

**ĐỀ THI
CHÍNH THỨC**

**ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2015
Môn Toán; Khối A và khối A1.**

Câu 1. (2 điểm)

- a) Khảo sát biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.
- b) Tìm giá trị tham số $m \in \mathbb{R}$ thì đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 4mx^2 - 4m$ có 3 cực trị là 3 đỉnh của 1 tam giác nhận điểm $H\left(0; \frac{31}{4}\right)$ làm trực tâm.

Câu 2. (1 điểm) Giải phương trình: $\sin 2x + \frac{1}{2} \tan x = \frac{3}{2} - \cos 2x$.

Câu 3. (1 điểm) Tính giới hạn: $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 6x - 4}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

Câu 4. (1 điểm). Trong mặt phẳng (P), cho hình thoi ABCD có độ dài các cạnh bằng a, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại G lấy điểm S sao cho $\widehat{ASC} = 90^\circ$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm G đến mặt phẳng (SBD) theo a.

Câu 5. (1 điểm)

- a) Từ các chữ số 0,1,2,3,4,5,6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số khác nhau nhỏ hơn 4321 đồng thời các chữ số 1 và 3 luôn có mặt và đứng cạnh nhau.
- b) Chứng minh rằng: với mọi cặp số nguyên k, n ($1 \leq k \leq n$) ta có: $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$. Tìm số nguyên $n > 4$ biết rằng $2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + \dots + (3n+2)C_n^n = 1600$.

Câu 6. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình các đường thẳng AB, AC lần lượt là $4x - 3y - 20 = 0$; $2x + y + 10 = 0$. Đường tròn (C) đi qua trung điểm của các đoạn thẳng HA, HB, HC có phương trình là $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$, trong đó H là trực tâm của tam giác ABC. Tìm tọa độ điểm H biết $x_C > -4$.

Câu 7. (1 điểm) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD có M là trung điểm của cạnh BC, N thuộc cạnh AC sao cho $AN = \frac{1}{4}AC$. Biết MN có phương trình $3x - y - 4 = 0$ và $D(5;1)$. Tìm tọa độ của điểm B biết M có tung độ dương.

Câu 8. (1 điểm) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 - y^2 = y^3 + x^2y + x^2 \\ 2y^3 - \sqrt{5-2x^2} - 1 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 9. (1 điểm) Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn: $2(a^2 + b^2 + c^2) = ab + bc + ca + 3$. Tìm giá trị lớn nhất của $S = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{a+b+c+3}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (2 điểm)

a) Khảo sát biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$

* Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

* Ta có: $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

* Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

* Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow 2$	$\searrow -2$	$\nearrow +\infty$	

Hàm đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(0; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$ với giá trị cực đại của hàm số là $y(0) = 2$ và hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$ với giá trị cực tiểu của hàm số là $y(2) = -2$.

* Đồ thị

• Điểm đặc biệt :

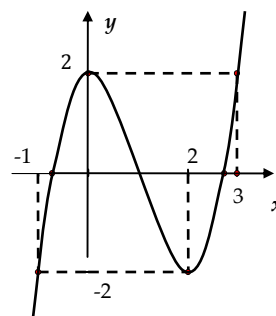
$$y'' = 6x - 6 \text{ và } y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow I(1; 0)$$

• Chọn $x = 3 \Rightarrow y = 2$, $x = -1 \Rightarrow y = -2$.

Chú ý: Ta có thể tìm điểm đặc biệt bằng cách tìm giao điểm của đồ thị với trục tọa độ:

Giao điểm của đồ thị với trục Oy là điểm $(0; 2)$

Đồ thị cắt Ox tại ba điểm $(1; 0), (1 \pm \sqrt{3}; 0)$



Nhận xét: Đồ thị nhận $I(1; 0)$ làm tâm đối xứng.

b)

$m \leq 0 \Rightarrow y' = 0$ có 1 nghiệm, nên hàm số có 1 cực trị.

$m > 0 \Rightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và đổi dấu qua mỗi nghiệm đó, nên hàm số có 3 cực trị. Giả sử $A(0; -4m)$, $B(-\sqrt{2m}; 4m^2 - 4m)$, $C(\sqrt{2m}; 4m^2 - 4m)$.

Vì tam giác ABC cân tại A và B, C đối xứng nhau qua Oy

H là trực tâm tam giác ABC khi $\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 (*)$.

Ta có: $\overrightarrow{BH} = \left(\sqrt{2m}; -4m^2 + 4m + \frac{31}{4} \right)$, $\overrightarrow{AC} = (\sqrt{2m}; 4m^2)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow 2m + 4m^2 \left(-4m^2 + 4m + \frac{31}{4} \right) = 0$ hay $8m^3 - 8m^2 - \frac{31}{2}m - 1 = 0$, phương trình có nghiệm $m = 2$

thỏa $m > 0$.

GV ra đề: Nguyễn Phú Khánh

Môn Toán – Khối A, A1

Câu 2. (1 điểm) Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\begin{aligned} \sin 2x + \frac{1}{2} \tan x &= \frac{3}{2} - \cos 2x \Leftrightarrow \sin 2x + \frac{1}{2} \tan x = \frac{1}{2} - 2 \sin^2 x \\ \Leftrightarrow \sin 2x + \frac{1}{2} \tan x &= \frac{1}{2} - \sin 2x \cdot \tan x \Leftrightarrow \left(\sin 2x - \frac{1}{2} \right) (\tan x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \tan x = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi; x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Câu 3. (1 điểm) Ta có: $x^5 - 5x^3 + 2x^2 + 6x - 4 = (x-1)^2(x+2)(x^2-2)$, $x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$

Do đó: $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x^2-2)}{x+1} = -\frac{3}{2}$.

Câu 4. (1 điểm).

$\hat{B} = 120^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABD$ đều cạnh a

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Gọi O là giao điểm AC và BD

$$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AG = \frac{2}{3} AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}; AC = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SG = \sqrt{GA \cdot GC} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad (\Delta SAC \text{ vuông tại } S, \text{ đường cao } SG)$$

$$SG). V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SG = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Kẻ $GH \perp SO \Rightarrow GH \perp (SBD)$ vì $BD \perp GH \subset (SAO) \Rightarrow d(G, (SBD)) = GH$

$$\Delta SGO \text{ vuông tại } G, \text{ đường cao } GH \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{GS^2} + \frac{1}{GO^2} = \frac{27}{2a^2}$$

Câu 5. (1 điểm)

a) Giả sử số đó là $\overline{abcd}$

TH1: a, b là các chữ số 1 và 3. Sẽ có 2! Cách chọn a, b

Lúc này chọn d có: 4 cách và chọn c có 4 cách. Trường hợp này có $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ số

TH2: b, c là các chữ số 1 và 3. Sẽ có 2! Cách chọn b, c

Nếu $d = 0$ chọn a có: 2 cách. Trường hợp này có $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ số.

Nếu $d \neq 0$ chọn d có 2 cách, chọn a có: 2 cách. Trường hợp này có $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ số

Vậy có: $32 + 4 + 8 = 44$ số.

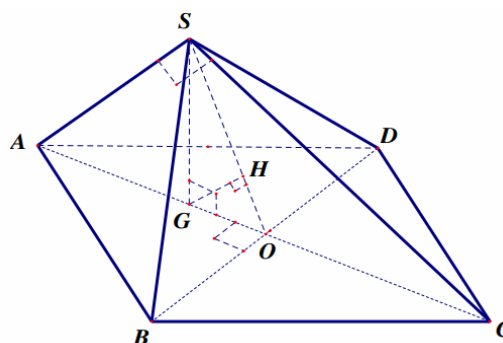
b) Ta có: $kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = nC_{n-1}^{k-1}$ (đpcm)

$$2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + \dots + (3n+2)C_n^n = 1600 \Leftrightarrow 3C_n^1 + 6C_n^2 + \dots + 3nC_n^n + 2(C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n) = 1600$$

$$\Leftrightarrow 3n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1}) + 2(C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n) = 1600$$

GV ra đề: Nguyễn Phú Khánh

Môn Toán – Khối A, A1



$$\Leftrightarrow 3n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1}) + 2(C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n) = 1600$$

$$\Leftrightarrow 3n(1+1)^{n-1} + 2(1+1)^n = 1600 \Leftrightarrow 3n \cdot 2^{n-1} + 2^{n+1} = 1600 \Leftrightarrow 3n \cdot 2^{n-5} + 2^{n-3} = 100 \Leftrightarrow n = 7$$

Câu 6. (1 điểm) Tọa độ của A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 4x - 3y - 20 = 0 \\ 2x + y + 10 = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -1 \\ y = -8 \end{cases}$, suy ra $A(-1; -8)$

Gọi D, E, F, N lần lượt là trung điểm của HA, HB, HC, AC và B' là chân đường cao hạ từ B của tam giác

ABC. Ta có $\begin{cases} EF // BC \\ NF // AH \\ BC \perp AH \end{cases}$. Do đó $EF \perp NF$

Tương tự ta có: $ED \perp DN$. Vậy đường tròn (C) đi qua D, E, F là đường tròn đường kính EN. Suy ra N thuộc (C). Mặt khác $EB' \perp B'N$, tức là B' cũng thuộc (C).

Tọa độ của N và B' là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y + 10 = 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 10 \\ 5x^2 + 30x + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -6 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$

Nếu $N(-4; -2)$ thì $C(-7; 4)$ (loại)

Nếu $N(-2; -6)$ thì $C(-3; -4)$. Vậy $N(-2; -6)$; $B'(-4; -2)$; $C(-3; -4)$

Đường thẳng BH đi qua B' và nhận VTCP $(1; -2)$ của AC là vtpt nên có phương trình $x - 2y = 0$. Đường thẳng CH đi qua C và nhận vtcp $(3; 4)$ của AB làm vtpt nên có phương trình là $3x + 4y + 25 = 0$ Tọa độ H

là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + 4y + 25 = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -5 \\ y = -\frac{5}{2} \end{cases}$. Vậy $H(-5; -\frac{5}{2})$

Câu 7. (1 điểm)

Kẻ $NH \perp BC$ tại H, $NK \perp DC$ tại K

Ta có $\Delta NKC = \Delta NHC \Rightarrow NK = NH$

$$\left. \begin{aligned} AD // NK &\Rightarrow \frac{DK}{DC} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{4} \\ AB // NH &\Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow DK = BH, \text{ mà M là trung}$$

điểm BC nên H là trung điểm

$$BM \Rightarrow \Delta DKN = \Delta MHN \Rightarrow \widehat{DNK} = \widehat{MNH}, ND = NM$$

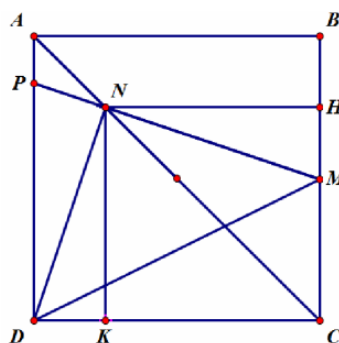
$$\text{Mà } \widehat{KNH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DNK} = 90^\circ \Rightarrow \Delta DNM \text{ vuông cân tại N}$$

$$\Rightarrow DN \perp MN \Rightarrow DN : (x-5) + 3(y-1) = 0 \text{ hay } x + 3y - 8 = 0$$

$$\text{Tọa độ N thỏa hệ: } \begin{cases} x + 3y - 8 = 0 \\ 3x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow N(2; 2)$$

$$\text{Giả sử } M(m; 3m-4) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (2-m; 6-3m); DN = \sqrt{10}; MN = DN$$

$$\Rightarrow (2-m)^2 + (6-3m)^2 = \sqrt{10} \Leftrightarrow (m-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \Rightarrow M(3; 5) \\ m = 1 \Rightarrow M(1; -1) \text{ (loại)} \end{cases}$$



$$M(3;5) \text{ m gọi } P = MN \cap AD \Rightarrow \overrightarrow{NP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P - 2 = \frac{-1}{3} \\ y_P - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = \frac{5}{3} \\ y_P = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } AP = \frac{1}{3}MC = \frac{1}{6}BC = \frac{1}{6}AD \Rightarrow DP = \frac{5}{6}DA$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{DA} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DP} \Rightarrow \begin{cases} x_B - 3 = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{3} - 5\right) \\ y_B - 5 = \frac{3}{5}(1 - 1) \end{cases} \Rightarrow B(1;5)$$

Câu 8. (1 điểm) Điều kiện: $|x| \leq \sqrt{\frac{5}{2}}$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow (x^2 - 1 - y)(x^2 + y^2) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ hoặc } x^2 = y + 1$$

Trường hợp $x = y = 0$ thế vào (2) không thỏa mãn.

$$\text{Trường hợp } x^2 = y + 1 \text{ thế vào (2): } 2y^3 - \sqrt{3 - 2y} - 1 = 0 \quad (3)$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = 2t^3 - \sqrt{3 - 2t} - 1; t \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]; f'(t) = 6t^2 + \frac{1}{\sqrt{3 - 2t}}; f'(t) > 0, \forall t \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$; mà $f(1) = 0$.

Suy ra phương trình (3) có nghiệm duy nhất: $y = 1$. Với $y = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$ (thỏa điều kiện)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(\sqrt{2}; 1); (-\sqrt{2}; 1)$

Câu 9. (1 điểm) Với a, b, c là các số dương ta có: $(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$ và $ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$

$$\text{Bởi vậy: } \frac{2(a+b+c)^2}{3} \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} + 3 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leq 9, \text{ từ đó: } 0 < a+b+c \leq 3$$

$$\text{Ta có: } 2(a^2 + b^2 + c^2) = ab + bc + ca + 3 \leq ab + bc + ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} + 3 \text{ nên } (a^2 + b^2 + c^2) \leq \frac{(a+b+c)^2}{6} + \frac{3}{2}$$

$$\text{Bởi vậy: } S = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{a+b+c+3} \leq \frac{(a+b+c)^2}{6} - \frac{1}{a+b+c+3} + \frac{3}{2} = \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{t+3} + \frac{3}{2}$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{t+3} + \frac{3}{2} \text{ với } 0 < t \leq 3 \text{ và } f'(t) = \frac{1}{3}t + \frac{1}{(t+3)^2} > 0, \forall t \in (0; 3)$$

$$\text{Bởi vậy: } f(t) \leq f(3), \forall t \in (0; 3] \text{ hay } f(t) \leq \frac{17}{6}$$

$$\text{Suy ra: } S \leq \frac{17}{6}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } a = b = c = 1$$

$$\text{Vậy } \max S = \frac{17}{6} \text{ khi } a = b = c = 1$$