

CHƯƠNG 4

GIỚI HẠN

BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hàm số liên tục tại 1 điểm

– Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

– Hàm số không liên tục tại điểm x_0 gọi là gián đoạn tại x_0 .

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, đoạn

– Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$. Ta nói rằng hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

– Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Nhận xét:

– Nếu hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại điểm x_0 thì các hàm số $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $c \cdot f(x)$ (với c là hằng số) đều liên tục tại điểm x_0 .

– Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số phân thức và lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

3. Tính chất của hàm số liên tục

– **Định lý về giá trị trung gian:** Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$, $f(b)$ tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ thỏa mãn $f(c) = M$.

– **Ý nghĩa hình học:** Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và M là một số thực nằm giữa $f(a)$, $f(b)$ thì đường thẳng $y = M$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ít nhất một điểm có hoành độ $c \in (a; b)$.

– **Hệ quả:** Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$. Ta thường vận dụng theo hai hướng sau:

+ **Vận dụng chứng minh phương trình có nghiệm:** “Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$ ”.

+ **Vận dụng trong tương giao đồ thị:** “Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a; b)$ ”.

B. DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

1_DẠNG 1. XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Phương pháp giải:

Hàm số liên tục tại điểm $x = x_0$ khi $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ hoặc $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

Đề cho	$x = x_0$	$x \neq x_0$	$x < x_0$	$x > x_0$
Cần tính	$f(x_0)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

1 VÍ DỤ

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4x - 7 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

ĐS: Liên tục

Lời giải

Ta có $f(x_0) = f(2) = 4 \cdot 2 - 7 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 2} = 1$$

Suy ra $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

ĐS: Không liên tục

Lời giải

Ta có $f(x_0) = f(1) = \frac{1}{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{4}$$

Suy ra $f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$ (hay gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$).

Ví dụ 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$

ĐS: Liên tục

Lời giải

Ta có $f(x_0) = f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 3 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 3x + 3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - 2x + 3}{(2 - x)(1 + \sqrt{2x - 3})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{1 + \sqrt{2x - 3}} = 1$$

Suy ra $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Ví dụ 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x + 1} - 2} & \text{khi } x > 3 \\ 2x + 12 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 3$.

ĐS: Không liên tục

Lời giải

Ta có $f(x_0) = f(3) = 18$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x + 12) = 18 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x + 1} - 2} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x - 3)(x + 3)(\sqrt{x + 1} + 2)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 3)(\sqrt{x + 1} + 2) = 24 \end{aligned}$$

Suy ra $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

Ví dụ 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x + 1 - \sqrt{x + 3}}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{3}{4} & \text{khi } x = 1 \\ \frac{3x^3 - 6x^2 - 3x + 6}{3x^2 - 14x + 11} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

ĐS: Liên tục

Lời giải

Ta có $f(x_0) = f(1) = \frac{3}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^3 - 6x^2 - 3x + 6}{3x^2 - 14x + 11} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(3x^2 - 3x - 6)}{(x - 1)(3x - 11)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 3x - 6}{3x - 11} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1-\sqrt{x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2 - (x+3)}{(x-1)(x+1+\sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x+1+\sqrt{x+3}} = \frac{3}{4}$$

Suy ra $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Ví dụ 6. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2 \cos 5x \cdot \cos 3x - \cos 8x - 1}{x^4 + x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

ĐS: Không liên tục

Lời giải

Ta có $f(x_0) = f(0) = 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 5x \cdot \cos 3x - \cos 8x - 1}{x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x + \cos 2x - \cos 8x - 1}{x^4 + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^4 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x}{x^2(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{-2}{x^2 + 1} \right] = -2 \end{aligned}$$

Suy ra $f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 0$ (hay gián đoạn tại điểm $x_0 = 0$).

Ví dụ 7. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 4x} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{1}{8}(a + x) & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

ĐS: $a = 13$

Lời giải

Ta có $f(2) = \frac{1}{8}(a + 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 4x + 3)}{x(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x + 3}{x(x+2)} = \frac{15}{8}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2 \Leftrightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{8}(a + 2) = \frac{15}{8} \Leftrightarrow a = 13$.

Ví dụ 8. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2(x^2 - 4)}{\sqrt{x+2} - x} & \text{khi } x > 2 \\ \sqrt{m+2} + m - 10x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

ĐS: $m = 2$

Lời giải

Ta có $f(2) = \sqrt{m+2} + m - 20$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x^2 - 4)}{\sqrt{x+2} - x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + x)}{x+2 - x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+x)}{-(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x+2)(\sqrt{x+2}+x)}{-(x+1)} = -16$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\sqrt{m+2} + m - 10x) = \sqrt{m+2} + m - 20$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm

$$x_0 = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \sqrt{m+2} + m - 20 = -16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m+2} = 4 - m \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m^2 - 9m + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m = 2 \vee m = 7 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

❶ BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại các điểm được chỉ ra:

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x-2 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 2. \quad \text{Đs: Liên tục}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 2. \quad \text{Đs: Liên tục}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{-x-1} & \text{khi } x \neq -1 \\ x^2+2x & \text{khi } x = -1 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = -1. \quad \text{Đs: Liên tục}$$

Bài 2. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại các điểm được chỉ ra:

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-2x-1}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 1. \quad \text{Đs: Liên tục}$$

$$2. y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{\sqrt{x+1}+7}{3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 1. \quad \text{Đs: Không liên tục}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-3x-4}{\sqrt{x+5}-3} & \text{khi } x > 4 \\ -4x+46 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 4. \quad \text{Đs: Liên tục}$$

Bài 3. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm các hàm số sau liên tục tại các điểm được chỉ ra:

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-5x^2+7x-3}{x^2-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2m+1 & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 1. \quad \text{Đs: } m = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ -5m + \frac{4-x}{x+2} & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = 0. \quad \text{Đs: } m = \frac{1}{5} \\
 3. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{6+x} - 2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x-m & \text{khi } x = 2 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = 2. \quad \text{Đs: } m = \frac{47}{12} \\
 4. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{12x-4} - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \sqrt{m^2x^2 + 8} + 2mx & \text{khi } x = 1 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = 1. \quad \text{Đs: } m = -1
 \end{aligned}$$

Bài 4. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm các hàm số sau liên tục tại các điểm được chỉ ra:

$$\begin{aligned}
 1. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - x - 6} & \text{khi } x > 2 \\ mx + 10 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{tại điểm } x_0 = 2. \quad \text{Đs: } m = -\frac{29}{7} \\
 2. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{x^2 + 2x - 3} & \text{khi } x > 1 \\ x + m & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = 1. \quad \text{Đs: } m = -\frac{3}{4} \\
 3. \quad m \text{ để } f(x) &= \begin{cases} \frac{|2x^2 - 7x + 6|}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ m + \frac{1-x}{x+2} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = 2. \quad \text{Đs: } m = -\frac{3}{4} \\
 4. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{3x - 3 + |x-1|\sqrt{5x^2 + 4}}{x^2 - 2x + 1} & \text{khi } x < 1 \\ m^2 + \frac{1}{3}x - 3m & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = 1. \quad \text{Đs: } m = 1 \text{ hoặc } m = 2 \\
 5. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{7-3x} - 4}{2 - \sqrt{1-x}} & \text{khi } x > -3 \\ m^2 - 2mx - \frac{3}{2} & \text{khi } x \leq -3 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = -3. \quad \text{Đs: } m = 0 \text{ hoặc } m = 6 \\
 6. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{3-x}{5 - \sqrt{x^2 + 16}} & \text{khi } x > 3 \\ \frac{m}{3}(x+m+1) & \text{khi } x \leq 3 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = 3. \quad \text{Đs: } m = -5 \text{ hoặc } m = 1 \\
 7. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{3(x^2 - 4)}{\sqrt{x+2} - x} & \text{khi } x > 2 \\ \sqrt{m+2} + m - 10x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{liên tục tại điểm } x_0 = 2. \quad \text{Đs: } m = 2
 \end{aligned}$$

3 LỜI GIẢI

Bài 1. 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x-2 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có $f(x_0) = f(2) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2-3}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1} = 2$$

Suy ra $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có $f(x_0) = f(2) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(-x^2+3x-1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2+3x-1}{x-1} = 1$$

Suy ra $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{-x-1} & \text{khi } x \neq -1 \\ x^2+2x & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = -1$.

Ta có $f(x_0) = f(-1) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{-x-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+2)}{-(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{-1} = -1$$

Suy ra $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

Bài 2. 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-3x-4}{\sqrt{x+5}-3} & \text{khi } x > 4 \\ -4x+46 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 4$.

Ta có $f(x_0) = f(4) = 30$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (-4x+46) = 30$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^3-3x-4}{\sqrt{x+5}-3} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-4)(x+1)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x+1)(\sqrt{x+5}+3) = 30$$

Suy ra $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 4$.

2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-2x-1}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có $f(x_0) = f(1) = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x + 2) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(3x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x+1) = 4$$

Suy ra $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

$$3. \text{ Xét tính liên tục của hàm số } y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{\sqrt{x+1} + 7}{3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 1.$$

$$\text{Ta có } f(x_0) = f(1) = \frac{\sqrt{2} + 7}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x+1} + 7}{3} = \frac{\sqrt{2} + 7}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+3}{x+2} = \frac{4}{3}$$

Suy ra $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

$$4. \text{ Xét tính liên tục của hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x - 4}{\sqrt{x+5} - 3} & \text{khi } x > 4 \\ -4x + 46 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = 4.$$

$$\text{Ta có } f(x_0) = f(4) = 30$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (-4x + 46) = 30$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x+5} - 3} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-4)(x+1)(\sqrt{x+5} + 3)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x+1)(\sqrt{x+5} + 3) = 30$$

Suy ra $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 4$.

Bài 3. 1. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2m + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

$$\text{Ta có } f(x_0) = f(1) = 2m + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x+1} = 0$$

$$\text{Hàm số } f(x) \text{ liên tục tại điểm } x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

2. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ -5m + \frac{4-x}{x+2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

Ta có: $f(0) = -5m + 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 0$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow -5m + 2 = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{5}$

Vậy $m = \frac{1}{5}$.

3. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{6+x} - 2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x - m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có $f(2) = 4 - m$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{6+x} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt[3]{(6+x)^2} + 2\sqrt[3]{6+x} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt[3]{(6+x)^2} + 2\sqrt[3]{6+x} + 4} = \frac{1}{12}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 4 - m = \frac{1}{12} \Leftrightarrow m = \frac{47}{12}$

Vậy $m = \frac{47}{12}$.

4. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{12x-4} - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \sqrt{m^2x^2 + 8} + 2mx & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có $f(1) = \sqrt{m^2 + 8} + 2m$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{12x-4} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12(x-1)}{(x-1)(\sqrt[3]{(12x-4)^2} + 2\sqrt[3]{12x-4} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{12}{\sqrt[3]{(12x-4)^2} + 2\sqrt[3]{12x-4} + 4} = 1 \end{aligned}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 8} + 2m = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m \geq 0 \\ m^2+8=(1-2m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ -3m^2+4m+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m=-1 \Leftrightarrow m=-1 \\ m=\frac{7}{3} \end{cases}$$

Vậy $m = -1$.

Bài 4.

1. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{2x^2-x-6} & \text{khi } x > 2 \\ mx+10 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có $f(x_0) = f(2) = 2m+10$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (mx+10) = 2m+10$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3-8}{2x^2-x-6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+2x+4}{2x+3} = \frac{12}{7}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm

$$x_0 = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2m+10 = \frac{12}{7} \Leftrightarrow m = -\frac{29}{7}$$

2. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2+2x-3} & \text{khi } x > 1 \\ x+m & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có $f(1) = 1+m$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+3)(\sqrt{2x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{(x+3)(\sqrt{2x-1}+1)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+m) = 1+m$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 1+m = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}$$

Vậy $m = -\frac{3}{4}$.

3. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-7x+6}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ m + \frac{1-x}{x+2} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có $f(2) = m - \frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(m + \frac{1-x}{x+2} \right) = m - \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2x^2 - 7x + 6|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|(x-2)(2x-3)|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(2x-3)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x+3) = -1\end{aligned}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -3$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow m - \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}$$

Vậy $m = -\frac{3}{4}$.

4. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{3x-3+|x-1|\sqrt{5x^2+4}}{x^2-2x+1} & \text{khi } x < 1 \\ m^2 + \frac{1}{3}x - 3m & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có $f(1) = m^2 + \frac{1}{3} - 3m$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(m^2 + \frac{1}{3}x - 3m \right) = m^2 + \frac{1}{3} - 3m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-3+|x-1|\sqrt{5x^2+4}}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(3-\sqrt{5x^2+4})}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(3-\sqrt{5x^2+4})}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3-\sqrt{5x^2+4}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-5(x-1)(x+1)}{(x-1)(3+\sqrt{5x^2+4})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-5(x+1)}{3+\sqrt{5x^2+4}} = -\frac{5}{3}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m^2 + \frac{1}{3} - 3m = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy $m = 1$ hoặc $m = 2$.

5. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{7-3x}-4}{2-\sqrt{1-x}} & \text{khi } x > -3 \\ m^2 - 2mx - \frac{3}{2} & \text{khi } x \leq -3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -3$.

Ta có $f(-3) = m^2 + 6m - \frac{3}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \left(m^2 - 2mx - \frac{3}{2} \right) = m^2 + 6m - \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{\sqrt{7-3x}-4}{2-\sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{-3(x+3)(2+\sqrt{1-x})}{(x+3)(\sqrt{7-3x}+4)} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{-3(2+\sqrt{1-x})}{\sqrt{7-3x}+4} = -\frac{3}{2}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -3$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = f(-3) \Leftrightarrow m^2 + 6m - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow m^2 + 6m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -6 \end{cases}$$

Vậy $m = 0$ hoặc $m = -6$.

6. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{5-\sqrt{x^2+16}} & \text{khi } x > 3 \\ \frac{m}{3}(x+m+1) & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

Ta có $f(3) = \frac{m}{3}(4+m)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{m}{3}(x+m+1) = \frac{m}{3}(4+m).$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3-x}{5-\sqrt{x^2+16}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(3-x)(5+\sqrt{x^2+16})}{(3-x)(3+x)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5+\sqrt{x^2+16}}{3+x} = \frac{5}{3}.$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 3$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3) \Leftrightarrow \frac{m}{3}(4+m) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -5 \end{cases}$$

Vậy $m = -5$ hoặc $m = 1$.

7. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{3(x^2-4)}{\sqrt{x+2}-x} & \text{khi } x > 2 \\ \sqrt{m+2}+m-10x & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có $f(2) = \sqrt{m+2} + m - 20$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\sqrt{m+2} + m - 10x) = \sqrt{m+2} + m - 20.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x^2-4)}{\sqrt{x+2}-x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+x)}{-(x-2)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x+2)(\sqrt{x+2}+x)}{-(x+1)} = -16. \end{aligned}$$

Hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \sqrt{m+2} = 4-m \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m \geq 0 \\ m+2 = (4-m)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m^2 - 9m + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m = 2 \Leftrightarrow m = 2. \\ m = 7 \end{cases}$$

Vậy $m = 2$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- Bài 1.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 27}{2x^2 + 5x - 3} & \text{khi } x \neq -3 \\ \frac{4+x}{5} & \text{khi } x = -3 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = -3$. **ĐS:** K liên tục.
- Bài 2.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{-2x^2 + 8}{\sqrt{1-4x} - 3} & \text{khi } x > -2 \\ 5x - 2 & \text{khi } x \leq -2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = -2$. **ĐS:** Liên tục.
- Bài 3.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2} & \text{khi } x > 3 \\ 2x + 12 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 3$. **ĐS:** Không liên tục.
- Bài 4.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - \sqrt{7x} - 10} & \text{khi } x \neq 2 \\ -\frac{8x}{3} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$. **ĐS:** Liên tục.
- Bài 5.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-5)^2 + 3 & \text{khi } x \leq 5 \\ \frac{x-5}{\sqrt{2x-1} - 3} & \text{khi } x > 5 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 5$. **ĐS:** Liên tục.
- Bài 6.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ \frac{x^2 + 5}{x - 1} & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 3$. **ĐS:** Liên tục.
- Bài 7.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x+5} - 5}{x - 5} & \text{khi } x > 5 \\ \frac{2x}{25} & \text{khi } x \leq 5 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 5$. **ĐS:** Liên tục.
- Bài 8.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1} - \sqrt{5-x}}{-2x^3 + 3x^2 - x} & \text{khi } x > 1 \\ -2x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$. **ĐS:** Liên tục.
- Bài 9.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{2-x} - 4 & \text{khi } x < 2 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x+2} - 2} & \text{khi } x > 2 \\ -4 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$. **ĐS:** Liên tục.

- Bài 10.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x+8} - 3} & \text{khi } x > 1 \\ x\sqrt{1-x} - 6 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$. **ĐS:** Liên tục.
- Bài 11.** Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + x - 3}{x^3 - 1} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{(m^2 - 1)x^2 + 4}{x + 2} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$. **ĐS:** $m = \pm 2$.
- Bài 12.** Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3} & \text{khi } x \neq -3 \\ mx + 3 & \text{khi } x = -3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -3$. **ĐS:** $m = \frac{10}{3}$.
- Bài 13.** Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{2x^2 - 4x - 6} & \text{khi } x > 3 \\ mx + 8 & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$. **ĐS:** $m = -\frac{37}{24}$.
- Bài 14.** Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ x + 2m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$. **ĐS:** $m = 2$.
- Bài 15.** Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x - 5} & \text{khi } x > 5 \\ (x-5)^2 + m^2 & \text{khi } x \leq 5 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = 5$. **ĐS:** $m = \frac{\sqrt{15}}{3}$.

2_DẠNG 2. XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TRÊN TXĐ

Phương pháp giải:

Hàm số liên tục tại điểm $x = x_0$ khi $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ hoặc $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

Đề cho	$x = x_0$	$x \neq x_0$	$x < x_0$	$x > x_0$
Cần tính	$f(x_0)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

● VÍ DỤ

- Ví dụ 1.** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + x + 3}{x^3 + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \frac{7}{3} & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.
- ĐS:** Liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

+ Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

+ Xét $x \neq -1$ thì $f(x) = \frac{2x^3 + x + 3}{x^3 + 1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ mà nó xác định.

+ Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = -1$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x + 3}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x^2 - 2x + 3)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 2x + 3}{x^2 - x + 1} = \frac{7}{3}.$$

$$f(-1) = \frac{7}{3}.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$ nên hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = -1$.

+ Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ -\sqrt{5 - x} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

ĐS: Liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

+ Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

+ Với mọi $x_0 \in (1; +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = f(x_0)$. Suy ra hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(1; +\infty)$.

+ Với mọi $x_0 \in (-\infty; 1)$, ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (-\sqrt{5 - x}) = -\sqrt{5 - x_0} = f(x_0)$. Suy ra hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(-\infty; 1)$.

+ Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 1$

$$f(1) = -\sqrt{5 - 1} = 2.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-\sqrt{5 - x}) = -2.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-3) = -2.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ nên hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}} & \text{khi } x > 2 \\ (2x-3)^2 + a & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. **ĐS:** $a = -11$.

Lời giải

Với $\forall x \in (-\infty; 2)$ ta có:

$$- f(x_0) = \frac{x_0^2 + x_0 - 6}{\sqrt{x_0 + 2} - \sqrt{3x_0 - 2}}.$$

$$- \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [(2x - 3)^2 + a] = (2x_0 - 3)^2 + a.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$.

Với $\forall x \in (2; +\infty)$ ta có

$$- f(x_0) = (2x_0 - 3)^2 + a.$$

$$- \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [(2x - 3)^2 + a] = (2x_0 - 3)^2 + a.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ nên hàm số liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lại có:

$$- f(2) = 1 + a.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{3x - 2}} = -10.$$

$$- \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [(2x - 3)^2 + a] = 1 + a.$$

Khi đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì sẽ liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow -10 = 1 + a.$$

Suy ra $a = -11$ là giá trị cần tìm.

❶ BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 3}{x + 3} & \text{khi } x \neq -3 \\ 19 & \text{khi } x = -3 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

- Xét $x \neq -3$ thì $f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 3}{x + 3}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$ mà nó xác định.

- Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = -3$

$$\lim_{x \rightarrow (-3)} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{(x+3)(2x^2+1)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow (-3)} (2x^2+1) = 19.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow (-3)} f(x) = f(-3)$ nên hàm số đã cho liên tục tại $x = -3$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 16} & \text{khi } x < 2 \\ 2 - x & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

- Với mọi $x_0 \in (-\infty; 2)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 16} = f(x_0)$.

Suy ra hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(-\infty; 2)$.

- Với mọi $x_0 \in (2; +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (2 - x) = 2 - x_0 = f(x_0)$.

Suy ra hàm số đã cho liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$.

- Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 2$

$\square f(2) = 0$.

$\square \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^3 - 16} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{2(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{2(x^2 + 2x + 4)} = -\frac{1}{24}$

$\square \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2 - x) = 0$.

Suy ra hàm số không liên tục tại $x = 2$.

Bài 3. Tìm a để $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + x^2 + x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ a^3 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có với $x \neq -1$ thì $f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + x^2 + x + 1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên nó liên tục trên từng khoảng mà nó xác định. Lại có

- $f(-1) = a^3$.

- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^3 + x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x-3}{x^2+1} = -\frac{5}{2}$.

Khi đó hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì sẽ liên tục tại $x = -1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow a^3 = -\frac{5}{2}.$$

Suy ra $a = \sqrt[3]{-\frac{5}{2}}$ là giá trị cần tìm.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{khi } x = 1 \\ \frac{\sqrt{1-x}+2}{x+2} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 2. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+5x}{\sqrt{x-1}-1} & \text{khi } x > 0 \\ m+2 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 3. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3+x^2+x+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ \cos m & \text{khi } x = -1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 4. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x-2}+2x-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m-2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài 5. Tìm m để $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2x^2+3m+1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

3_DẠNG 3. CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Phương pháp giải:

- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên D , ta chứng minh hàm số $f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a, b \in D$ sao cho $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có k nghiệm trên D , ta chứng minh hàm số $f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i; a_{i+1})$ với $i=1; 2; \dots; k$ nằm trong D sao cho $f(a_i) \cdot f(a_{i+1}) < 0$.

Chú ý: Hàm số đã thức liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số phân thức và lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Khi hàm số đã liên tục trên $\mathbb{R}$ rồi, sẽ liên tục trên mỗi khoảng $(a_i; a_{i+1})$ mà ta cần tìm.

❶ VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh phương trình $4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-1; 2)$.

Lời giải

- Đặt $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 1$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra liên tục trên $[-1; 2]$.

- Ta có $\begin{cases} f(-1) = -11 \\ f(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(2) = -11 < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (-1; 2): f(x_0) = 0,$

Nghĩa là phương trình $f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 2)$.

Ví dụ 2. Chứng minh phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^3 - 3x + 1$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số liên tục trên các đoạn $[-2; 0]; [0; 1]; [1; 2]$.

- Ta có $\begin{cases} f(-2) = -1 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \cdot f(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-2; 0)$. (1)

- Ta có $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$. (2)

- Ta có $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(1) \cdot f(2) = -3 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 2)$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra phương trình có ít nhất ba nghiệm phân biệt thuộc các khoảng $(-2; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$. Mà $f(x)$ là đa thức bậc ba nên phương trình $f(x) = 0$ có tối đa ba nghiệm. Suy ra phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt.

Chú ý: Với sự hỗ trợ của chức năng mode 7 trong casio, ta dễ dàng tìm được các khoảng $(-2; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$ như trên. Công việc còn lại là trình bày sao cho đúng ngôn ngữ.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .

Lời giải

Đặt $f(x) = x^3 + x + 1$, vì $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 0]$.

Ta có $\begin{cases} f(-1) = -1 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 .

Ví dụ 4. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 5x^2 - 2 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải

Đặt $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2$, $f(x)$ là hàm đa thức trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 0]$; $[0; 1]$

- Ta có $\begin{cases} f(-1) = 2 \\ f(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$. (1)

- Tương tự $\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(1) = 4 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = -8 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Ví dụ 5. Chứng minh rằng phương trình $4x^4 + 2x^3 - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Lời giải

Đặt $f(x) = 4x^4 + 2x^3 - x - 3$, $f(x)$ là hàm đa thức trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 0]$, $[0; 1]$.

- Ta có $\begin{cases} f(-1) = 4 \\ f(0) = -3 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) = -12 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$. (1)

- Tương tự $\begin{cases} f(0) = -3 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow f(0) \cdot f(1) = -6 < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Ví dụ 6. Chứng minh rằng phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .

Lời giải

Đặt $f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1$ và $f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 0]$.

Ta có $\begin{cases} f(-1) = m^2 + 1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (-1; 0): f(x_0) = 0$.

Do đó phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm với mọi m (đpcm).

Chú ý: Đối với bài toán chứa tham số m , ta chọn khoảng $(a; b)$ sao cho tại vị trí a và b triệt tiêu đi m hoặc là biểu thức luôn dương hoặc luôn âm dựa vào kinh nghiệm người giải toán. Một số trường hợp sử dụng dấu tam thức bậc hai để đánh giá, tức

$$\square ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}.$$

$$\square ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 7. Chứng minh rằng phương trình $x^4 + mx^2 - 2mx - 1 = 0$ có nghiệm với mọi m .

Lời giải

Đặt $f(x) = x^4 + mx^2 - 2mx - 1$ và $f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(2) = 15 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(2) = -15 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .

Ví dụ 8. Chứng minh rằng phương trình $m(x-2)(x-3) + 2m - 5 = 0$ có nghiệm với mọi m .

Lời giải

Đặt $f(x) = m(x-2)(x-3) + 2m - 5$ và $f(x)$ là hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên đoạn $[2; 3]$.

Ta có $\begin{cases} f(2) = -1 \\ f(3) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(2) \cdot f(3) = -1 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm với mọi m .

Ví dụ 9. Chứng minh phương trình $(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi số thực a, b, c .

Lời giải

Đặt $f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$. Vì $f(x)$ là hàm đa thức nên sẽ liên tục trên $\mathbb{R}$. Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a \leq b \leq c$.

- Nếu $a = b$ hoặc $b = c$ thì $f(b) = (b-a)(b-c)$, suy ra phương trình có nghiệm $x = b$.

- Nếu $a < b < c$ thì $\begin{cases} f(a) = (a-b)(a-c) > 0 \\ f(b) = (b-a)(b-c) < 0 \end{cases} \Rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$. Do đó phương trình có ít

nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

Suy ra phương trình có ít nhất một nghiệm (đpcm).

Ví dụ 10. Cho ba số a, b, c thỏa mãn hệ thức $2a + 3b + 6c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Lời giải

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$ và $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{- Ta có } f(0) = c \text{ và có } \begin{cases} 2a + 3b + 6c = 0 \\ f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}a + \frac{2}{3}b + c = \frac{2}{3}(2a + 3b + 6c) - \frac{c}{3} = -\frac{c}{3} \end{cases}$$

- Nếu $c = 0$ thì $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, suy ra phương trình có nghiệm $x = \frac{2}{3} \in (0; 1)$.

- Nếu $c \neq 0$ thì ta có $f(0) \cdot f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{c^2}{3} < 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm $x = a \in \left(0; \frac{2}{3}\right) \subset (0; 1)$.

Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Ví dụ 11. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$. Chứng minh rằng phương trình có nghiệm $x_0 \in (3; 4)$. Không tính $f(\sqrt[5]{36})$ và $f(1 + \sqrt[5]{36})$, chứng minh rằng $x_0 > 1 + \sqrt[5]{36}$.

Lời giải

Ta có:

$$\left. \begin{aligned} f(3) &= 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 1 = -1 \\ f(4) &= 4^3 - 3 \cdot 4^2 - 1 = 15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(3) \cdot f(4) = -15 < 0.$$

Suy ra phương trình có nghiệm $x_0 \in (3; 4)$.

Ta có $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1 = (x-1)^3 - 3(x-1) - 3$.

Vì x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ nên ta có $f(x_0) = 0$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1)^3 - 3(x_0 - 1) - 3 = 0.$$

Đặt $\alpha = x_0 - 1$ và $x_0 \in (3; 4) \Rightarrow \alpha \in (2; 3)$. Khi đó, ta có

$$\alpha^3 - 3\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 = 3\alpha + 3 \geq 2\sqrt{9\alpha} = 6\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \alpha^6 \geq 36\alpha \Leftrightarrow \alpha^5 \geq 36 \Leftrightarrow \alpha \geq \sqrt[5]{36}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $3\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1 \notin (2; 3)$.

Do đó, dấu “=” không xảy ra, tức là ta luôn có $\alpha > \sqrt[5]{36} \Rightarrow x_0 - 1 > \sqrt[5]{36} \Leftrightarrow x_0 > 1 + \sqrt[5]{36}$.

Suy ra điều phải chứng minh.

● BÀI TẬP ÁP DỤNG

- Bài 1.** Chứng minh phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.
- Bài 2.** Chứng minh phương trình $(1 - m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.
- Bài 3.** Chứng minh phương trình $(m^2 - m + 3)x^{2n} - 2x - 4 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm với mọi m .
- Bài 4.** Chứng minh phương trình $(4m + 1)x^3 - (m + 1)x + m = 0$ có nghiệm với mọi m .
- Bài 5.** Chứng minh phương trình $(m^3 - 1)(x^{2001} - 1)(x + 2)^{2002} + 2x + 3 = 0$ có nghiệm với mọi m .
- Bài 6.** Chứng minh phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

- Bài 7.** Chứng minh rằng phương trình $m(x-1)(x^3-4x)+x^3-3x+1=0$ có ít nhất ba nghiệm.
- Bài 8.** Cho α và β thỏa mãn $0 < \alpha < \beta$. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm $\sin^{10} x - x = \frac{\alpha \sin^2 \alpha + \beta \sin^{10} \beta - \alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta}$.
- Bài 9.** Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = 0$, ($k > n > m > 0$) và $km \leq n^2$ thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

❶ LỜI GIẢI

- Bài 1.** Đặt $f(x) = (m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Có:

$$f(-3) = (m^2 + 1)(-3)^3 - 2m^2(-3)^2 - 4(-3) + m^2 + 1 = -44m^2 - 14 < 0;$$

$$f(0) = (m^2 + 1) \cdot 0^3 - 2m^2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + m^2 + 1 = m^2 + 1 > 0;$$

$$f(1) = (m^2 + 1) \cdot 1^3 - 2m^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + m^2 + 1 = -2 < 0;$$

$$f(2) = (m^2 + 1) \cdot 2^3 - 2m^2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + m^2 + 1 = m^2 + 1 > 0.$$

Ta thấy $f(-3) \cdot f(0) < 0$; $f(0) \cdot f(1) < 0$; $f(1) \cdot f(2) < 0$ nên phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-3;0)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0;1)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(1;2)$.

Vậy phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt.

- Bài 2.** Đặt $f(x) = (1-m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m$, $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp 1: $m = 0$, ta có phương trình $x^5 - 16x = 0$ có nghiệm $x \in \{0; \pm 2\}$.

Vậy với $m = 0$ thì phương trình $(1-m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

Trường hợp 2: $m \neq 0$, ta có:

$$f(-2) = (1-m)(-2)^5 + 9m(-2)^2 - 16(-2) - m = 67m;$$

$$f(0) = (1-m) \cdot 0^5 + 9m \cdot 0^2 - 16 \cdot 0 - m = -m;$$

$$f(2) = (1-m) \cdot 2^5 + 9m \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 - m = -3m.$$

Ta thấy $f(-2) \cdot f(0) = -67m^2 < 0$, $f(0) \cdot f(2) = -3m^2 < 0$ với mọi $m \neq 0$.

Suy ra phương trình $(1-m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-2;0)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0;2)$.

Vậy phương trình $(1-m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m = 0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

- Bài 3.** Đặt $f(x) = (m^2 - m + 3)x^{2n} - 2x - 4$, $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Xét } f(-2) = (m^2 - m + 3)(-2)^{2n} - 2(-2) - 4 = (m^2 - m + 3) \cdot 4^n > 0.$$

$$\text{Xét } f(0) = (m^2 - m + 3) \cdot 0^{2n} - 2 \cdot 0 - 4 = -4 < 0.$$

Ta thấy $f(-2) \cdot f(0) < 0$ với mọi $m \neq 0$.

Suy ra phương trình $(m^2 - m + 3)x^{2n} - 2x - 4 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$.

Vậy phương trình $(m^2 - m + 3)x^{2n} - 2x - 4 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm.

Bài 4. Trường hợp 1: $m = 0$, ta có phương trình $x^3 - x = 0$ luôn có nghiệm $x = 0$; $x = \pm 1$.

Trường hợp 2: $m \neq 0$.

Đặt $f(x) = (4m+1)x^3 - (m+1)x + m$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Có:

$$f(-1) = (4m+1)(-1)^3 - (m+1)(-1) + m = -2m;$$

$$f(0) = (4m+1).0^3 - (m+1).0 + m = m.$$

Ta thấy $f(-1).f(0) = -2m^2 < 0$ nên phương trình $(4m+1)x^3 - (m+1)x + m = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-1; 0)$.

Vậy phương trình $(4m+1)x^3 - (m+1)x + m = 0$ có nghiệm với mọi m .

Bài 5. Đặt $f(x) = (m^3 - 1)(x^{2001} - 1)(x + 2)^{2002} + 2x + 3$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Xét } f(-2) = (m^3 - 1)[(-2)^{2001} - 1][(-2) + 2]^{2002} + 2(-2) + 3 = -1.$$

$$\text{Xét } f(1) = (m^3 - 1)(1^{2001} - 1)(1 + 2)^{2002} + 2.1 + 3 = 5.$$

Ta thấy $f(-2).f(1) = -1.5 = -5 < 0$ với mọi m .

Suy ra phương trình $(m^3 - 1)(x^{2001} - 1)(x + 2)^{2002} + 2x + 3 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-2; 1)$.

Vậy phương trình $(m^3 - 1)(x^{2001} - 1)(x + 2)^{2002} + 2x + 3 = 0$ có nghiệm với mọi m .

Bài 6. Đặt $f(x) = (m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Có:

$$f(-3) = (m^2 + 1)(-3)^3 - 2m^2(-3)^2 - 4(-3) + m^2 + 1 = -44m^2 - 14 < 0;$$

$$f(0) = (m^2 + 1).0^3 - 2m^2.0^2 - 4.0 + m^2 + 1 = m^2 + 1 > 0;$$

$$f(1) = (m^2 + 1).1^3 - 2m^2.1^2 - 4.1 + m^2 + 1 = -2 < 0;$$

$$f(2) = (m^2 + 1).2^3 - 2m^2.2^2 - 4.2 + m^2 + 1 = m^2 + 1 > 0.$$

Ta thấy $f(-3).f(0) < 0$, $f(0).f(1) < 0$, $f(1).f(2) < 0$. Suy ra phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-3; 0)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0; 1)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(1; 2)$.

Vậy phương trình $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Bài 7. Đặt $f(x) = m(x-1)(x^3 - 4x) + x^3 - 3x + 1$, $f(x)$ liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Có:

$$f(-2) = m(-2-1)[(-2)^3 - 4(-2)] + (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -1;$$

$$f(0) = m(0-1)(0^3 - 4.0) + 0^3 - 3.0 + 1 = 1;$$

$$f(1) = m(1-1)(1^3 - 4.1) + 1^3 - 3.1 + 1 = -1;$$

$$f(2) = m(2-1)(2^3 - 4.2) + 2^3 - 3.2 + 1 = 1.$$

Ta thấy $f(-2).f(0) < 0$, $f(0).f(1) < 0$, $f(1).f(2) < 0$ nên phương trình $m(x-1)(x^3 - 4x) + x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(-2; 0)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0; 1)$, ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(1; 2)$.

Vậy phương trình $m(x-1)(x^3 - 4x) + x^3 - 3x + 1 = 0$ có ít nhất ba nghiệm.

Bài 8. Đặt $f(x) = \sin^{10} x - x - \frac{\alpha \sin^2 \alpha + \beta \sin^{10} \beta - \alpha^2 - \beta^2}{\alpha + \beta}$, hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại $m < 0$ sao cho $f(m) > 0$.

Mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho $f(M) < 0$.

Do đó, hàm số $f(x)$ liên tục trên $[m; M]$ và $f(m).f(M) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.

Bài 9. Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1).

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$ thì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = c$; $f\left(\frac{n}{k}\right) = a \cdot \frac{n^2}{k^2} + b \cdot \frac{n}{k} + c$.

Suy ra $f(0).f\left(\frac{n}{k}\right) = c \left[\frac{n^2}{k} \left(\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} \right) + c \left(1 - \frac{n^2}{km} \right) \right] = c^2 \left(1 - \frac{n^2}{km} \right)$ (do $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = 0$).

Vì $c^2 \geq 0$; $n^2 \geq km > 0 \Rightarrow \frac{n^2}{km} \geq 1$, do đó $f(0).f\left(\frac{n}{k}\right) = c^2 \left(1 - \frac{n^2}{km} \right) \leq 0$.

- Với $c = 0$ phương trình đã cho trở thành $ax^2 + bx = 0$. Suy ra $x = 0$ hoặc $ax + b = 0$ (2).

+ Nếu $a = 0$ thì từ $c = a = 0$ và điều kiện $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = 0$ suy ra $b = 0$. Khi đó phương trình (2) có nghiệm là $\forall x \in \mathbb{R}$, suy ra phương trình (1) có nghiệm $x \in (0; 1)$.

+ Nếu $a \neq 0$ thì $b \neq 0$ (vì nếu $b = 0$, $c = 0$ thì từ điều kiện $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = 0$ suy ra $a = 0$), suy ra phương trình (2) có nghiệm $x = -\frac{b}{a}$. Khi đó từ điều kiện $\frac{a}{k} + \frac{b}{n} + \frac{c}{m} = 0$; $k > n > m > 0$ và $c = 0$ suy ra $x = -\frac{b}{a} = \frac{n}{k} \in (0; 1)$. Do đó phương trình (1) có nghiệm $x \in (0; 1)$.

- Với $1 - \frac{n^2}{km} = 0 \Rightarrow f\left(\frac{n}{k}\right) = 0 \Rightarrow \frac{n}{k}$ là nghiệm thuộc $(0; 1)$.

- Với $c \neq 0$ và $1 - \frac{n^2}{km} \neq 0 \Rightarrow f(0).f\left(\frac{n}{k}\right) < 0$ thì $f(x)$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $\left(0; \frac{n}{k}\right)$. Mà

$\left(0; \frac{n}{k}\right) \subset (0; 1)$ (vì $0 < \frac{n}{k} < 1$) nên phương trình (1) có nghiệm $x \in (0; 1)$.

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm $x \in (0; 1)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Chứng minh rằng phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm và ít nhất một nghiệm dương.

ĐS: $(-1; 0); (3; 4)$.

Bài 2. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 4x^2 - 2 = 0$ có ba nghiệm trong khoảng $(-4; 1)$.

ĐS: $\left(-4; -\frac{7}{2}\right); \left(-1; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Bài 3. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 5x^3 + 4x - 1 = 0$ có đúng năm nghiệm.

ĐS: $\left(-2; -\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{2}; -1\right); \left(-1; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; 1\right); (1; 3)$.

