

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m+1)x + 3$ có đồ thị (C_m) , m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 2$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = x + 3$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tích các hệ số góc của các tiếp tuyến tại A, B, C của (C_m) bằng -28 .

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{3x+y} + \sqrt{2y-x} = 3 \\ \sqrt{3x+y} + 5x - 3y = 4 \end{cases}$$

b) Giải phương trình $2^x + 3^x = 2x + 2 + \log_3(3x + 2 - 2^x)$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + 2\sin 2x + 3\sin^2 x} dx$.

b) Hai bạn Đào và Mai cùng chơi một trò chơi như sau: Đào vẽ trên một tờ giấy 2 đường thẳng cắt nhau a và b , sau đó vẽ thêm 3 đường thẳng phân biệt cùng song song với a và 5 đường thẳng phân biệt cùng song song với b . Đào đặt tên ngẫu nhiên tất cả các giao điểm bằng các chữ cái phân biệt và cho Mai biết danh sách các chữ cái đó. Mai chọn trong danh sách đó 4 chữ cái bất kỳ. Nếu kết quả có được là 4 đỉnh của một hình bình hành trong hình vẽ của Đào thì Mai sẽ được nhận ngôi sao may mắn. Tính xác suất của biến cố “Mai được nhận ngôi sao may mắn”.

Câu 4. (4,0 điểm)

a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$, ΔSAB vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SD, BC, CD . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm A đến (MNP) .

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ΔABC có $M(0; -5)$ là trung điểm BC , $K(1; -3)$ là chân đường cao kẻ từ B , AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Tìm tọa độ các điểm A, B, C biết $D(5; -5)$.

Câu 5. (4,0 điểm)

a) Bạn Thành Công thực hiện ý tưởng khởi nghiệp của mình bằng việc trồng rau sạch. Cha mẹ Công cho phép bạn ấy trồng rau sạch trên diện tích đất không quá 1.000m^2 và cấp vốn tối đa là 16 triệu đồng. Công đã tìm hiểu và chọn được 2 giống rau phù hợp cho việc khởi nghiệp của mình: giống rau R1 cần vốn đầu tư 10.000 đồng/ m^2 /vụ và cho lợi nhuận 4.000 đồng/ m^2 /vụ; giống rau R2 cần vốn đầu tư 20.000 đồng/ m^2 /vụ và cho lợi nhuận 7.000 đồng/ m^2 /vụ. Bạn Công phải sử dụng bao nhiêu mét vuông đất để trồng giống rau R1 và bao nhiêu mét vuông đất để trồng giống rau R2 sao cho đạt lợi nhuận cao nhất?

b) Cho hàm số $f(x) = |x|^3 - 6x^2 + 9|x| - 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình

$$f\left(\frac{4x}{x^2 + 1}\right) = m \text{ có 4 nghiệm phân biệt.}$$

--- HẾT ---

Họ và tên thí sinh: _____

Số báo danh: _____

Chữ ký GT1: _____

Chữ ký GT2: _____

I. Hướng dẫn chung

1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng, chính xác, chặt chẽ thì cho đủ số điểm của câu đó.

2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu 1. (4,0 điểm)

NỘI DUNG		ĐIỂM													
a)		2,0													
Khi $m = 2$ thì $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$.		0,25													
+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$.		0,25													
+ $y' = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.		0,25													
+ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$.		0,25													
+ Bảng biến thiên		0,5													
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>4</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x		$-\infty$	1	$+\infty$	y'		+	0	+	y	$-\infty$		4	$+\infty$
x	$-\infty$	1	$+\infty$												
y'		+	0	+											
y	$-\infty$		4	$+\infty$											
+ Đồ thị		0,5													
b)		2,0													
Phương trình hoành độ giao điểm		0,25													
$x + 3 = x^3 - (m + 1)x^2 + (m + 1)x + 3 \Leftrightarrow x \left[x^2 - (m + 1)x + m \right] = 0$															
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = m \end{cases}$		0,25													
Để (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt thì $m \neq 0; 1$.		0,25													



Do $y' = 3x^2 - 2(m+1)x + m + 1$ nên $y'(0) = m + 1; y'(1) = 2 - m; y'(m) = m^2 - m + 1$	0,25
Khi đó $(m+1)(2-m)(m^2-m+1) = -28$	0,25
$\Leftrightarrow (-m^2+m+2)(m^2-m+1) = -28$	0,25
$\Leftrightarrow (m^2-m)^2 - (m^2-m) - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m = -5 \text{ (vn)} \\ m^2-m = 6 \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 3 \end{cases}$	0,25

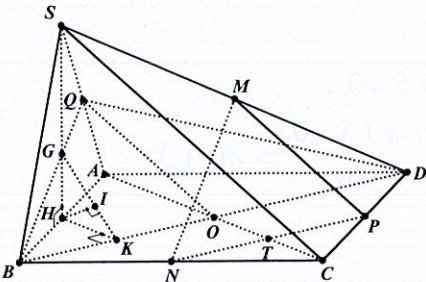
Câu 2. (4,0 điểm)

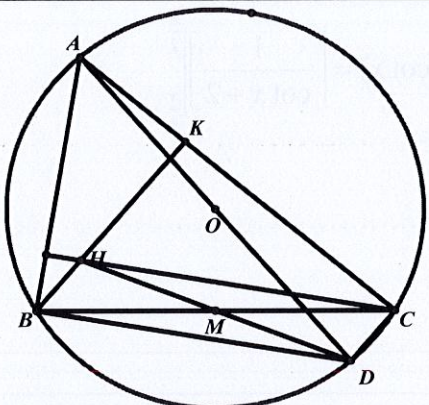
NỘI DUNG	ĐIỂM
a)	2,0
Đặt $u = \sqrt{3x+y}, v = \sqrt{2y-x}, u, v \geq 0$.	0,25
Suy ra $5x-3y = u^2 - 2v^2$.	0,25
Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} u+v=3 \\ u+u^2-2v^2=4 \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} v=3-u \\ u^2-13u+22=0 \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} v=3-u \\ u=11 \text{ (l)} \\ u=2 \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$	0,25
Với $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$ ta được $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 2y-x=1 \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$	0,25
b)	2,0
Đặt $t = \log_3(3x+2-2^x)$, khi đó $3^t = 3x+2-2^x \Leftrightarrow 2^x+3^t = 3x+2$ (1)	0,25
Mặt khác $2^x+3^x = 2x+2+t$ (2).	0,25
Từ (1) và (2) ta suy ra $3^t - 3^x = x - t \Leftrightarrow 3^t + t = 3^x + x$	0,25
Vì hàm số $f(x) = 3^x + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $x = t$.	0,25
Thay vào (2) ta được $2^x + 3^x - 3x - 2 = 0$.	0,25
Xét hàm số $g(x) = 2^x + 3^x - 3x - 2, x \in \mathbb{R}$.	0,25
Ta có $g'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 - 3$ và $g''(x) = 2^x (\ln 2)^2 + 3^x (\ln 3)^2$.	0,25
Vì $g''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $g'(x)$ là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$, suy ra $g'(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm.	0,25
Khi đó $g(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm ($g(x)$ có tối đa 1 cực trị).	0,25
Tuy nhiên $g(0) = g(1) = 0$ nên tập nghiệm của phương trình là $S = \{0; 1\}$	0,25

Câu 3. (4 điểm)

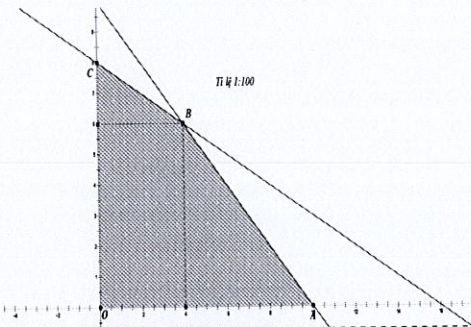
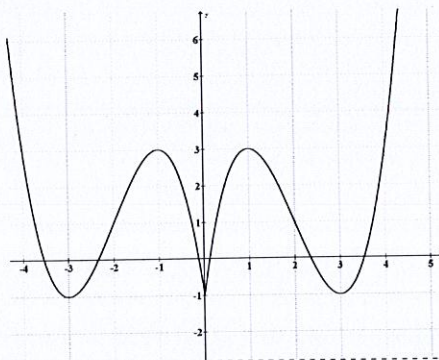
NỘI DUNG	ĐIỂM
a)	2,0
$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx$ $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx$	0,25
$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(2 \tan x + 1)^2 \cos^2 x} dx$	0,25
$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1 + 2 \tan x)^2} d(\tan x) = \left[\frac{-1}{2(1 + 2 \tan x)} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$	0,25
$= \frac{1}{3}$	0,25
$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(2 + \cot x)^2 \sin^2 x} dx$	0,25
$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{(\cot x + 2)^2} d(\cot x) = \left[\frac{1}{\cot x + 2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$	0,25
$= \frac{1}{6}$	0,25
$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + 2 \sin 2x + 3 \sin^2 x} dx = \frac{1}{2}$	0,25
b)	2,0
Số giao điểm 24	0,5
Số phần tử không gian mẫu $ \Omega = C_{24}^4$.	0,5
A là biến cố "Mai nhận được ngôi sao may mắn" $\Rightarrow \Omega_A = C_4^2 \cdot C_6^2$	0,5
Xác suất $p(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_6^2}{C_{24}^4} = \frac{15}{1771}$	0,5

Câu 4. (4,0 điểm)

NỘI DUNG	ĐIỂM
a)	2,0
	

Gọi H là trung điểm AB , khi đó $SH \perp (ABCD)$. Mà $SH = \frac{AB}{2} = a$ và tam giác ABC đều nên thể tích khối chóp là	0,25
$V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{a^3 2\sqrt{3}}{3}$ (đvtt)	0,25
Gọi O, Q lần lượt là trung điểm của AC, SA ; T là giao điểm của NP và AC ; G là giao điểm của BQ và SH . Khi đó $MP \parallel SC \parallel QO$ hay $(MNP) \parallel (QBD)$, $AO = \frac{2}{3}AT$	0,25
$d(A, (MNP)) = \frac{3}{2}d(A, (QBD)) = 3d(H, (QBD))$	0,25
Gọi K, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của H xuống BD, GK . Suy ra $HI \perp (QBD)$ hay $d(H, (QBD)) = HI$.	0,25
Do H là trung điểm nên G là trọng tâm tam giác SAB và K là trung điểm BO . Vì thế $HG = \frac{a}{3}, HK = \frac{a}{2}$.	0,25
Ta có $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{HG^2} \Rightarrow HI = \frac{HK \cdot HG}{\sqrt{HK^2 + HG^2}} = \frac{a\sqrt{13}}{13}$.	0,25
$\Rightarrow d(A, (MNP)) = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$.	0,25
b)	2,0
	
Trước tiên ta chứng minh $HBDC$ là hình bình hành, trong đó H là trực tâm của tam giác ABC . Thật vậy $HC \parallel DB$ (vì cùng vuông góc với AB), $BH \parallel DC$ (vì cùng vuông góc với AC).	0,25
Suy ra $H(-5; -5)$.	0,25
Khi đó phương trình chứa cạnh $BH: x - 3y - 10 = 0$ và $AC: 3x + y = 0$.	0,25
Phương trình chứa cạnh $CD: x - 3y - 20 = 0$. Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 3y - 20 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$	0,25
$\Rightarrow C(2; -6)$.	0,25
Tọa độ điểm $B(-2; -4)$.	0,25
Phương trình chứa cạnh $AH: 2x - y + 5 = 0$.	0,25
Tọa độ của A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-1; 3)$	0,25

Câu 5. (4,0 điểm)

NỘI DUNG		ĐIỂM																
a)		2,0																
Gọi $x, y(m^2)$ lần lượt là diện tích đất mà bạn Công sẽ trồng giống rau R1, R2.		0,5																
Theo yêu cầu ta có $\begin{cases} x + y \leq 1000 \\ x + 2y \leq 1600 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} (*)$																		
Lợi nhuận cho một vụ $F = 4x + 7y$ (ngàn đồng)		0,25																
Miền nghiệm của (*)		0,5																
																		
F đạt giá trị lớn nhất tại các đỉnh của đa giác $OABC$.		0,25																
Tại $O(0;0) \Rightarrow F = 0$; $A(1000;0) \Rightarrow F = 4000$; $B(400;600) \Rightarrow F = 5800$; $C(0;800) \Rightarrow F = 5600$.		0,25																
Vậy để có lợi nhuận cao nhất, bạn Thành Công phải trồng $400m^2$ rau giống R1 và $600m^2$ rau giống R2. Khi đó lợi nhuận là 5.800.000 đồng.		0,25																
b)		2,0																
Từ đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ ta suy ra đồ thị của hàm số $f(x) = x ^3 - 6x^2 + 9 x - 1$ như sau		0,5																
																		
Đặt $t = \frac{4x}{x^2 + 1}$. Ta có $t' = \frac{4(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$, $t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ x = -1 \Rightarrow t = -2 \end{cases}$		0,25																
Ta có bảng biến thiên		0,25																
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>t'</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr><tr><td>t</td><td>0</td><td>-2</td><td>2</td><td>0</td></tr></table>			x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	t'		$-$	0	$+$	0	$-$	t	0	-2	2
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$														
t'		$-$	0	$+$	0	$-$												
t	0	-2	2	0														

Suy ra cứ mỗi + $t \in \{0; -2; 2\}$ thì có 1 nghiệm x . + $t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ thì không có nghiệm x .	0,25
+ $t \in (-2; 2) \setminus \{0\}$ thì có 2 nghiệm x .	0,25
Dựa vào đồ thị trên, phương trình $f\left(\frac{4x}{x^2+1}\right) = m$ có 4 nghiệm khi $\begin{cases} m = 3 \\ -1 < m < 1 \end{cases}$	0,25 0,25

--- HẾT ---