + 3x^4 - 14x^3}{\sqrt{x+2}} = (4x^4 + 14x^3 + 3x^2 + 2)\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x+2}}\right)$.

Lần 2 – THPT BLÝ THÁI TỔ

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x > -2$ (*).

$$PT \Leftrightarrow x^3(2x^2 + 3x - 14) = (4x^4 + 14x^3 + 3x^2 + 2)(\sqrt{x+2} - 2)$$

$$\Leftrightarrow x^3(x-2)(2x+7)(\sqrt{x+2}+2) = (4x^4 + 14x^3 + 3x^2 + 2)(x+2-4)$$

$$\Leftrightarrow x^3(x-2)(2x+7)(\sqrt{x+2}+2) = (4x^4 + 14x^3 + 3x^2 + 2)(x-2) \quad \textcircled{*}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ (thỏa mãn (*))} \\ x^3(2x+7)(\sqrt{x+2}+2) = 4x^4 + 14x^3 + 3x^2 + 2 \quad (1) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x^3(2x+7)\sqrt{x+2} + 4x^4 + 14x^3 = 4x^4 + 14x^3 + 3x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow x^3(2x+7)\sqrt{x+2} = 3x^2 + 2$$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow x \neq 0$.

$$\text{Khi đó, } PT \Leftrightarrow (2x+4+3)\sqrt{x+2} = \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+2)\sqrt{x+2} + 3\sqrt{x+2} = \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x} \quad (2)$$

Xét hàm số: $f(t) = 2t^3 + 3t$ với $t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = 6t^2 + 3 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(2) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+2}) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x\sqrt{x+2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x+1)(x^2 + x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn (*))}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x = 2$.

Bài 71: Giải hệ phương trình: $5(1+\sqrt{1+x^3}) = x^2(4x^2-25x+18)$.

Lần 1 – THPT MARIE – CURIE

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \geq -1$.

$$5(1+\sqrt{1+x^3}) = x^2(4x^2-25x+18)$$

$$\Leftrightarrow 5+5\sqrt{1+x^3} = 4x^4-25x^3+18x^2$$

$$\Leftrightarrow 25x^3+25+5\sqrt{1+x^3} = 4x^4+18x^2+20$$

$$\Leftrightarrow 25(x^3+1)+5\sqrt{1+x^3} = (4x^4+16x^2+16)+2x^2+4$$

$$\Leftrightarrow (5\sqrt{1+x^3})^2 + 5\sqrt{1+x^3} = (2x^2+4)^2 + 2x^2+4 \quad (1)$$

Hàm số $f(t) = t^2 + t$ đồng biến trên $[0; +\infty)$ nên

$$(1) \Leftrightarrow f(5\sqrt{1+x^3}) = f(2x^2+4)$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{1+x^3} = 2(x^2+2)$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} = 2[(x+1)+(x^2-x+1)] \quad (2)$$

Đặt: $u = \sqrt{x+1} \geq 0$ và $v = \sqrt{x^2-x+1} > 0$

$$(2) \text{ thành: } 5uv = 2(u^2+v^2) \Leftrightarrow 2\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 5\left(\frac{u}{v}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u}{v} = 2 \\ \frac{u}{v} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } \frac{u}{v} = 2: \sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 4x^2-5x+3=0 \end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{Với } \frac{u}{v} = \frac{1}{2}: 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2-5x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}.$$

Phương trình có hai nghiệm: $x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

Bài 72: Giải bất phương trình:

$$(x+2)(x-2\sqrt{2x+5})-9 \leq (x+2)(3\sqrt{x^2+5}-x^2-12)+\sqrt[3]{5x^2+7}.$$

Lần 3 – THPT MINH CHÂU

Lời giải tham khảo

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(x^2 + 5x + 9 - \frac{4(x+2)}{\sqrt{2x+5}+3} - \frac{3(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5}+3} - \frac{5(x+2)}{9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+(\sqrt[3]{5x^2+7})^2} \right) \leq 0(*) \text{ Ta có với}$$

$$x \geq -\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4(x+2)}{\sqrt{2x+5}+3} \leq \frac{4}{3}(x+2); \frac{3(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5}+3} < \frac{3}{5}(x+2)^2 \\ \frac{5(x+2)}{9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+(\sqrt[3]{5x^2+7})^2} < \frac{5(x+2)}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x + 9 - \frac{4(x+2)}{\sqrt{2x+5}+3} - \frac{3(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5}+3} - \frac{5(x+2)}{9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+(\sqrt[3]{5x^2+7})^2} >$$

$$\frac{18x^2 + 57x + 127}{45} > 0, \forall x \geq -\frac{5}{2}$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow x-2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$, kết hợp với điều kiện $x \geq -\frac{5}{2}$

ta suy ra bất phương trình đã cho có nghiệm là $-\frac{5}{2} \leq x \leq 2$

Bài 73: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^3 + xy^2 + x = 2y^3 + 4x^2y + 2y \\ \frac{2y^2 - x - 2y - 16}{x^2 - 8y + 7} = \left(y + \frac{1}{2}\right)(\sqrt{x+1} - 3) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 2 – THPT MINH CHÂU

Lời giải tham khảo

+) ĐKXD: $x \geq -1$ (*)

+) $pt(1) \Leftrightarrow (x-2y) + (2x^3 - 4x^2y) + (xy^2 - 2y^3) = 0 \Leftrightarrow (x-2y)(1+2x^2+y^2) = 0 \Leftrightarrow x=2y$

Vì $1+2x^2+y^2 > 0, \forall x, y$ Thế vào (2) được:

$$\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2 - x - x - 16}{x^2 - 4x + 7} = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)(\sqrt{x+1} - 3) \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x - 32}{x^2 - 4x + 7} = (x+1)(\sqrt{x+1} - 3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-8)(x+4)}{x^2 - 4x + 7} = \frac{(x+1)(x-8)}{\sqrt{x+1}+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ \frac{x+4}{x^2 - 4x + 7} = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}+3} \end{cases} \quad (3)$$

+) $x=8 \Rightarrow y=4$ (tm). $\circledast$ +) $pt(3) \Leftrightarrow (\sqrt{x+1}+3)(x+4) = (x+1)(x^2 - 4x + 7)$

+) $pt(3) \Leftrightarrow (\sqrt{x+1}+3)(x+4) = (x+1)(x^2 - 4x + 7)$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}+3)\left[(\sqrt{x+1})^2 + 3\right] = [(x-2)+3] \cdot [(x-2)^2 + 3] \quad (4)$$

+) Xét hàm số $f(t) = (t+3)(t^2+3)$ với $t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 3(t+1)^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$

nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+) Mà $pt(4)$ có dạng: $f(\sqrt{x+1}) = f(x-2)$

$$\begin{aligned} \text{Do đó (4)} &\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x+1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \quad (\text{T/M}) \end{aligned}$$

$$\text{+) Với } x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{11+\sqrt{13}}{4}$$

$$\text{Vậy hệ đã cho có tập nghiệm } (x; y) \text{ là: } T = \left\{ (8; 4); \left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{11+\sqrt{13}}{4} \right) \right\}$$

Bài 74: Giải hệ phương trình: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} \leq 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16.$

Lần 1 – THPT NAM DUYÊN HÀ

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \geq -1.$

$$\text{Bpt (1) tương đương: } \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} \leq \left(\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} \right)^2 - 20$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}, t > 0$$

$$\text{Bpt trở thành: } t^2 - t - 20 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 5 \\ t \leq -4 \end{cases}. \text{ Đối chiếu đk được } t \geq 5.$$

$$\text{Với } t \geq 5, \text{ ta có: } \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} \geq 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x+3} \geq -3x+21$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x+21 < 0 \\ 2x^2+5x+3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x+21 \geq 0 \\ x^2-146x+429 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 7 \\ 3 \leq x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq -1$ suy ra tập nghiệm bất pt là: $S = [3; +\infty)$

Bài 75: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x+2)\sqrt{x^2+4x+7} + y\sqrt{y^2+3} + x + y + 2 = 0 \\ \sqrt{x^2+y+1} = x - y + 1 \end{cases}.$

Lần 1 – THPT NGHỀ NHA TRANG

Lời giải tham khảo

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t\sqrt{t^2+3} + t \text{ Có } f'(t) = \sqrt{t^2+3} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}} + 1 > 0 \quad \forall t$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ Phương trình (1) $\Leftrightarrow x+2 = -y$ Thay vào (2) ta có

Thay vào (2) ta có

$$\sqrt{x^2 - x - 1} = 2x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x^2 - x - 1 = 4x^2 + 12x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x^2 - x - 1 = 4x^2 + 12x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 3x^2 + 13x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ \begin{cases} x = -1 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -1 \quad (\text{tmdk}) \\ x = -\frac{10}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (-1; -1)$.[⊗]

Bài 76: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(3x + 2y)(x + 1) = 12 \\ x^2 + 4x + 2y - 8 = 0 \end{cases}.$$

Lần 2 – THPT NGHỀ NHA TRANG

Lời giải tham khảo

TA CÓ:
$$\begin{cases} x(3x + 2y)(x + 1) = 12 \\ x^2 + 4x + 2y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x + 2y)(x^2 + x) = 12 \\ (3x + 2y) + (x^2 + x) = 8 \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $\begin{cases} u = 3x + 2y \\ v = x^2 + x \end{cases}$ thì hệ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} u \cdot v = 12 \\ u + v = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 6 \\ v = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 2 \\ v = 6 \end{cases}$

$$\begin{cases} u = 6 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x^2 + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3/2 \\ x = -2 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = 2 \\ v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x^2 + x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 11/2 \\ x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

KẾT LUẬN:

Bài 77: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 17} = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ x + \sqrt{y} + \sqrt{y + 21} + 1 = 2\sqrt{4y - 3x} \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT NGHỀ NINH HÒA

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $y \geq 0$

$$x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 17} = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x + 4) + \sqrt{(x + 4)^2 + 1} = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

Xét hàm số: $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}$ với $t \geq 0$

Ta có : $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} > 0, \forall t \geq 0$

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến và liên tục với $t \geq 0$

Do đó : $(x+4) + \sqrt{(x+4)^2 + 1} = y + \sqrt{y^2 + 1}$

$\Leftrightarrow f(x+4) = f(y)$

$\Leftrightarrow y = x + 4$

Thay $y = x + 4$ vào phương trình thứ hai, ta có :

$x + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+25} + 1 = 2\sqrt{x+16} \quad (*)$, đk: $x \geq -4$

Nhận xét: $x = -4$ không phải là nghiệm của phương trình (*)

Xét hàm số: $g(x) = x + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+25} + 1 - 2\sqrt{x+16}$ với $x \in (-4; +\infty)$

Ta có: $g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x+4}} + \frac{1}{2\sqrt{x+25}} - \frac{1}{\sqrt{x+16}}$

$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} + \frac{1}{2\sqrt{x+25}} + \frac{\sqrt{x+16} - 1}{\sqrt{x+16}}$

$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} + \frac{1}{2\sqrt{x+25}} + \frac{x+15}{\sqrt{x+16}(\sqrt{x+16} + 1)} \geq 0$

với $x \in (-4; +\infty)$

Suy ra $g(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục với $x \in (-4; +\infty)$

Do đó phương trình $g(x) = 0$ có tối đa một nghiệm với $x \in (-4; +\infty)$

Mặt khác : $g(0) = 0$ nên phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

$\Rightarrow y = x + 4 = 0 + 4 = 4$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất : $x = 0 ; y = 4$

Bài 78: Giải bất phương trình: $\frac{x(x-1)^2(\sqrt{2x+3}-1)}{(x+1)(2x+3)} \geq 2.$

Lần 2 – THPT NGHỆ NINH HÒA

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \in \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{-1\}$

Mà $\frac{x(x-1)^2(\sqrt{2x+3}-1)}{(x+1)(2x+3)} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)^2(\sqrt{2x+3}-1)}{(\sqrt{2x+3}+1)(\sqrt{2x+3}-1)(2x+3)} \geq 1$

$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)^2}{(\sqrt{2x+3}+1)(2x+3)} \geq 1 \Leftrightarrow x(x-1)^2 \geq (\sqrt{2x+3}+1)(2x+3) \quad (*)$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x \geq (2x+3)\sqrt{2x+3} + 2x+3$

$\Leftrightarrow x^2(x-2) \geq (2x+3)\sqrt{2x+3} + x+3 > 0$

$\Rightarrow x > 2$. Vậy điều kiện của phương trình là : $x > 2$

$(*) \Leftrightarrow ((x-1)+1)(x-1)^2 \geq (\sqrt{2x+3}+1)(\sqrt{2x+3})^2$

Xét hàm số $f(t) = (t+1)t^2$ với $t > 1$ (vì $x > 2$ nên $x-1 > 1$)

Ta có : $f(t) = t^3 + t^2 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 2t, \forall t > 1$

Suy ra $f(t)$ là hàm số liên tục và đồng biến trên $(1; +\infty)$

hay $f(x-1) \geq f(\sqrt{2x+3})$. • Khi đó:

Khi đó:

$$\begin{cases} x > 2 \\ x-1 \geq \sqrt{2x+3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 2 \geq 0 \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2 + \sqrt{6}$$

$$\text{Vậy } S = [2 + \sqrt{6}; +\infty) \spadesuit$$

Bài 79: Giải hệ phương trình: $x\sqrt{x-1} = (2x-3)^2(2x-2) + x - 2$.

Lần 2 – THPT NGÔ SỸ LIÊN

Lời giải tham khảo

TXĐ: $D = [1; +\infty)$.

$$x\sqrt{x-1} = (2x-3)^2(2x-2) + x - 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}^3 + \sqrt{x-1}^2 + \sqrt{x-1} = (2x-3)^3 + (2x-3)^2 + (2x-3)$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{x-1}) = f(2x-3)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + t$ có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra: } f(\sqrt{x-1}) = f(2x-3)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2x-3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x-1 = 4x^2 - 12x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

• Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 80: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - (x+y)} \sqrt[3]{x-y} = y \\ 2(x^2 + y^2) - 3\sqrt{2x-1} = 11 \end{cases}$$

Lần 1 – THPT NGUYỄN BÌNH

Lời giải tham khảo

$$\text{Hệ đã cho tương đương với } \begin{cases} \sqrt{x^2 - (x+y)} \sqrt[3]{x-y} = y(1) \\ 2(x^2 + y^2) - 3\sqrt{2x-1} = 11(2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $y \geq 0$, vì nếu $y < 0$ thì $x-y > 0$, do đó VT(1) > VP(1)

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - (x+y)} (\sqrt[3]{x-y} - 1) + (\sqrt{x^2 - (x+y)} - y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - (x+y)} \frac{x-y-1}{\sqrt[3]{(x-y)^2} + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \frac{x^2 - x - y - y^2}{\sqrt{x^2 - x - y + y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y-1) \left[\frac{\sqrt{x^2-(x+y)}}{\sqrt[3]{(x-y)^2} + \sqrt[3]{x-y} + 1} + \frac{x+y}{\sqrt{x^2-x-y} + y} \right] = 0 \Leftrightarrow x-y-1=0$$

Thế $y = x-1$ vào phương trình (2) ta được:

$$4x^2 - 4x + 2 - 3\sqrt{2x-1} = 11 \Leftrightarrow (2x-1)^2 - 3\sqrt{2x-1} - 10 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{2x-1}$, $t \geq 0$, ta có $t^4 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^3 + 2t^2 + 4t + 5) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Khi đó $\sqrt{2x-1} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$. Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Bài 81: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2+3) = 3(x^2+y^2)+2 \\ 4\sqrt{x+2} + \sqrt{16-3y} = x^2+8 \end{cases}$$

Lần 2 – THPT NGUYỄN HUỆ - KHÁNH HÒA

Lời giải tham khảo

ĐK: $x \geq -2, y \leq \frac{16}{3}$

(1) $\Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+1)^3 \Leftrightarrow y = x-2$ Thay $y=x-2$ vào (2) được

$$4\sqrt{x+2} + \sqrt{22-3x} = x^2+8 \Leftrightarrow \frac{4(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} = (x-2)(x+2) + \frac{3(x-2)}{\sqrt{22-3x}+4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{-4}{\sqrt{x+2}+2} + (x+2) + \frac{3}{\sqrt{22-3x}+4} = 0(*) \end{cases}$$

Xét $f(x) = VT(*)$ trên $[-2; 21/3]$, có $f'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến. suy ra $x = -1$ là nghiệm duy nhất của (*)

KL: HPT có 2 nghiệm $(2; 0), (-1; -3)$

Bài 82: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 2y = 0 \\ 5x^2 + 2xy + 5y^2 - 3x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

Lần 1 – THPT CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU

Lời giải tham khảo

Nhân hai vế của phương trình (1) với 3 rồi trừ theo vế cho (2), ta được phương trình:

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 6x + 3y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)^2 - 3(2x+y) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$$

Nếu $2x+y=1$ thì $y=1-2x$, thay vào (1) ta được:

$$7x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=\frac{5}{7} \Rightarrow y=-\frac{3}{7} \end{cases}$$

Nếu $2x+y=2$ thì $y=2-2x$, thay vào (1) ta được:

$$7x^2 - 11x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=\frac{4}{7} \Rightarrow y=\frac{6}{7} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm là $(0;1);(1;0);\left(\frac{5}{7};-\frac{3}{7}\right);\left(\frac{4}{7};\frac{6}{7}\right)$.

Bài 83: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + 2 = y\sqrt{x^2 + 2} \\ y^2 + (2x+3)\sqrt{x^2 + 2x+3} = y + 2x^2 - 5x. \end{cases}$$

Lần 1 – THPT NGUYỄN SIÊU

Lời giải tham khảo

Từ phương trình (1) của hệ ta có

$$xy + 2 = y\sqrt{x^2 + 2} \Leftrightarrow y(\sqrt{x^2 + 2} - x) = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2} - x} = \sqrt{x^2 + 2} + x$$

$$(do \sqrt{x^2 + 2} > |x| \geq x)$$

Thế vào (2) ta có

$$2x^2 + 2 + 2x\sqrt{x^2 + 2} + (2x+3)\sqrt{x^2 + 2x+3} = x + \sqrt{x^2 + 2} + 2x^2 - 5x$$

⊗ Xét hàm số

$$\Leftrightarrow [2(x+1)+1]\sqrt{(x+1)^2 + 2} + 2(x+1) = (1-2x)\sqrt{(-x)^2 + 2} + 2(-x) \quad (3)$$

$$f(t) = (2t+1)\sqrt{t^2 + 2} + 2t, \quad f'(t) = 2\sqrt{t^2 + 2} + (2t+1)\frac{t}{\sqrt{t^2 + 2}} + 2 > 0 \forall t$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = (2t+1)\sqrt{t^2 + 2} + 2t, \quad f'(t) = 2\sqrt{t^2 + 2} + (2t+1)\frac{t}{\sqrt{t^2 + 2}} + 2 > 0 \forall t$$

$$\text{Suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R} \otimes \text{Phương trình (3)} \Leftrightarrow f(x+1) = f(-x) \Leftrightarrow x+1 = -x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Phương trình (3)} \Leftrightarrow f(x+1) = f(-x) \Leftrightarrow x+1 = -x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Từ đó ta tìm được $y=1$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm } (x;y) = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

Bài 84: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^3 + 5y^2 + y + 5 = 8xy^2 + 8x^2 - xy + 3x \\ 4x^2 - 5x + \sqrt{3x+1} - y = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 2 – THPT NGUYỄN SIÊU

Lời giải tham khảo

$$\text{Điều kiện } x \geq -\frac{1}{3} (*)$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow (y^2 + x + 1)(y - 8x + 5) = 0 \otimes \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + x + 1 = 0 \\ y = 8x - 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + x + 1 = 0 \\ y = 8x - 5 \end{cases}$$

*) $y^2 + x + 1 = 0$ kết hợp với điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$ dẫn tới phương trình vô nghiệm.

$$*) y = 8x - 5$$

Thay vào (2) ta được phương trình:

$$4x^2 + \sqrt{3x+1} - 13x + 5 = 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 = -\sqrt{3x+1} + x + 4 \quad (5)$$

Xét phương trình (5): Đặt $\sqrt{3x+1} = -(2t-3), t \leq \frac{3}{2}$

Kết hợp với phương trình (5) ta có hệ:

$$\begin{cases} (2x-3)^2 = 2t + x + 1 \\ (2t-3)^2 = 3x + 1 \end{cases} \Rightarrow (x-t)(2x+2t-5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ 2t = 5 - 2x \end{cases} \quad \text{*) Với } t = x \text{ ta được}$$

$$\sqrt{3x+1} = 3 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 4x^2 - 15x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{15 - \sqrt{97}}{8}$$

$$\text{*) Với } t = x \text{ ta được } \sqrt{3x+1} = 3 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 4x^2 - 15x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{15 - \sqrt{97}}{8}$$

Khi đó $y = 10 - \sqrt{97}$

$$\text{*) Với } 2t = 5 - 2x \text{ ta được } \sqrt{3x+1} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2 - 11x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{11 + \sqrt{73}}{8}$$

Khi đó $y = 6 + \sqrt{73}$

Kiểm tra các nghiệm trên đều thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $\left(\frac{15 - \sqrt{97}}{8}; 10 - \sqrt{97}\right); \left(\frac{11 + \sqrt{73}}{8}; 6 + \sqrt{73}\right)$

Bài 85: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\sqrt{4x+4y+1} - \sqrt{5x+y+1} = \sqrt{3x+7y+1} \\ (3x+2)\sqrt{9y+1} + 4\sqrt{x} = 14x\sqrt{3y} \end{cases}$$

Lần 1 – THPT NGUYỄN TRÃI - KONTUM

Lời giải tham khảo

* ĐK : $x \geq 0, y \geq 0$

* Đặt $a = \sqrt{5x+y+1}, b = \sqrt{3x+7y+1}, a, b > 0$

Từ (1) $\Rightarrow \sqrt{2a^2 + 2b^2} = a + b \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$

$$\Rightarrow \sqrt{5x+y+1} = \sqrt{3x+7y+1} \Leftrightarrow x = 3y$$

* Thay vào (2) được : $(3x+2)\sqrt{9y+1} + 4\sqrt{x} = 14x\sqrt{3y} \quad (3)$

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của (3) nên :

$$(3) \Leftrightarrow \left(3 + \frac{2}{x}\right)\sqrt{3 + \frac{1}{x}} + \frac{4}{x} = 14 \quad \text{*) Đặt } u = \sqrt{3 + \frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{1}{x} = u^2 - 3, \quad u > \sqrt{3}$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{3 + \frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{1}{x} = u^2 - 3, \quad u > \sqrt{3}$$

Từ (3) ta có pt : $2u^3 + 4u^2 - 3u - 26 = 0 \Leftrightarrow u = 2$ (nhận)

$$\text{*) } u = 2 \Rightarrow \sqrt{3 + \frac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3$$

Thử lại $\Rightarrow$ hệ có một nghiệm là $(1; 3)$

Bài 86: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x^2 + y - x - 9 = \sqrt{3x+1} + \sqrt{x^2 + 5x + y - 8} \\ x\sqrt{12-y} + \sqrt{y(12-x^2)} = 12 \end{cases}$$

Lần 1 – THPT NGUYỄN VIỆT XUÂN

Lời giải tham khảo

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ y \leq 12 \\ y(12-x^2) \geq 0 \\ x^2 + 5x + y - 8 \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{y(12-x^2)} = 12 - x\sqrt{12-y} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{12-y} \leq 12 \\ 12x^2 - 24x\sqrt{12-y} + 12(12-y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{12-y} \leq 12 \\ (x - \sqrt{12-y})^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - x^2 \\ -\frac{1}{3} \leq x \leq 2\sqrt{3}; 0 \leq y \leq 12 \end{cases}$$

Thay vào phương trình (1) ta được: $3x^2 - x + 3 = \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4}$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - x) + (x+1 - \sqrt{3x+1}) + (x+2 - \sqrt{5x+4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x) \left(3 + \frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}} \right) = 0$$

 $\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$. Khi đó ta được nghiệm $(x; y)$ là $(0; 12)$ và $(1; 11)$.

$$\text{Bài 87: Giải phương trình: } x^2 + 9 + \log_2 \frac{16x^2 + 208x + 96}{\sqrt{12x+16} + \sqrt{45x+81}} = 2\sqrt{3x+4} - 6x + 3\sqrt{5x+9}.$$

Lần 1 – THPT NGUYỄN VĂN TRỖI

Lời giải tham khảo

$$\text{ĐK: } x \geq -\frac{4}{3} \text{ ta có: } x^2 + 9 + \log_2 \frac{16x^2 + 208x + 96}{\sqrt{12x+16} + \sqrt{45x+81}} = 2\sqrt{3x+4} - 6x + 3\sqrt{5x+9}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 13 + \log_2 (x^2 + 6x + 13) = 2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9} + \log_2 (2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9})$$

$$f(x^2 + 6x + 13) = f(2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9}) \quad (*)$$

Xét hàm số: $f(t) = t + \log_2 t, (t > 0) \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t) = t + \log_2 t$ đồngbiến trên $(0; +\infty)$. Từ (*) suy ra $x^2 + 6x + 13 = 2\sqrt{3x+4} + 3\sqrt{5x+9}$

$$x^2 + x + 2[(x+2) - \sqrt{3x+4}] + 3[(x+3) - \sqrt{5x+9}] = 0$$

$$(x^2 + x) + \frac{2(x^2 + x)}{x+2+\sqrt{3x+4}} + \frac{3(x^2 + x)}{x+3+\sqrt{5x+9}} = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x) \left(1 + \frac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}} + \frac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \quad \left(\text{Do } 1 + \frac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}} + \frac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}} > 0, \forall x > -\frac{3}{4} \right)$$

Đối chiếu với điều kiện ban đầu suy ra phương trình có nghiệm: $x = 0; x = -1$

Bài 88: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (4y-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 2y + 1 \\ x^4 + x^2y + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT NHƯ XUÂN

Lời giải tham khảo

Xét phương trình: $(4y-1)\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 2y + 1$

Đặt: $t = \sqrt{x^2+1} \geq 1$, ta được pt: $2t^2 - (4y-1)t + 2y - 1 = 0$

Giải ra được: $\begin{cases} t = \frac{1}{2} < 1 (\text{loại}) \\ t = 2y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ x^2 = 4y^2 - 4y \end{cases}$ thay vào pt (2) ta được: $16y^2(y-1)^2 + 4y^2(y-1) + y^2 - 1 = 0$

$$+ y^2 - 1 = 0$$

$\Rightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ x^2 = 4y^2 - 4y \end{cases}$ thay vào pt (2) ta được: $16y^2(y-1)^2 + 4y^2(y-1) + y^2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow y = 1 (\text{do } y \geq 1) \Rightarrow x = 0$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$

Bài 89: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+3y+1)\sqrt{2xy+2y} = y(3x+4y+3) \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{2y-2})(x-3+\sqrt{x^2+x+2y-4}) = 4 \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT PHẠM VĂN ĐỒNG

Lời giải tham khảo

▪ Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 1 \\ x^2 + x + 2y - 4 \geq 0 \end{cases}$

▪ Đặt $a = \sqrt{2(x+1)}$; $b = \sqrt{y}$; ($a, b \geq 0$) thay vào phương trình (1) của hệ phương trình ta được:

$$(a-2b)(a^2-ab+4b^2) = 0 \Leftrightarrow a = 2b \Leftrightarrow 2y = x+1. \text{ Thay vào pt(2) ta được:}$$

$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1})(x-3+\sqrt{x^2+2x-3}) = 4$$

$$\Leftrightarrow x-3+\sqrt{x^2+2x-3} = \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}; t \geq 0 \text{ ta có pt: } t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 & (L) \\ t = 4 & (N) \end{cases}$$

Với $t = 4$ giải ra ta được $(x; y) = \left(\frac{13}{4}; \frac{17}{8}\right)$ là nghiệm của hệ.

Bài 90: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + 2 = y\sqrt{x^2+2} \\ y^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3} = 2x^2 - 4x \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT PHAN BỘI CHÂU

Lời giải tham khảo

$$\text{Vì } \sqrt{x^2+2}-x > \sqrt{x^2}-x = |x|-x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+x}-x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Nên } (1) \Leftrightarrow y(\sqrt{x^2+2}-x) = 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{x^2+2}-x} = \sqrt{x^2+2}+x \text{ Thế } y = \sqrt{x^2+2}+x \text{ vào } (2):$$

$$\text{Thế } y = \sqrt{x^2+2}+x \text{ vào } (2):$$

$$\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)^2 + 2(x+1)\sqrt{x^2+2x+3} = 2x^2 - 4x \Leftrightarrow 1+x\sqrt{x^2+2}+2x+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[1+\sqrt{(x+1)^2+2}\right] = (-x)\left[1+\sqrt{(-x)^2+2}\right] \quad (*)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t(1+\sqrt{t^2+2})$$

$$f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+2} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

$$(*) \Leftrightarrow f(x+1) = f(-x) \Leftrightarrow x+1 = -x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{2} \text{ thì } y = 1. \text{ Vậy nghiệm của hệ phương trình là } \left(-\frac{1}{2}; 1\right).$$

Bài 91: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\sqrt{x^2+5} = 2\sqrt{2y+x^2} \\ x+3\sqrt{xy+x-y^2-y} = 5y+4 \end{cases}.$
--

Lần 2 – THPT PHAN BỘI CHÂU

Lời giải tham khảo

$$\text{ĐIỀU KIỆN: } (xy+x-y^2-y \geq 0, y \geq 0)$$

$$(2) \Leftrightarrow x-2y-1+3\left(\sqrt{xy+x-y^2-y}-y-1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y-1)\left[1+\frac{3(y+1)}{\sqrt{xy+x-y^2-y}+y+1}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2y-1 = 0 \left(1+\frac{3(y+1)}{\sqrt{xy+x-y^2-y}+y+1} > 0\right)$$

$$\text{Thế } 2y = x-1 \text{ vào } (1) \text{ ta được:}$$

$$2\sqrt{x^2+5} = 2\sqrt{x-1}+x^2 \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^2+5}-3\right) = 2\left(\sqrt{x-1}-1\right)+x^2-4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-\frac{2}{\sqrt{x-1}+1}-(x+2)\right] = 0 \quad (3)$$

$$\text{Vì } x \geq 1 \text{ nên } \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-\frac{2}{\sqrt{x-1}+1}-(x+2) = (x+2)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}-1\right)-\frac{2}{\sqrt{x-1}+1} < 0$$

$$(3) \Leftrightarrow x = 2 \text{ Vậy nghiệm của hệ phương trình là: } \left(2; \frac{1}{2}\right)$$

Bài 92: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (xy-3)\sqrt{y+2} + \sqrt{x} = \sqrt{x^5} + (y-3x)\sqrt{y+2} \\ \sqrt{9x^2+16} - 2\sqrt{2y+8} = 4\sqrt{2-x} \end{cases}$$

Lần 1 – THPT PHAN THÚC TRỰC

Lời giải tham khảo

Đk: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y \geq -2 \end{cases}$ (*) . Với đk(*) ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)\left[(y+3)\sqrt{y+2} - (x+1)\sqrt{x}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (y+3)\sqrt{y+2} = (x+1)\sqrt{x} \end{cases} \quad (3)$$

Với $x = 1$ thay vào (2) ta được: $2\sqrt{2y+8} = 1 \Leftrightarrow y = -\frac{31}{8}$ (loại)

Ta có: (3) $\Leftrightarrow (\sqrt{y+2})^3 + \sqrt{y+2} = (\sqrt{x})^3 + \sqrt{x}$ (4). Xét hàm số

$f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0; \forall t \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ là hs đồng biến, do

đó: (4) $\Leftrightarrow f(\sqrt{y+2}) = f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \sqrt{y+2} = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = x - 2$ thay vào pt(2) ta được:

(4) $\Leftrightarrow f(\sqrt{y+2}) = f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \sqrt{y+2} = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = x - 2$ thay vào pt(2) ta được:

$$4\sqrt{2-x} + 2\sqrt{2x+4} = \sqrt{9x^2+16}$$

$$\Leftrightarrow 32 - 8x + 16\sqrt{2(4-x^2)} = 9x^2 \Leftrightarrow 8(4-x^2) + 16\sqrt{2(4-x^2)} - (x^2+8x) = 0$$

Đặt: $t = \sqrt{2(4-x^2)} \quad (t \geq 0)$; PT trở thành: $4t^2 + 16t - (x^2 + 8x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{2} \\ t = -\frac{x}{2} - 4 < 0 \text{ (loại)} \end{cases}$

Hay $\sqrt{2(4-x^2)} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 = \frac{32}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{2}-6}{3}$

Vậy hệ pt có nghiệm $(x; y)$ là: $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{2}-6}{3}\right)$

Bài 93: Giải hệ phương trình:
$$\frac{5x-13-\sqrt{57+10x-3x^2}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{19-3x}} + 2\sqrt{x+3} \geq x^2 + 2x + 9.$$

Lần 1 – THPT PHÙ CỪ

Lời giải tham khảo

Điều kiện $\begin{cases} -3 \leq x \leq \frac{19}{3} \\ x \neq 4 \end{cases}$

Bất phương trình tương đương

$$\frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{19-3x})(2\sqrt{x+3}+\sqrt{19-3x})}{\sqrt{x+3}-\sqrt{19-3x}} + 2\sqrt{x+3} \geq x^2 + 2x + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x+3} + \sqrt{19-3x} \geq x^2 + 2x + 9$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x+3} - \frac{x+5}{3}\right) + \left(\sqrt{19-3x} - \frac{13-x}{3}\right) \geq x^2 + x - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(-x^2 - x + 2)}{9\left(\sqrt{x+3} + \frac{x+5}{3}\right)} + \frac{-x^2 - x + 2}{9\left(\sqrt{19-3x} + \frac{13-x}{3}\right)} \geq x^2 + x - 2 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x - 2) \left[\frac{4}{9\left(\sqrt{x+3} + \frac{x+5}{3}\right)} + \frac{1}{9\left(\sqrt{19-3x} + \frac{13-x}{3}\right)} \right] \leq 0 \quad (*)$$

$$\text{Vì } \frac{4}{9\left(\sqrt{x+3} + \frac{x+5}{3}\right)} + \frac{1}{9\left(\sqrt{19-3x} + \frac{13-x}{3}\right)} > 0 \text{ với mọi } x \in \left[-3; \frac{19}{3}\right] \setminus \{4\}$$

Do đó $(*) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-2; 1]$.

Bài 94: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 8} - \sqrt{x^3 + x} \leq \sqrt{x^2 + 1}(x - 2)$.

Lần 1 – THPT phú riềng

Lời giải tham khảo

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 8 \geq 0 \\ x^3 + x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 1)(2x^2 - 6x + 8) \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0 \quad \text{Khi đó}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1}\sqrt{2x^2 - 6x + 8} - \sqrt{x^2 + 1}\sqrt{x} - \sqrt{x^2 + 1}(x - 2) \leq 0$$

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1}\sqrt{2x^2 - 6x + 8} - \sqrt{x^2 + 1}\sqrt{x} - \sqrt{x^2 + 1}(x - 2) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1}(\sqrt{2x^2 - 6x + 8}) - \sqrt{x} - x + 2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + 8} - \sqrt{x} - x + 2 \leq 0 \quad (2) \quad \text{Xét TH1: Với } x = 0 \text{ khi đó (2) vô nghiệm}$$

Xét TH1: Với $x = 0$ khi đó (2) vô nghiệm

Xét TH2: Với $x > 0$, chia hai vế của (2) cho $\sqrt{x}$ ta được:

$$\sqrt{2\left(x + \frac{4}{x}\right) - 6} - 1 - \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2\left(x + \frac{4}{x}\right) - 6} \leq \left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) + 1 \quad (3)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow x + \frac{4}{x} = t^2 + 4, \text{ thay vào (3) ta được:}$$

$$\sqrt{2t^2 + 2} \leq t + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ t^2 - 2t + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ (t - 1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \quad \text{Với } t = 1 \text{ ta có:}$$

$$\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \begin{cases} \sqrt{x} = -1 \text{ (vô nghiệm)} \\ \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Với $t=1$ ta có : $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \begin{cases} \sqrt{x} = -1(vn) \\ \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$

Kết hợp hai trường hợp và điều kiện ta thấy bất phương trình (1) có nghiệm $x=4$

Bài 95: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \\ \sqrt{x^2+y^2+1} = 3 + \sqrt{x^2-y^2} \end{cases}$$

Lần 2 – THPT phú riềng

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x+y \geq 0, x-y \geq 0$

Đặt: $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ ta có hệ:
$$\begin{cases} \sqrt{u} - \sqrt{v} = 2 \quad (u > v) \\ \sqrt{\frac{u^2+v^2+2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\frac{u^2+v^2+2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\frac{(u+v)^2 - 2uv + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$
 . Thế (1) vào (2) ta có:

$$\sqrt{uv + 8\sqrt{uv} + 9} - \sqrt{uv} = 3 \Leftrightarrow uv + 8\sqrt{uv} + 9 = (3 + \sqrt{uv})^2 \Leftrightarrow uv = 0.$$

Kết hợp (1) ta có:
$$\begin{cases} uv = 0 \\ u+v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow u = 4, v = 0 \quad (\text{vì } u > v).$$

Từ đó ta có: $x=2; y=2$. (Thỏa đ/k)

KL: Vây nghiệm của hệ là: $(x; y) = (2; 2)$.

Bài 96: Giải phương trình:
$$\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 2x + 3} = (x+1)(\sqrt{x+2} - 2).$$

Lần 3 – THPT PHÚ RIỀNG

Lời giải tham khảo

ĐK: $x \geq -2$

Pt
$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{x^2 - 2x + 3} = \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x+2} + 2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{x+4}{x^2 - 2x + 3} = \frac{x+1}{\sqrt{x+2} + 2} \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow (x+4)(\sqrt{x+2} + 2) = (x+1)(x^2 - 2x + 3)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+2} + 2) \left[(\sqrt{x+2})^2 + 2 \right] = [(x-1) + 2] \left[(x-1)^2 + 2 \right] \quad (2)$$

Xét pt $= (t+2)(t^2+2)$ có pt $f'(t) = 3t^2 + 4t + 2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$

Vậy $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó: $(2) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+2}) = f(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

Vậy pt có nghiệm: $x = 2, x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$

Bài 97: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 = 1 + 5xy + y^2 \\ y(\sqrt{y(x-2y)} + \sqrt{y(4y-x)}) = 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải tham khảo

Điều kiện $4y \geq x \geq 2y \geq 0$

Trừ vế với vế ta được: $2x^2 - 5xy - y^2 - y(\sqrt{xy - 2y^2} + \sqrt{4y^2 - xy}) = 0$

Nhận thấy $y=0$ không thỏa mãn hệ.

Do $y>0$ ta chia hai vế của phương trình cho y^2 ta có

$$2\left(\frac{x}{y}\right) - 5\frac{x}{y} - 1 - \sqrt{\frac{x}{y} - 2} - \sqrt{4 - \frac{x}{y}} = 0$$

Đặt $\frac{x}{y} = t \Rightarrow t \in [2; 4]$. Khi đó ta được: $2t^2 - 5t - 1 - \sqrt{t - 2} - \sqrt{4 - t} = 0$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 6t + \sqrt{t - 2}(\sqrt{t - 2} - 1) + (1 - \sqrt{4 - t}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t(t - 3) + \frac{(t - 3)\sqrt{t - 2}}{\sqrt{t - 2} + 1} + \frac{t - 3}{1 + \sqrt{4 - t}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 3) \left(2t + \frac{\sqrt{t - 2}}{\sqrt{t - 2} + 1} + \frac{1}{1 + \sqrt{4 - t}} \right) = 0$$

Ta thấy $\left(2t + \frac{\sqrt{t - 2}}{\sqrt{t - 2} + 1} + \frac{1}{1 + \sqrt{4 - t}} \right) > 0, \forall t \in [2; 4]$.

Vậy $t=3$ suy ra $x=3y$ thế vào phương trình (1) của hệ ta được $2y^2 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$$2y^2 = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Kết luận hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

Bài 98: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x - 2) \cdot \sqrt{1 + \frac{3x}{y}} = 2x - y \\ y^2 \sqrt{1 + \frac{3x}{y}} = 2x^2 + y^2 - 4x \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT QUỐC OAI

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $y \neq 0; 1 + \frac{3x}{y} \geq 0$.

$$\text{Hệ phương trình} \begin{cases} (x - 2) \cdot \sqrt{1 + \frac{3x}{y}} = 2x - y \\ y^2 \sqrt{1 + \frac{3x}{y}} = 2x^2 + y^2 - 4x \end{cases} \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{y} - \frac{2}{y} \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{3x}{y}} = \frac{2x}{y} - 1 \\ \sqrt{1 + \frac{3x}{y}} = 2 \left(\frac{x}{y} \right)^2 + 1 - \frac{4x}{y^2} \end{cases}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = \frac{x}{y} \\ b = \frac{1}{y} \end{cases}. \text{ Khi đó ta có được hệ: } \begin{cases} (a - 2b) \sqrt{1 + 3a} = 2a - 1 \\ \sqrt{1 + 3a} = 2a^2 - 4ab + 1 \end{cases} \quad \textcircled{*}$$

Cộng theo về hai phương trình cho nhau, ta được:

$$(a - 2b + 1)\sqrt{1 + 3a} = 2a^2 + 2a - 4ab$$

$$\Leftrightarrow (a - 2b + 1)(\sqrt{1 + 3a} - 2a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 1 = 2b \\ \sqrt{1 + 3a} = 2a \end{cases}$$

Với $a + 1 = 2b \Leftrightarrow \frac{x}{y} + 1 = \frac{2}{y} \Leftrightarrow x + y = 2$.

Thế vào (1) ta được:

$$-y\sqrt{1 + \frac{3(2-y)}{y}} = 2(2-y) - y \Leftrightarrow -\sqrt{1 + \frac{3(2-y)}{y}} = \frac{2(2-y)}{y} - 1$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{2-y}{y}\right)^2 - 7\frac{2-y}{y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-y}{y} = 0 \\ \frac{2-y}{y} = \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \Rightarrow x = 0 \\ y = \frac{8}{11} \Rightarrow x = \frac{14}{11} \end{cases}$$

Thay $y = \frac{8}{11}; x = \frac{14}{11}$ vào hệ, không thỏa mãn.

Với $\sqrt{1 + 3a} = 2a \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ 4a^2 - 3a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow x = y$

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow 2(x - 2) = x \Leftrightarrow x = 4; y = 4$

Hệ phương trình có hai nghiệm: $(x; y) = (0; 2); (4; 4)$.

Bài 99: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 9x^2 + 9xy + 5x - 4y + 9\sqrt{y} = 7 \\ \sqrt{x - y + 2} + 1 = 9(x - y)^2 + \sqrt{7x - 7y} \end{cases}$$

Lần 1 – THPT QUỲNH LƯU 1

Lời giải tham khảo

Đk : $x \geq y \geq 0$. Nếu $x = y$ thì (2) vô nghiệm nên $x > y$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x - y + 2} - \sqrt{7x - 7y} + 1 - [3(x - y)]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - 6x + 6y}{\sqrt{x - y + 2} + \sqrt{7x - 7y}} + (1 - 3x + 3y)(1 + 3x - 3y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - 3x + 3y) \left[\frac{2}{\sqrt{x - y + 2} + \sqrt{7x - 7y}} + (1 + 3x - 3y) \right] = 0$$

$$x > y \geq 0 \text{ nên } \left[\frac{2}{\sqrt{x - y + 2} + \sqrt{7x - 7y}} + (1 + 3x - 3y) \right] > 0 \text{ suy ra } 1 - 3x + 3y = 0$$

Thay $y = x - \frac{1}{3}$ vào phương trình (1) ta được

$$9x^2 + 9x(x - \frac{1}{3}) + 5x - 4(x - \frac{1}{3}) + 9\sqrt{x - \frac{1}{3}} = 7$$

$$\Leftrightarrow 18x^2 - 8x + 6x - \frac{8}{3} + 9\sqrt{x - \frac{1}{3}} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(9x - 4) + \frac{2}{3}(9x - 4) + 3(\sqrt{9x - 3} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (9x - 4) \left(2x + \frac{2}{3} + \frac{3}{\sqrt{9x-3}+1} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{9} \text{ vì } x > 0$$

Với $x = \frac{4}{9}$ thì $y = \frac{1}{9}$. Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{4}{9}; \frac{1}{9} \right)$

Bài 100: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{y} + 2\sqrt{(y+8)x} = y + 4x \\ xy + 2x - 11 + \sqrt{12-x+y} + \sqrt{7-3x} = 0 \end{cases}$$

Lần 1 – THPT QUỲNH LƯU 3

Lời giải tham khảo

Điều kiện $2 \leq x \leq \frac{7}{3}, y \geq 0$

Ta có

$$2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{4(x-2)} \sqrt{y} \leq \frac{4x-8+y}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } y=4x-8$$

$$2\sqrt{(y+8)x} = \sqrt{(y+8)4x} \leq \frac{4x+y+8}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } y=4x-8$$

Suy ra $2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{y} + 2\sqrt{(y+8)x} \leq y + 4x$. Dấu "=" xảy ra khi $y=4x-8$

Như vậy, pt(1) $\Leftrightarrow y=4x-8$. Thế vào pt(2) ta có:

$$4x^2 - 6x - 11 + \sqrt{4+3x} + \sqrt{7-3x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - x - 3) + (\sqrt{4+3x} - x - 1) + (\sqrt{7-3x} - x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - x - 3) - \frac{(x^2 - x - 3)}{\sqrt{4+3x} + x + 1} - \frac{(x^2 - x - 3)}{\sqrt{7-3x} + x - 2} = 0 \left(\text{do } x \in \left[2; \frac{7}{3} \right] \right)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 3) \left[4 - \frac{1}{\sqrt{4+3x} + x + 1} - \frac{1}{\sqrt{7-3x} + x - 2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 3 = 0 & (*) \\ \frac{1}{\sqrt{4+3x} + x + 1} + \frac{1}{\sqrt{7-3x} + x - 2} = 4 & (3) \end{cases}$$

$$+ pt(*) \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

Đối chiếu điều kiện ta có $x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, hệ có nghiệm $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 2\sqrt{13}-6 \right)$

+Xét pt(3)

$$\forall x \in \left[2; \frac{7}{3} \right] \Rightarrow \sqrt{4+3x} + x + 1 \geq 3 + \sqrt{10} > 6 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4+3x} + x + 1} < \frac{1}{6}$$

$$\forall x \in \left[2; \frac{7}{3} \right]: g(x) = \sqrt{7-3x} + x - 2 \Rightarrow g'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{7-3x}} + 1 = \frac{2\sqrt{7-3x} - 3}{2\sqrt{7-3x}} < 0$$

Xét hàm số

$$\Rightarrow g(x) \geq g\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{7-3x} + x - 2} \leq 3$$

Do đó,

$$\forall x \in \left[2; \frac{7}{3}\right]: \frac{1}{\sqrt{4+3x+x+1}} + \frac{1}{\sqrt{7-3x+x-2}} \leq \frac{1}{6} + 3 < 4 \text{ hay pt(3) vô nghiệm}$$

$$\text{Vậy, hệ có nghiệm duy nhất } \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 2\sqrt{13}-6\right)$$

Bài 101: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy(2y-1) = 2y^3 - 2y^2 - x \\ 6\sqrt{x-1} + y + 7 = 4x(y-1) \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT SỐ 1 BẢO YÊN

Lời giải tham khảo

ĐK: $x \geq 1$.

$$(1) \Leftrightarrow (2y^2 + x)(1+x-y) = 0 \Leftrightarrow y = x+1 \text{ vì } 2y^2 + x > 0, \forall x \geq 1 \text{ Thay vào (2) ta được}$$

$$6\sqrt{x-1} + x + 8 = 4x^2 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} + 3)^2 = (2x)^2 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x-1} + 3$$

$$\text{Thay vào (2) ta được } 6\sqrt{x-1} + x + 8 = 4x^2 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} + 3)^2 = (2x)^2 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x-1} + 3$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 13x + 10 = 0 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$$

Vậy nghiệm của phương trình là $(x; y) = (2; 3)$.

Bài 102: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 8\sqrt{2x-1}(2x-\sqrt{2x-1}) = y(y^2-2y+4) \\ 4xy + 2\sqrt{(y+2)(y+2x)} = 5y + 12x - 6 \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$$

Lần 2 – THPT SỐ 1 BẢO YÊN

Lời giải tham khảo

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ (y+2)(y+2x) \geq 0 \end{cases}. \text{ Từ pt (1) } \Rightarrow \text{ để pt có nghiệm thì } y \geq 0$$

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow (2\sqrt{2x-1})^3 - 2(2\sqrt{2x-1})^2 + 4(2\sqrt{2x-1}) = y^3 - 2y^2 + 4y \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t^2 + 4t \quad (t \geq 0)$ có $f'(t) = 3t^2 - 4t + 4 = 2t^2 + (t-2)^2 > 0 \quad \forall t \geq 0$ nên $f(t)$ luôn đồng biến. Từ pt (*) $\Rightarrow f(2\sqrt{2x-1}) = f(y) \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = y$

$$\text{Từ pt (*) } \Rightarrow f(2\sqrt{2x-1}) = f(y) \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = y$$

$$\text{Thay vào pt (2) ta được pt } y^3 + 2(y+2)\sqrt{y+2} = 3y(y+2)$$

$$\text{Đặt } z = \sqrt{y+2} \text{ ta được pt } y^3 + 2z^3 = 3yz^2 \Leftrightarrow (y-z)(y^2 + yz - 2z^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z & (\text{loại}) \\ y = z & (t/m) \end{cases}$$

$$\text{Với } y = z \text{ ta được } y = \sqrt{y+2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 1 \quad (t/m)$$

Bài 103: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 7y^3 + 3xy(x+y) - 24y^2 + 3x - 27y = 14 \\ \sqrt{3-x} + \sqrt{y+4} = x^3 + y^2 - 5 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 1 – THPT SỞ BẮC GIANG

Lời giải tham khảo

Đkxđ $\begin{cases} x \leq 3 \\ y \geq -4 \end{cases}$

Từ (1) ta có $(x+y)^3 + 3(x+y) = (2y+2)^3 + 3(2y+2)$
 $\Leftrightarrow (x-y-2) \left[(x+y)^2 + (x+y)(2y+2) + (2y+2)^2 + 3 \right] = 0$
 $\Leftrightarrow y = x-2$. Suy ra $-2 \leq x \leq 3$.

Thế vào (2) ta được

Thế vào (2) ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} &= x^3 + x^2 - 4x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} - \frac{1}{3}(x+4) + \sqrt{3-x} - \frac{1}{3}(-x+5) = (x^2 - x - 2)(x+2) \\ \Leftrightarrow (x^2 - x - 2) \left(3(x+2) + \frac{1}{3\sqrt{x+2} + x+4} + \frac{1}{3\sqrt{3-x} + 5-x} \right) &= 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $x=2 \Rightarrow y=0; x=-1 \Rightarrow y=-3$.KL $(x; y) = (-1; -3), (x; y) = (2; 0)$

Bài 104: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + \frac{x}{x+1} = (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \\ 3x^2 - 8x - 3 = 4(x+1)\sqrt{y+1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 1 – THPT SỞ VĨNH PHÚC

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow \frac{x^3 + x^2 + x}{x+1} &= (y+2)\sqrt{(x+1)(y+1)} \Leftrightarrow \frac{x^3 + x(x+1)}{(x+1)\sqrt{x+1}} = (y+2)\sqrt{y+1} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} \right)^3 + \frac{x}{\sqrt{x+1}} &= (\sqrt{y+1})^3 + \sqrt{y+1}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nên

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right) = f(\sqrt{y+1}) \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{y+1}. \text{ Thay vào (2) ta được } 3x^2 - 8x - 3 = 4x\sqrt{x+1}.$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2 = (x+2\sqrt{x+1})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = x-1 \\ 2\sqrt{x+1} = 1-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 6x - 3 = 0 \\ x \leq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 10x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + 2\sqrt{3} \\ x = \frac{5 - 2\sqrt{13}}{9} \end{cases}$$

Ta có $y = \frac{x^2}{x+1} - 1$

Với $x = 3 + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{4+3\sqrt{3}}{2}$. Với $x = \frac{5-2\sqrt{13}}{9} \Rightarrow y = -\frac{41+7\sqrt{13}}{72}$.

Các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện.

Hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y) = \left(3 + 2\sqrt{3}; \frac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$ & $(x; y) = \left(\frac{5-2\sqrt{13}}{9}; -\frac{41+7\sqrt{13}}{72}\right)$

Bài 105: Giải bất phương trình: $\sqrt{4x^2 + x + 6} - \sqrt{x+1} \geq 4x - 2$.

Lần 1 – THPT SỞ BÀ RỊA VŨNG TÀU

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \geq -1$.

Ta có: $\sqrt{4x^2 + x + 6} - \sqrt{x+1} \geq 4x - 2 \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2 + 5(x+1)} - \sqrt{x+1} \geq 2(2x-1)$. (1)

Dễ thấy $x = -1$ là một nghiệm của bất phương trình.

Với $x > -1$, ta có: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(2x-1)^2}{x+1} + 5} - 1 \geq \frac{2(2x-1)}{\sqrt{x+1}}$.

Đặt $t = \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}}$. Ta thu được BPT: $\sqrt{t^2 + 5} \geq 2t + 1$.

Ta có: $\sqrt{t^2 + 5} \geq 2t + 1 \Leftrightarrow t \leq \frac{2}{3}$.

$\frac{2x-1}{\sqrt{x+1}} \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} \geq 6x-3 \Leftrightarrow -1 < x \leq \frac{10+\sqrt{5}}{18}$.

Vậy BPT có tập nghiệm: $T = \left[-1; \frac{10+\sqrt{5}}{18}\right]$.

Bài 106: Giải hệ phương trình: $(2x^2 - 2x + 1)(2x - 1) + (8x^2 - 8x + 1)\sqrt{-x^2 + x} = 0$.

Lần 1 – THPT SỞ HÀ TĨNH

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $0 \leq x \leq 1$.

$(2x^2 - 2x + 1)(2x - 1) + (8x^2 - 8x + 1)\sqrt{-x^2 + x} = 0$

$\Leftrightarrow (1 - 2(-x^2 + x))(2x - 1) + (2(2x - 1)^2 - 1)\sqrt{-x^2 + x} = 0$

Đặt $a = 2x - 1; b = \sqrt{-x^2 + x}$. Phương trình đã cho trở thành:

$(1 - 2b^2)a + (2a^2 - 1)b = 0 \Leftrightarrow (a - b)(2ab + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2ab + 1 = 0 \end{cases}$

Với $a = b$, ta có: $2x - 1 = \sqrt{-x^2 + x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ -x^2 + x = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 5x^2 - 5x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$

Với $2ab + 1 = 0$, ta có $2(2x - 1)\sqrt{-x^2 + x} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - 2x)\sqrt{-x^2 + x} = 1$ (1)

Phương trình có nghiệm khi $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < 1 - 2x < 1$

Mặt khác $2\sqrt{-x^2+x} = 2\sqrt{x(1-x)} \leq x + (1-x) = 1$. Suy ra $2(1-2x)\sqrt{-x^2+x} \leq 1$.

Do không tồn tại x để đẳng thức xảy ra nên phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$.

Bài 107: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (xy-3)\sqrt{y+2} + \sqrt{x} = \sqrt{x^5} + (y-3x)\sqrt{y+2} \\ \sqrt{9x^2+16} - 2\sqrt{2y+8} = 4\sqrt{2-x} \end{cases}$$

Lần 1 – THPT SỞ LÀO CAI

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y \geq -2 \end{cases}$ (*). Với điều kiện (*) ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)\left[(y+3)\sqrt{y+2} - (x+1)\sqrt{x}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (y+3)\sqrt{y+2} = (x+1)\sqrt{x} \end{cases} \quad (3)$$

Với $x=1$ thay vào (2) ta được: $2\sqrt{2y+8}=1 \Leftrightarrow y = -\frac{31}{8}$ (Không thỏa mãn điều kiện) Ta có:

$$(3) \Leftrightarrow (\sqrt{y+2})^3 + \sqrt{y+2} = (\sqrt{x})^3 + \sqrt{x} \quad (4).$$

$$\text{Ta có: } (3) \Leftrightarrow (\sqrt{y+2})^3 + \sqrt{y+2} = (\sqrt{x})^3 + \sqrt{x} \quad (4).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên $\mathbb{R}$; $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra, hàm số $f(t)$ đồng biến và liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó:

$$(4) \Leftrightarrow f(\sqrt{y+2}) = f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \sqrt{y+2} = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = x - 2$$

Thay $y = x - 2$ vào (2) ta được:

$$4\sqrt{2-x} + 2\sqrt{2x+4} = \sqrt{9x^2+16}$$

$$\Leftrightarrow 32 - 8x + 16\sqrt{2(4-x^2)} = 9x^2 \Leftrightarrow 8(4-x^2) + 16\sqrt{2(4-x^2)} - (x^2+8x) = 0$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{2(4-x^2)} \quad (t \geq 0); \text{ PT trở thành: } 4t^2 + 16t - (x^2+8x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{2} \\ t = -\frac{x}{2} - 4 < 0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{2(4-x^2)} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 = \frac{32}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{2}-6}{3}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất } (x; y) = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{2}-6}{3} \right)$$

Bài 108: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 3y - 2 + \sqrt{xy - y^2 + x - y} = 0 \\ 3\sqrt{8-x} - 4\sqrt{y+1} = x^2 - 14y - 12 \end{cases}$$

Lần 1 – THPT SỞ QUẢNG NAM

Lời giải tham khảo

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + \sqrt{(x-y)(y+1)} - 2(y+1) = 0 & (1) \\ 3\sqrt{8-x} - 4\sqrt{y+1} = x^2 - 14y - 12 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \leq 8, y \geq -1, (x-y)(y+1) \geq 0$ (*)

Nếu $(x; y)$ là nghiệm của hệ (I) thì $y > -1$. Suy ra $x - y \geq 0$.

$$\text{Do đó: } (1) \Leftrightarrow \frac{x-y}{y+1} + \sqrt{\frac{x-y}{y+1}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-y}{y+1}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x-y}{y+1} = 1 \Leftrightarrow x = 2y + 1$$

Thay $x = 2y + 1$ vào (2) ta được:

$$3\sqrt{7-2y} - 4\sqrt{y+1} = (2y+1)^2 - 14y - 12 \Leftrightarrow 4\sqrt{y+1} - 3\sqrt{7-2y} + 4y^2 - 10y - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(\sqrt{y+1} - 2) - 3(\sqrt{7-2y} - 1) + 4y^2 - 10y - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-3) \left(\frac{2}{\sqrt{y+1}+2} + \frac{3}{\sqrt{7-2y}+1} + 2y+1 \right) = 0 \quad (3)$$

$$\text{Vì } -1 < y \leq \frac{7}{2} \text{ nên } \frac{2}{\sqrt{y+1}+2} \geq \frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{7-2y}+1} > \frac{3}{4}, 2y+1 > -1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{y+1}+2} + \frac{3}{\sqrt{7-2y}+1} + 2y+1 > 0. \text{ Do đó: } (3) \Leftrightarrow y-3=0 \Leftrightarrow y=3$$

$\Rightarrow x = 7$ (thỏa (*)). Vậy hệ phương trình đã cho có một nghiệm $(x; y) = (7; 3)$.

$$\text{Bài 109: Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 2y^3 + y + 2x\sqrt{1-x} = 3\sqrt{1-x} \\ \sqrt{9-4y^2} = 2x^2 + 6y^2 - 7 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 1 – THPT SỞ QUẢNG NGÃI

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \leq 1; y \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow 2y^3 + y = 2\sqrt{1-x} - 2x\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow 2y^3 + y = 2(1-x)\sqrt{1-x} + \sqrt{1-x}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t$, ta có $f'(t) = 6t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 1-x \end{cases}$$

Thế vào (2) ta được: $\sqrt{4x+5} = 2x^2 - 6x - 1$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow 2\sqrt{4x+5} = 4x^2 - 12x - 2 \Leftrightarrow (\sqrt{4x+5} + 1)^2 = (2x-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x+5} = 2x-3 \text{ (vn)} \\ \sqrt{4x+5} = 1-2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \text{ (I)} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt[4]{2} \\ y = -\sqrt[4]{2} \end{cases} \text{ Vậy hệ có hai nghiệm.}$$

$$\text{Bài 110: Giải bất phương trình: } 2x^2 + \sqrt{x+2} + 5 \leq \sqrt{2}(\sqrt{x+2} + x)\sqrt{x^2 - x + 3} + x.$$

Lần 1 – THPT SỞ THANH HÓA

Lời giải tham khảo

Gọi bất phương trình đã cho là (1). Điều kiện xác định: $x \geq -2$.

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}(\sqrt{x+2} + x)\sqrt{x^2 - x + 3} - (\sqrt{x+2} + x) \geq 2x^2 - 2x + 5$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\sqrt{x+2}+x)(\sqrt{2x^2-2x+6}-1) \geq 2x^2-2x+5 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x+2}+x)(2x^2-2x+6-1) \geq (2x^2-2x+5)(\sqrt{2x^2-2x+6}+1) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+2}+x \geq \sqrt{2x^2-2x+6}+1 \text{ (Do } 2x^2-2x+5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+2}+x-1 \geq \sqrt{2(x-1)^2+2(x+2)} \quad (2) \end{aligned}$$

Đặt $a = \sqrt{x+2}, b = x-1 (a \geq 0)$, (2) trở thành

$$a+b \geq \sqrt{2a^2+2b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ (a+b)^2 \geq 2a^2+2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ (a-b)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b \geq 0$$

$$\text{Do đó ta có } \sqrt{x+2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-3x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Bài 111: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2(1+y^2)} - \sqrt{1+x^2} = 1-xy \\ (2x-7xy)(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3xy}) = 5 \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT SỞ HÀ NỘI

Lời giải tham khảo

$$\text{ĐK: } \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x+3xy \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} - \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x} - y \Leftrightarrow y + \sqrt{1+y^2} = \frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{1+t^2}, t \in \mathbb{R}$. Do $f'(t) > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Do đó } (3) \Leftrightarrow f(y) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$$

Khi đó, (2) $\Leftrightarrow (2x-7)\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}\right) = 5 \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3} - \frac{5}{2x-7} = 0$ (vì $x = \frac{7}{2}$ không là nghiệm)

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \sqrt{3x-2} - \sqrt{x+3} - \frac{5}{2x-7}, \text{ với } x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right) \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{10}{(2x-7)^2} > 0, \text{ với } x \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right) \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$$

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{2}{3}; \frac{7}{2}\right)$ và $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$

Mà $g(1) = g(6) = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x = 1; x = 6$

Vậy hệ có nghiệm là $(1; 1); \left(6; \frac{1}{6}\right)$

Bài 112: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+6xy+17y^2} + \sqrt{17x^2+6xy+2y^2} = 5(x+y) \\ (x^2+1)(\sqrt{x+2}-2y) + (6y+11)\sqrt{x+2} = x^2 \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT SỞ NAM ĐỊNH

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \geq -2$

Từ (1) $\Rightarrow x + y > 0$ và

$$VT(1) = \sqrt{(x+4y)^2 + (x-y)^2} + \sqrt{(4x+y)^2 + (x-y)^2} \geq \sqrt{(x+4y)^2} + \sqrt{(4x+y)^2} = |x+4y| + |4x+y| \geq 5$$

Dấu “=” xảy ra $x = y \geq 0$ •Thế $x = y$ vào pt(2) ta được

Thế $x = y$ vào pt(2) ta được

$$(x^2 + 1)(\sqrt{x+2} - 2x) + (6x + 11)\sqrt{x+2} = x^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 12)\sqrt{x+2} = 2x^3 + x^2 + 2x \Leftrightarrow 2x^3 + x(x+2) - [x^2 + 6(x+2)]\sqrt{x+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + x(\sqrt{x+2})^2 - x^2\sqrt{x+2} - 6(\sqrt{x+2})^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)^3 - \left(\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)^2 + \frac{x}{\sqrt{x+2}} - 6 = 0 \text{ (do } x \geq 0)$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{\sqrt{x+2}}, \text{ pt trên trở thành: } 2t^3 - t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow (2t-3)(t^2 + 2t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+2}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3\sqrt{x+2} = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 9x - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9 + \sqrt{369}}{8} \text{ (t / m)} \\ x = \frac{9 - \sqrt{369}}{8} \text{ (l)} \end{cases}$$

$$\text{Với } x = \frac{9 + \sqrt{369}}{8} \Rightarrow y = \frac{9 + \sqrt{369}}{8} \text{ Vậy hệ phương trình có nghiệm } \left(\frac{9 + \sqrt{369}}{8}; \frac{9 + \sqrt{369}}{8} \right)$$

Bài 113: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2016^{x+y}(\sqrt{x^2+2}-x)(\sqrt{y^2+2}-y) = 2 \\ 25x^2 + 9x\sqrt{9x^2-4} = 2 + \frac{18y^2}{y^2+1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 2 – THPT SÔNG LÔ

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $|x| \geq \frac{2}{3}$

$$(1) \Leftrightarrow 2016^x(\sqrt{x^2+2}-x) = 2016^{-y}(\sqrt{y^2+2}+y)$$

$$\Leftrightarrow x \ln 2016 + \ln(\sqrt{x^2+2}-x) = -y \ln 2016 + \ln[\sqrt{(-y)^2+2}-(-y)]$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = t \ln 2016 + \ln(\sqrt{t^2+2}-t), t \in \mathbb{R} \text{ có } f'(t) = \ln 2016 - \frac{1}{\sqrt{t^2+2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $x = -y$.

$$\text{Thay vào (2) ta có: } 25x^2 + 9x\sqrt{9x^2-4} = 2 + \frac{18x^2}{x^2+1} \quad (3)$$

$$\text{Nếu } x \geq \frac{2}{3} \text{ thì } 18x^2 > \frac{18x^2}{x^2+1}, 7x^2 > 2 \Rightarrow VT(3) > VP(3) \text{ (loại)}$$

$$\text{Nếu } x \leq -\frac{2}{3} \text{ thì } 25 - 9\sqrt{9 - \frac{4}{x^2}} = \frac{2}{x^2} + \frac{18}{x^2+1}$$

Đặt $t = \frac{1}{x^2}$ ($0 < t \leq \frac{9}{4}$) ta được

$$25 - 9\sqrt{9-4t} = 2t + \frac{18t}{t+1} \Leftrightarrow \left(\frac{18t}{t+1} - 12 \right) + 2t - 4 + 9\sqrt{9-4t} - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{t+1}(t-2) + 2(t-2) - \frac{36(t-2)}{\sqrt{9-4t}+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ \frac{6}{t+1} + 2 - \frac{36}{\sqrt{9-4t}+1} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ \frac{6}{t+1} + 2 - \frac{36}{\sqrt{9-4t}+1} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Vì $0 \leq \sqrt{9-4t} < 3 \Rightarrow 12 < \frac{36}{\sqrt{9-4t}+1} \leq 36 \Rightarrow VT(4) < 0, \forall t \in \left(0; \frac{9}{4}\right]$

$$\Rightarrow t = 2. \text{ Từ đó tìm được } x = \frac{-1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bài 114: Giải bất phương trình: $\sqrt{x} \geq \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lần 1 – THPT TAM ĐẢO

Lời giải tham khảo

HD: Từ phương trình (1) dùng casio nhóm nhân tử ta có:

$$(x-y)(x^2-y+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ y=x^2+1 \end{cases}$$

TH1: $y = x^2 + 1$ thay vào pt (2), suy ra pt vô nghiệm.

TH2: $y = x$ thay vào (2) ta được phương trình:

$$3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) + (4x + 2)(\sqrt{1 + x + x^2} + 1) = 0$$

Đưa về dạng hàm:

$$3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) = (-2x - 1)(\sqrt{2 + (-2x - 1)^2} + 2) \Leftrightarrow 3x = -2x - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$$

$$\text{ĐS: } (x; y) = \left(-\frac{1}{5}; -\frac{1}{5}\right)$$

Bài 115: Giải bất phương trình: $\sqrt{\frac{x^2 + x + 2}{x + 3}} + x^2 \leq \frac{2}{\sqrt{x^2 + 3}} + 1.$

Lần 1 – THPT THẠCH THÀNH 1

Lời giải tham khảo

Điều kiện $x > -3$. Bất pt đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}} - \frac{2}{\sqrt{x^2+3}} + x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{x^2+x+2}{x+3} - \frac{4}{x^2+3}}{\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}} + \frac{2}{\sqrt{x^2+3}}} + x^2 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-1)(x^2+x+6)}{(x+3)(x^2+3)} + x^2 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1) \left[\frac{x^2+x+6}{(x+3)(x^2+3) \left(\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}} + \frac{2}{\sqrt{x^2+3}} \right)} + 1 \right] \leq 0$$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ (Với $x > -3$ thì biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương).

Vậy tập nghiệm của bất pt là $S = [-1; 1]$

Bài 116: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = (x-y)(2xy+3) \\ x^2 + y^2 = 3 + xy \end{cases}$$

Lần 2 – THPT THẠCH THÀNH 1

Lời giải tham khảo

Ta có
$$\begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = (x-y)(2xy+3) \\ x^2 + y^2 = 3 + xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = (x-y)(2xy+x^2+y^2-xy) \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = x^3 - y^3 \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 8y^3 \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 3y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ có 2 nghiệm $x; y = 2; 1$; $x; y = -2; -1$.

Bài 117: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^{10} + 2x^6 = y^5 + 2x^4y \\ \sqrt{x^2+5} + \sqrt{2y+1} = 6 \end{cases}$$

Lần 3 – THPT THẠCH THÀNH 1

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $2y+1 \geq 0 \Rightarrow y \geq -\frac{1}{2}$

- Xét $x=0$, từ pt đầu suy ra $y=0$, thay $x=y=0$ vào pt thứ hai không thỏa mãn (loại) Xét $x \neq 0$,

chia 2 vế của pt đầu cho $x^5 \neq 0$, ta được $x^5 + 2x = \left(\frac{y}{x}\right)^5 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$ (1)

- Xét $x \neq 0$, chia 2 vế của pt đầu cho $x^5 \neq 0$, ta được $x^5 + 2x = \left(\frac{y}{x}\right)^5 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^5 + 2t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 5t^4 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t) = t^5 + 2t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó (1) $\Leftrightarrow x = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = x^2$.

Thay vào pt thứ 2 của hệ ta được: $\sqrt{y+5} + \sqrt{2y+1} = 6$ (2)

Xét hàm số $g(y) = \sqrt{y+5} + \sqrt{2y+1}, \forall y \geq -\frac{1}{2}$.

Ta có $g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y+5}} + \frac{1}{\sqrt{2y+1}} > 0, \forall y > -\frac{1}{2}$. Vậy $g(y)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Mà $g(4) = 6$ nên (2) $\Leftrightarrow y = 4$

Suy ra $y = x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$

Bài 118: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{9y^2 + (2y+3)(y-x)} + 4\sqrt{xy} = 7x \\ (2y-1)\sqrt{1+x} + (2y+1)\sqrt{1-x} = 2y \end{cases}$$

Lần 1 – THPT THANH CHƯƠNG 1

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $9y^2 + (2y+3)(y-x) \geq 0; xy \geq 0; -1 \leq x \leq 1$.

Từ phương trình thứ nhất, ta có được: $x \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$

+ Xét $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, thỏa mãn hệ phương trình.

+ Xét x, y không đồng thời bằng 0, phương trình thứ nhất tương đương với:

$$\begin{aligned} & \sqrt{9y^2 + (2y+3)(y-x)} - 3x + 4\sqrt{xy} - 4x = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{9y^2 + (2y+3)(y-x) - 9x^2}{\sqrt{9y^2 + (2y+3)(y-x)} + 3x} + \frac{4(xy - x^2)}{\sqrt{xy} + x} = 0 \\ & \Leftrightarrow (y-x) \left[\frac{9(x+y) + (2y+3)}{\sqrt{9y^2 + (2y+3)(y-x)} + 3x} + \frac{4x}{\sqrt{xy} + x} \right] = 0 \\ & \Leftrightarrow y = x \end{aligned}$$

Thế $y = x$ vào phương trình thứ hai, ta được:

$$\begin{aligned} & (2x-1)\sqrt{1+x} + (2x+1)\sqrt{1-x} = 2x \\ & \Leftrightarrow 2x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 1) - (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = 0 \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{1+x}; a \geq 0 \\ b = \sqrt{1-x}; b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = a^2 - b^2.$

Phương trình trở thành: $(a^2 - b^2)(a+b-1) - (a-b) = 0$.

$$\Leftrightarrow (a-b)[(a+b)(a+b-1)-1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ (a+b)^2 - (a+b) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a+b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

+ Với $a = b \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = 0$ (loại)

$$+ \text{ Với } a+b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

Hệ phương trình có nghiệm: $(x; y) = (0; 0); \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}; \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \right).$

Bài 119: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 3\sqrt{xy+x-y^2-y} = 5y+4 \\ \sqrt{4y^2-x-2} + \sqrt{y-1} = x-1 \end{cases}.$$

Lần 1– THPT THANH CHƯƠNG 3

Lời giải tham khảo

$$\text{Đk: } \begin{cases} xy+x-y^2-y \geq 0 \\ 4y^2-x-2 \geq 0 \\ y-1 \geq 0 \end{cases}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x-y+3\sqrt{(x-y)(y+1)}-4(y+1)=0$

Đặt $u = \sqrt{x-y}, v = \sqrt{y+1}$ ($u \geq 0, v \geq 0$)

Khi đó (1) trở thành: $u^2 + 3uv - 4v^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = -4v(vn) \end{cases}$

Với $u = v$ ta có $x = 2y+1$, thay vào (2) ta được: $\sqrt{4y^2-2y-3} + \sqrt{y-1} = 2y$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4y^2-2y-3} - (2y-1) + (\sqrt{y-1}-1) = 0$$

$$\frac{2(y-2)}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1} + \frac{y-2}{\sqrt{y-1}+1} = 0 \Leftrightarrow (y-2) \left(\frac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1} + \frac{1}{\sqrt{y-1}+1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y=2 \text{ (vì } \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1} + \frac{1}{\sqrt{y-1}+1} > 0 \forall y \geq 1)$$

Với $y=2$ thì $x=5$. Đối chiếu Đk ta được nghiệm của hệ PT là $(5; 2)$

Bài 120: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + 3(x+y) = 6y(y-2) + 14 \\ 27x^3 + 27x^2 + 20x + 4 = 4\sqrt[3]{y+2x-1} \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT THỐNG NHẤT

Lời giải tham khảo

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^3 + 3x = -y^3 + 6y^2 - 15y + 14$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x = (2-y)^3 + 3(2-y)$$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 + 3t$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$ với $(\forall t \in \mathbb{R}) \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$pt: f(x) = f(2-y) \Leftrightarrow x = 2-y \Leftrightarrow y = 2-x$$

Thế $y = 2-x$ vào phương trình (2) ta được.

$$27x^3 + 2x^2 + 20x + 4 = 4\sqrt[3]{1+x} \Leftrightarrow (3x+1)^3 + 4(3x+1) = x+1 + 4\sqrt[3]{x+1}$$

Xét hàm số: $g(t) = t^3 + 4t$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(t) = 3t^2 + 4 > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra: } g(3x+1) = g(\sqrt[3]{x+1}) \Leftrightarrow 3x+1 = \sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = x+1$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 + 27x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=2 \\ 27x^2 + 27x + 8 = 0(vn) \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(0;2)$

Bài 121: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 6xy + 5y^2} + \sqrt{2x^2 + 2xy + 13y^2} = 2(x+y) & (1) \\ (x+2y)\sqrt{x+2} - 4y^2\sqrt{y} = 8y^4\sqrt{y} - 2\sqrt{x+2} & (2) \end{cases}$$

Lần 1 – THPT BÌNH LONG

Lời giải tham khảo

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$$

Xét $y=0$, hệ vô nghiệm nên y khác 0. Chia cả 2 vế của (1) cho y ta được:

$$\sqrt{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 6\frac{x}{y} + 5} + \sqrt{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\frac{x}{y} + 13} = 2\left(\frac{x}{y} + 1\right)$$

Đặt $t = \frac{x}{y} (t > -1)$

$$PT: \sqrt{2t^2 - 6t + 5} + \sqrt{2t^2 + 2t + 13} = 2(t+1)$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 2t^3 - 3t^2 + 4t + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+1)^2(t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(\text{loại}) \\ t = 2(t/m) \end{cases}$$

Với $t = 2 \Rightarrow x=2y$, thế vào (2) ta được:

$$4y\sqrt{2y+2} - 4y^2\sqrt{y} = 8y^4\sqrt{y} - 2\sqrt{2y+2}$$

$$\Leftrightarrow 4y\sqrt{2y+2} + 2\sqrt{2y+2} = 8y^4\sqrt{y} + 4y^2\sqrt{y}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{2}{y} + 2} + \frac{2}{y}\sqrt{\frac{2}{y} + 2} = 8y^3 + 4y$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{y} + 2\right)\sqrt{\frac{2}{y} + 2} + 2\sqrt{\frac{2}{y} + 2} = (2y)^3 + 2 \cdot (2y) \quad (3)$$

Xét hàm số $f(u) = u^3 + 2u$ với $u > 0$; có $f'(u) = 3u^2 + 2 > 0$, mọi $u > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến

$$\text{Từ (3)} \Rightarrow f\left(\sqrt{\frac{2}{y} + 2}\right) = f(2y) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{y} + 2} = 2y \Leftrightarrow 4y^3 - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

Hệ có nghiệm duy nhất $(2;1)$

Bài 122: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{y} - \sqrt{x+y+1} = x^3 + 3y(x^2 + xy + y - 1) + 1 \\ y^2 + \sqrt{y-5x} = 5 \end{cases}$$

Lần 2 – THPT BÌNH LONG

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $\begin{cases} y > 0 \\ x+y \geq -1 \end{cases}$ (vì $y=0$ không thỏa hpt)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{-(x+1)}{\sqrt{y} + \sqrt{x+y+1}} = (x+1)(x^2 - x + 1) + 3y(x+1)(x+y-1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[x^2 - x + 3xy + 3y^2 - 3y + 1 + \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x+y+1}}]$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[x^2 + (3y-1)x + 3y^2 - 3y + 1 + \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x+y+1}}] \quad (3)$$

Xét $A = x^2 + (3y-1)x + 3y^2 - 3y + 1$; $\Delta = -3(y-1)^2 \leq 0 \quad \forall x \in R \Rightarrow A \geq 0 \quad \forall x, y \in R$

$$(3) \Leftrightarrow x = -1$$

Thay $x = -1$ vào (2) ta có : $y^2 + \sqrt{y+5} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \quad (l)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(-1; \frac{-1+\sqrt{17}}{2})$

Bài 123: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3 + y^2 + 4(x-y-1) = xy^2 \\ (x^2+1)y^2 + x^2(2y+1) = x^2 - 3x - 2 \end{cases}$

Lần 3 – THPT BÌNH LONG

Lời giải tham khảo

Biến đổi pt ban đầu về dạng $(y-2)(y+2)(y+1-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \\ y = x-1 \end{cases}$

TH 1: Với $y = 2$ thay vào pt (2): $8x^2 + 3x + 6 = 0$ vô nghiệm

TH 2: Với $y = -2$ thay vào (2): $3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$ suy ra nghiệm $(x; y) = (-2; -2)$

TH 3: Với $y = x-1$ thay vào (2): $x^4 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - \frac{1}{2})^2 + (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{2} = 0$ (vn)

Kl: hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (-2; -2)$

Bài 124: Giải bất phương trình: $(4x^2 - x - 7)\sqrt{x+2} > 4x - 8x^2 + 10$

Lần 1 – THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN – ĐÀ NẴNG

Lời giải tham khảo

Điều kiện $x \geq -2$.

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow (4x^2 - x - 7)\sqrt{x+2} + 8x^2 - 2x - 14 > 2x - 4 \\
&\Leftrightarrow (4x^2 - x - 7)(\sqrt{x+2} + 2) > 2(x-2) \\
&\Leftrightarrow (4x^2 - x - 7)(\sqrt{x+2} + 2) - 2(\sqrt{x+2} + 2)(\sqrt{x+2} - 2) > 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{x+2} + 2)[(4x^2 - x - 7) - 2(\sqrt{x+2} - 2)] > 0 \\
&\Leftrightarrow 4x^2 - x - 7 - 2(\sqrt{x+2} - 2) > 0 \quad \text{do } \sqrt{x+2} + 2 > 0 \\
&\Leftrightarrow 4x^2 - x - 3 > 2\sqrt{x+2} \quad \text{do } \sqrt{x+2} + 2 > 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^2 - x - 3 > 0 \end{cases} \quad (2) \\
&\Leftrightarrow (4x^2 - x - 3)^2 > 4(x+2) \quad (3)
\end{aligned}$$

$$(2) \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -\frac{3}{4}$$

$$(3) \Leftrightarrow 16x^4 - 8x^3 - 23x^2 + 2x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(4x-1)(4x^2 - 5x - 1) > 0$$

Lập bảng xét dấu của biểu thức VT. Khi đó, phương trình (3) có tập nghiệm là:

$$T_3 = (-\infty; -1) \cap \left(\frac{5-\sqrt{48}}{8}; \frac{1}{4}\right) \cap \left(\frac{5+\sqrt{48}}{8}; +\infty\right)$$

Kết hợp với (2) và điều kiện ban đầu, bất phương trình đã cho có tập nghiệm:

$$T = [-2; -1) \cap \left(\frac{5+\sqrt{48}}{8}; +\infty\right)$$

Bài 125: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{2x+1} + x^2 + 2xy + 4y - 1 = 3y^2 + \sqrt{2y-1} \\ x\sqrt{x^2 + xy + 1} = 2x^2 + 3y^2 - xy - x - 9 \end{cases}$$

Lần 1 – THPT HÙNG VƯƠNG

Lời giải tham khảo

$$\text{+) ĐK: } \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2y-1 \geq 0 \\ x^2 + xy + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ y \geq \frac{1}{2} \\ x^2 + xy + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{+) Ta có PT (1)} \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} - \sqrt{2y-1} + x^2 + 2xy + 4y - 3y^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y-1}} + x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow x - y + 1 \left(\frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y-1}} + x + 3y - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y-1}} + x + 3y - 1 = 0(*) \end{cases} \quad \text{Vì } x \geq -\frac{1}{2}, y \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x + 3y - 1 \geq 0 \text{ nên } (*) \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{+) Với } x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1 \text{ thay vào phương trình (2) ta có: } x\sqrt{2x^2 + x + 1} = 4x^2 + 4x - 6$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{2x^2 + x + 1} - 2x = 4x^2 + 2x - 6 \Leftrightarrow x\sqrt{2x^2 + x + 1} - 2 = 2x^2 + 2x - 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \cdot 2x^2 + x - 3}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + 2} - 2 \cdot 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 3 = 0 \\ \frac{x}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + 2} = 2 \end{cases}$$

Với $2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Hệ có nghiệm } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Với $\frac{x}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + 2} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 + x + 1} = x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 7x^2 + 12x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{30}}{7} \end{cases} (l)$

+) Kết luận: Hệ có nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Bài 126: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ 2x^3 - 9y^3 = (x - y)(2xy + 3) \end{cases}$.

Lần 1 – THPT LÊ HỒNG PHONG

Lời giải tham khảo

Thay (1) vào (2) ta được $2x^3 - 9y^3 = (x - y)(2xy + x^2 - xy + y^2)$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ 2x^3 - 9y^3 = x^3 - y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

KẾT LUẬN:

Bài 127: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 + \sqrt{2x} = (x + y)y + \sqrt{x + y} \\ \sqrt{x - 1} + xy = \sqrt{y^2 + 21} \end{cases}$.

Lần 1 – THPT LỘC NINH

Lời giải tham khảo

Điều kiện xác định $x \geq 1, x + y \geq 0$

Khi đó

$$2x^2 + \sqrt{2x} = (x + y)y + \sqrt{x + y} \Leftrightarrow 2x^2 - xy - y^2 + \sqrt{2x} - \sqrt{x + y} = 0 \textcircled{*}$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(2x + y) + \frac{x - y}{\sqrt{2x} + \sqrt{x + y}} = 0 \Leftrightarrow (x - y) \left(2x + y + \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x + y}} \right) = 0.$$

Do $x \geq 1, x + y \geq 0 \Rightarrow 2x + y > 0$, từ đó suy ra $x = y$.

Thay vào (2) ta có $\sqrt{x - 1} + x^2 = \sqrt{x^2 + 21} \Leftrightarrow \sqrt{x - 1} - 1 + x^2 - 4 = \sqrt{x^2 + 21} - 5$

$$\Leftrightarrow (x - 2) \left(\frac{1}{\sqrt{x - 1} + 1} + x + 2 - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 21} + 5} \right) = 0 \quad (3)$$

Vì $x + 2 - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 21} + 5} = (x + 2) \left(1 - \frac{1}{10 + \sqrt{x^2 + 91}} \right) > 0$, từ (3) suy ra $x = 2$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(2; 2)$.

Bài 128: Giải bất phương trình:

$$(5x^2 - 5x + 10)\sqrt{x+7} + (2x+6)\sqrt{x+2} \geq x^3 + 13x^2 - 6x + 32.$$

Lần 2 – THPT LỘC NINH**Lời giải tham khảo**

Điều kiện $x \geq -2$. Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$(5x^2 - 5x + 10)(\sqrt{x+7} - 3) + (2x+6)(\sqrt{x+2} - 2) + 3(5x^2 - 5x + 10) + 2(2x+6) \geq x^3 + 13x^2 - 6x + 32$$

$$\Leftrightarrow (5x^2 - 5x + 10)(\sqrt{x+7} - 3) + (2x+6)(\sqrt{x+2} - 2) - x^3 + 2x^2 - 5x + 10 \geq 0 \textcircled{*}$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} + \frac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2} - x^2 - 5 \right) \geq 0 \textcircled{*}$$

$$\text{Do } x \geq -2 \Rightarrow \sqrt{x+2} + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} \leq \frac{1}{2} \text{ và vì } 2x+6 > 0 \Rightarrow \frac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2} \leq \frac{2x+6}{2} = x+3 \textcircled{(1)}$$

$$\text{Do } x \geq -2 \Rightarrow \sqrt{x+7} + 3 \geq \sqrt{5} + 3 > 5 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+7} + 3} < \frac{1}{5} \text{ và vì } 5x^2 - 5x + 10 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} < \frac{5x^2 - 5x + 10}{5} = x^2 - x + 2 \Rightarrow \frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} - x^2 - 5 < -x - 3 \textcircled{(2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} + \frac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2} - x^2 - 5 < 0. \text{ Do đó } (*) \Leftrightarrow x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$$

Kết hợp điều kiện $x \geq -2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Bài 129: Giải hệ phương trình: $4x^2 + 1 = \sqrt{3x^2 - 2x - 1} + 2x\sqrt{x^2 + 2x + 2}.$ **Lần 2 – THPT BỐ HẠ****Lời giải tham khảo**

Điều kiện: $x \geq 1$ v $x \leq -\frac{1}{3}$.

Phương trình:

$$4x^2 + 1 = \sqrt{3x^2 - 2x - 1} + 2x\sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 + 2 - 2\sqrt{3x^2 - 2x - 1} - 4x\sqrt{x^2 + 2x + 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x^2 - 2x - 1 - \sqrt{3x^2 - 2x - 1} + 1) + (x^2 + 2x + 2 - 4x\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 4x^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x^2 - 2x - 1} - 1)^2 + (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 - 2x - 1} - 1 = 0 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 - 2x - 1} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 = 1 \\ x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 2 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x - 2 = 0 \\ x \geq 0 \\ -3x^2 + 2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

Bài 130: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x^2 - x + 2)y + x = 0 \\ (x^4 - 4x^2 - 1)y^2 + (2x^3 + x)y + x^2 = 0. \end{cases}$$

Lần 1 – THPT NGUYỄN DU

Lời giải tham khảo

+ $(x; y) = (0; 0)$ là một nghiệm của (I).

+ Mọi cặp số $(x; 0)$ và $(0; y)$ với $x \neq 0, y \neq 0$ đều không phải là nghiệm của (I).

+ Trường hợp $x \neq 0, y \neq 0$:

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y - xy + 2y + x = 0 \\ x^4y^2 - 4x^2y^2 - y^2 + 2x^3y + xy + x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(xy + 1) + 2y = xy \\ x^2(xy + 1)^2 + xy(xy + 1) - y^2 = 5x^2y^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{y}\right) + \frac{2}{x} = 1 \\ \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{y}\right)\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt $a = x + \frac{1}{y}, b = \frac{1}{x}$ ($b \neq 0$), hệ trên trở thành: (II)
$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a^2 + ab - b^2 = 5 \end{cases}$$

Giải hệ (II) được: $(a; b) = (3; -1)$ và $(a; b) = (-7; 4)$

+ Với $(a; b) = (3; -1)$ thì: $(x; y) = \left(-1; \frac{1}{4}\right)$

+ Với $(a; b) = (-7; 4)$ thì: $(x; y) = \left(\frac{1}{4}; -\frac{4}{29}\right)$

Bài 131: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 2 – THPT NGUYỄN DU

Lời giải tham khảo

$$(2) \Leftrightarrow x^2(2x - y + 1) - y(2x - y + 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - y)(2x - y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 \text{ hoặc } y = 2x + 1$$

©

Với $y = x^2$, (1) trở thành $x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \rightarrow y = 1$

Với $y = 2x + 1$, (2) trở thành $2x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \rightarrow y = \pm\sqrt{5}$

Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm: $S = \{(1; 1), \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \sqrt{5}\right), \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}; -\sqrt{5}\right)\}$

Bài 132: Giải bất phương trình:
$$(5x^2 - 5x + 10)\sqrt{x + 7} + (2x + 6)\sqrt{x + 2} \geq x^3 + 13x^2 - 6x + 32.$$

Lần 1 – THPT NGUYỄN VĂN TRỖI

Lời giải tham khảo

Điều kiện $x \geq -2$. Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$(5x^2 - 5x + 10)(\sqrt{x + 7} - 3) + (2x + 6)(\sqrt{x + 2} - 2) + 3(5x^2 - 5x + 10) + 2(2x + 6) \geq x^3 + 13x^2 - 6x + 32$$

$$\Leftrightarrow (5x^2 - 5x + 10)(\sqrt{x+7} - 3) + (2x+6)(\sqrt{x+2} - 2) - x^3 + 2x^2 - 5x + 10 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} + \frac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2} - x^2 - 5 \right) \geq 0 \quad (*)$$

Do $x \geq -2 \Rightarrow \sqrt{x+2} + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} \leq \frac{1}{2}$ và vì $2x+6 > 0 \Rightarrow \frac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2} \leq \frac{2x+6}{2} = x+3 \quad (1)$

Do $x \geq -2 \Rightarrow \sqrt{x+7} + 3 \geq \sqrt{5} + 3 > 5 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+7} + 3} < \frac{1}{5}$ và vì $5x^2 - 5x + 10 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} < \frac{5x^2 - 5x + 10}{5} = x^2 - x + 2 \Rightarrow \frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} - x^2 - 5 < -x - 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7} + 3} + \frac{2x+6}{\sqrt{x+2} + 2} - x^2 - 5 < 0$. Do đó (*) $\Leftrightarrow x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

Kết hợp điều kiện $x \geq -2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Bài 133: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2y^2 - 3y + 1 + \sqrt{y-1} = x^2 + \sqrt{x} + xy \\ \sqrt{2x+y} - \sqrt{2y-3x+4} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \end{cases}; x, y \in \mathbb{R}.$$

Lần 1 – THPT THANH HOA

Lời giải tham khảo

Đk: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \\ 2y - 3x + 4 \geq 0 \end{cases}$ (nhận thấy $x = 0$ và $y = 1$ không thỏa hệ đã cho)

$$(1): 2y^2 - 3y + 1 + \sqrt{y-1} = x^2 + \sqrt{x} + xy$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}} = x^2 + xy - 2y^2 + 3y - 1$$

$$\Leftrightarrow (y-x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}} + x + 2y - 1 \right) = 0; \left(\frac{1}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}} + x + 2y - 1 > 0, \forall \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow y = x + 1$$

$$(2): \sqrt{2x+y} - \sqrt{2y-3x+4} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1} - 4) + (1 - \sqrt{6-x}) + (x-5)(3x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1} + 4} + \frac{1}{1 + \sqrt{6-x}} + 3x + 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

Vậy nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$

Bài 134: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+y} + y = \sqrt{x^4+x^3} + x \\ x + \sqrt{y} + \sqrt{x-1} + \sqrt{y(x-1)} = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Lần 2 – THPT THANH HOA

Lời giải tham khảo

$$\text{Đk: } \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x(\sqrt{x^2+y} - \sqrt{x^2+x}) + (x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \frac{y-x}{\sqrt{x^2+y} + \sqrt{x^2+x}} + x-y = 0 \Leftrightarrow (x-y)(\sqrt{x^2+y} + \sqrt{x^2+x} - x) = 0$$

$$\text{Vì } \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \text{ Do đó: } (1) \Leftrightarrow x = y. \text{ Thay vào pt (2): } x + \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x(x-1)} = \frac{9}{2}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = 2x - 1 + 2\sqrt{x(x-1)}$$

$$\text{Pt trở thành } t^2 + 1 + 2t = 9 \text{ hay } t^2 + 2t - 8 = 0 \text{ chỉ lấy } t = 2 \Rightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x} = 2$$

$$2\sqrt{x(x-1)} = 5 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ 4x^2 - 4x = 25 - 20x + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{25}{16}$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm duy nhất } \left(\frac{25}{16}; \frac{25}{16}\right)$$

$$\text{Bài 135: Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 2x^2 - 5xy - y^2 = y(\sqrt{xy-2y^2} + \sqrt{4y^2-xy}) \\ \sqrt{3y} + \sqrt{x^2+2x} - x - x\sqrt{2+9y^2} = 0 \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT CHUYÊN BIÊN HÒA

Lời giải tham khảo

$$\text{Điều kiện: } 4y \geq x \geq 2y \geq 0$$

$$\text{Với } y = 0 \text{ thì } x = 0.$$

$$y > 0, (1) \Leftrightarrow 2x^2 - 5xy - y^2 - y(\sqrt{xy-2y^2} + \sqrt{4y^2-xy}) = 0$$

$$\text{Với } \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\frac{x}{y} - 1 - \sqrt{\frac{x}{y} - 2} - \sqrt{4 - \frac{x}{y}} = 0$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{y} = t \Rightarrow t \in [2; 4]$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 5t - 1 - \sqrt{t-2} - \sqrt{4-t} = 0 \Leftrightarrow 2t(t-3) + \sqrt{t-2}(\sqrt{t-2}-1) + (1-\sqrt{4-t}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t(t-3) + \frac{(t-3)\sqrt{t-2}}{\sqrt{t-2}+1} + \frac{t-3}{1+\sqrt{4-t}} = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow x = 3y$$

Thay $x = 3y$ vào (2) ta được:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x^2+2x} - x - x\sqrt{x^2+2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(1 + \sqrt{x+2}) = x(1 + \sqrt{x^2+2})$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t(1 + \sqrt{t^2+2}), f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+2} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$f(\sqrt{x}) = f(x) \Leftrightarrow \sqrt{x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm } (0; 0), \left(1; \frac{1}{3}\right)$$

Bài 136: Giải phương trình: $2^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \log_2(x + \sqrt{x^2+1}) = 4^x \cdot \log_2(3x)$.

Lần 2 – THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2^{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \log_2(x + \sqrt{x^2+1}) = 2^{3x} \cdot \log_2(3x) \quad (1)$$

Xét hai trường hợp sau: $2^{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \log_2(x + \sqrt{x^2+1}) > 2 > 0 > 2^{3x} \cdot \log_2(3x) \quad (1)$

Suy ra (1) không thỏa mãn

TH2: $x \geq \frac{1}{3}$. Ta có $x + \sqrt{x^2+1}$ và $3x$ đều thuộc khoảng $[1; +\infty)$

Xét hàm số $f(t) = 2^t \cdot \log_2 t$ trên khoảng $[1; +\infty)$

Ta có $f'(t) = 2^t \ln 2 \cdot \log_2 t + 2^t \cdot \frac{1}{t \ln 2} > 0$ với mọi t thuộc khoảng $[1; +\infty)$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $[1; +\infty)$

Do đó (1) tương đương với $x + \sqrt{x^2+1} = 3x$. Từ đó giải ta được $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 137: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + x^2 + 2y^2 + 2x + 3y + 2 = 0 \\ \sqrt{8 - xy - x} + 2015 = \sqrt{x^2 + x + y + 4} + 2016x \end{cases}$$

Lần 1 – THPT LIÊN SƠN

Lời giải tham khảo

$$\text{ĐK: } \begin{cases} 8 - xy - x \geq 0 \\ x^2 + x + y + 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow y^3 + 2y^2 + 3y = -x^3 - x^2 - 2x - 2$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 2y^2 + 3y = -(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 2(x^2 + 2x + 1) - 3x - 3$$

$$\Leftrightarrow y^3 + 2y^2 + 3y = (-x-1)^3 + 2(-x-1)^2 + 3(-x-1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t^2 + 3t$, $t \in \mathbb{R}$

Có $f'(t) = 3t^2 + 4t + 3 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Ta được $(1) \Leftrightarrow f(y) = f(-x-1) \Leftrightarrow y = -x-1$

Thay $y = -x-1$ vào (2) và rút gọn được phương trình

$$\sqrt{x^2+8} + 2015 = \sqrt{x^2+3} + 2016x \quad (*)$$

$$\text{Ta có } \sqrt{x^2+8} - \sqrt{x^2+3} = 2016x - 2015 > 0 \Rightarrow x > \frac{2015}{2016}$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \sqrt{x^2+8} - \sqrt{x^2+3} - 2016x + 2015, \quad x > \frac{2015}{2016}$$

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+8}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 2016$$

$$= \frac{x(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+8})}{\sqrt{(x^2+8)(x^2+3)}} - 2016 < 0 \quad \forall x > \frac{2015}{2016}$$

Suy ra $g(x)$ nghịch biến trên $\left(\frac{2015}{2016}; +\infty\right)$

Suy ra phương trình $g(x) = 0$ (Phương trình (*)) có tối đa 1 nghiệm

Mặt khác $g(1) = 0$

Từ đó ta được $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*)

Với $x = 1 \Rightarrow y = -2$ (thỏa mãn điều kiện ban đầu)

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; -2)$

Bài 138: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x^2+3x+3} + \sqrt[3]{2y^2+3y+2} = (x+y)\left(\frac{2}{3}x+1\right) + y^2+3 \\ \sqrt{2y^2+3x} - \sqrt{2y+3} - \sqrt{x+y} = 3-5x-2x^2 \end{cases}$$

Lần 3 – THPT NGUYỄN KHUYẾN

Lời giải tham khảo

HD: Từ phương trình (1) của hệ ta có các đánh giá:

$$\sqrt[3]{x^2+3x+3} = \sqrt[3]{(x^2+3x+3) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{x^2+3x+5}{3} \quad \text{và}$$

$$\sqrt[3]{2y^2+3y+2} = \sqrt[3]{(2y^2+3y+2) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{2y^2+3y+4}{3}$$

$$\text{Từ (1) suy ra: } (x+y)\left(\frac{2}{3}x+1\right) = \sqrt[3]{x^2+3x+3} + \sqrt[3]{2y^2+3y+2} \leq \frac{x^2+3x+2y^2+3y+9}{3}$$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 \leq 0 \Rightarrow x-y=0$. Thay $y = -x$ vào phương trình (2), rồi liên hợp ta tìm được nghiệm:

$$(x; y) = \left\{ \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), (-3; 3) \right\}$$

Bài 139: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x^3 - 26x^2 + 44x - 20 + 5(1-y)\sqrt{y-1} - 4y = 0 \\ \sqrt{x^2+x-6} + 3\sqrt{x-1} - \sqrt{6x+3y+4} = 0 \end{cases}$$

Lần 1 – THPT THỪA LƯU

Lời giải tham khảo

Đưa phương trình (1) về dạng hàm số:

$$5(x-2)^3 + 4(x-2)^2 = 5(\sqrt{y-1})^3 + 4(\sqrt{y-1})^2$$

$$\Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 5$$

Thay vào phương trình (2) ta được phương trình: $\sqrt{x^2 + x - 6} + 3\sqrt{x - 1} - \sqrt{3x^2 - 6x + 19} = 0$
 Chuyển vế bình phương liên tiếp giải phương trình bậc 4 (viết đảo + casio) hoặc đặt ẩn phụ

đưa về bậc 2,... thử lại có nghiệm:

$$\begin{cases} x = \frac{23 - \sqrt{341}}{2} \Rightarrow y = \frac{353 - 19\sqrt{341}}{2} \\ x = \frac{23 + \sqrt{341}}{2} \Rightarrow y = \frac{353 + 19\sqrt{341}}{2} \end{cases}$$

Bài 140: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} \\ y - 1 + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} \end{cases}$$

Lần 1 – THPT ISCHOOL – KHÁNH HÒA

Lời giải tham khảo

Đặt $u = x - 1$, $v = y - 1$, hệ trở thành
$$\begin{cases} u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^v (1) \\ v + \sqrt{v^2 + 1} = 3^u (2) \end{cases}$$

Trừ (1) và (2) vế theo vế ta có $u + \sqrt{u^2 + 1} + 3^u = v + \sqrt{v^2 + 1} + 3^v (*)$.

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1} + 3^t$ trên $\mathbb{R}$, $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} + 3^t \ln 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$. Với $u = v$ thay vào (1) ta được

$$u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^u \Leftrightarrow \frac{-1}{u - \sqrt{u^2 + 1}} = 3^u \Leftrightarrow 3^u (\sqrt{u^2 + 1} - u) = 1 (**).$$

Xét hàm số $g(u) = 3^u (\sqrt{u^2 + 1} - u)$, $g'(u) = 3^u (\sqrt{u^2 + 1} - u) \left(\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \right) > 0, \forall u \in \mathbb{R}$.

Mặt khác $g(0) = 0$ do đó $(**)$ có nghiệm duy nhất $u = 0$. Với $u = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow x = y = 1$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

Bài 141: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{3y + 1} = \sqrt{x} + \sqrt{x + 2y} \\ x^2 + x + 3y + 17 - 6\sqrt{x + 7} - 2x\sqrt{3y + 1} = 0 \end{cases}$$

Lần 2 – THPT THUẬN THÀNH 1

Lời giải tham khảo

ĐK:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -\frac{1}{3} \\ 2x - y - 1 \geq 0 \\ x + 2y \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x - y - 1} - \sqrt{x} + \sqrt{3y + 1} - \sqrt{x + 2y} = 0$$

* Nhận xét:

- Nếu $\begin{cases} \sqrt{2x - y - 1} = 0 \\ \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} (L) \Rightarrow \sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{x} > 0$

- Nếu $\begin{cases} \sqrt{3y+1} - 0 = 0 \\ \sqrt{x+2y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$. Thay vào PT(2) thấy không thỏa mãn

$$\Rightarrow \sqrt{3y+1} + \sqrt{x+2y} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-y-1}{\sqrt{2x-y-1} + \sqrt{x}} - \frac{x-y-1}{\sqrt{3y+1} + \sqrt{x+2y}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{x} = \sqrt{3y+1} + \sqrt{x+2y} \end{cases}$$

+ TH1: $x-y-1=0 \Leftrightarrow y=x-1$. Thế vào PT (2) ta được:

$$x^2 + 4x + 14 - 6\sqrt{x+7} - 2x\sqrt{3x-2} = 0 \quad (3). \text{ĐK: } x \geq \frac{2}{3}$$

$$(3) \Leftrightarrow 2[6\sqrt{x+7} - (x+16)] + x[4\sqrt{3x-2} - (3x+2)] + x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x^2 - 4x + 4) \left(\frac{2}{6\sqrt{x+7} + x + 16} + \frac{9x}{4\sqrt{3x-2} + 3x + 2} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 \left(\frac{2}{6\sqrt{x+7} + x + 16} + \frac{6x-2-4\sqrt{3x-2}}{4\sqrt{3x-2} + 3x + 2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 \left(\frac{2}{6\sqrt{x+7} + x + 16} + \frac{2(\sqrt{3x-2}-1)^2}{4\sqrt{3x-2} + 3x + 2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \text{ (TM)} \Rightarrow y=1 \text{ (TM)}. \textcircled{+} \text{ TH2: } \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{x} = \sqrt{3y+1} + \sqrt{x+2y}$$

$$+ \text{ TH2: } \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{x} = \sqrt{3y+1} + \sqrt{x+2y}$$

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{3y+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x+2y} \\ \sqrt{2x-y-1} + \sqrt{x} = \sqrt{3y+1} + \sqrt{x+2y} \end{cases}$

Trừ hai vế tương ứng của hai phương trình ta được:

$$\sqrt{x} = \sqrt{3y+1} \Leftrightarrow 3y = x-1. \textcircled{+} \text{ Thế vào PT (2) ta được:$$

Thế vào PT (2) ta được:

$$x^2 + 2x + 16 - 6\sqrt{x+7} - 2x\sqrt{x} = 0 \quad (4). \text{ĐK: } x \geq 0$$

$$\text{PT(4)} \Leftrightarrow (\sqrt{x+7} - 3)^2 + (x - \sqrt{x})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7} - 3 = 0 \\ x - \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases} \text{ (vô lý)} \Rightarrow \text{PT vô nghiệm}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 1)$

Bài 142: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2+6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-2y} \\ 3^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}+2} \cdot 2^{2x+6y-3} + 9 \cdot 2^{2x+6y-3} = 2^{2\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}+1} \cdot 3^{x+3y} + 18 \cdot 4^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}} \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT TỈNH GIA 1

Lời giải tham khảo

Phương trình (1) $\Leftrightarrow (2y + \sqrt{x-2y})(3y - \sqrt{x-2y}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2y = \sqrt{x-2y} \\ 3y = \sqrt{x-2y} \end{cases}$

Từ :

$$(2) \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}} \cdot 2^{2x+6y-4} + 2^{2x+6y-4} = 2^{2\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}} \cdot 3^{x+3y-2} + 4^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}}$$

$$\Leftrightarrow 4^{x+3y-2} \left(3^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}} + 1 \right) = 4^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}} \left(3^{x+3y-2} + 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}} + 1}{4^{\sqrt{x+\sqrt{x-2y}}}} = \frac{3^{x+3y-2} + 1}{4^{x+3y-2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x+3y-2$$

TH1: $\begin{cases} -2y = \sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x+3y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5y=2 \\ 4y^2+2y=x \\ y \leq 0 \\ x \geq 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=-2 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} 3y = \sqrt{x-2y} \\ \sqrt{x+\sqrt{x-2y}} = x+3y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2+2y=x \\ x+3y=4 \\ y \geq 0 \\ x \geq 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{3} \\ y=\frac{4}{9} \end{cases}$

Bài 143: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + \sqrt{3} = \sqrt{y^2-3x} + \sqrt{7} \\ \sqrt{y-1} + 2y^2 + 1 = \sqrt{x} + x^2 + xy + 3y \end{cases}.$

Lần 1 – THPT TÔ VĂN ON

Lời giải tham khảo

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + \sqrt{3} = \sqrt{y^2-3x} + \sqrt{7} & (1) \\ \sqrt{y-1} + 2y^2 + 1 = \sqrt{x} + x^2 + xy + 3y & (2) \end{cases}$

Điều kiện: $y \geq 1, x \geq 0, y^2 \geq 3x$. (2) $\Leftrightarrow \sqrt{y-1} - \sqrt{x} + (y^2 - 2y + 1) - x^2 + (y^2 - xy - y) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}} + (y-1)^2 - x^2 + y(y-x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}} + 2y-1+x \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x + 1 \left(\text{Do } \frac{1}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}} + 2y - 1 + x > 0, \forall y \geq 1, \forall x \geq 0 \right)$$

+) Thế y vào (1) ta được $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{7} - \sqrt{3}$ (3)

Xét $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$,

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+3}} - \frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2+3}}$$

Xét $g(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}, g'(t) = \frac{3}{\sqrt{(t^2+3)^3}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do $2x+1 > 2x-1$ nên $g(2x+1) > g(2x-1)$ suy ra $f'(x) = g(2x+1) - g(2x-1) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên (3) $\Leftrightarrow f(x) = f(2) \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 3)$

Bài 144: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x+y) + \sqrt{x+y} = \sqrt{2y}(\sqrt{2y^3+1}) \\ x^2y - 5x^2 + 7(x+y) = 4 + 6\sqrt{xy-x+1} \end{cases}$$

Lần 2 – THPT TÔ VĂN ƠN

Lời giải tham khảo

+ĐK $x+y \geq 0; y \geq 0$

+ $y = 0$ hệ không có nghiệm

+ $y > 0$, ta có: $x^2y + y - 2y^2 + \sqrt{x+y} - \sqrt{2y} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+2y) + \sqrt{x+y} - \sqrt{2y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(x+2y + \frac{1}{\sqrt{x+y} + \sqrt{2y}}\right) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

+ Ta có: $x^3 - 5x^2 + 14x - 4 = 6\sqrt[3]{x^2 - x - 1}$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) = 8x^2 - 8x + 8 + 3\sqrt[3]{8x^2 - 8x + 8}$$

+ Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ trên $\mathbb{R}$, $y' = 3t^2 + 3 > 0$, mọi t thuộc $\mathbb{R}$

$$\text{Mà } f(x+1) = f(\sqrt[3]{8x^2 - 8x + 8}) \Rightarrow x+1 = \sqrt[3]{8x^2 - 8x + 8} \Rightarrow x = 1$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (1;1)

Bài 145: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (1-y)(x-3y+3) - x^2 = \sqrt{(y-1)^3} \cdot \sqrt{x} \\ \sqrt{x^2-y} + 2\sqrt[3]{x^3-4} = 2(y-2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 1– THPT TÔN ĐỨC THẮNG

Lời giải tham khảo

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} x^2 - y \geq 0 \\ x \geq 0, y \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq y \\ x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

Nhận xét $x \geq 1, y = 1$ không là nghiệm của hệ. Xét $y > 1$ thì pt (1) của hệ (I)

$$x^2 + x(y-1) - 3(y-1)^2 + (y-1)\sqrt{x(y-1)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y-1}\right)^2 + \frac{x}{y-1} - 3 + \sqrt{\frac{x}{y-1}} = 0 \quad \text{Đặt } t = \sqrt{\frac{x}{y-1}}, t > 0. \text{ Khi đó, pt (1) trở thành:}$$

$$t = \sqrt{\frac{x}{y-1}}, t > 0. \text{ Khi đó, pt (1) trở thành:}$$

$$t^4 + t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^3 + t^2 + 2t + 3) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\text{Với } t = 1, \text{ thì } \sqrt{\frac{x}{y-1}} = 1 \Leftrightarrow y = x+1, \text{ thế vào pt(2), ta được}$$

$$\sqrt{x^2 - x - 1} + 2\sqrt[3]{x^3 - 4} = 2(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 1} + 2\left[\sqrt[3]{x^3 - 4} - (x-1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 1} + 6 \left[\frac{x^2 - x - 1}{\sqrt[3]{(x^3 - 4)^2} + (x-1)\sqrt[3]{x^3 - 4} + (x-1)^2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 1} \left(1 + \frac{6\sqrt{x^2 - x - 1}}{\sqrt[3]{(x^3 - 4)^2} + (x-1)\sqrt[3]{x^3 - 4} + (x-1)^2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (x \geq 1).$$

$$\text{Với } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Đối chiếu ĐK, hệ phương có nghiệm: } (x; y) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

$$\text{Bài 146: Giải hệ phương trình: } \begin{cases} y^6 - 3y^4 + 4y^2 = x^3 + 6x^2 + 13x + 12 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt[3]{y^2+3} = 4 \end{cases}.$$

Lần 1- THPT TRẦN BÌNH TRỌNG

Lời giải tham khảo

$$\text{Điều kiện: } x + 2y + 1 \geq 0$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+2y+1} \quad (t \geq 0) \text{ Phương trình (1) trở thành: } 2t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } 2t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$+ \text{ Hệ } \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x^2 - 4y^2 + 3xy = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

KẾT LUẬN:

Bài 147: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + \sqrt{2x} = (x+y)y + \sqrt{x+y} \\ \sqrt{x-1} + xy = \sqrt{y^2 + 21} \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT TRẦN PHÚ

Lời giải tham khảo

Điều kiện xác định $x \geq 1, x+y \geq 0$

Khi đó $2x^2 + \sqrt{2x} = (x+y)y + \sqrt{x+y} \Leftrightarrow 2x^2 - xy - y^2 + \sqrt{2x} - \sqrt{x+y} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(2x+y) + \frac{x-y}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+y}} = 0 \Leftrightarrow (x-y) \left(2x+y + \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+y}} \right) = 0.$$

Do $x \geq 1, x+y \geq 0 \Rightarrow 2x+y > 0$, từ đó suy ra $x = y$. Thay vào (2) ta có

$$\sqrt{x-1} + x^2 = \sqrt{x^2 + 21} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 1 + x^2 - 4 = \sqrt{x^2 + 21} - 5$$

Thay vào (2) ta có $\sqrt{x-1} + x^2 = \sqrt{x^2 + 21} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 1 + x^2 - 4 = \sqrt{x^2 + 21} - 5$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + x+2 - \frac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5} \right) = 0 \quad (3)$$

Vì $x+2 - \frac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5} = (x+2) \left(1 - \frac{1}{10 + \sqrt{x^2+91}} \right) > 0$, từ (3) suy ra $x = 2$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(2; 2)$.

Bài 148: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy(2y-1) = 2y^3 - 2y^2 - x \\ 6\sqrt{x-1} + y + 7 = 4x(y-1) \end{cases}.$$

Lần 2 – THPT TRẦN PHÚ

Lời giải tham khảo

ĐK: $x \geq 1$.

(1) $\Leftrightarrow (2y^2 + x)(1+x-y) = 0 \Leftrightarrow y = x+1$ vì $2y^2 + x > 0, \forall x \geq 1$

Thay vào (2) ta được $6\sqrt{x-1} + x + 8 = 4x^2 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} + 3)^2 = (2x)^2 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x-1} + 3$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 13x + 10 = 0 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$$

Vậy nghiệm của phương trình là $(x; y) = (2; 3)$

Bài 149: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy - y^2 + 2y - x - 1 = \sqrt{y-1} - \sqrt{x} \\ 3\sqrt{6-y} + 3\sqrt{2x+3y-7} = 2x+7 \end{cases}.$$

Lần 3 – THPT TRẦN QUANG KHẢI

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \geq 0, 1 \leq y \leq 6, 2x+3y-7 \geq 0$ (*)

Nhận thấy $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ không là nghiệm của hệ phương trình $\Rightarrow \sqrt{y-1} + \sqrt{x} \neq 0$ Khi đó,

$$PT(1) \Leftrightarrow x(y-1) - (y-1)^2 = \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}}$$

$$\text{Khi đó, } PT(1) \Leftrightarrow x(y-1) - (y-1)^2 = \frac{y-1-x}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow (x-y+1) \left(y-1 + \frac{1}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-y+1=0 \Leftrightarrow y=x+1 \text{ (do (*))}$$

Thay vào PT (2) ta được: $3\sqrt{5-x} + 3\sqrt{5x-4} = 2x+7$ ĐK: $4/5 \leq x \leq 5$

$$\Leftrightarrow (7-x) - 3\sqrt{5-x} + 3(x-\sqrt{5x-4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-5x+x^2) \left(\frac{1}{3\sqrt{5-x} + (7-x)} + \frac{3}{\sqrt{5x-4} + x} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=4 \Rightarrow y=5 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\boxed{(1;2), (4;5)}$.

Bài 150: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 3y^2 + x - 4y + 2 = 0 \\ x^3 + x - 3 = 2\sqrt{x+2} + y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 1 – THPT TRẦN QUÝ CÁP

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \geq -2$.

(1) $\Leftrightarrow x^3 + x + 2 = y^3 - 3y^2 + 4y \Leftrightarrow x^3 + x + 2 = (y-1)^3 + (y-1) + 2$. Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$ trên $[-2; +\infty)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$ trên $[-2; +\infty)$.

Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in [-2; +\infty)$.

Mà $f(t)$ liên tục trên $[-2; +\infty)$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[-2; +\infty)$.

Do đó: $x = y - 1$.

Thay $y = x + 1$ và phương trình (2) ta được: $x^3 - 3 = 2\sqrt{x+2} + 1$

$$\Leftrightarrow x^3 - 8 = 2(\sqrt{x+2} - 2) \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) = \frac{2(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} + 2)}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4) = \frac{2(x-2)}{(\sqrt{x+2} + 2)} \Leftrightarrow (x-2) \left[x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{(\sqrt{x+2} + 2)} \right] = 0$$

$$\bullet x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$$

$$\bullet x^2 + 2x + 4 - \frac{2}{(\sqrt{x+2} + 2)} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = \frac{2}{(\sqrt{x+2} + 2)} \quad (*)$$

Ta có $VT = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3$; $VP = \frac{2}{\sqrt{x+2}+2} \leq 1, \forall x \in [-2; +\infty)$

Do đó phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 3) \odot$

Bài 151: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (2x + \sqrt{4x^2 + 1})(2y + \sqrt{4y^2 + 1}) = 1 \\ \sqrt[3]{x^4 - x^2} + 4 = 4y^2 + 3y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 1 – THPT TRẦN PHÚ – VĨNH PHÚC

Lời giải tham khảo

$$2y + \sqrt{4y^2 + 1} = \sqrt{4x^2 + 1} - 2x \Leftrightarrow 2y + \sqrt{(2y)^2 + 1} = \sqrt{(-2x)^2 + 1} + (-2x) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}$ trên $\mathbb{R}$

Ta có $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} \geq 0, \forall t$ suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \odot (*) \Leftrightarrow x = -y$

$(*) \Leftrightarrow x = -y$

Thay vào (2) ta được $\sqrt[3]{x^4 - x^2} + 4 = 4x^2 - 3x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^4 - x^2} - 4(x^2 - 1) + 3x = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{(x^2 - 1)}{x}} - 4\frac{x^2 - 1}{x} + 3 = 0 \quad (\text{chia 2 vế cho } x \text{ vì } x=0 \text{ không thỏa mãn})$$

Đặt $\sqrt[3]{\frac{(x^2 - 1)}{x}} = t$. PTTT: $4t^3 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$$\text{Với } t=1 \quad \sqrt[3]{\frac{(x^2 - 1)}{x}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy, hệ phương trình đã cho có 2 cặp nghiệm $(x; y)$.

Bài 152: Giải bất phương trình:
$$\sqrt{x+1} \geq \frac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}.$$

Lần 1 – THPT TRIỆU SƠN 1

Lời giải tham khảo

- ĐK: $x \geq -1, x \neq 13$

$$\begin{aligned} \text{- Khi đó: } \sqrt{x+1} &\geq \frac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 2 \geq \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt[3]{2x+1} - 3} \\ &\Leftrightarrow 1 \geq \frac{(x+2)(\sqrt{x+1} - 2)}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}, (*) \end{aligned}$$

- Nếu $\sqrt[3]{2x+1} - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 13$ (1)

thì $(*) \Leftrightarrow (2x+1) + \sqrt[3]{2x+1} \geq (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà $(*)$:

$$f(\sqrt[3]{2x+1}) \geq f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \geq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x \leq 0$$

$$\text{Suy ra: } x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \xrightarrow{DK(1)} \text{VN}$$

$$\text{- Nếu } \sqrt[3]{2x+1} - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 13 \quad (2)$$

$$\text{thì } (2^*) \Leftrightarrow (2x+1) + \sqrt[3]{2x+1} \leq (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$$

Do hàm $f(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (2^*) :

$$f(\sqrt[3]{2x+1}) \leq f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \leq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} < x < 13 \\ (2x+1)^2 \leq (x+1)^3 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } x \in [-1; 0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \xrightarrow{DK(2)} x \in [-1; 0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 13\right)$$

$$\text{-KL: } x \in [-1; 0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 13\right)$$

Bài 153: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x\sqrt{x^2+y} + y = \sqrt{x^4+x^3} + x & (1) \\ x + \sqrt{y} + \sqrt{x-1} + \sqrt{y(x-1)} = \frac{9}{2} & (2) \end{cases}$$

Lần 1 – THPT DÂN LẬP LÊ THÁNH TÔN

Lời giải tham khảo

$$\text{Đk: } \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x(\sqrt{x^2+y} - \sqrt{x^2+x}) + (x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \frac{y-x}{\sqrt{x^2+y} + \sqrt{x^2+x}} + x-y = 0 \Leftrightarrow (x-y)(\sqrt{x^2+y} + \sqrt{x^2+x} - x) = 0$$

$$(\sqrt{x^2+y} + \sqrt{x^2+x} - x) = 0 \text{ (vn)}$$

$$\text{Do đó } x=y \text{ thay vào pt (2): } x + \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x(x-1)} = \frac{9}{2}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = 2x-1 + 2\sqrt{x(x-1)}$$

$$\text{Pt trở thành } t^2+1+2t=9 \text{ hay } t^2+2t-8=0 \text{ chỉ lấy } t=2 \Rightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x} = 2$$

$$2\sqrt{x(x-1)} = 5-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{2} \\ 4x^2 - 4x = 25 - 20x + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{25}{16}$$

$$\text{Vậy hệ có nghiệm duy nhất } \left(\frac{25}{16}; \frac{25}{16}\right)$$

Bài 154: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (xy-3)\sqrt{y+2} + \sqrt{x} = \sqrt{x^5} + (y-3x)\sqrt{y+2} \\ \sqrt{9x^2+16} - 2\sqrt{2y+8} = 4\sqrt{2-x} \end{cases}$$

Lần 1 – THPT TƯƠNG DƯƠNG

Lời giải tham khảo

Đk: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y \geq -2 \end{cases}$ (*). Với đk(*) ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)\left[(y+3)\sqrt{y+2} - (x+1)\sqrt{x}\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (y+3)\sqrt{y+2} = (x+1)\sqrt{x} \end{cases} \quad (3)$$

Với $x=1$ thay vào (2) ta được: $2\sqrt{2y+8}=1 \Leftrightarrow y=-\frac{31}{8}$ (loại)

Ta có: (3) $\Leftrightarrow (\sqrt{y+2})^3 + \sqrt{y+2} = (\sqrt{x})^3 + \sqrt{x}$ (4). Xét hàm số

$f(t) = t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 1 > 0; \forall t \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ là hs đồng biến, do đó:

(4) $\Leftrightarrow f(\sqrt{y+2}) = f(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \sqrt{y+2} = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = x-2$ thay vào pt(2) ta được:

$$4\sqrt{2-x} + 2\sqrt{2x+4} = \sqrt{9x^2+16}$$

$$\Leftrightarrow 32-8x+16\sqrt{2(4-x^2)} = 9x^2 \Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)} - (x^2+8x) = 0$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{2(4-x^2)} \quad (t \geq 0); \text{ PT trở thành: } 4t^2 + 16t - (x^2 + 8x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{2} \\ t = -\frac{x}{2} - 4 < 0 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\text{Hay } \sqrt{2(4-x^2)} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 = \frac{32}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y = \frac{4\sqrt{2}-6}{3}$$

Vậy hệ pt có nghiệm $(x; y)$ là: $\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{2}-6}{3}\right) \circledast$

Bài 155: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{y}{x} + x - \frac{1}{2x} = 3\sqrt{\frac{2y-1}{4}} \\ x^2 - y = \sqrt{3y-1} \end{cases}$$

Lần 1 – THPT VĂN GIANG

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \neq 0; y \geq \frac{1}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{y}{x} + x - \frac{1}{2x} = 3\sqrt{\frac{2y-1}{4}} \Leftrightarrow 2y + 2x^2 - 1 = 3x\sqrt{2y-1}$$

$$\Leftrightarrow (2y-1) - 3x\sqrt{2y-1} + 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y-1}{x^2} - 3\frac{\sqrt{2y-1}}{x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2y-1}}{x} = 1 \\ \frac{\sqrt{2y-1}}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2y-1} \\ x = \frac{1}{2}\sqrt{2y-1} \end{cases}$$

Với $x = \sqrt{2y-1}$ thay vào phương trình (2):

$$\sqrt{3y-1} = y-1 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ y^2 - 5y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$$

Suy ra $x = \sqrt{4 + \sqrt{17}}$ (thỏa mãn) Với $x = \frac{1}{2}\sqrt{2y-1}$ thay vào phương trình (2)

Với $x = \frac{1}{2}\sqrt{2y-1}$ thay vào phương trình (2)

Ta được: $-\frac{y}{2} - \frac{1}{4} = \sqrt{3y-1}$. Do $y \geq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{y}{2} - \frac{1}{4} < 0$. Vậy phương trình vô nghiệm

Kết luận: Hệ có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} x = \sqrt{4 + \sqrt{17}} \\ y = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Bài 156: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 3\sqrt{xy + x - y^2 - y} = 5y + 4 \\ (y - x)(y + 1) + (y^2 - 2)\sqrt{1 + x} = 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lần 1 – THPT VẠN NINH

Lời giải tham khảo

$$\text{ĐK: } \begin{cases} xy + x - y^2 - y \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) ta có: } (x - y) + 3\sqrt{(x - y)(y + 1)} - 4(y + 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - y}{y + 1} + 3\sqrt{\frac{x - y}{y + 1}} - 4 = 0$$

$$(\text{Vì } y = -1 \text{ không thỏa (2)}) \Rightarrow \frac{x - y}{y + 1} = 1 \Rightarrow x = 2y + 1 \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) ta có: } (y^2 - 2)(\sqrt{1 + x} + 1) = (x - 1)(y + 1) \Leftrightarrow \frac{y^2 - 2}{y + 1} = \frac{(x + 1) - 2}{\sqrt{x + 1} + 1} \quad (4)$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = \frac{t^2 - 2}{t + 1} \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{1}{(t + 1)^2} > 0; \forall t \neq -1 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } [0; +\infty)$$

$$\text{Do đó từ (4) ta có: } f(y) = f(\sqrt{x + 1}) \Leftrightarrow y = \sqrt{x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x = y^2 - 1 \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{Từ (3) và (5) giải được: } y = 1 - \sqrt{3} \text{ (loại); } y = 1 + \sqrt{3} \text{ (nhận)} \Rightarrow x = 3 + 2\sqrt{3}$$

$$\text{Hệ có nghiệm: } (x = 3 + 2\sqrt{3}; y = 1 + \sqrt{3})$$

Bài 157: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x + y} - \sqrt{x - y} = 2 \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 1} = 3 + \sqrt{x^2 - y^2} \end{cases}$$

Lần 2 – THPT VẠN NINH

Lời giải tham khảo

$$\text{Điều kiện: } x + y \geq 0, x - y \geq 0$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \text{ ta có hệ: } \begin{cases} \sqrt{u} - \sqrt{v} = 2 \quad (u > v) \\ \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\frac{u^2 + v^2 + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\frac{(u + v)^2 - 2uv + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta có:

$$\sqrt{uv+8\sqrt{uv}+9}-\sqrt{uv}=3 \Leftrightarrow uv+8\sqrt{uv}+9=(3+\sqrt{uv})^2 \Leftrightarrow uv=0.$$

$$\text{Kết hợp (1) ta có: } \begin{cases} uv=0 \\ u+v=4 \end{cases} \Leftrightarrow u=4, v=0 \text{ (vì } u>v).$$

Từ đó ta có: $x=2; y=2$. (Thỏa đ/k)

KL: Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y)=(2; 2)$.

$$\text{Bài 158: Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 4x^2 + y - x - 9 = \sqrt{1+3x} + \sqrt{y+x^2+5x-8} \\ x^4 + x^3 - 11x^2 + yx^2 + (y-12)x = 12 - y \end{cases}.$$

Lần 2 – THPT VIỆT TRÌ

Lời giải tham khảo

Phương trình (2) tương đương với

$$(x^2 + x + 1)(y - 12 + x^2) = 0 \Leftrightarrow y = 12 - x^2$$

Thay vào phương trình (1) ta được: $3x^2 - x + 3 = \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4}$

$$\Leftrightarrow 3(x^2 - x) + (x+1-\sqrt{3x+1}) + (x+2-\sqrt{5x+4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x) \left(3 + \frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1.$$

Khi đó ta được nghiệm $(x; y)$ là $(0; 12)$ và $(1; 11)$.

$$\text{Bài 159: Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)(y-2)} + x + 5 = 2y + \sqrt{y-2} \\ \frac{(x-8)(y+1)}{x^2 - 4x + 7} = (y-2)(\sqrt{x+1} - 3) \end{cases}.$$

Lần 1 – THPT XUÂN TRƯỜNG

Lời giải tham khảo

Điều kiện $x \geq -1; y \geq 2$.

Đặt $\sqrt{x+1} = a; \sqrt{y-2} = b$ ($a, b \geq 0$), từ (1) ta có:

$$a + ab + a^2 - 1 + 5 = 2(b^2 + 2) + b \Leftrightarrow a - b + ab - b^2 + a^2 - b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(1+2a+b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b \text{ (do } a, b \geq 0 \Rightarrow 1+2a+b > 0)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{y-2} \Leftrightarrow y = x+3$$

Thế vào (2) ta được:

$$\frac{(x-8)(x+4)}{x^2 - 4x + 7} = (x+1)(\sqrt{x+1} - 3) \Leftrightarrow \frac{(x-8)(x+4)}{x^2 - 4x + 7} = \frac{(x+1)(x-8)}{\sqrt{x+1} + 3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ \frac{x+4}{x^2 - 4x + 7} = \frac{x+1}{\sqrt{x+1} + 3} \end{cases} (*)$$

$$+ x = 8 \Rightarrow y = 11;$$

$$+ (*) \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} + 3)(x+4) = (x+1)(x^2 - 4x + 7)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1} + 3)[(\sqrt{x+1})^2 + 3] = [(x-2) + 3] \cdot [(x-2)^2 + 3] (**)$$

Xét hàm số $f(t) = (t+3)(t^2+3)$ với $t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 3(t+1)^2 \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } (**) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(x-2) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x+1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \quad (\text{T/M})$$

$$x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{11+\sqrt{13}}{2}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(8; 11)$ và $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{11+\sqrt{13}}{2}\right)$

Bài 160: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y} + \sqrt{3} = \sqrt{y^2-3x} + \sqrt{7} \\ \sqrt{y-1} + 2y^2 + 1 = \sqrt{x} + x^2 + xy + 3y \end{cases}$$

Lần 2 – THPT YÊN PHONG SỐ 2

Lời giải tham khảo

+ Đk $y \geq 1, x \geq 0, y^2 \geq 3x$

$$+ (2) \Leftrightarrow \sqrt{y-1} - \sqrt{x} + (y-1)^2 - x^2 + y^2 - xy - y = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}} + 2y-1+x \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y-x-1=0 \left(\text{do } \frac{1}{\sqrt{y-1} + \sqrt{x}} + 2y-1+x > 0 \forall y \geq 1, x \geq 0 \right)$$

+ Thế $y = x+1$ vào pt(1):

$$\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{7} - \sqrt{3} \quad (3)$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+3}} - \frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2+3}}$$

Xét hàm số $g(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}, g'(t) = \frac{3}{(\sqrt{t^2+3})^3} > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ nên hs $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do $2x+1 > 2x-1$ nên $g(2x+1) > g(2x-1)$, suy ra:

$$f'(x) = g(2x+1) - g(2x-1) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên $(3) \Leftrightarrow f(x) = f(2) \Leftrightarrow x = 2$

Vậy hệ có 1 nghiệm $(x; y) = (2; 3)$

Bài 161: Giải bất phương trình: $1 + \sqrt{4x^2+20} \leq x + \sqrt{4x^2+9}$.

Lần 2 – THPT YÊN LẠC

Lời giải tham khảo

Bất phương trình tương đương:

$$\sqrt{4x^2 + 9} + x - \sqrt{4x^2 + 20} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{4x+8}{\sqrt{4x^2+9}+5} - \frac{4x+8}{\sqrt{4x^2+20}+6} + 1 \right] \geq 0$$

Từ Bất phương trình ban đầu suy ra: $x-1 \geq \sqrt{4x^2+20} - \sqrt{4x^2+9} > 0 \Rightarrow x > 1$.

Do đó

$$\frac{4x+8}{\sqrt{4x^2+9}+5} - \frac{4x+8}{\sqrt{4x^2+20}+6} + 1 = (4x+8) \frac{1 + \sqrt{4x^2+20} - \sqrt{4x^2+9}}{(\sqrt{4x^2+9}+5)(\sqrt{4x^2+20}+6)} + 1 > 0$$

Nên nghiệm của bpt là: $x \geq 2$

Bài 162: Giải hệ phương trình: $\frac{x-3}{3\sqrt{x+1}} \leq \frac{2\sqrt{9-x}}{x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lần 2 – THPT YÊN THẾ

Lời giải tham khảo

Bất phương trình tương đương:

$$\frac{(x+3+3\sqrt{x+1})(x+3-3\sqrt{x+1}-2\sqrt{9-x})}{x(3\sqrt{x+1}+x+3)} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+3-3\sqrt{x+1}-2\sqrt{9-x}}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-3)+2(1-\sqrt{9-x})}{x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-8}{x} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+3} + \frac{2}{1+\sqrt{9-x}} \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-8}{x} \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 8$$

Bài 163: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y(x+1)} + \sqrt{x} = y + \sqrt{y} & (1) \\ x^3 + 6x^2 + 20 = 171y + 40(y+1)\sqrt{5y-1} & (2) \end{cases}$$

Lần 3 – THPT YÊN THẾ

Lời giải tham khảo

Phương trình:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+y(x-1)} - y + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[\frac{1+y}{\sqrt{x+y(x-1)}+y} + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

Thay vào pt (2) ta được:

$$x^3 + 6x^2 + 20 = 171x + 40(x+1)\sqrt{5x-1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1-2\sqrt{5x-1})[2(x+8)\sqrt{5x-1} + x^2 + 27x + 12] = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1-2\sqrt{5x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 11 + 2\sqrt{29} \Rightarrow y = 11 + 2\sqrt{9}$$

KẾT LUẬN:

Bài 164: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y} + \sqrt{3} = \sqrt{y^2 - 3x} + \sqrt{7} \\ \sqrt{y-1} + 2y^2 + 1 = \sqrt{x} + x^2 + xy + 3y \end{cases}$$

Lần 2 – THPT YÊN PHONG SỐ 2

Lời giải tham khảo

+ Đk $y \geq 1, x \geq 0, y^2 \geq 3x$

+ (2) $\Leftrightarrow \sqrt{y-1} - \sqrt{x} + (y-1)^2 - x^2 + y^2 - xy - y = 0$

$$\Leftrightarrow (y-x-1)\left(\frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}} + 2y-1+x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y-x-1=0 \left(\text{do } \frac{1}{\sqrt{y-1}+\sqrt{x}} + 2y-1+x > 0 \forall y \geq 1, x \geq 0 \right)$$

+ Thế $y = x + 1$ vào pt(1):

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{7} - \sqrt{3} \quad (3)$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+3}} - \frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2+3}}$$

Xét hàm số $g(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}, g'(t) = \frac{3}{(\sqrt{t^2+3})^3} > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ nên hs $g(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do $2x+1 > 2x-1$ nên $g(2x+1) > g(2x-1)$, suy ra:

$$f'(x) = g(2x+1) - g(2x-1) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên (3) $\Leftrightarrow f(x) = f(2) \Leftrightarrow x = 2$

Vậy hệ có 1 nghiệm $(x; y) = (2; 3)$