CHỦ ĐỀ 11: TÍCH PHÂN ĐẶC BIỆT VÀ NÂNG CAO

1) Một số dạng tích phân đặc biệt

✍ **Mệnh đề 1:** Nếu *f(x)* là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn $\left[-a;a\right]$ thì $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$

✍ **Mệnh đề 2:** Nếu *f(x)* là hàm số lẻ và liên tục trên đoạn $\left[-a;a\right]$ thì $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

✍ **Mệnh đề 3:** Nếu *f(x)* là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn $\left[-a;a\right]$ thì $\int\limits_{-a}^{a} \frac{f(x)}{m^x+1}dx = \int\limits_{0}^{a} f(x)dx$

✍ **Mệnh đề 4:** Nếu *f(x)* là hàm số liên tục trên $\left[0;1\right]$ thì $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

Để chứng minh hoặc tính toán các tích phân đặc biệt trên, thông thường ta sử dụng các **phương pháp đổi biến** như sau:

➢ Với $I = \int\limits_{-a}^{a} f(x)dx$ ta có thể lựa chọn việc đặt $x = -t$

➢ Với $I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ ta có thể lựa chọn việc đặt $t = \frac{\pi}{2} - x$

➢ Với $I = \int\limits_{0}^{\pi} f(x)dx$ ta có thể lựa chọn việc đặt $t = \pi - x$

➢ Với $I = \int\limits_{0}^{2\pi} f(x)dx$ ta có thể lựa chọn việc đặt $t = 2\pi - x$

Ví dụ 1: Cho *f(x)* là hàm số lẻ liên tục trên đoạn $\left[-1;1\right]$ và $\int\limits_{0}^{-1} f(x)dx = 10$. Tính $I = \int\limits_{0}^{1} f(x)dx$

A. $I = -5$ **B.** $I = 5$ **C.** $I = -10$ **D.** $I = 10$

Lời giải

Do *f(x)* là hàm số lẻ nên $\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)dx = 0$

$\Rightarrow \int\limits_{0}^{1} f(x)dx = -\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx = \int\limits_{0}^{-1} f(x)dx = 10$ **Chọn D.**

Ví dụ 2: Cho *f(x)* là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn $\left[-3;3\right]$ và $\int\limits_{-3}^{0} f(x)dx = 2$. Tính $I = \int\limits_{-3}^{3} f(x)dx$

A. $I = 2$ **B.** $I = 4$ **C.** $I = -2$ **D.** $I = -4$

Lời giải

Do *f(x)* là hàm số chẵn nên $I=\int_{-3}^{3} f(x)dx = 2\int_{-3}^{0} f(x)dx = 2\int_{0}^{3} f(x)dx = 2.2 = 4$. **Chọn D.**

Ví dụ 3: Giả sử tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2+\cos x}{1+3^x}dx = a\pi^3 + b\pi + c$, trong đó $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính $S=8a+4b+c$

A. $\frac{5}{3}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{8}{3}$ **D.** $\frac{2}{3}$

Lời giải

Đặt $t=-x \Rightarrow dt=-dx$ và đổi cận $\left| \begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=-\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$

Khi đó $I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{(-t)^2+cos(-t)}{1+3^{-t}}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2+\cos t}{\frac{3^t+1}{3^t}}dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2+\cos x}{1+3^x}3^x dx$

$\Rightarrow 2I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2+\cos x)dx \Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\sin x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}+1 \Rightarrow a=\frac{1}{24}; b=0; c=1$

Do đó $S=\frac{4}{3}$. **Chọn B.**

Ví dụ 4: Giả sử tích phân $I=\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x} = a\pi^2 + b\pi + c$, trong đó $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Tính $S=a+b-c$

A. $S=\frac{1}{2}$ **B.** $S=\frac{-1}{2}$ **C.** $I=\frac{1}{4}$ **D.** $I=\frac{-1}{4}$

Lời giải

Đặt $t=\pi-x \Rightarrow I=\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x} = \int_{0}^{\pi} \frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}(-dt) = \int_{0}^{\pi} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt = \int_{0}^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$

Khi đó $2I=\pi\int_{0}^{\pi} \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x} = \pi\int_{0}^{\pi} \frac{-d(\cos x)}{1+\cos^2 x} = -\pi\int_{1}^{-1} \frac{du}{1+u^2} \xrightarrow{v=\tan u} -\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} du = \frac{\pi^2}{2}$

Do đó $I=\frac{\pi^2}{4} \Rightarrow a=\frac{1}{4}; b=c=0 \Rightarrow S=\frac{1}{4}$. **Chọn C.**

2) Một số dạng tích phân vận dụng cao

✍ Dạng 1. Bài toán tích phân liên quan đến các biểu thức sau:

(1) . $u(x).f'(x)+u'(x).f(x)=h(x)$

(2). $\dfrac{u'(x).f(x)-u(\mathrm{x}).\mathrm{f}'(\mathrm{x})}{f^2(x)}=\mathrm{h}(\mathrm{x})$

Phương pháp giải:

Áp dụng các công thức: $(uv)'=u'v+v'u$ và $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

(1). Biến đổi: $u(x).f'(x)+u'(\mathrm{x}).\mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{h}(\mathrm{x})\Leftrightarrow\left[u(x).f(x)\right]'=h(x)\Rightarrow u(x).f(x)=\int h(x)dx$

(2). Biến đổi: $\dfrac{u'(x).f(x)-u(\mathrm{x}).\mathrm{f}'(\mathrm{x})}{f^2(x)}=\mathrm{h}(\mathrm{x})\Leftrightarrow\left[\dfrac{u(x)}{f(x)}\right]'=h(x)\Rightarrow\dfrac{u(x)}{f(x)}=\int h(x)dx$

Dạng 2. Bài toán tích phân liên quan đến các biểu thức sau:

(1) . $f'(x)+f(x)=h(x)$

2). $f'(x)-\mathrm{f}(\mathrm{x})=\mathrm{h}(\mathrm{x})$

Phương pháp giải:

(1). Biến đổi: $f'(x)+f(x)=h(x)\Rightarrow \mathrm{e}^x.f'(x)+e^x.f(x)=e^x.h(x)$

$\Leftrightarrow\left[e^x.f(x)\right]'=e^x.h(x)\Leftrightarrow e^x.f(x)=\int e^x.h(x)dx$

(2). Biến đổi: $f'(x)-f(x)=h(x)\Rightarrow \mathrm{e}^{-x}.f'(x)-e^{-x}.f(x)=e^{-x}.h(x)$

$\Leftrightarrow\left[e^{-x}.f(x)\right]'=e^{-x}.h(x)\Leftrightarrow e^{-x}.f(x)=\int e^{-x}.h(x)dx$

Dạng 3. Bài toán tổng quát: $f'(x)+p(x).f(x)=h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân 2 vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được $e^{\int p(x)dx}.f'(x)+e^{\int p(x)dx}.p(x).f(x)=e^{\int p(x)dx}.h(x)$

$\Leftrightarrow\left[e^{\int p(x)dx}.f(x)\right]'=h(x).e^{\int p(x)dx}\Rightarrow e^{\int p(x)dx}.f(x)=\int h(x).e^{\int p(x)dx}dx$

Tổng quát: $e^{\int p(x)dx}.f(x)=\int h(x).e^{\int p(x)dx}dx$

Ví dụ 1: Cho hàm số *f(x)* có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $\mathrm{f}(0)=3$ và $(2\mathrm{x}+3)\mathrm{f}'(\mathrm{x})+2\,\mathrm{f}(\mathrm{x})=4\mathrm{x}-3\mathrm{x}^2$. Tính $\mathrm{f}(2)$ bằng

A. $f(2)=1$ **B.** $f(2)=\dfrac{9}{7}$ **C.** $f(2)=\dfrac{1}{5}$ **D.** $f(2)=\dfrac{1}{7}$

Lời giải

Ta có: $(2\mathrm{x}+3)\mathrm{f}'(\mathrm{x})+2\,\mathrm{f}(\mathrm{x})=4\mathrm{x}-3\mathrm{x}^2\Leftrightarrow\left[(2\mathrm{x}+3)\mathrm{f}(\mathrm{x})\right]'=4\mathrm{x}-3\mathrm{x}^2$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $(2\mathrm{x}+3)\mathrm{f}(\mathrm{x})=\int(4\mathrm{x}-3\mathrm{x}^2)\mathrm{dx}=2\mathrm{x}^2-\mathrm{x}^3+\mathrm{C}$

Do $\mathrm{f}(0)=3\Rightarrow 3\mathrm{f}(0)=\mathrm{C}\Rightarrow\mathrm{C}=9$

Thay $x=2\Rightarrow 7f(2)=8-8+9\Rightarrow f(2)=\frac{9}{7}$. **Chọn B.**

Ví dụ 2: Cho hàm số *f(x)* có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thỏa mãn $f(1)=2$ và

$(x^2+x+2)f'(x)+(2x+1)f(x)=4x^3+2x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $2<f(3)<3$ **B.** $3<f(3)<5$ **C.** $f(3)<2$ **D.** $f(3)>5$

Lời giải

Ta có: $(x^2+x+2)f'(x)+(2x+1)f(x)=4x^3+2x\Leftrightarrow\left[(x^2+x+2)f(x)\right]'=4x^3+2x$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $(x^2+x+2)f(x)=\int(4x^3+2x)dx=x^4+x^2+C$

Do $f(1)=2\Rightarrow 4f(1)=2+C\Rightarrow C=6$

Khi đó $(3^2+3+2)f(3)=3^4+3^2+6\Rightarrow f(3)=\frac{48}{7}>5$. **Chọn D.**

Ví dụ 3: Cho hàm số y = *f(x)* có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$ thỏa mãn $f(1)=2$ và

$f(x)=x.f'(x)+3x^4-4x^2$. Tính giá trị $f(4)$

A. $f(4)=-2$ **B.** $f(4)=-196$ **C.** $f(4)=-48$ **D.** $f(4)=-193$

Lời giải

Ta có $f(x)=x.f'(x)+3x^4-4x^2\Rightarrow\frac{f(x)-x.f'(x)}{x^2}=3x^2-4$

$\Leftrightarrow\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-3x^2+4$ (*). Mặt khác $\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{x.f'(x)-f(x)}{x^2}$

Lấy nguyên hàm 2 vế của (*) ta có: $\frac{f(x)}{x}=-x^3+4x+C$

Do $f(1)=2\Rightarrow\frac{f(1)}{1}=-1+4+C\Rightarrow C=-1\Rightarrow f(x)=-x^4+4x^2-x$

Khi đó $f(4)=-196$. **Chọn B.**

Ví dụ 4: Cho hàm số y = *f(x)* có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ và

$\sin x.f'(x)+\cos x.f(x)=\sin x+\cos x$. Tính giá trị của $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ **B.** $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$ **C.** $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ **D.** $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

Lời giải

Ta có: $\left[\sin x.f(x)\right]'=\sin x.f'(x)+\cos x.f(x)$

Từ giả thiết lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $\sin x.f(x) = -\cos x + \sin x + C$

Do $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow -\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$

Suy ra $\sin x.f(x) = \sin x - \cos x \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2}.f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. **Chọn D.**

Ví dụ 5: Cho hàm số y = *f(x)* có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ thỏa mãn $f'(x) + f(x) = x - 1$. Biết $f(0) = 9$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(2) = 9e^{-2}$ **B.** $f(2) = 9e^2$ **C.** $f(2) = 1 + 9e^2$ **D.** $f(2) = -1 + 9e^2$

Lời giải

Ta có: $f'(x) + f(x) = x - 1 \Leftrightarrow e^x.f'(x) + e^x.f(x) = e^x(x-1)$

$\Leftrightarrow \left[e^x.f(x)\right]' = e^x(x-1) \Rightarrow e^x.f(x) = \int e^x(x-1)dx$

Đặt $\begin{cases} u = x - 1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int e^x(x-1)dx = (x-1)e^x - \int e^x dx = (x-2)e^x + C$

Do đó $e^x.f(x) = (x-2)e^x + C \Rightarrow f(x) = \frac{(x-2)e^x + C}{e^x}$

Lại có $f(0) = -2 + C = 7 \Rightarrow C = 9 \Rightarrow f(x) = \frac{(x-2)e^x + 9}{e^x} \Rightarrow f(2) = \frac{9}{e^2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 6: Cho hàm số y = *f(x)* có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f(0) = 3$ và $f(x) - f'(x) = 2x + 1$. Giá trị của $f(1)$ thuộc đoạn

A. $[0;2]$ **B.** $[4;6]$ **C.** $[2;4]$ **D.** $[6;8]$

Lời giải

Ta có : $f(x) - f'(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow e^{-x}f(x) - e^{-x}.f'(x) = e^{-x}(2x+1)$

Mặt khác $\left[e^{-x}.f(x)\right]' = e^{-x}.f'(x) - e^{-x}f(x)$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $-e^{-x}.f(x) = \int e^{-x}(2x+1)dx$

Đặt $\begin{cases} u = (2x+1)dx \\ dv = e^{-x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = -e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \int e^{-x}(2x+1)dx = -e^{-x}(2x+1) + \int 2e^{-x}dx$

$\Rightarrow -e^{-x}.f(x) = -e^{-x}(2x+3) + C \Leftrightarrow e^{-x}.f(x) = e^{-x}(2x+3) + C$

Do $f(0) = 4$ nên $4 = 3 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = 2x + 3 + \frac{1}{e^{-x}} = f(x) = 2x + 3 + e^x$

$\Rightarrow f(1)=5+e\in[6;8]$. **Chọn D.**

Ví dụ 7: Cho hàm số y = *f(x)* có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[0;1]$, biết rằng $f(0)=\frac{13}{3}$ và $(x^2+1)f'(x)+xf(x)=x^3+4x$. Khi đó:

A. $0<f(1)<2$ **B.** $2<f(1)<4$ **C.** $4<f(1)<5$ **D.** $f(1)>5$

Lời giải

Ta có : $(x^2+1)f'(x)+xf(x)=x^3+4x \Leftrightarrow f'(x)+\frac{x}{x^2+1}f(x)=\frac{x^3+4x}{x^2+1}$

Áp dụng công thức nhanh **Dạng 3** ta có $f(x).e^{\int\frac{xdx}{x^2+1}}=\int\frac{x^3+4x}{x^2+1}e^{\int\frac{xdx}{x^2+1}}dx$ (*)

Ta tính: $e^{\int\frac{xdx}{x^2+1}}=e^{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}=\sqrt{x^2+1}$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}.f(x)=\int\frac{x^3+4x}{x^2+1}\sqrt{x^2+1}dx$

$=\int\frac{x(x^2+4)}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\left(\sqrt{x^2+1}+\frac{3}{\sqrt{x^2+1}}\right)d(x^2+1)=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+3\sqrt{x^2+1}+C$

Do đó $f(x)=\frac{x^2+1}{3}+3+\frac{C}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+10}{3}+\frac{C}{\sqrt{x^2+1}}$

Mặt khác $f(0)=\frac{10}{3}+C=\frac{13}{3}\Rightarrow C=1\Rightarrow f(1)=\frac{11}{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow 4<f(1)<5$. **Chọn C.**

Ví dụ 8: Cho hàm số y = *f(x)* có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[2;4]$, biết rằng $f(2)=6$ và $(x^2-1)f'(x)+f(x)=x^2+x$. Tính $f(4)$

A. $f(4)=2+\sqrt{5}$ **B.** $f(4)=5+\sqrt{5}$ **C.** $f(4)=5+\sqrt{15}$ **D.** $f(4)=2+\sqrt{15}$

Lời giải

Ta có: $(x^2-1)f'(x)+f(x)=x^2+x \Leftrightarrow f'(x)+\frac{f(x)}{x^2-1}=\frac{x}{x-1}$ với $x\in[2;4]$

Áp dụng công thức nhanh **Dạng 3** ta có $f(x).e^{\int\frac{dx}{x^2-1}}=\int\frac{x}{x-1}e^{\int\frac{dx}{x^2-1}}dx$ (*)

Lại có $e^{\int\frac{dx}{x^2-1}}=e^{\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

Do đó (*) $\Leftrightarrow f(x).\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\int\frac{x}{x-1}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}+C$

Suy ra $f(x)=C\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+x+1\Rightarrow f(2)=C\sqrt{3}+3=6\Rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{3x+3}{x-1}}+x+1$

Vậy $f(4)=5+\sqrt{5}$. **Chọn B.**

Ví dụ 9: Cho hàm số y = *f(x)* xác định và liên tục trên đoạn $\left[1;e\right]$, thỏa mãn

$xf'(x)=x\left[f(x)\right]^2+3f(x)+\frac{4}{x}$ và $f(1)=-3$. Tính $f(e)$

A. $\frac{5}{2e}$ **B.** $-\frac{5}{2}$ **C.** $-\frac{5}{2e}$ **D.** $\frac{5}{2}$

Lời giải

Ta có $xf'(x)=x\left[f(x)\right]^2+3f(x)+\frac{4}{x}\Leftrightarrow f(x)+xf'(x)=x\left[f(x)\right]^2+4f(x)+\frac{4}{x}$

$\Leftrightarrow\left[xf(x)\right]'=\frac{1}{x}\left[xf(x)+2\right]^2\Leftrightarrow\frac{\left[xf(x)\right]'}{\left[xf(x)+2\right]^2}=\frac{1}{x}$

Đặt $g(x)=xf(x)$ ta có: $\frac{g'(x)}{\left[g(x)+2\right]^2}=\frac{1}{x}$ suy ra $\int\frac{g'(x)dx}{\left[g(x)+2\right]^2}=\int\frac{dx}{x}$

$\Leftrightarrow\int\frac{d\left[g(x)\right]}{\left[g(x)+2\right]^2}=\ln|x|+C\Leftrightarrow\frac{-1}{g(x)+2}=\ln|x|+C\Leftrightarrow\frac{-1}{xf(x)+2}=\ln|x|+C$

Do $f(1)=-3$ nên $\frac{-1}{-1}=C\Leftrightarrow C=1$. Suy ra $\frac{-1}{ef(e)+2}=2\Leftrightarrow f(e)=\frac{-5}{2e}$. **Chọn C.**

Ví dụ 10: Cho hàm số *f(x)* liên tục và có đạo hàm tại mọi $x\in\left(0;+\infty\right)$, đồng thời thỏa mãn điều kiện

$f(x)=x\left(\sin x+f'(x)\right)+\cos x$ và $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\sin x\,dx=-4$. Khi đó, $f(\pi)$ nằm trong khoảng

A. $\left(6;7\right)$ **B.** $\left(5;6\right)$ **C.** $\left(12;13\right)$ **D.** $\left(11;12\right)$

Lời giải

Ta có $f(x)=x\left(\sin x+f'(x)\right)+\cos x\Leftrightarrow f(x)-xf'(x)=x\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow\frac{f(x)-xf'(x)}{x^2}=\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}\Leftrightarrow-\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=-\left(\frac{\cos x}{x}\right)'$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $\frac{f(x)}{x}=\frac{\cos x}{x}+C\Rightarrow f(x)=\cos x+Cx$

Khi đó: $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\sin x\,dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(\sin x\cos x+Cx\sin x)dx=-4\Rightarrow C=2$

Suy ra $f(x)=\cos x+2x\Rightarrow f(\pi)=-1+2\pi\in(5;6)$. **Chọn B.**

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$. Biết rằng

$f'(x).\cos x + f(x).\sin x = 1, \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ và $f(0) = 1$. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$

A. $I = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ **B.** $I = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ **C.** $I = \frac{1}{2}$ **D.** $I = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3}$

Lời giải

$f'(x).\cos x + f(x).\sin x = 1 \Leftrightarrow \frac{f'(x).\cos x + f(x).\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{\cos x}\right]' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $\frac{f(x)}{\cos x} = \tan x + C$. Theo giả thiết $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$

Khi đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\tan x + 1)\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x)dx = (-\cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Chọn A.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm tại mọi $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, đồng thời thỏa mãn hệ thức

$f(x) + \tan x.f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x}$. Biết rằng $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a\pi\sqrt{3} + b\ln 3$ trong đó $a, b \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$

A. $P = \frac{14}{9}$ **B.** $P = \frac{-4}{9}$ **C.** $P = \frac{7}{9}$ **D.** $P = \frac{-2}{9}$

Lời giải

Ta có $f(x) + \tan x.f'(x) = \frac{x}{\cos^3 x} \Leftrightarrow \cos.f(x) + \sin x f'(x) = \frac{x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \left[\sin x.f(x)\right]' = \frac{x}{\cos^2 x}$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $\sin x.f(x) = \int \frac{xdx}{\cos^2 x}$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases} \Rightarrow \sin x.f(x) = \int \frac{xdx}{\cos^2 x} = x\tan x - \int \tan x dx$

$\Rightarrow \sin x.f(x) = x\tan x + \ln|\cos x|$

Do đó $\frac{\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{\pi}{3}\sqrt{3} + \ln\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\pi\sqrt{3}}{18} - \ln\sqrt{3}$

Suy ra $\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5\pi\sqrt{3}}{9}-\ln 3\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{5}{9}\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{-4}{9}$. **Chọn B.**

Ví dụ 13: Tính tích phân $I=\int_{-1}^{3}\min\left\{e^x;e^{-x}\right\}dx$

A. $I=\frac{2}{e}-2$ **B.** $I=\frac{2}{e}+2$ **C.** $I=2-\frac{2}{e}$ **D.** $I=\frac{2}{e}$

Lời giải

Xét phương trình $e^x=e^{-x}\Leftrightarrow e^x=\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$

Suy ra trên $[-1;0]\to e^x-e^{-x}<0\Rightarrow\min\left\{e^x;e^{-x}\right\}=e^x$

Và trên $[1;3]\to e^x-e^{-x}>0\Rightarrow\min\left\{e^x;e^{-x}\right\}=e^{-x}$

Vậy $I=\int_{-1}^{0}e^x dx+\int_{0}^{3}e^{-x}\,dx=2-\frac{2}{e}$. **Chọn C.**

Ví dụ 14: Tính tích phân $I=\int_{0}^{3}\max\left\{x^3;4x^2-3x\right\}dx$

A. $I=\frac{117}{2}$ **B.** $I=\frac{275}{12}$ **C.** $I=19$ **D.** $I=27$

Lời giải

Xét phương trình $x^3=4x^2-3x\Leftrightarrow x^3-4x^2+3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1;x=3\end{array}\right.$

Suy ra trên $[0;1]\to x^3-(4x^2-3x)>0\Rightarrow\max\left\{x^3;4x^2-3x\right\}=x^3$

Và trên $[1;3]\to x^3-(4x^2-3x)<0\Rightarrow\max\left\{x^3;4x^2-3x\right\}=4x^2-3x$

Vậy $I=\int_{0}^{1}x^3dx+\int_{1}^{3}(4x^2-3x)\,dx=\frac{275}{12}$. **Chọn B.**

Ví dụ 15: Tính tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\min\left\{\sin x;\cos x\right\}dx$

A. $I=\sqrt{2}-2$ **B.** $I=\sqrt{2}$ **C.** $I=2+\sqrt{2}$ **D.** $I=2-\sqrt{2}$

Lời giải

Xét phương trình $\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$

Suy ra trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\to\sin x-\cos x<0\Rightarrow\min\left\{\sin x;\cos x\right\}=\sin x$

Và trên $\left[0;\frac{\pi}{4}\right] \to \sin x - \cos x > 0 \Rightarrow \min\left\{\sin x;\cos x\right\} = \cos x$

Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 - \sqrt{2}$. **Chọn D.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số *y = f(x)* liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính

$I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$

A. $I=-6$ **B.** $I=0$ **C.** $I=-2$ **D.** $I=6$

Câu 2: Cho hàm số *y = f(x)* liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=3-2\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$. Tính

$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

A. $I=\dfrac{\pi-1}{3}$ **B.** $I=\dfrac{\pi}{2}+2$ **C.** $I=\dfrac{3\pi}{2}-2$ **D.** $I=\dfrac{\pi+1}{2}$

Câu 3: Cho hàm số *y = f(x)* liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x)+2f(x)=\cos x$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

A. $I=\dfrac{1}{3}$ **B.** $I=\dfrac{4}{3}$ **C.** $I=\dfrac{2}{3}$ **D.** $I=1$

Câu 4: Cho hàm số *y = f(x)* liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sin 2x$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

A. $I=0$ **B.** $I=\dfrac{1}{2}$ **C.** $I=2$ **D.** $I=-2$

Câu 5: Cho hàm số *y = f(x)* liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(-x)-f(x)=x^3$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$

A. $I=0$ **B.** $I=\dfrac{4}{3}$ **C.** $I=\dfrac{2}{3}$ **D.** $I=1$

Câu 6: Cho $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{f(x)}{1+2^x}dx=4$, trong đó hàm số *y = f(x)* là hàm số chẵn trên đoạn $[-1;1]$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$

A. $I=2$ **B.** $I=16$ **C.** $I=4$ **D.** $I=8$

Câu 7: Tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^{2}\dfrac{x^{2016}}{e^x+1}dx$

A. $I=\dfrac{2^{2016}}{2017}$ **B.** $I=\dfrac{2^{2018}}{2017}$ **C.** $I=\dfrac{2^{2017}}{2017}$ **D.** $I=\dfrac{2^{2018}}{2018}$

Câu 8: Cho hàm số *f(x)* lẻ và liên tục trên đoạn $[-2;2]$. Tìm khẳng định luôn **đúng**?

A. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_{0}^{2} f(x)dx$

B. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$

C. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_{-2}^{0} f(x)dx$

D. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = -2\int_{0}^{2} f(x)dx$

Câu 9: Cho *f(x)* là hàm số chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2$. Tính $\int_{0}^{1} f(x)dx$

A. 1 **B.** 2 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Câu 10: Cho *f(x)* là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_{-3}^{0} f(x)dx = 2$. Chọn mệnh đề **đúng**?

A. $\int_{-3}^{3} f(x)dx = 2$ **B.** $\int_{-3}^{3} f(x)dx = 4$ **C.** $\int_{0}^{3} f(x)dx = -2$ **D.** $\int_{3}^{0} f(x)dx = 2$

Câu 11: Tính tích phân $I = \int_{-1}^{1} x^{2017}\sqrt{x^2 + 2017}dx$

A. $I = 0$ **B.** $I = 2$ **C.** $I = -2$ **D.** $I = \frac{1}{3}$

Câu 12: Cho f là hàm số liên tục trên $[a;b]$ thỏa $\int_{a}^{b} f(x)dx = 7$. Tính $I = \int_{a}^{b} f(\mathrm{a+b-x})dx$

A. $I = 7$ **B.** $I = a + b - 7$ **C.** $I = 7 - a - b$ **D.** $I = a + b + 7$

Câu 13: Cho hàm số *f(x)* là hàm chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6;6]$. Biết rằng $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 8$ và $\int_{1}^{3} f(-2x)dx = 3$. Tính $I = \int_{-1}^{6} f(x)dx$

A. $I = 11$ **B.** $I = 5$ **C.** $I = 2$ **D.** $I = 14$

Câu 14: Cho hàm số *f(x)* là hàm số chẵn $\int_{-2}^{0} f(x)dx = a$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\int_{0}^{2} f(x)dx = -a$ **B.** $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2a$ **C.** $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$ **D.** $\int_{0}^{-2} f(x)dx = a$

Câu 15: Cho hàm số *f(x)* là hàm số lẻ $\int_{-2}^{0} f(x)dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_{0}^{2} f(x)dx$

A. $I = 2$ **B.** $I = -2$ **C.** $I = 1$ **D.** $I = -1$

Câu 16: Cho hàm số *f(x)* là hàm chẵn và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $I=\int_0^3 f(x)dx=6$. Tính tích phân $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(3\sin x)dx$

A. $J=0$ **B.** $J=3$ **C.** $J=6$ **D.** $J=4$

Câu 17: Cho tích phân $I=\int_{-1}^{2} f(x)dx=5$ trong đó *f(x)* là hàm số liên tục trên đoạn $[-1;2]$. Tính tích phân $\int_{-1}^{2} f(1-x)dx$

A. -1 **B.** 2 **C.** 5 **D.** 8

Câu 18: Biết $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx=\frac{a}{b}\ln c$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}^+$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $a+2b-c$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(17;19)$ **B.** $(25;27)$ **C.** $(31;33)$ **D.** $(41;43)$

Câu 19: Biết $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx=2\pi$. Tính $\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$

A. 1 **B.** π **C.** 2π **D.** 4

Câu 20: Biết $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx=\frac{2}{3}$. Tính $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx$

A. $\frac{\pi}{3}$ **B.** $\frac{2\pi}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 2

Câu 21: Biết $\int_1^5\frac{2|x-2|+1}{x}dx=4+a\ln 2+b\ln 5$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính S=a+b

A. $S=9$ **B.** $S=11$ **C.** $S=-3$ **D.** $S=5$

Câu 22: Tích phân $\int_{-1}^{4}\left|x^2-3x+2\right|dx=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính a+2b

A. 22 **B.** 17 **C.** 23 **D.** 67

Câu 23: Cho các số thực *m, n* thỏa mãn $\int_a^1(1-x)dx=m$ và $\int_b^1(1-x)dx=n$ trong đó *a, b* là các số thực $a<1<b$. Tính tích phân $I=\int_a^1|1-x|dx$

A. $I=-m-n$ **B.** $I=n-m$ **C.** $I=m-n$ **D.** $I=m+n$

Câu 24: Tính tích phân $I=\int_0^4 max\left\{x^2+1;4x-3\right\}dx$

A. $I=\frac{80}{3}$ **B.** $I=\frac{76}{3}$ **C.** $I=24$ **D.** $I=\frac{148}{3}$

Câu 25: Tính tích phân $I=\int_2^4 \max\left\{x^2;4x-3\right\}dx$

A. $I=\frac{56}{3}$ **B.** $I=\frac{58}{3}$ **C.** $I=18$ **D.** $I=\frac{2}{3}$

Câu 26: Tính tích phân $I=\int_0^2 \min\left\{\text{x};x^2\right\}dx$

A. $I=9$ **B.** $I=\frac{9}{2}$ **C.** $I=\frac{11}{6}$ **D.** $I=\frac{27}{2}$

Câu 27: Tính tích phân $I=\int_0^2 \min\left\{1;x^2\right\}dx$

A. $I=\frac{8}{3}$ **B.** $I=2$ **C.** $I=\frac{2}{3}$ **D.** $I=\frac{4}{3}$

Câu 28: Tính tích phân $I=\int_0^2 \max\left\{\frac{3x-1}{x+1};2-x\right\}dx$

A. $I=\frac{9}{2}-4\ln\frac{3}{2}$ **B.** $I=\frac{3}{2}-2\ln\frac{3}{2}$ **C.** $I=\frac{5}{2}-4\ln\frac{3}{2}$ **D.** $I=\frac{7}{2}-2\ln\frac{3}{2}$

Câu 29: Tính tích phân $I=\int_0^2 \max\left\{x;x^2\right\}dx$

A. $I=\frac{17}{6}$ **B.** $I=\frac{2}{3}$ **C.** $I=\frac{9}{2}$ **D.** $I=\frac{8}{3}$

Câu 30: Tính tích phân $I=\int_0^4 \max\left\{x^2-2x+1;x+1\right\}dx$

A. $I=\frac{83}{6}$ **B.** $I=\frac{7}{6}$ **C.** $I=-\frac{7}{6}$ **D.** $I=-\frac{83}{6}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Lấy tích phân 2 vế của $f(x)+f(-x)=cos2\,x$ cận từ $-\frac{3\pi}{2}\to\frac{3\pi}{2}$ ta có:

$$\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx+\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2(1+cos2x)}dx=2\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |cosx|\,dx=12$$ (Sử dụng máy tính Casio)

Đặt $t=x\Rightarrow dt=-dx$ và đổi cận $\left| \begin{array}{l} x=\frac{-3\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{3\pi}{2} \\ x=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{-3\pi}{2} \end{array} \right.$

Khi đó $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx=-\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(t)dt=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(t)dt=\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$

Suy ra $\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx+\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-\mathrm{x})dx=2I=12\Rightarrow I=6$. **Chọn D.**

Câu 2: Ta có $f(x)+f(-x)=3-2cos\,x\Rightarrow\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3-2cosx)dx$ (*)

Đặt $t=x\Rightarrow dt=-dx$ và đổi cận $\left| \begin{array}{l} x=\frac{-\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{-\pi}{2} \end{array} \right.$

Khi đó $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=I$

Do đó (*) $\Leftrightarrow 2I=(3\,\mathrm{x}-2\,\mathrm{sinx})\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=3\pi-4\Rightarrow I=\frac{3\pi}{2}-2$. **Chọn C.**

Câu 3: Ta có $f(-x)+2f(x)=cos\,x\Rightarrow\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx+2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cosxdx$ (*)

Đặt $t=x\Rightarrow dt=-dx$ và đổi cận $\left| \begin{array}{l} x=\frac{-\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{-\pi}{2} \end{array} \right.$

Khi đó $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = I$

Do đó (*) $\Leftrightarrow 3I = \mathrm{s\,inx}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \Rightarrow I = \dfrac{2}{3}$. **Chọn C.**

Câu 4: Ta có: $f(x) + f(-x) = \sin 2\,\mathrm{x} \Rightarrow \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2xdx$ (*)

Đặt $t = x \Rightarrow dt = -dx$ và đổi cận $\left| \begin{array}{l} x = \dfrac{-\pi}{2} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = \dfrac{-\pi}{2} \end{array} \right.$

Khi đó $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = I$

Do đó (*) $\Leftrightarrow 2I = \dfrac{-\cos 2x}{2}\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 \Rightarrow I = 0$. **Chọn A.**

Câu 5: Ta có $2f(-x) - f(x) = \mathrm{x}^3 \Rightarrow 2\int\limits_{-1}^{1} f(-x)dx - \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} x^3 dx$ (*)

Đặt $t = x \Rightarrow dt = -dx$ và đổi cận $\left| \begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = -1 \end{array} \right.$

Khi đó $\int\limits_{-1}^{1} f(-x)dx = -\int\limits_{-1}^{1} f(t)dt = \int\limits_{-1}^{1} f(t)dt = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = I$

Do đó (*) $\Leftrightarrow I = \dfrac{x^4}{4}\Bigg|_{-1}^{1} = 0 \Rightarrow I = 0$. **Chọn A.**

Câu 6: Đặt $t = x \Rightarrow dt = -dx$ và đổi cận $\left| \begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = -1 \end{array} \right.$

Khi đó $K = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{1+2^x}dx = -\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(-t)}{1+2^{-t}}dt = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(t)}{1+\dfrac{1}{2^t}}dt = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{2^t.f(t)}{1+2^t}dt = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{2^x.f(x)}{1+2^x}dx$

Suy ra $2K = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{2^x.f(x)}{1+2^x}dx + \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{f(x)}{1+2^x}dx = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = 2K = 8$. **Chọn D.**

Câu 7: Đặt $t = x \Rightarrow dt = -dx$ và đổi cận $\left| \begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = -1 \end{array} \right.$

Khi đó $I=\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^{2016}}{e^x+1}dx=-\int\limits_{-2}^{2}\frac{t^{2016}}{e^{-t}+1}dt=\int\limits_{-2}^{2}\frac{t^{2016}}{\frac{1}{e^t}+1}dt=\int\limits_{-2}^{2}\frac{t^{2016}.e^t}{e^t+1}dt=\int\limits_{-2}^{2}\frac{e^x.\mathrm{x}^{2016}}{e^x+1}dx$

Suy ra $2I=\int\limits_{-2}^{2}\frac{e^x.x^{2016}}{e^x+1}dx+\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^{2016}}{e^x+1}dx=\int\limits_{-2}^{2}x^{2016}dx=\left.\frac{x^{2017}}{2017}\right|_{-2}^{2}=\frac{2.2^{2017}}{2017}$

Do đó $I=\frac{2^{2017}}{2017}$. **Chọn C.**

Câu 8: Do *f(x)* là hàm lẻ thì $f(-x)=-f(x)$

Ta có $\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=-\int\limits_{-a}^{a}f(-x)dx=\int\limits_{-a}^{a}f(-x)d(-x)\xrightarrow{t=-x}\int\limits_{a}^{-a}f(\mathrm{t})dt=-\int\limits_{-a}^{a}f(\mathrm{x})dx$

Do đó $2\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=0\Leftrightarrow\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=0$. **Chọn B.**

Câu 9: Do *f(x)* là hàm chẵn thì $f(-x)=f(x)$

Ta có: $\int\limits_{-a}^{0}f(x)dx=-\int\limits_{-a}^{0}f(-x)d(-x)\xrightarrow{t=-x}-\int\limits_{a}^{0}f(\mathrm{t})dt=-\int\limits_{a}^{0}f(\mathrm{x})dx=\int\limits_{0}^{a}f(\mathrm{x})dx$

Do đó $\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx=\int\limits_{-a}^{0}f(x)dx+\int\limits_{0}^{a}f(x)dx=2\int\limits_{0}^{a}f(\mathrm{x})dx=2\int\limits_{-a}^{0}f(\mathrm{x})dx$

Do đó $\int\limits_{-1}^{1}f(x)dx=2\int\limits_{0}^{1}f(\mathrm{x})dx\Rightarrow\int\limits_{0}^{1}f(\mathrm{x})dx=1$. **Chọn A.**

Câu 10: Do *f(x)* là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$ nên $\int\limits_{-3}^{3}f(x)dx=2\int\limits_{0}^{3}f(x)dx=4$. **Chọn B.**

Câu 11: Do $f(x)=x^{2017}\sqrt{x^2+2017}$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$ nên $I=\int\limits_{-1}^{1}x^{2017}\sqrt{x^2+2017}dx=0$

Chọn A.

Câu 12: Đặt $t=a+b-x\Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận $\left|\begin{array}{l}x=a\Rightarrow t=b\\x=b\Rightarrow t=a\end{array}\right.$

Khi đó $I=\int\limits_{a}^{b}f(a+b-x)dx=-\int\limits_{b}^{a}f(t)dt=\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=7$. **Chọn A.**

Câu 13: Do *f(x)* là hàm chẵn nên $\int\limits_{1}^{3}f(-2x)dx=\int\limits_{-1}^{3}f(2x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3}f(2x)d(2x)$

$=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{6}f(\mathrm{t})dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{6}f(x)dx=3\Rightarrow\int\limits_{-2}^{6}f(x)dx=6$

Khi đó $I=\int\limits_{-1}^{6}f(\mathrm{t})dx=\int\limits_{-1}^{2}f(x)dx+\int\limits_{2}^{6}f(x)dx=8+6=14$. **Chọn D.**

Câu 14: Hàm số *f(x)* là hàm chẵn thì $f(-x)=f(x)$

Ta có $\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx=-\int\limits_{-a}^{0} f(-x)d(-x)\xrightarrow{t=-x}-\int\limits_{a}^{0} f(\text{t})dt=-\int\limits_{a}^{0} f(\text{x})dx=\int\limits_{a}^{0} f(\text{x})dx$

Do đó $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx=\int\limits_{-a}^{0} f(x)d(x)+\int\limits_{0}^{a} f(x)dx=2\int\limits_{0}^{a} f(\text{x})dx=2\int\limits_{-a}^{0} f(\text{x})dx=2a$. **Chọn B.**

Câu 15: Do *f(x)* là hàm số lẻ nên $\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx=0\Leftrightarrow\int\limits_{-2}^{0} f(x)dx+\int\limits_{0}^{2} f(x)dx=0$

Suy ra $I=\int\limits_{0}^{2} f(x)dx=-\int\limits_{-2}^{0} f(\text{x})dx=-2$. **Chọn B.**

Câu 16: Do *f(x)* là hàm chẵn nên $\int\limits_{-3}^{3} f(x)dx=2\int\limits_{0}^{3} f(x)dx$

$$J=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(3\sin x)dx=\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(3\sin x)d(3\sin x)\xrightarrow{t=3\sin x}J=\frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{3} f(t)dt=\frac{1}{3}\int\limits_{-3}^{3} f(\text{x})dx$$

$=\frac{1}{3}.2\int\limits_{0}^{3} f(x)dx=\frac{2}{3}.6=4$. **Chọn D.**

Câu 17: Đặt $t=1-x\Leftrightarrow dt=-dx$. Đổi cận $\left|\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow t=2\\ x=2\Rightarrow t=-1\end{array}\right.$

Khi đó $I=\int\limits_{-1}^{2} f(1-x)dx=-\int\limits_{2}^{-1} f(t)dt=\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx=5$. **Chọn C.**

Câu 18: Đặt $t=\frac{\pi}{4}-x\Leftrightarrow dt=-dx$ và $\begin{cases} x=0\to t=\frac{\pi}{4}\\ x=\frac{\pi}{4}\to t=0\end{cases}$

Do đó $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right](-dt)=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]dx$

Mà $1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1+\frac{1-\tan \text{x}}{1+\tan \text{x}}=\frac{2}{1+\tan \text{x}}$ suy ra $I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan x}dx=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dx-1\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{8}\ln 2$

Lại có $I=\frac{a}{b}.\ln c\to\begin{cases} a=\pi\\ b=8\\ c=2\end{cases}$. Vậy a+2b-c=$\pi$+2.8-2 $\in(17;19)$. **Chọn A.**

Câu 19: Đặt $t=\pi-x \Leftrightarrow dx=-dt$ và $\begin{cases} x=0\to t=\pi \\ x=\pi\to t=0 \end{cases}$

Do đó $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{xf}(\sin \mathrm{x})\,\mathrm{dx}=\int\limits_{\pi}^{0}(\pi-t).f\left[\sin(\pi-t)\right](-dt)=\int\limits_0^{\pi}(\pi-x)f(\sin \mathrm{x})dx$

$=\pi\int\limits_0^{\pi}\mathrm{f}(\sin \mathrm{x})dx-\int\limits_0^{\pi}\mathrm{x}.\mathrm{f}(\sin \mathrm{x})dx \Leftrightarrow \int\limits_0^{\pi}\mathrm{f}(\sin \mathrm{x})dx=\dfrac{2}{\pi}.\int\limits_0^{\pi}\mathrm{f}(\sin \mathrm{x})dx=4$. **Chọn D.**

Câu 20: Đặt $t=\pi-x \Leftrightarrow dx=-dt$ và $\begin{cases} x=0\to t=\pi \\ x=\pi\to t=0 \end{cases}$

Do đó $\int\limits_0^{\pi} \mathrm{xf}(\sin \mathrm{x})\,\mathrm{dx}=\int\limits_{\pi}^{0}(\pi-t).f\left[\sin(\pi-t)\right](-dt)=\int\limits_0^{\pi}(\pi-x)f(\sin \mathrm{x})dx$

$=\pi\int\limits_0^{\pi}\mathrm{f}(\sin \mathrm{x})\,\mathrm{dx}-\int\limits_0^{\pi}\mathrm{x}.\mathrm{f}(\sin \mathrm{x})dx \Leftrightarrow 2.\int\limits_0^{\pi}\mathrm{x}.\mathrm{f}(\sin \mathrm{x})dx=\pi\int\limits_0^{\pi}\mathrm{f}(\sin \mathrm{x})dx$

Vậy $\int\limits_0^{\pi}\mathrm{x}.\mathrm{f}(\sin \mathrm{x})dx=\dfrac{\pi}{3}$. **Chọn A.**

Câu 21: Ta có $I=\int\limits_1^2\dfrac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{dx}+\int\limits_2^5\dfrac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{dx}=\int\limits_1^2\dfrac{5-2x}{x}dx+\int\limits_2^5\dfrac{2x-3}{x}dx=4+8\ln 2+3\ln 5$

Mà $I=4+a.\ln 2+b.\ln 5\to\begin{cases} a=8 \\ b=3 \end{cases}$. Vậy $S=a+b=8+3=11$. **Chọn B.**

Câu 22: Xét phương trình $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Do đó trên $[-1;1],[2;4]\to x^2-3x+2>0$ và $[1;2]\to x^2-3x+2<0$

Vậy $I=\int\limits_{-1}^{1}(\mathrm{x}^2-3x+2)\,\mathrm{dx}-\int\limits_1^2(\mathrm{x}^2-3x+2)\,\mathrm{dx}+\int\limits_2^4(\mathrm{x}^2-3x+2)\,\mathrm{dx}=\dfrac{19}{2}\Rightarrow\begin{cases} a=19 \\ b=2 \end{cases}$. **Chọn C.**

Câu 23: Ta có $I=\int\limits_a^1|1-x|\,\mathrm{dx}+\int\limits_1^b|1-x|\,\mathrm{dx}=\int\limits_a^1(1-x)dx-\int\limits_1^b(1-x)dx=\int\limits_a^1(1-x)dx+\int\limits_b^1(1-x)dx=m+n$

Chọn D.

Câu 24: Ta có $x^2+1-(4x-3)=x^2-4x+4=(x-2)^2\ge 0\to\max\limits_{[0;4]}\left\{x^2+1;4x-3\right\}=x^2+1$

Suy ra $I=\int\limits_0^4(x^2+1)\,\mathrm{dx}=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)\right|_0^4=\dfrac{4^3}{3}+4=\dfrac{80}{3}$. **Chọn A.**

Câu 25: Xét phương trình $x^2=4x-3\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Suy ra trên $[2;3]\to x^2-4x+3<0\Rightarrow max\left\{x^2;4x-3\right\}=4x-3$

Và trên $\left[3;4\right] \to x^2-4x+3>0 \Rightarrow \max\left\{x^2;4\text{x}-3\right\}=x^2$

Vậy $I=\int\limits_2^3(4x-3)\,\text{dx}+\int\limits_3^4\text{x}^2\text{dx}=\frac{58}{3}$. **Chọn B.**

Câu 26: Xét phương trình $x^2=x \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Suy ra trên $\left[0;1\right] \to x^2-x<0 \Rightarrow \min\left\{\text{x};x^2\right\}=x^2$

Và trên $\left[1;2\right] \to x^2-x>0 \Rightarrow \min\left\{\text{x};x^2\right\}=x$

Vậy $I=\int\limits_0^1 x^2\,\text{dx}+\int\limits_1^2\text{xdx}=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2=\frac{11}{6}$. **Chọn C.**

Câu 27: Xét phương trình $x^2=1 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

Suy ra trên $\left[0;1\right] \to x^2-1<0 \Rightarrow \min\left\{1;x^2\right\}=x^2$

Và trên $\left[1;2\right] \to x^2-1>0 \Rightarrow \min\left\{1;x^2\right\}=1$

Vậy $I=\int\limits_0^1 x^2\,\text{dx}+\int\limits_1^2 1\,\text{dx}=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1+\left.x\right|_1^2=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$. **Chọn D.**

Câu 28: Xét phương trình $\frac{3x-1}{x+1}=2-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\le x\le 2\\3x-1=(x+1)(2-x)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$

Suy ra trên $\left[0;1\right] \to \frac{3x-1}{x+1}-2+x<0 \Rightarrow \max\left\{\frac{3x-1}{x+1};2-x\right\}=2-x$

Và trên $\left[1;2\right] \to \frac{3x-1}{x+1}-2+x>0 \Rightarrow \max\left\{\frac{3x-1}{x+1};2-x\right\}=\frac{3x-1}{x+1}$

Vậy $I=\int\limits_0^1(2-x)\,\text{dx}+\int\limits_1^2\frac{3x-1}{x+1}\text{dx}=\frac{9}{2}-4\ln\frac{3}{2}$. **Chọn A.**

Câu 29: Xét phương trình $x^2=x \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Suy ra trên $\left[0;1\right] \to x^2-x<0 \Rightarrow \max\left\{x;x^2\right\}=x$

Và trên $\left[1;2\right] \to x^2-x>0 \Rightarrow \max\left\{x;x^2\right\}=x^2$

Vậy $I=\int\limits_0^1 x\,\text{dx}+\int\limits_1^2 x^2\,\text{dx}=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1+\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2=\frac{17}{6}$. **Chọn A.**

Câu 30: Xét phương trình $x^2-2x+1=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$

Suy ra trên $[0;3] \to x^2-2x+1-(x+1)<0 \Rightarrow \max\left\{x^2-2x+1;x+1\right\}=x+1$

Và trên $[3;4] \to x^2-2x+1-(x+1)>0 \Rightarrow \max\left\{x^2-2x+1;x+1\right\}=x^2-2x+1$

Vậy $I=\int\limits_0^3 (x+1)\,\mathrm{dx}+\int\limits_3^4 (x^2-2x+1)\,\mathrm{dx}=\dfrac{83}{6}$. **Chọn A.**