



Ths. Lê Văn Đoàn



ĐỀ CƯƠNG HỌC TẬP

TOÁN 10

TẬP I

WWW.TOANMATH.COM



MỤC LỤC

Trang

PHẦN I – ĐẠI SỐ

CHƯƠNG I – MỆNH ĐỀ & TẬP HỢP	1
A – MỆNH ĐỀ	1
B – TẬP HỢP	6
CHƯƠNG II – HÀM SỐ BẬC NHẤT & BẬC HAI	12
A – ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ	12
Dạng toán 1. Tìm tập xác định của hàm số	13
Dạng toán 2. Tính đơn điệu của hàm số	16
Dạng toán 3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số	18
B – HÀM SỐ BẬC NHẤT	20
C – HÀM SỐ BẬC HAI	25
CHƯƠNG III – PHƯƠNG TRÌNH & HỆ PHƯƠNG TRÌNH	36
A – ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH	36
B – PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT	38
C – PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI	43
Dạng toán 1. Giải và biện luận phương trình bậc hai	43
Dạng toán 2. Dấu của số nghiệm phương trình bậc hai	44
Dạng toán 3. Những bài toán liên quan đến định lí Viét	47
Dạng toán 4. Phương trình bậc cao quy về phương trình bậc hai	52
Dạng toán 5. Phương trình chứa ẩn trong dấu trị tuyệt đối	57
Dạng toán 6. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn	59
D – HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN	73
E – HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN SỐ	80
CHƯƠNG IV – BẤT ĐẲNG THỨC & BẤT PHƯƠNG TRÌNH	106
A – BẤT ĐẲNG THỨC	106
Dạng toán 1. Chứng minh BĐT dựa vào định nghĩa và tính chất	108
Dạng toán 2. Chứng minh BĐT dựa vào BĐT Cauchy	113
Dạng toán 3. Chứng minh BĐT dựa vào BĐT Bunhiacôpxki	122
Dạng toán 4. Chứng minh BĐT dựa vào BĐT Cauchy Schwarz	125
Dạng toán 5. Chứng minh BĐT dựa vào phương pháp tọa độ vectơ	126
Dạng toán 6. Ứng dụng BĐT để giải phương trình	127

PHẦN II – HÌNH HỌC

CHƯƠNG I – VECTƠ & PHÉP TOÁN	141
A – VECTƠ & CÁC PHÉP TOÁN TRÊN VECTƠ	141
Dạng toán 1. Đại cương về vectơ	143

Dạng toán 2. Chứng minh một đẳng thức vectơ -----	147
Dạng toán 3. Xác định điểm thỏa đẳng thức vectơ -----	156
Dạng toán 4. Phân tích vectơ – Chứng minh thẳng hàng – Song song -----	164
Dạng toán 5. Tìm môđun – Quỹ tích điểm – Điểm cố định -----	177
B – HỆ TRỤC TỌA ĐỘ -----	180
Dạng toán 1. Tọa độ vectơ – Biểu diễn vectơ -----	181
Dạng toán 2. Xác định điểm thỏa mãn điều kiện cho trước -----	183
Dạng toán 3. Vectơ cùng phương và ứng dụng -----	185
CHƯƠNG II – TÍCH VÔ HƯỚNG & ỨNG DỤNG -----	190
A – GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG GÓC BẤT KÌ -----	190
B – TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ -----	194
Dạng toán 1. Tích vô hướng – Tính góc – Chứng minh và thiết lập vuông góc -----	195
Dạng toán 2. Chứng minh đẳng thức – Bài toán cực trị -----	201
C – HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC -----	207

PHẦN I

ĐẠI SỐ

Chương 1

MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP



A – MỆNH ĐỀ

① Mệnh đề

- Mệnh đề là một câu khẳng định đúng hoặc một câu khẳng định sai.
- Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.

② Mệnh đề phủ định

Cho mệnh đề P.

- Mệnh đề "không phải P" được gọi là mệnh đề phủ định của P và kí hiệu là $\bar{P}$.
- Nếu P đúng thì $\bar{P}$ sai, nếu P sai thì $\bar{P}$ đúng.

③ Mệnh đề kéo theo

Cho mệnh đề P và Q.

- Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là mệnh đề kéo theo và kí hiệu là: $P \Rightarrow Q$.
- Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.
- ✎ Lưu ý rằng: Các định lí toán học thường có dạng $P \Rightarrow Q$. Khi đó:
 - ✧ P là giả thiết, Q là kết luận.
 - ✧ P là điều kiện đủ để có Q.
 - ✧ Q là điều kiện cần để có P.

④ Mệnh đề đảo

Cho mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là **mệnh đề đảo** của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

⑤ Mệnh đề tương đương

Cho mệnh đề P và Q.

- Mệnh đề "P nếu và chỉ nếu Q" được gọi là mệnh đề tương đương và kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.
- Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.
- ✎ Lưu ý rằng: Nếu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ là 1 định lí thì ta nói P là **điều kiện cần và đủ** để có Q.

⑥ Mệnh đề chứa biến

Mệnh đề chứa biến là một câu khẳng định chứa biến nhận giá trị trong một tập X nào đó mà với mỗi giá trị của biến thuộc X ta được một mệnh đề.

⑦ Kí hiệu $\forall$ và $\exists$

- " $\forall x \in X, P(x)$ ".
- " $\exists x \in X, P(x)$ ".
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " là " $\exists x \in X, \bar{P}(x)$ ".
- Mệnh đề phủ định của mệnh đề " $\exists x \in X, P(x)$ " là " $\forall x \in X, \bar{P}(x)$ ".

⑧ Phép chứng minh phản chứng

Giả sử ta cần chứng minh định lí: $A \Rightarrow B$

- Cách 1. Ta giả thiết A đúng. Dùng suy luận và các kiến thức toán học đã biết chứng minh B đúng.
- Cách 2. (**Chứng minh phản chứng**) Ta giả thiết B sai, từ đó chứng minh A sai. Do A không thể vừa đúng vừa sai nên kết quả là B phải đúng.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Trong các câu dưới đây, câu nào là mệnh đề, câu nào là mệnh đề chứa biến ?

- | | |
|--|-------------------------------------|
| a/ Số 11 là số chẵn. | b/ Bạn có chăm học không ? |
| c/ Huế là một thành phố của Việt Nam. | d/ $2x + 3$ là một số nguyên dương. |
| e/ $2 - \sqrt{5} < 0$. | f/ $4 + x = 3$. |
| g/ Hãy trả lời câu hỏi này !. | h/ Paris là thủ đô nước Ý. |
| i/ Phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ có nghiệm. | k/ 13 là một số nguyên tố. |

Bài 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ? Giải thích ?

- | | |
|---|--|
| a/ Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3. | b/ Nếu $a \geq b$ thì $a^2 \geq b^2$. |
| c/ Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 6. | d/ Số π lớn hơn 2 và nhỏ hơn 4. |
| e/ 2 và 3 là hai số nguyên tố cùng nhau. | f/ 81 là một số chính phương. |
| g/ $5 > 3$ hoặc $5 < 3$. | h/ Số 15 chia hết cho 4 hoặc cho 5. |

Bài 3. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ? Giải thích ?

- a/ Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.
 b/ Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một cạnh bằng nhau.
 c/ Một tam giác là tam giác đều khi và chỉ khi chúng có hai đường trung tuyến bằng nhau và có một góc bằng 60° .
 d/ Một tam giác là tam giác vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng của hai góc còn lại.
 e/ Đường tròn có một tâm đối xứng và một trục đối xứng.
 f/ Hình chữ nhật có hai trục đối xứng.
 g/ Một tứ giác là hình thoi khi và chỉ khi nó có hai đường chéo vuông góc với nhau.
 h/ Một tứ giác nội tiếp được đường tròn khi và chỉ khi nó có hai góc vuông.

Bài 4. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ? Giải thích ? Phát biểu các mệnh đề đó thành lời ?

- | | |
|--|---|
| a/ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$. | b/ $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$. |
| c/ $\exists x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 = 0$. | d/ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$. |
| e/ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x = 1 > 0$. | f/ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$. |
| g/ $\forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$. | h/ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 5 \Rightarrow x < \sqrt{5}$. |
| i/ $\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \leq 1$. | k/ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 5$ là hợp số. |
| l/ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3. | m/ $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)$ là số lẻ. |
| n/ $\forall n \in \mathbb{N}^*, n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 6. | o/ $\forall n \in \mathbb{N}^*, n^3 + 11n$ chia hết cho 6. |

Bài 5. Điền vào chỗ trống từ nối "và" hay "hoặc" để được mệnh đề đúng ?

- a/ $\pi < 4$ $\pi > 5$.
 b/ $ab = 0$ khi $a = 0$ $b = 0$.
 c/ $ab \neq 0$ khi $a \neq 0$ $b \neq 0$.
 d/ $ab > 0$ khi $a > 0$ $b > 0$ $a < 0$ $b < 0$.
 e/ Một số chia hết cho 6 khi và chỉ khi nó chia hết cho 2 cho 3.
 f/ Một số chia hết cho 5 khi và chỉ khi chữ số tận cùng của nó bằng 0 bằng 5.

Bài 6. Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$, với $x \in \mathbb{R}$. Tìm x để $P(x)$ là mệnh đề đúng ?

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a/ $P(x): "x^2 - 5x + 4 = 0"$. | b/ $P(x): "x^2 - 5x + 6 = 0"$. |
|---------------------------------|---------------------------------|

c/ $P(x): "x^2 - 3x > 0"$.

d/ $P(x): "\sqrt{x} \geq x"$.

e/ $P(x): "2x + 3 \leq 7"$.

f/ $P(x): "x^2 + x + 1 > 0"$.

Bài 7. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- a/ Số tự nhiên n chia hết cho 2 và cho 3.
- b/ Số tự nhiên n có chữ số tận cùng bằng 0 hoặc bằng 5.
- c/ Tứ giác T có hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau.
- d/ Số tự nhiên n có ước số bằng 1 và bằng n .

Bài 8. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

- a/ $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$
- b/ $\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$.
- c/ $\exists x \in \mathbb{Q} : 4x^2 - 1 = 0$.
- d/ $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 7 > 0$.
- e/ $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 2 < 0$.
- f/ $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 3$.
- g/ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3.
- h/ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 2n + 5$ là số nguyên tố.
- i/ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + n$ chia hết cho 2.
- k/ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 1$ là số lẻ.

Bài 9. Phát biểu các mệnh đề sau, bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện cần", "điều kiện đủ":

- a/ Nếu một số tự nhiên có chữ số tận cùng là chữ số 5 thì nó chia hết cho 5.
- b/ Nếu $a + b > 0$ thì một trong hai số a và b phải dương.
- c/ Nếu một số tự nhiên chia hết cho 6 thì nó chia hết cho 3.
- d/ Nếu $a = b$ thì $a^2 = b^2$.
- e/ Nếu a và b cùng chia hết cho c thì $a + b$ chia hết cho c .

Bài 10. Phát biểu các mệnh đề sau, bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện cần", "điều kiện đủ":

- a/ Trong mặt phẳng, nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng ấy song song với nhau.
- b/ Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.
- c/ Nếu tứ giác T là một hình thoi thì nó có hai đường chéo vuông góc với nhau.
- d/ Nếu tứ giác H là một hình chữ nhật thì nó có ba góc vuông.
- e/ Nếu tam giác K đều thì nó có hai góc bằng nhau.

Bài 11. Phát biểu các mệnh đề sau, bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện cần và đủ":

- a/ Một tam giác là vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng hai góc còn lại.
- b/ Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi nó có ba góc vuông.
- c/ Một tứ giác là nội tiếp được trong đường tròn khi và chỉ khi nó có hai góc đối bù nhau.
- d/ Một số chia hết cho 6 khi và chỉ khi nó chia hết cho 2 và cho 3.
- e/ Số tự nhiên n là số lẻ khi và chỉ khi n^2 là số lẻ.

Bài 12. Chứng minh các mệnh đề sau bằng phương pháp phản chứng:

- a/ Nếu $a + b < 2$ thì một trong hai số a và b nhỏ hơn 1.
- b/ Một tam giác không phải là tam giác đều thì nó có ít nhất một góc nhỏ hơn 60° .
- c/ Nếu $x \neq 1$ và $y \neq 1$ thì $x + y + xy \neq 1$.
- d/ Nếu bình phương của một số tự nhiên n là một số chẵn thì n cũng là một số chẵn.
- e/ Nếu tích của hai số tự nhiên là một số lẻ thì tổng của chúng là một số chẵn.
- f/ Nếu 1 tứ giác có tổng các góc đối diện bằng 2 góc vuông thì tứ giác nội tiếp được đường tròn.
- g/ Nếu $x^2 + y^2 = 0$ thì $x = 0$ và $y = 0$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 13. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề, câu nào không là mệnh đề ? Nếu là mệnh đề thì nó là mệnh đề đúng hay sai ?

- a/ Các em có vui không ?
- b/ Cầm học sinh nói chuyện trong giờ học !
- c/ Phương trình $x^2 + x = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.
- d/ $2^5 - 1$ là một số nguyên tố.
- e/ $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.
- f/ Thành phố Hồ Chí Minh là thủ đô của nước Việt Nam.
- g/ Một số tự nhiên chia hết cho 2 và 4 thì số đó chia hết cho 8.
- h/ Nếu $2^{2003} - 1$ là số nguyên tố thì 16 là số chính phương.

Bài 14. Viết mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét xem mệnh đề phủ định đó đúng hay sai ?

- a/ $\pi < 3,15$.
- b/ $|-125| \leq 0$.
- c/ 3 là số nguyên tố.
- d/ 7 không chia hết cho 5.
- e/ π là số hữu tỉ.
- f/ 1794 chia hết cho 3.
- g/ $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ.
- h/ Tổng 2 cạnh 1 Δ lớn hơn cạnh thứ 3.

Bài 15. Phát biểu thành lời các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của các mệnh đề đó:

- a/ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$.
- b/ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = n$.
- c/ $\exists n \in \mathbb{N}, n \leq 2n$.
- d/ $\exists x \in \mathbb{R}, x < 0$.
- e/ $\forall x \in \mathbb{N}, 1, 2 < |x| < 2, 1$.
- f/ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 3.

Bài 16. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai ? Giải thích ? Viết mệnh đề phủ định của chúng ?

- a/ $\exists n \in \mathbb{Q}, n^2 = 2$.
- b/ $\forall x \in \mathbb{R}, x > x^2$.
- c/ $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$.
- d/ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq n$.
- e/ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 \geq n$.
- f/ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$.
- g/ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$.
- h/ $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3.
- i/ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3.
- j/ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 4.

Bài 17. Cho mệnh đề chứa biến $P(x): "x^2 = x"$. Xác định tính đúng – sai của các mệnh đề sau:

$P(0); P(-1); P(1); "\exists x \in \mathbb{R}, P(x)"; "\forall x \in \mathbb{R}, \overline{P(x)}"$.

Bài 18. Cho mệnh đề chứa biến $P(x): "x^3 - 2x = 0"$. Xác định tính đúng – sai của các mệnh đề sau:

$P(0); P(2); P(\sqrt{2}); "\exists x \in \mathbb{R}, P(x)"; "\forall x \in \mathbb{R}, \overline{P(x)}"$.

Bài 19. Các mệnh đề sau đúng hay sai ? Nếu sai hãy sửa lại để có một mệnh đề đúng ?

- a/ $x = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1$.
- b/ 2001 là số nguyên tố.
- c/ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$.
- d/ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 2xy$.
- e/ $\exists x \in \mathbb{N}, x^2 \leq x$.
- f/ $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + n + 1 : 7$
- b/ ABCD là hình vuông $\Rightarrow$ ABCD là hình bình hành.
- c/ ABCD là hình thoi $\Rightarrow$ ABCD là hình chữ nhật.
- d/ Tứ giác MNPQ là hình vuông $\Leftrightarrow$ Hai đường chéo MP và NQ bằng nhau.
- e/ Hai tam giác bằng nhau $\Leftrightarrow$ Chúng có diện tích bằng nhau.

Bài 20. Dùng bảng chân trị hãy chứng minh:

$$a/ (A \Rightarrow B) = (\bar{A} \vee B).$$

$$b/ [(A \Rightarrow B) \wedge \bar{A}] = \bar{A}.$$

$$c/ (A \Rightarrow B) = (\bar{A} \vee B) = (\bar{B} \Rightarrow \bar{A}).$$

$$d/ [(A \Rightarrow B) \Rightarrow B] = (A \vee B).$$

$$e/ (\overline{A \vee B}) = (\bar{A} \wedge \bar{B}).$$

$$f/ (\overline{A \wedge B}) = (\bar{A} \vee \bar{B}).$$

$$i/ [A \Rightarrow (B \wedge C)] = [(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)].$$

$$j/ [(\bar{A} \wedge \bar{B}) \Rightarrow C] = (A \vee B \vee C).$$

Bài 21. Với n là số tự nhiên lẻ, xét định lí: "Nếu n là số tự nhiên lẻ thì $n^2 - 1$ chia hết cho 8". Định lí trên được viết dưới dạng $P(n) \Rightarrow Q(n)$.

a/ Hãy xác định mệnh đề $P(n)$ và $Q(n)$.

b/ Phát biểu định lí trên bằng cách sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ" và "điều kiện cần".

Bài 22. Cho định lí: "Nếu n là số tự nhiên thì $n^3 - n$ chia hết cho 3". Định lí trên được viết dưới dạng $P(n) \Rightarrow Q(n)$.

a/ Hãy xác định mệnh đề $P(n)$ và $Q(n)$.

b/ Phát biểu định lí trên bằng cách sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ" và "điều kiện cần".

c/ Chứng minh định lí trên.

Bài 23. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ" để phát biểu các định lí sau:

a/ Nếu một tứ giác là hình bình hành thì nó có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

b/ Nếu một hình thoi có hai đường chéo bằng nhau thì nó là hình vuông.

c/ Nếu $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ có $b^2 - 4ac > 0$ thì phương trình đó có 2 nghiệm phân biệt.

d/ Nếu $x > 2$ thì $x^2 > 4$.

Bài 24. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu các định lí sau:

a/ Nếu $x > 5$ thì $x^2 > 25$.

b/ Nếu hai góc đối đỉnh thì chúng bằng nhau.

c/ Nếu hai tam giác bằng nhau thì diện tích của chúng bằng nhau.

d/ Nếu a là số tự nhiên và a chia hết cho 6 thì a chia hết cho 3.

Bài 25. Cho hai mệnh đề, mệnh đề A: " a và b là hai số tự nhiên lẻ" và mệnh đề B: " $a + b$ là số chẵn".

a/ Phát biểu mệnh đề $A \Rightarrow B$. Mệnh đề này đúng hay sai ?

b/ Phát biểu mệnh đề $B \Rightarrow A$. Mệnh đề này đúng hay sai ?

Bài 26. Chứng minh các mệnh đề sau bằng phương pháp phản chứng.

a/ Nếu tổng của 99 số bằng 100 thì có ít nhất một số lớn hơn 1.

b/ Nếu a và b là các số tự nhiên với tích $a.b$ lẻ thì a và b là các số tự nhiên lẻ.

c/ Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Có ít nhất một trong ba đẳng thức sau là đúng:

$$a^2 + b^2 \geq 2bc; b^2 + c^2 \geq 2ac; c^2 + a^2 \geq 2ab.$$

d/ Với các số tự nhiên a và b , nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho 8 thì a và b không thể đồng thời là số lẻ.

e/ Nếu nhốt 25 con thỏ vào trong 6 cái chuồng thì có ít nhất 1 chuồng chứa nhiều hơn 4 con thỏ.

Bài 27. Cho định lí: "Nếu a và b là hai số nguyên dương và mỗi số đều chia hết cho 3 thì $a^2 + b^2$ cũng chia hết cho 3". Hãy phát biểu và chứng minh định lí đảo của định lí trên (nếu có), rồi dùng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để gộp cả hai định lí thuận và đảo.

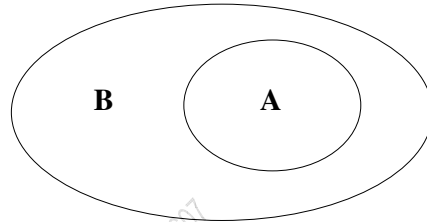
B – TẬP HỢP

① Tập hợp

- Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa.
- Cách xác định tập hợp.
 - + Liệt kê các phần tử: viết các phần tử của tập hợp trong hai dấu móc $\{ \dots \}$.
 - + Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.
- Tập rỗng: là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu $\emptyset$.

② Tập hợp con – Tập hợp bằng nhau

- Tập hợp con: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$.
 - + $A \subset A, \forall A$.
 - + $\emptyset \subset A, \forall A$.
 - + $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$.



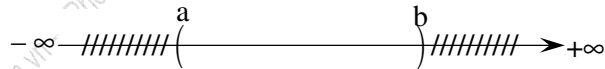
- Tập hợp bằng nhau: $A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$. Nếu tập hợp có n phần tử $\Rightarrow 2^n$ tập hợp con.

③ Một số tập hợp con của tập hợp số thực $\mathbb{R}$

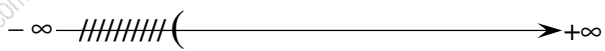
- Tập hợp con của $\mathbb{R}$: $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

— Khoảng:

$$+ (a; b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$



$$+ (a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / a < x\}$$



$$+ (-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$$



$$— \text{Đoạn: } [a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$



— Nửa khoảng:

$$+ [a; b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$



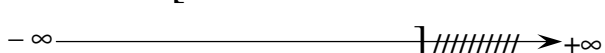
$$+ (a; b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$



$$+ [a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$$



$$+ (-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$$

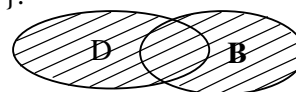


④ Các phép toán tập hợp

- Giao của hai tập hợp: $A \cap B \Leftrightarrow \{x | x \in A \text{ và } x \in B\}$.



- Hợp của hai tập hợp: $A \cup B \Leftrightarrow \{x | x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.



- Hiệu của hai tập hợp: $A \setminus B \Leftrightarrow \{x | x \in A \text{ và } x \notin B\}$.



- Phần bù: Cho $B \subset A$ thì $C_A B = A \setminus B$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 28. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó.

a/ $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid (2x^2 - 5x + 3)(x^2 - 4x + 3) = 0 \right\}.$

b/ $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 10x + 21)(x^3 - x) = 0 \right\}.$

c/ $C = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid (6x^2 - 7x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \right\}.$

d/ $D = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0 \right\}.$

e/ $E = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x + 3 < 4 + 2x ; 5x - 3 < 4x - 1 \right\}.$

f/ $F = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid |x + 2| \leq 1 \right\}.$

g/ $G = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x < 5 \right\}.$

h/ $H = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 3 = 0 \right\}.$

i/ $K = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{1}{2^a} \leq \frac{1}{32}, a \in \mathbb{N} \right\}.$

Bài 29. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách chỉ rõ tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó:

a/ $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}.$

b/ $B = \{0; 4; 8; 12; 16\}.$

c/ $C = \{-3; 9; -27; 81\}.$

d/ $D = \{9; 36; 81; 144\}.$

e/ $E = \{2; 3; 5; 7; 11\}.$

f/ $F = \{3; 6; 9; 12; 15\}.$

g/ $G = \{0; 3; 8; 15; 24; 35; 48; 63\}.$

h/ $H = \left\{ 1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{1}{81}; \frac{1}{234} \right\}.$

i/ $I = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}; \frac{1}{30} \right\}.$

j/ $J = \left\{ \frac{2}{3}; \frac{3}{8}; \frac{4}{15}; \frac{5}{24}; \frac{6}{35} \right\}.$

k/ $K = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}.$

l/ $L = \{3; 8; 15; 24; 35; 48; 63\}.$

m/ $M = \left\{ 1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}, \frac{7}{13}, \frac{8}{15} \right\}.$

n/ $N = \{3; 4; 7; 12; 19; 28; 39; 52\}.$

o/ $O = \{0, \sqrt{3}, 2\sqrt{2}, \sqrt{15}, 2\sqrt{6}, \sqrt{35}, 4\sqrt{3}, \sqrt{63}\}.$

p/ $P = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10} \right\}.$

q/ $Q =$ Tập tất cả các điểm thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB.

r/ $R =$ Tập tất cả các điểm thuộc đường tròn tâm I cho trước và có bán kính bằng 5.

Bài 30. Trong các tập hợp sau đây, tập nào là tập rỗng ?

a/ $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1 \right\}.$

b/ $B = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 1 = 0 \right\}.$

c/ $C = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0 \right\}.$

d/ $D = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 = 0 \right\}.$

e/ $E = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid x^2 + 7x + 12 = 0 \right\}.$

f/ $F = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 2 = 0 \right\}.$

Bài 31. Tìm tất cả các tập con, các tập con gồm hai phần tử của các tập hợp sau:

a/ $A = \{1; 2\}.$

b/ $B = \{1; 2; 3\}.$

$$c/ C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 2 = 0\}. \quad d/ D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}.$$

Bài 32. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập con của tập nào ?

$$a/ A = \{1; 2; 3\}, B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}, C = (0; +\infty), D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 7x + 3 = 0\}.$$

b/ A = Tập các ước số tự nhiên của 6; B = Tập các ước số tự nhiên của 12.

c/ A = Tập các hình bình hành; B = Tập các hình chữ nhật;

C = Tập các hình thoi; D = Tập các hình vuông.

d/ A = Tập các tam giác cân; B = Tập các tam giác đều;

C = Tập các tam giác vuông; D = Tập các tam giác vuông cân.

Bài 33. Tìm $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$ với:

$$a/ A = \{2, 4, 7, 8, 9, 12\}; B = \{2, 8, 9, 12\}.$$

$$b/ A = \{2, 4, 6, 9\}; B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

$$c/ A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\}; B = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| = 1\}.$$

d/ A = Tập các ước số của 12; B = Tập các ước số của 18.

$$e/ A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+1)(x-2)(x^2 - 8x + 15) = 0\}; B = \text{Tập các số nguyên tố có 1 chữ số}.$$

$$f/ A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 4\}; B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (5x - 3x^2)(x^2 - 2x - 3) = 0\}.$$

$$g/ A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 - 9)(x^2 - 5x - 6) = 0\}; B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là số nguyên tố, } x \leq 5\}.$$

Bài 34. Tìm tất cả các tập hợp X sao cho:

$$a/ \{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$$b/ \{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3, 4\}.$$

$$c/ X \subset \{1, 2, 3, 4\}, X \subset \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

Bài 35. Xác định các tập hợp A, B sao cho:

$$a/ A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 4\}; A \setminus B = \{-3, -2\}; B \setminus A = \{6, 9, 10\}.$$

$$b/ A \cap B = \{1, 2, 3\}; A \setminus B = \{4, 5\}; B \setminus A = \{6, 9\}.$$

Bài 36. Xác định $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$ và biểu diễn chúng trên trục số, với:

$$a/ A = [-4; 4], B = [1; 7].$$

$$b/ A = [-4; -2], B = (3; 7].$$

$$c/ A = [-4; -2], B = (3; 7).$$

$$d/ A = (-\infty; -2], B = [3; +\infty).$$

$$e/ A = [3; +\infty), B = (0; 4).$$

$$f/ A = (1; 4), B = (2; 6).$$

Bài 37. Xác định $A \cup B \cup C$; $A \cap B \cap C$ và biểu diễn chúng trên trục số, với:

$$a/ A = [1; 4], B = (2; 6), C = (1; 2).$$

$$b/ A = (-\infty; -2], B = [3; +\infty), C = (0; 4).$$

$$c/ A = [0; 4], B = (1, 5), C = (-3; 1].$$

$$d/ A = (-\infty; -2], B = [2; +\infty), C = (0; 3).$$

$$e/ A = (-5; 1], B = [3; +\infty), C = (-\infty; -2).$$

$$f/ A = (-2; 5], B = (0; 9), C = [-\infty; 6].$$

Bài 38. Chứng minh rằng:

$$a/ \text{Nếu } A \subset B \text{ thì } A \cap B = A.$$

$$b/ \text{Nếu } A \subset C \text{ và } B \subset C \text{ thì } (A \cup B) \subset C.$$

$$c/ \text{Nếu } A \cup B = A \cap B \text{ thì } A = B.$$

$$d/ \text{Nếu } A \subset B \text{ và } A \subset C \text{ thì } A \subset (B \cap C).$$

Bài 39. Mỗi học sinh lớp 10A₁ đều chơi bóng đá hoặc bóng chuyền. Biết rằng có 25 bạn chơi bóng đá,

20 bạn chơi bóng chuyền và 10 bạn chơi cả hai môn thể thao này. Hỏi lớp 10A₁ có bao nhiêu học sinh ?

Bài 40. Trong một trường THPT, khối 10 có: 160 em học sinh tham gia câu lạc bộ Toán, 140 tham gia câu lạc bộ Tin, 50 em tham gia cả hai câu lạc bộ. Hỏi khối 10 có bao nhiêu học sinh ?

Bài 41. Một lớp có 40 HS, đăng ký chơi ít nhất một trong hai môn thể thao: bóng đá và cầu lông. Có 30 em đăng ký môn bóng đá, 25 em đăng ký môn cầu lông. Hỏi có bao nhiêu em đăng ký cả hai môn thể thao ?

Bài 42. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{b, d, e\}$; $C = \{a, b, e\}$. Chứng minh các hệ thức
a/ $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. b/ $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Bài 43. Tìm các tập hợp A và B. Biết rằng: $A \setminus B = \{1, 5, 7, 8\}$; $A \cap B = \{3, 6, 9\}$ và
 $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x \leq 10\}$.

Bài 44. Cho các tập hợp: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$; $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Hãy xác định:
 $C_A B$, $C_A C$, $C_A (B \cup C)$.

Bài 45. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 7\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$ và $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$.

a/ Dùng kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết lại các tập hợp trên.
b/ Biểu diễn các tập hợp A, B, C và D trên trục số. Chỉ rõ nó thuộc phần nào trên trục số.

Bài 46. Xác định mỗi tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số

a/ $(-5; 3) \cap (0; 7)$. b/ $(-1; 5) \cup (3; 7)$.
c/ $\mathbb{R} \setminus (0; +\infty)$. d/ $\mathbb{R} \setminus [0; 1]$.
e/ $(-\infty; 3) \cap (-2; +\infty)$. f/ $(-1; 3) \cup [0; 5]$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 47. Viết các tập hợp sau bằng phương pháp liệt kê

a/ $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$ b/ $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 < n^2 < 30\}$.
c/ $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 5x^2 + 6 = 0\}$. d/ $D = \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 < n^2 < 30\}$.

Bài 48. Viết các tập sau bằng phương pháp nêu ra tính chất đặc trưng

a/ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. b/ $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.
c/ $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. d/ $A = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$.
e/ $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$. f/ Tập hợp các số chẵn.
g/ Tập hợp các số lẻ. h/ Đường phân giác trong của $\widehat{ABC}$.
i/ Đường tròn tâm I, bán kính R. j/ Đường tròn đường kính AB.
k/ $A = \{-2, 1, 6, 13, 22, 33, 46, 61\}$. l/ $A = \{3, 8, 24, 35, 48, 63, 80, 99\}$.
m/ $A = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{19}, \frac{4}{33}, \frac{5}{73}, \frac{6}{99}\right\}$. n/ $A = \left\{\frac{2}{3}, 1, \frac{10}{7}, \frac{17}{9}, \frac{26}{11}, \frac{37}{13}, \frac{10}{3}\right\}$.

Bài 49. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

a/ Liệt kê tất cả các tập hợp con có 3 phần tử của A.

b/ Liệt kê tất cả tập con có 2 phần tử của A.

c/ Liệt kê tất cả các tập con của A.

Bài 50. Biểu diễn các tập hợp sau thành các khoảng

a/ $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 < |x| < 3\}.$

b/ $B = \{x \in \mathbb{R} / |x| \geq 4\}.$

c/ $C = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{2}{|x+1|} \geq 3\right\}.$

d/ $D = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{5}{|x+7|} \leq 4\right\}.$

Bài 51. Xét các quan hệ " $\subset$ " giữa các tập hợp sau

a/ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{n \in \mathbb{Z} / 0 \leq |n| \leq 5\}.$

b/ $A = \{x \in \mathbb{Z} / (x^2 - x - 2)(x - 1) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 = 0\}.$

c/ $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 4\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N} / -4 < x < 3\}.$

Bài 52. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. Hãy tìm:

a/ $C = A \cup B.$

b/ $C = A \cap B.$

c/ $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$

d/ $C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$

Bài 53. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 5\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < 7\}$. Hãy tìm tập hợp C thỏa:

a/ $C = A \cup B.$

b/ $C = A \cap B.$

c/ $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$

d/ $C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$

Bài 54. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 3\}$ và $C = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 4\}$.

Hãy tìm tập hợp D thỏa:

a/ $D = (A \cup B) \cup C.$

b/ $D = (A \cup B) \cap C.$

c/ $D = (A \cap B) \cap C.$

d/ $D = (A \cap B) \cup C.$

e/ $D = (A \cap B) \setminus C.$

f/ $D = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$

g/ $D = (B \setminus A) \cup (C \setminus A).$

h/ $D = (B \setminus A) \setminus C.$

i/ $D = (B \setminus A) \cup C.$

j/ $D = (B \cup C) \setminus A.$

Bài 55. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} / -5 \leq x \text{ hay } x \geq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / -10 < x < 4\}$ và

$C = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 9\}$. Hãy tìm tập hợp D thỏa:

a/ $D = (A \cup B) \cup C.$

b/ $D = (A \cup B) \cap C.$

c/ $D = (A \cap B) \cap C.$

d/ $D = (A \cap B) \cup C.$

e/ $D = (A \cap B) \setminus C.$

f/ $D = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$

g/ $D = (B \setminus A) \cup (C \setminus A).$

h/ $D = (B \setminus A) \setminus C.$

i/ $D = (B \setminus A) \cup C.$

j/ $D = (B \cup C) \setminus A.$

Bài 56. Cho $A = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{|x-2|} > 2\right\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} / |x-1| < 1\}$. Hãy tìm các tập hợp:

$A \cup B, A \cap B, (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$

Bài 57. Chứng minh rằng

a/ $A \subset B \cup C$.

c/ $A \cup B = B \cup A$.

e/ $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$.

g/ $A \cap B \subset B$.

i/ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

k/ $A \setminus B \subset A$.

m/ $A \cap B \subset A \cup B$.

o/ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

r/ $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$.

b/ $B \subset A \cup C$.

d/ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

f/ $A \cap B \subset A$.

h/ $A \cap B = B \cap A$.

j/ $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subset A$.

l/ $B \setminus A \subset B$.

n/ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

p/ $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

s/ Nếu $A \subset B$ thì $A \cap B = A$.

Bài 58. Xác định mỗi tập hợp số sau và biểu diễn chúng trên trục số

a/ $(-3; 3) \cup (-1; 0)$.

c/ $(-2; 2] \cap [1; 3)$.

e/ $(-5; 5) \setminus (-3; 3)$.

g/ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 3\}$.

b/ $(-\infty; 0) \cap (0; 1)$.

d/ $(-3; 3) \setminus (0; 5)$.

f/ $(-2; 3) \setminus (-3; 3)$.

h/ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 5\}$.

Bài 59. Xác định các tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$ và biểu diễn chúng trên trục số

a/ $A = [1; 5]$, $B = (-3; 2) \cup (3; 7)$.

b/ $A = (-5; 0) \cup (3; 5)$, $B = (-1; 2) \cup (4; 6)$.

c/ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| < 3\}$.

Bài 60. Cho hai tập hợp A và B. Biết tập hợp B khác rỗng, số phần tử của tập B gấp đôi số phần tử của tập $A \cap B$ và $A \cup B$ có 10 phần tử. Hỏi tập A và B có bao nhiêu phần tử. Hãy xét các trường hợp xảy ra và dùng biểu đồ Ven minh họa.

Bài 61. Trong 100 học sinh lớp 10, có 70 học sinh nói được tiếng Anh, 45 học sinh nói được tiếng Pháp và 23 học sinh nói được cả hai tiếng Anh và Pháp. Hỏi có bao nhiêu học sinh không nói được hai tiếng Anh và Pháp.

Bài 62. Tìm phần bù của tập hợp các số tự nhiên trong tập hợp các số nguyên ?

Chương 2

HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI



A – ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

① Định nghĩa

- Cho $D \subset \mathbb{R}, D \neq \emptyset$. **Hàm số f** xác định trên D là một qui tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D$ với một và chỉ một số $y \in \mathbb{R}$.
- x được gọi là biến số (đối số), y được gọi là giá trị của hàm số f tại x . Kí hiệu: $y = f(x)$.
- D được gọi là tập xác định của hàm số.
- $T = \{y = f(x) | x \in D\}$ được gọi là tập giá trị của hàm số.

② Cách cho hàm số

- Cho bằng bảng.
- Cho bằng biểu đồ.
- Cho bằng công thức $y = f(x)$.
- Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

③ Đồ thị của hàm số

- **Đồ thị** của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ với mọi $x \in D$.
- **Chú ý:** Ta thường gặp đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một đường. Khi đó ta nói $y = f(x)$ là **phương trình** của đường đó.

④ Tính chẵn lẻ của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D .

- Hàm số f được gọi là **hàm số chẵn** nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số f được gọi là **hàm số lẻ** nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.
- Lưu ý:
 - + Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.
 - + Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

BA DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG 1. Tìm tập xác định của hàm số.

DẠNG 2. Xét tính đơn điệu của hàm số.

DẠNG 3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số.

Dạng toán 1. Tìm tập xác định của hàm số

- Tìm tập xác định D của hàm số $y = f(x)$ là tìm tất cả những giá trị của biến số x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ có nghĩa}\}$.
- Ba trường hợp thường gặp khi tìm tập xác định
 - + Hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)} \longrightarrow$ Điều kiện xác định $Q(x) \neq 0$.
 - + Hàm số $y = \sqrt{P(x)} \longrightarrow$ Điều kiện xác định $P(x) \geq 0$.
 - + Hàm số $y = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}} \longrightarrow$ Điều kiện xác định $Q(x) > 0$.
- Lưu ý
 - + Đôi khi ta sử dụng phối hợp các điều kiện với nhau.
 - + Điều kiện để hàm số xác định trên tập A là $A \subset D$.
 - + $A.B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 64. Tính giá trị của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra

a/ $f(x) = |-5x|$. Tính $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(3)$.

b/ $f(x) = \frac{x-1}{2x^2-3x+1}$. Tính $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(\sqrt{2})$.

c/ $f(x) = 2|x-1| + 3|x| - 2$. Tính $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{3})$, $f(1+\sqrt{2})$.

d/ $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{khi } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2-1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Tính $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(\sqrt{2})$.

Bài 65. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a/ $y = 2 - 4x$.	b/ $y = x^2 + 4x + 15$.	c/ $y = \frac{2x^3 - 3x + 1}{2013}$.
d/ $y = \frac{2x+1}{3x+2}$.	e/ $y = \frac{x-3}{5-2x}$.	f/ $y = \frac{4}{x+4}$.
g/ $y = \frac{x}{x^2-3x+2}$.	h/ $y = \frac{x-1}{2x^2-5x+2}$.	i/ $y = \frac{3x}{x^2+x+1}$.
j/ $y = \frac{x-1}{x^3+1}$.	k/ $y = \frac{2x+1}{(x-2)(x^2-4x+3)}$.	l/ $y = \frac{1}{x^4+2x^2-3}$.

Bài 66. Tìm tập xác định của các hàm số sau

$$\begin{array}{lll}
 \text{a/ } y = \sqrt{2x-3}. & \text{b/ } y = \sqrt{|2x-3|}. & \text{c/ } y = \sqrt{4-x} + \sqrt{x+1}. \\
 \text{d/ } y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x-3}. & \text{e/ } y = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x-1}}. & \text{f/ } y = \sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+2}. \\
 \text{g/ } y = \frac{\sqrt{5-2x}}{(x-2)\sqrt{x-1}}. & \text{h/ } y = \sqrt{2x-1} + \sqrt{\frac{1}{3-x}}. & \text{i/ } y = \sqrt{x+3} + \frac{1}{x^2-4}.
 \end{array}$$

Bài 67. Tìm tham số m để hàm số xác định trên tập D đã được chỉ ra

$$\begin{array}{l}
 \text{a/ } y = \frac{2x+1}{x^2-6x+m-2}, \text{ trên } D = \mathbb{R}. \\
 \text{b/ } y = \frac{3x+1}{x^2-2mx+4}, \text{ trên } D = \mathbb{R}. \\
 \text{c/ } y = \sqrt{x-m} + \sqrt{2x-m-1}, \text{ trên } D = (0; +\infty). \\
 \text{d/ } y = \sqrt{2x-3m+4} + \frac{x-m}{x+m-1}, \text{ trên } D = (0; +\infty). \\
 \text{e/ } y = \frac{x+2m}{x-m+1}, \text{ trên } D = (-1; 0). \\
 \text{f/ } y = \frac{1}{\sqrt{x-m}} + \sqrt{-x+2m+6}, \text{ trên } D = (-1; 0). \\
 \text{g/ } y = \sqrt{2x+m+1} + \frac{1}{x-m}, \text{ trên } D = (1; +\infty).
 \end{array}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 68. Tìm tập xác định của các hàm số sau

$$\begin{array}{ll}
 \text{a/ } y = x + 3. & \text{b/ } y = -x^2 - 4. \\
 \text{c/ } y = x^3 + 3x^2 + 4x + 5. & \text{d/ } y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{5}. \\
 \text{e/ } y = \frac{-x^2 + 3x - 6}{-2}. & \text{f/ } y = |-x + 11|. \\
 \text{g/ } y = |9x - 40| + |23x - 13|. & \text{h/ } y = |x - 1| + |x - 3| + |100 - 41x|.
 \end{array}$$

Bài 69. Tìm tập xác định của các hàm số sau

$$\begin{array}{lll}
 \text{a/ } y = \frac{x^2 + x + 1}{x}. & \text{b/ } y = \frac{x+2}{x-1}. & \text{c/ } y = \frac{x+\sqrt{3}}{x+1}. \\
 \text{d/ } y = \frac{3x+5}{-3x+2}. & \text{e/ } y = \frac{x-1}{2x-1}. & \text{f/ } y = \frac{1}{2x+2}. \\
 \text{g/ } y = \frac{x-3}{x+7}. & \text{h/ } y = x-2 + \frac{\sqrt{2}}{x-9}. & \text{i/ } y = x+1 + \frac{\sqrt{3}}{x-1}.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} j/ y = \frac{x^2 + 3x - 1}{2x - 1}. & k/ y = \frac{1}{2x + 11} + \frac{x}{1 - x}. & l/ y = \frac{1}{2x + 1} + \frac{1}{6x + 2}. \\ m/ y = \frac{10}{13 - 9x} - \frac{11}{6x + 7}. & n/ y = \frac{2x}{(2 + x)(3 + x)}. & o/ y = \frac{2x^2 + 4x - 7}{(2 - 3x)(2 - 4x)}. \\ p/ y = \frac{1}{32x + 0,25} \cdot \frac{1}{25 - 0,5x}. & q/ y = \frac{5}{x^2 - 6x + 25}. & r/ y = \frac{-3}{14x - 49 - x^2}. \\ s/ y = \frac{x - 2}{x^2 - 2x - 3}. & t/ y = \frac{x + 2012}{2x^2 - 6x + 4}. & u/ y = \frac{x}{-x^2 - 4x + 5}. \\ v/ y = \frac{2x - 1}{(x - 1)(2x^2 - 3x + 1)}. & x/ y = \frac{3x^2 + x + 1}{x^4 - x^2 - 6}. & y/ y = \frac{3x^2 - 1}{x^4 - 9x^2 + 8}. \end{array}$$

Bài 70. Tìm tập xác định của các hàm số sau

$$\begin{array}{lll} a/ y = \sqrt{x}. & b/ y = \sqrt{x^2}. & c/ y = \sqrt{x - 1}. \\ d/ y = \sqrt{4 + 3x}. & e/ y = \sqrt{-x + 10}. & f/ y = \sqrt{-2x - 9}. \\ g/ y = \sqrt[3]{0,1x + 5}. & h/ y = \sqrt[3]{-2,6x - 3,14}. & i/ y = \sqrt[3]{-x + 2}. \\ j/ y = \sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}. & k/ y = \sqrt{2x - 1} + \sqrt{1 - 2x}. & l/ y = \sqrt{15x - 3}. \\ m/ y = \sqrt{3x - 25} + \sqrt{-x + 1}. & n/ y = \sqrt{13 - 4x} + \sqrt{-7x - 22}. & o/ y = \sqrt[3]{-x} + \sqrt[3]{-x^2}. \\ p/ y = \sqrt[3]{1 - x^2} + \sqrt[3]{-x - x^3}. & q/ y = \frac{1}{\sqrt{x}}. & r/ y = \frac{3x}{\sqrt{x - 1}}. \\ s/ y = \frac{1 - 2x}{\sqrt{-4x - 8}}. & t/ y = \frac{x}{\sqrt{3x - 10}} - \frac{1}{\sqrt{10 - 3x}}. & u/ y = \frac{4x}{\sqrt{7x - 1}} - \frac{x}{3\sqrt{4 - 28x}}. \\ v/ y = \frac{1}{\sqrt{2 - x}} + \frac{2}{\sqrt{3x - 18}}. & w/ y = \frac{0,2x}{\sqrt{0,7x - 0,7}} - \frac{25}{\sqrt{8 + 0,8x}}. & x/ y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x - 1}}. \\ y/ y = \frac{-x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} - \frac{10x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}. & z/ y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}. & a/ y = \frac{2x}{\sqrt{4x^2 + 8x + 120}}. \end{array}$$

Bài 71. Giải các phương trình và các bất phương trình sau

$$\begin{array}{ll} a/ x^2 - 6x + 8 = 0. & b/ x^2 - x + 1 = 0. \\ c/ -x^2 + 5x + 14 \neq 0. & d/ -3x^2 + 4x - 1 \neq 0. \\ e/ (3x - 2)^2 \neq 5. & f/ (-0,5x + 1)^2 \neq 1. \\ g/ |x - 1| + |2 - 2x| = 0. & h/ |1 - x| + |2x - 2| \neq 0. \\ i/ |x + 3| + |2x + 1| = 0. & j/ |(2 - 6x)(3x - 5)| + |3x - 1| = 0. \\ k/ |-4x^2 + 11x - 7| + |-19x + 36x^2 - 77| \neq 0. & l/ \sqrt{9x^2 - 6x + 1} + \sqrt{4 - 10x + 25x^2} \neq 0. \\ m/ |x + 3| + |2x - 1| \neq 0. & n/ \sqrt{x} + \sqrt{-x} \neq 0. \\ o/ \sqrt{x^2} + \sqrt{x(2 - 1x)} \neq 0. & p/ x^4 + \sqrt{-3x^2 + x} \neq 0. \\ q/ -x^6 - \sqrt[3]{x^3 - 11x^2} \neq 0. & r/ \sqrt{x^2 + 1} \neq x. \end{array}$$

Dạng toán 2. Xét chiều biến thiên của hàm số (Tính đơn điệu hàm số)

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K .

— Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $K \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$

— Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $K \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0.$

⚡ Lưu ý: Một số trường hợp, ta có thể lập tỉ số $\frac{f(x_1)}{f(x_2)}$ để so sánh với số 1, nhằm đưa về kết quả

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ hay } f(x_2) < f(x_1)$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 72. Xét sự biến thiên của các hàm số sau trên các khoảng đã chỉ ra

a/ $y = 2x + 3$ trên $\mathbb{R}$.

b/ $y = -x + 5$ trên $\mathbb{R}$.

c/ $y = x^2 + 10x + 9$ trên $(-5; +\infty)$.

d/ $y = -x^2 + 2x + 1$ trên $(1; +\infty)$.

e/ $y = x^2 - 4x$ trên $(-\infty; 2), (2; +\infty)$.

f/ $y = -x^2 + 6x + 8$ trên $(-10; -2), (3; 5)$.

g/ $y = 2x^2 + 4x + 1$ trên $(-\infty; 1), (1; +\infty)$.

h/ $y = \frac{4}{x+1}$ trên $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$.

i/ $y = \frac{3}{2-x}$ trên $(-\infty; 2), (2; +\infty)$.

j/ $y = \frac{1+x}{1-x}$ trên $(-\infty; 1)$.

k/ $y = \frac{x}{x-7}$ trên $(-\infty; 7), (7; +\infty)$.

l/ $y = \sqrt{x-1}$ trên D_f .

m/ $y = \sqrt{x-3}$ trên D_f .

n/ $y = |x-3|$ trên D_f .

o/ $y = \left| \sqrt{2-x} + 1 \right|$ trên D_f .

p/ $y = \frac{x}{x^2+1}$ trên $(0; 1), (1; +\infty)$.

Bài 73. Với giá trị nào của m thì các hàm số sau đồng biến hoặc nghịch biến trên tập xác định (hoặc trên từng khoảng xác định)

a/ $y = (m-2)x + 5$.

b/ $y = (m+1)x + m - 2$.

c/ $y = \frac{m}{x-2}$.

d/ $y = \frac{m+1}{x}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 74. Xét tính đồng biến và tính nghịch biến của hàm số trên từng khoảng tương ứng

a/ $y = x + 2013$ trên $\mathbb{R}$.

b/ $y = -2x + 3$ trên $\mathbb{R}$.

c/ $y = x^2 + 4x - 2$ trên $(-2; +\infty)$.

d/ $y = -2x^2 + 4x + 1$ trên $(-\infty; 1)$.

e/ $y = \frac{x^2}{2} - x + 1$ trên $(1; +\infty)$.

f/ $y = -4x + x^2 + 3$ trên $(2; +\infty)$.

g/ $y = 5 + x^2 - 6x$ trên $(-\infty; 3)$.

h/ $y = x^2$ trên $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$.

i/ $y = -x^2$ trên $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$.

j/ $y = 2x^2$ trên $\mathbb{R}$.

k/ $y = -x^2 + 4x + 1$ trên $\mathbb{R}$.

l/ $y = -\frac{1}{x+1}$ trên $(-3; -2), (2; 3)$.

m/ $y = \frac{2}{1-x}$ trên $(1; +\infty)$.

n/ $y = \frac{1}{x-3}$ trên $(3; +\infty)$.

o/ $y = \frac{1}{x-2}$ trên $(2; +\infty)$.

p/ $y = \frac{5x}{x-2}$ trên $(2; +\infty)$.

q/ $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$.

r/ $y = \frac{2x+1}{x-3}$ trên $(-\infty; 3), (3; +\infty)$.

s/ $y = \frac{2x}{x^2+1}$ trên $(0; 1), (1; +\infty)$.

t/ $y = 2 - \frac{1}{x+2}$ trên $(-2; +\infty)$.

u/ $y = \sqrt{5-x}$ trên D_y .

v/ $y = \sqrt{x-2}$ trên D_y .

w/ $y = x\sqrt{x}$ trên $(0; +\infty)$.

x/ $y = \sqrt[3]{x}$ trên D_y .

y/ $y = |x-3|$ trên D_y .

z/ $y = |2x-5|$ trên D_y .

a/ $y = \left| 2 + \sqrt{x+3} \right|$ trên D_y .

β / $y = \sqrt{x+3} + 2\sqrt{x+2}$ trên D_y .

Bài 75. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{2-x} + 2\sqrt{1-x}$.

a/ Tìm tập xác định của hàm số.

b/ Xét tính đơn điệu của hàm số.

c/ Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right]$.

Bài 76. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{5+x} + 2\sqrt{x+4}$.

a/ Tìm tập xác định của hàm số.

b/ Xét tính đơn điệu của hàm số.

c/ Lập bảng biến thiên của hàm số.

d/ Vẽ đồ thị hàm số.

Bài 77. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$.

a/ Tìm tập xác định của hàm số.

b/ Chứng minh hàm số giảm trên từng khoảng xác định của nó.

c/ Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

Dạng toán 3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

Để xét tính chẵn – lẻ của hàm số $y = f(x)$, ta tiến hành làm các bước sau

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số và xét xem D có là tập đối xứng hay không.
- **Bước 2.** Nếu D là tập đối xứng thì so sánh $f(-x)$ với $f(x)$ (x bất kì thuộc D).
 - + Nếu $f(-x) = f(x), \forall x \in D$ thì hàm số $y = f(x)$ là hàm số chẵn.
 - + Nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$ thì hàm số $y = f(x)$ là hàm số lẻ.

⊗ **Lưu ý**

- Tập đối xứng là tập thỏa mãn điều kiện: $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.
- Nếu $\exists x \in D$ mà $f(-x) \neq \pm f(x)$ thì $y = f(x)$ là hàm số không chẵn, không lẻ

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 78. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a/ $y = 3x^2 - 1.$

b/ $y = 6x^3.$

c/ $y = (2x - 2)^{2014} + (2x + 2)^{2014}.$

d/ $y = x^4 - 4x^2 + 2.$

e/ $y = -2x^3 + 3x.$

f/ $y = (x - 1)^2.$

g/ $y = x^2 + x.$

h/ $y = \frac{x}{x^2 + 1}.$

i/ $y = |x + 2| - |x - 2|.$

j/ $y = -4x^2 + 5|x| - 3.$

k/ $y = -5x^4 - 3|x| + 8.$

l/ $y = \frac{x^2 + 4}{x^4}.$

m/ $y = |2x + 1| + |2x - 1|.$

n/ $y = \frac{|x + 1| + |x - 1|}{|x + 1| - |x - 1|}.$

o/ $y = 2x^2 - |x|.$

p/ $y = \sqrt{2x + 9}.$

q/ $y = \sqrt{2 + x} - \sqrt{2 - x}.$

r/ $y = \sqrt{25 - 4x^2}.$

s/ $y = \sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}.$

t/ $y = \sqrt{x + 2} + \frac{1}{\sqrt{2 - x}}.$

v/ $y = \frac{|x + 2| + |x - 2|}{x}.$

Bài 79. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = f(x) = x(x^3 - 2) + 2m + 1$ là hàm số lẻ.

Bài 80. Tìm tham số m để hàm số $y = f(x) = x^4 - m(m - 1)x^3 + x^2 + mx + m^2$ là hàm số chẵn.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 81.** Xét tính chẵn – lẻ của các hàm số sau

a/ $y = 7x^2 - 1.$

b/ $y = 4x - x^3.$

c/ $y = -x^4 + 3x - 2.$

d/ $y = x^4 - 2x^2 + 1.$

e/ $y = (x-1)^{2012} + (x+1)^{2012}.$

f/ $y = \frac{x^2 + 2}{x}.$

g/ $y = \frac{5x}{x^2 - 1}.$

h/ $y = \frac{x^2}{3x^3 - x}.$

i/ $y = \frac{x^3 - 3x}{2x}.$

j/ $y = \frac{-x^4 + x^2 + 1}{x}.$

k/ $y = \sqrt{3x + 1}.$

l/ $y = \sqrt{x + 3} - \sqrt{3 - x}.$

m/ $y = \sqrt{4 - x^2}.$

n/ $y = \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + x}.$

o/ $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x + 1} + \sqrt{1 - x}.$

p/ $y = \sqrt{x + 1} + \frac{1}{\sqrt{1 - x}}.$

q/ $y = \frac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{x^2}.$

r/ $y = \frac{3x^3}{\sqrt{4 - x} - \sqrt{4 + x}}.$

s/ $y = |3x - 2| + |3x + 2|.$

t/ $y = |x - 2| - |x + 2|.$

u/ $y = |4x - 3| - |4x + 3|.$

v/ $y = -3x^2 + 2|x| + 11.$

x/ $y = x^4 + 2|x| + 5.$

z/ $y = \frac{|x + 1| + |x - 1|}{2013x}.$

Bài 82. Xét tính chẵn – lẻ của các hàm số sau

a/ $y = f(x) = \frac{|x - 1| - |x + 1|}{|x - 1| + |x + 1|}.$

b/ $y = f(x) = \frac{3x^4 - x^2 + 5}{|x| - 1}.$

c/ $y = f(x) = \frac{3x^2}{2 - |x|}.$

d/ $y = f(x) = \frac{x^2|x - 2|}{\sqrt{(x - 2)^2}}.$

e/ $y = f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{khi } x \leq -1 \\ 0 & \text{khi } -1 < x < 1. \\ x - 2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$

f/ $y = f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{khi } x \leq -1 \\ 0 & \text{khi } -1 < x < 1. \\ x^3 + 1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$

B – HÀM SỐ BẬC NHẤT

① Hàm số bậc nhất $y = ax + b, (a \neq 0)$.

✧ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

✧ Sự biến thiên:

— Khi $a > 0$: hàm số đồng biến (tăng) trên $\mathbb{R}$.

— Khi $a < 0$: hàm số nghịch biến (giảm) trên $\mathbb{R}$.

✧ Đồ thị là đường thẳng có hệ số góc bằng a , cắt trục tung tại điểm $B(0; b)$.

✪ Lưu ý rằng: Cho hai đường thẳng $d: y = ax + b$ và $d': y = a'x + b'$.

✧ d song song với $d' \Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$.

✧ d trùng với $d' \Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$.

✧ d cắt $d' \Leftrightarrow a \neq a'$.

② Hàm số $y = |ax + b|, (a \neq 0)$.

$$y = |ax + b| = \begin{cases} ax + b & \text{khi } x \geq -\frac{b}{a} \\ -(ax + b) & \text{khi } x < -\frac{b}{a} \end{cases}$$

✪ Lưu ý rằng: Để vẽ đồ thị hàm số $y = |ax + b|, (a \neq 0)$ ta có thể vẽ hai đường thẳng $y = ax + b$ và $y = -ax - b$, rồi xoá đi hai phần đường thẳng nằm ở phía dưới trục hoành.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 83. Vẽ đồ thị của các hàm số sau

a/ $y = 2x - 7$.

b/ $y = -3x + 5$.

c/ $y = \frac{x-3}{2}$.

d/ $y = \frac{5-x}{3}$.

e/ $y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \leq -1 \\ 1 & \text{khi } -1 < x < 2 \\ x-1 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$

f/ $y = \begin{cases} -2x-2 & \text{khi } x < -1 \\ 0 & \text{khi } -1 \leq x \leq 2 \\ x-2 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$

g/ $y = |3x + 5|$.

h/ $y = -2|x - 1|$.

i/ $y = -\frac{1}{2}|2x + 3| + \frac{5}{2}$.

j/ $y = |x - 2| + |1 - x|$.

k/ $y = |x| - |x - 1|$.

l/ $y = x + |x - 1| + |x + 1|$.

Bài 84. Tìm tọa độ giao điểm của các cặp đường thẳng sau bằng phương pháp đồ thị và bằng phép tính

a/ $y = 3x - 2; y = 2x + 3$.

b/ $y = -3x + 2; y = 4(x - 3)$.

c/ $y = 2x; y = -x - 3$.

d/ $y = \frac{x-3}{2}; y = \frac{5-x}{3}$.

e/ $y = x + 3; y = -5x + 3$.

f/ $x + y = -1; x - 2y + 4 = 0$.

Bài 85. Trong mỗi trường hợp sau, hãy tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y = -2x + m(x + 1)$:

a/ Đi qua gốc tọa độ O .

b/ Đi qua điểm $M(-2; 3)$.

c/ Song song với đường thẳng $y = \sqrt{2} \cdot x$.

d/ Vuông góc với đường thẳng $y = -x$.

Bài 86. Xác định tham số a và b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$:

a/ Đi qua hai điểm $A(-1; -20)$ và $B(3; 8)$.

b/ Đi qua hai điểm $A(-1; 3)$ và $B(1; 2)$.

c/ Đi qua hai điểm $A\left(\frac{2}{3}; -2\right)$ và $B(0; 1)$.

d/ Đi qua hai điểm $A(4; 2)$ và $B(1; 1)$.

e/ Đi qua điểm $A(1; -1)$ và song song với đường thẳng $y = 2x + 7$.

f/ Đi qua điểm $A(3; 4)$ và song song với đường thẳng $x - y + 5 = 0$.

g/ Đi qua điểm $M(4; -3)$ và song song với đường thẳng $d: y = -\frac{2}{3}x + 1$.

h/ Đi qua điểm $M(3; -5)$ và điểm N là giao điểm của hai đường thẳng $d_1: y = 2x$ và đường thẳng $d_2: y = -x - 3$.

i/ Cắt đường thẳng $d_1: y = 2x + 5$ tại điểm có hoành độ bằng -2 và cắt đường thẳng $d_2: y = -3x + 4$ tại điểm có tung độ bằng -2 .

j/ Song song với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x$ và đi qua giao điểm của hai đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x + 1$ và $y = 3x + 5$.

k/ Qua điểm $H(1; -3)$ và cắt trục hoành tại điểm K có hoành độ là 4 .

l/ Cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ bằng 2 và song song với đường thẳng $3x - 4y = 36$.

m/ Đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với đường thẳng $y = x$.

n/ Đi qua điểm $A(1; 1)$ và vuông góc với đường thẳng $y = -x + 1$.

Bài 87. Trong mỗi trường hợp sau, tìm các giá trị của tham số m sao cho ba đường thẳng sau đây phân biệt (không có điểm chung) và đồng qui.

a/ $y = 2x$; $y = -x - 3$; $y = mx + 5$.

b/ $y = -5(x + 1)$; $y = mx + 3$; $y = 3x + m$.

c/ $y = 2x - 1$; $y = 8 - x$; $y = (3 - 2m)x + 2$.

d/ $y = (5 - 3m)x + m - 2$; $y = -x + 11$; $y = x + 3$.

e/ $y = -x + 5$; $y = 2x - 7$; $y = (m - 2)x + m^2 + 4$.

Bài 88. Tìm điểm sao cho đường thẳng sau luôn đi qua dù m lấy bất cứ giá trị nào (điểm cố định đồ thị)

a/ $y = 2mx + 1 - m$.

b/ $y = mx - 3 - x$.

c/ $y = (2m + 5)x + m + 3$.

d/ $y = m(x + 2)$.

e/ $y = (2m - 3)x + 2$.

f/ $y = (m - 1)x - 2m$.

Bài 89. Với giá trị nào của m thì hàm số sau đồng biến ? nghịch biến ?

a/ $y = (2m + 3)x - m + 1$.

b/ $y = (2m + 5)x + m + 3$.

c/ $y = mx - 3 - x$.

d/ $y = m(x + 2)$.

Bài 90. Tìm các cặp đường thẳng song song trong các đường thẳng cho sau đây ?

$d_1 : 3y - 6x + 1 = 0$.

$d_2 : y = -0,5x - 4$.

$d_3 : y = 3 + \frac{x}{2}$.

$d_4 : 2y + x = 6$.

$d_5 : 2x - y = 1$.

$d_6 : y = 0,5x + 1$.

Bài 91. Với giá trị nào của m thì đồ thị của các cặp hàm số sau song song với nhau

a/ $y = (3m - 1)x + m + 3$; $y = 2x - 1$.

b/ $y = m(x + 2)$; $y = (2m + 3)x - m + 1$.

c/ $y = \frac{m}{1-m}x + \frac{2(m+2)}{m-1}$; $y = \frac{3m}{3m+1}x - \frac{5m+4}{3m+1}$.

Bài 92. Tìm quỹ tích (tập hợp điểm) của các điểm sau

a/ $M(m-1; 2m+1)$.

b/ $M(3-2m; 4m^2-1)$.

c/ $M(m+2; m^2+4)$.

d/ $M(3-m; 4m^2+2m+1)$.

Bài 93. Định tham số m để hai đường thẳng cắt nhau. Khi đó, tìm quỹ tích giao điểm của hai đồ thị.

a/ $d_1 : y = 2x + m$ và $d_2 : y = 1$.

b/ $d_1 : y = -x + 2m$ và $d_2 : y = -1$.

Bài 94. Định tham số m để diện tích tam giác OAB thỏa mãn điều kiện cho trước (O là gốc tọa độ)

a/ $A(0; -m^2)$, $B(1; 0)$, $S_{\Delta OAB} = 9$.

b/ $A(0; 2)$, $B(3m^2; 0)$, $S_{\Delta OAB} = 18$.

c/ $A(0; m)$, $B(m; 0)$, $S_{\Delta OAB} = 8$.

d/ $A(0; 2m^2+1)$, $B(|m|+2; 0)$, $S_{\Delta OAB} = 2$.

Bài 95. Định tham số m để đường thẳng d chắn trên hai trục tọa độ tam giác có diện tích cho trước.

a/ $d : y = x + 2m$, $S_{\Delta} = 1$.

b/ $d : y = -\frac{2}{3}x - m^2$, $S_{\Delta} = 25$.

Bài 96. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp đồ thị

a/ $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$

b/ $\begin{cases} 3 - y = 0 \\ 3x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$

c/ $\begin{cases} y = -3x + 5 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

d/ $\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ 6x - 3y - 6 = 0 \end{cases}$

Bài 97. Cho đồ thị hàm số $y = |3 - 2x|$.

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên.

b/ Xác định các giao điểm của đồ thị trên với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x + 1$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 98. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số sau

a/ $y = -2x + 3$.

b/ $y = 2x + 7$.

c/ $y = 6 - x$.

d/ $y = \frac{4}{3}x - 1$.

e/ $y = \frac{x-1}{4}$.

f/ $y = \frac{3-2x}{5}$.

g/ $y = 2$.

h/ $y = -3$.

i/ $y = x$.

j/ $y = -x$.

k/ $y = 2x$.

l/ $y = -2x$.

Bài 99. Vẽ đồ thị của các hàm số sau

a/ $y = \begin{cases} x+2 & \text{khi } x > 2 \\ 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$

b/ $y = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{1}{2}x+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$

c/ $y = |2x-3|$.

d/ $y = \left| -\frac{3}{4}x + 1 \right|$.

e/ $y = |-x| - 2$.

f/ $y = |x| + 2x$.

g/ $y = |-2x| - 2x$.

h/ $y = |x+2| + 1$.

i/ $y = |-x-3| + |2x+1|$.

j/ $y = |x-1| - |5-x|$.

k/ $y = |x-2| - |3x-4| + |6x+4|$.

l/ $y = |11x-8| + |2+9x| - |2x-9|$.

Bài 100. Xác định tọa độ giao điểm của các cặp đường thẳng sau bằng đồ thị và bằng phép tính.

a/ $d_1 : y = 2 - 3x$ và $d_2 : y = 4x - 12$.

b/ $d_1 : y = 3x - 2$ và $d_2 : y = \frac{5}{4}$.

c/ $d_1 : y = -5x + 2$ và $d_2 : y = \frac{3}{2} \left(-1 + \frac{3}{4}x \right)$.

d/ $d_1 : y = -x + 3$ và $d_2 : y = x - 1$.

Bài 101. Xác định tham số a và b để đồ thị của hàm số $y = ax + b$:

a/ Đi qua hai điểm $A(-1; -2)$, $B(99; -2)$.

b/ Đi qua hai điểm $A(1; 3)$, $B(2; 4)$.

c/ Đi qua hai điểm $A(-3; 2)$, $B(5; 2)$.

d/ Đi qua hai điểm $A(-100; 1)$, $B(50; 1)$.

e/ Đi qua hai điểm $A(1; -3)$, $B(1; 4)$.

f/ Đi qua $A(-3; 4)$ và có hệ số góc là 2.

g/ Song song với đường thẳng $d : y = 3x - 2$ và đi qua điểm $M(2; 3)$.

h/ Song song với đường thẳng $y = -7x + 2013$ và đi qua điểm $N(-1; 2)$.

i/ Đi qua điểm $A(1; 3)$ và vuông góc với đường thẳng $d : 2x - y + 1 = 0$.

j/ Đi qua điểm $A(2; -1)$ và vuông góc với đường thẳng $d : y = 1$.

k/ Đi qua điểm $M(-1; 4)$ và cắt trục tung tại điểm N có tung độ bằng -2 .

l/ Cắt trục tung tại điểm E có tung độ bằng 3 và cắt trục hoành tại F có hoành độ là 1.

m/ Cắt trục tung tại điểm A có tung độ bằng -3 và vuông góc với đường thẳng $d : y = \frac{1}{2}x$.

n/ Đi qua điểm $A(2; -30)$ và điểm B là giao điểm của hai đường thẳng $14x + y + 2 = 0$ và

$$y = -2x - 26.$$

Bài 102. Chứng minh rằng bộ ba đường thẳng trong các trường hợp sau đồng qui.

a/ $d_1 : y = x + 2.$	$d_2 : y = 2x + 1.$	$d_3 : y = 3x.$
b/ $d_1 : y = x + 1.$	$d_2 : y = 2.$	$d_3 : y = 3 - x.$
c/ $d_1 : 3x - y - 7 = 0.$	$d_2 : 3x - 2y - 8 = 0.$	$d_3 : y = -2x + 3.$
d/ $d_1 : 5x + 4y - 6 = 0.$	$d_2 : y = -2x + 3.$	$d_3 : 2y - 3x + 4 = 0.$

Bài 103. Tìm tham số m để bộ ba đường thẳng sau đồng qui.

a/ $d_1 : y = x + 1.$	$d_2 : y = -x + m.$	$d_3 : y = 3x.$
b/ $d_1 : y = 2x.$	$d_2 : y = -x - 3.$	$d_3 : y = mx + 5.$
c/ $d_1 : y = 2x + 3.$	$d_2 : y = -x + 5.$	$d_3 : y = (1 - m)x + 2.$

Bài 104. Tìm điểm cố định của họ đồ thị các hàm số

a/ $y = mx - 3.$	b/ $y = 2mx + 1 - m.$
c/ $y = (m - 1)x + 6m - 2014.$	d/ $y = mx - 5m + 2.$
e/ $(4 - 5m)x + (3m - 2)y + 3m - 4 = 0.$	f/ $mx - y + 3m + 7 = 0.$
g/ $(m + 2)x + (m - 3)y - m + 8 = 0.$	h/ $y = (m^2 - 1)x - 2m^2 + 3.$

Bài 105. Tìm quỹ tích (tập hợp điểm) của các điểm sau

a/ $M(2m - 1; 2m + 7).$	b/ $M(m + 5; 4m - 3).$
c/ $M(2m - 7; m^3 - 3m^2 + 6m - 1).$	d/ $M(2; m^2 - m).$
e/ $M(3m^3; -3).$	f/ $M(-5 - 5m; -3m^2 - 10).$

Bài 106. Định tham số m để hai đường thẳng cắt nhau. Khi đó, tìm quỹ tích giao điểm của hai đồ thị

a/ $d_1 : y = (m + 1)x - 3.$	$d_2 : y = m.$
b/ $d_1 : y = mx + 2m + 4.$	$d_2 : y = -3x + 2m.$

Bài 107. Định tham số m để diện tích tam giác OAB thỏa mãn điều kiện cho trước (O là gốc tọa độ)

a/ $A(0; 2m), B(-m; 0), S_{\Delta OAB} = 5.$	b/ $A(0; -3m^2 - 2), B(2 m + 1; 0), S_{\Delta OAB} = 15.$
--	--

Bài 108. Định tham số m để đường thẳng d chắn trên hai trục tọa độ tam giác có diện tích cho trước.

a/ $d : y = -2x + m, S_{\Delta} = 10.$	b/ $d : y = (m - 1)x + 2, S_{\Delta} = 16.$
--	---

Bài 109. Cho hàm số $y = 2x - 3$ có đồ thị là đường thẳng d .

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.
b/ Xác định hàm số có đồ thị là đường thẳng đối xứng với đường thẳng d qua trục tung.

Bài 110. Cho hàm số $y = |2 - x| + |2x + 1|.$

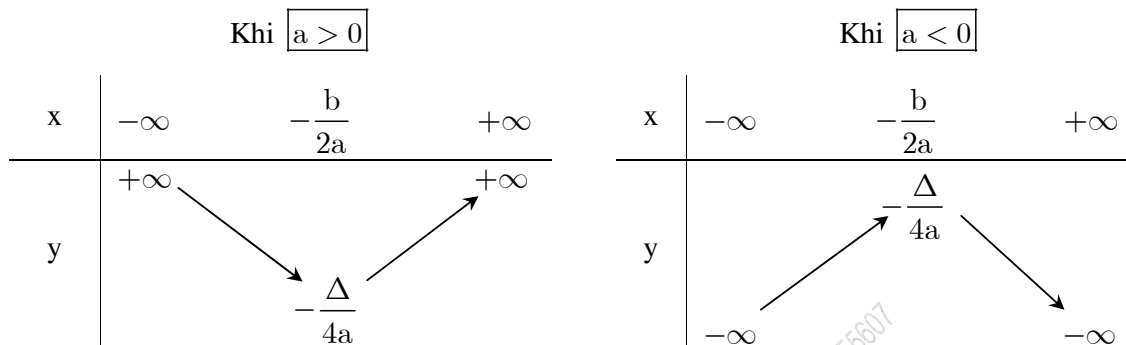
a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số trên.
b/ Dựa vào đồ thị, biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $ 2 - x + 2x + 1 = m.$

C – HÀM SỐ BẬC HAI

① **Dạng hàm số:** $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$.

② **Tập xác định:** $D = \mathbb{R}$.

③ **Sự biến thiên:**

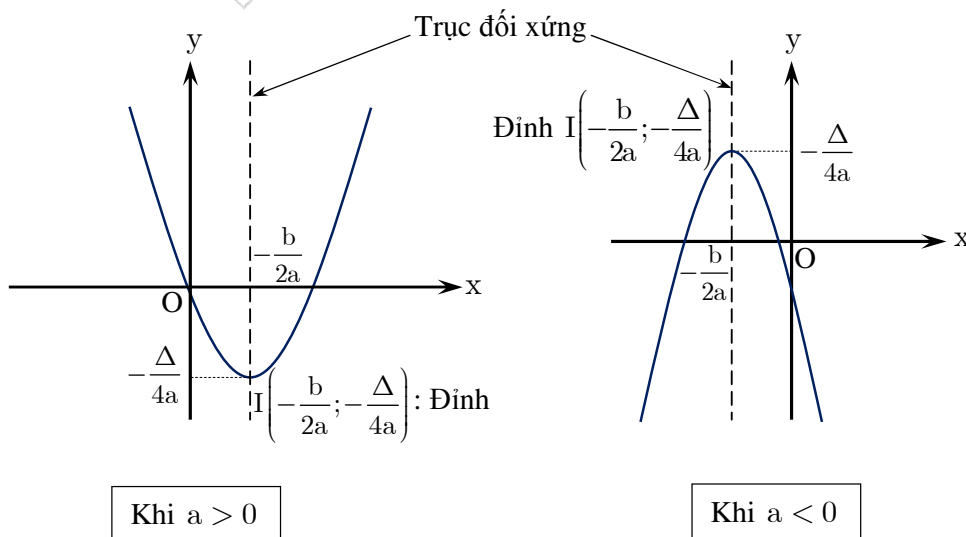


④ **Đồ thị:** là một parabol có đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng, hướng bề lõm lên trên khi $a > 0$, xuống dưới khi $a < 0$.

⑤ **Các bước vẽ parabol** $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$.

- **Bước 1.** Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- **Bước 2.** Xác định trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$ và hướng bề lõm của parabol.
- **Bước 3.** Xác định một số điểm cụ thể của parabol (chẳng hạn, giao điểm của parabol với các trục tọa độ và các điểm đối xứng với chúng qua trục trục đối xứng).
- **Bước 4.** Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để vẽ parabol.

⑥ **Hình dáng parabol** $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$.



⑦ Một số bài toán thường gặp

➤ Bài toán 1. Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$ (*).

- ✧ Nếu phương trình (*) có n nghiệm ($n \neq 1$) thì đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại n điểm phân biệt.
- ✧ Nếu phương trình (*) có đúng 1 nghiệm thì đồ thị $y = f(x)$ tiếp xúc (có một điểm chung) với đồ thị $y = g(x)$.
- ✧ Nếu phương trình (*) vô nghiệm, thì đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ không có điểm chung (không cắt nhau).

Để tìm tọa độ giao điểm, ta thay nghiệm x vào $y = f(x)$ hoặc $y = g(x)$ để được hoành độ y

➤ Bài toán 2. Tìm điểm cố định của họ đồ thị $(C_m): y = f(x, m)$ khi m thay đổi

- ✧ Gọi $M(x_0; y_0) \in (C_m), \forall m \Leftrightarrow y_0 = f(x_0, m), \forall m$ (1).

- ✧ Biến đổi (1) về một trong hai dạng

$$\text{Dạng 1: } (1) \Leftrightarrow Am + B = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad (2a).$$

$$\text{Dạng 2: } (1) \Leftrightarrow Am^2 + Bm + C = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \quad (2b).$$

- ✧ Giải hệ (2a) hoặc (2b) ta tìm được tọa độ $(x_0; y_0)$ của điểm cố định.

➤ Bài toán 3. Quỹ tích điểm M (tập hợp điểm) thỏa tính chất

- ✧ Bước 1. Tìm điều kiện nếu có của tham số m để tồn tại điểm M .
- ✧ Bước 2. Tính tọa độ điểm M theo tham số m .

Có các trường hợp sau xảy ra:

- Trường hợp 1. $M \begin{cases} x = f(m) \\ y = g(m) \end{cases}$

Khử tham số m giữa x và y , ta có hệ thức giữa x và y độc lập với m có dạng:

$F(x, y) = 0$, được gọi là phương trình quỹ tích.

- Trường hợp 2. $M \begin{cases} x = a \\ y = g(m) \end{cases}$ với a là hằng số.

Khi đó, điểm M nằm trên đường thẳng $x = a$.

- Trường hợp 3. $M \begin{cases} x = f(m) \\ y = b \end{cases}$ với b là hằng số.

Khi đó, điểm M nằm trên đường thẳng $y = b$.

✧ Bước 3. Tìm giới hạn quỹ tích.

Dựa vào điều kiện (nếu có) của m (ở bước 1), ta tìm được điều kiện của x hoặc y để tồn tại điểm $M(x; y)$. Đó là giới hạn của quỹ tích.

✧ Bước 4. Kết luận

Tập hợp điểm M có phương trình $F(x, y) = 0$ (hoặc $x = a$ hoặc $y = b$) với điều kiện của x, y nếu có (ở bước 3).

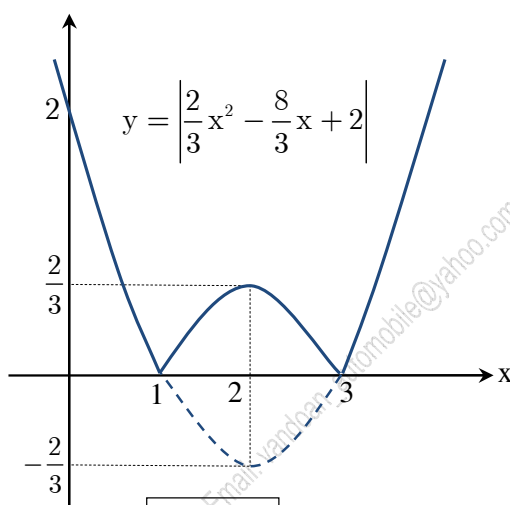
➤ Bài toán 4. Vẽ đồ thị hàm số chứa dấu trị tuyệt đối

✧ Vẽ hàm đồ thị hàm số $y = |f(x)| = |ax^2 + bx + c|, (a \neq 0)$.

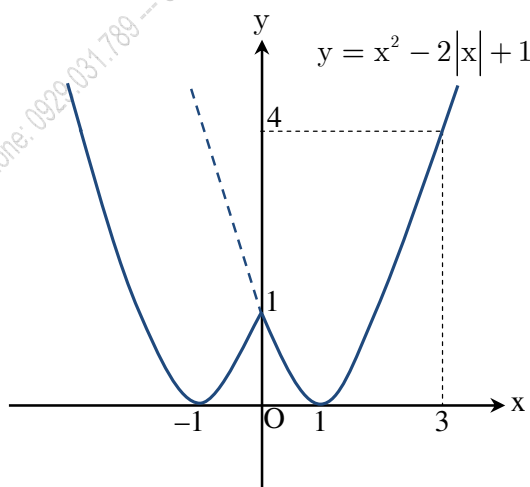
• Bước 1. Vẽ Parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$.

• Bước 2. Suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)| = |ax^2 + bx + c|, (a \neq 0)$, như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị (P) ở phía trên trục hoành Ox.
- Lấy đối xứng phần đồ thị (P) ở phía dưới trục Ox qua trục Ox.
- Đồ thị cần tìm là hợp hai phần trên. (thí dụ hình 1)



Hình 1



Hình 2

✧ Vẽ hàm đồ thị hàm số $y = f(|x|) = ax^2 + b|x| + c, (a \neq 0)$.

• Bước 1. Vẽ Parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$.

• Bước 2. Suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|) = ax^2 + b|x| + c, (a \neq 0)$, như sau:

- Giữ nguyên phần (P) ở bên phải trục tung Oy, bỏ phần bên trái trục tung.
- Lấy đối xứng phần bên phải trục tung ở trên qua trục tung Oy.
- Đồ thị cần tìm là hợp của hai phần trên (thí dụ hình 2).

Lưu ý: Parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$, ta cần nhớ:

Đỉnh I $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 111. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau

a/ $y = 2x^2 + 6x + 3.$

b/ $y = x^2 - 2x.$

c/ $y = -x^2 + 2x + 3.$

d/ $y = \frac{1}{5}x^2 - 2x + 6.$

e/ $y = -x^2 + 2x - 2.$

f/ $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2.$

g/ $y = x^2 - 4x + 4.$

h/ $y = -x^2 - 4x + 1.$

i/ $y = -x^2 - 2.$

k/ $y = x^2.$

l/ $y = (x + 3)^2.$

m/ $y = (x - 1)^2.$

Bài 112. Tìm tọa độ giao điểm của các cặp đồ thị của các hàm số sau

a/ $y = x - 1;$

$y = x^2 - 2x - 1.$

b/ $y = -x + 3;$

$y = -x^2 - 4x + 1.$

c/ $y = 2x - 5;$

$y = x^2 - 4x + 4.$

d/ $y = x^2 - 2x - 1;$

$y = x^2 - 4x + 4.$

e/ $y = 3x^2 - 4x + 1;$

$y = -3x^2 + 2x - 1.$

f/ $y = 2x^2 + x + 1;$

$y = -x^2 + x - 1.$

Bài 113. Xác định parabol (P) biết

a/ (P): $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua điểm $A(1;0)$ và có trục đối xứng $x = \frac{3}{2}.$

b/ (P): $y = ax^2 - 4x + c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$ và cắt trục hoành tại điểm $M(3;0).$

c/ (P): $y = ax^2 + bx + 3$ đi qua điểm $A(-1;9)$ và có trục đối xứng $x = -2.$

d/ (P): $y = 2x^2 + bx + c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$ và cắt trục tung tại điểm $M(0;4).$

e/ (P): $y = ax^2 - 4x + c$ đi qua hai điểm $A(1;-2), B(2;3).$

f/ (P): $y = ax^2 - 4x + c$ có đỉnh là $I(-2;-1).$

g/ (P): $y = ax^2 - 4x + c$ có hoành độ đỉnh là -3 và đi qua điểm $A(-2;1).$

h/ (P): $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(0;5)$ và có đỉnh $I(3;-4).$

i/ (P): $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(2;-3)$ và có đỉnh $I(1;-4).$

j/ (P): $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(1;1)$ và có đỉnh $I(-1;5).$

k/ (P): $y = ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $A(1;1), B(-1;3), O(0;0).$

l/ (P): $y = ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $A(0;-1), B(1;-1), C(-1;1).$

m/ (P): $y = ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $A(-1;-1), B(0;2), C(1;-1).$

n/ (P): $y = x^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(1;0)$ và đỉnh I có tung độ bằng $-1.$

o/ (P): $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh là $I(3;-1)$ và cắt Ox tại điểm có hoành độ là $1.$

Bài 114. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số sau

a/ $y = x^2 - 2|x| + 1.$

b/ $y = -3x^2 - 6|x| + 4.$

c/ $y = x(|x| - 2).$

d/ $y = x^2 - 2|x - 1|.$

$$e/ y = \begin{cases} -x^2 - 2 & \text{khi } x < 1 \\ 2x^2 - 2x - 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f/ y = \begin{cases} -2x + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + 4x + 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

$$g/ y = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 0 \\ x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$$

$$h/ y = |-2x^2 - 2x|$$

$$i/ y = \left| \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2 \right|$$

$$j/ y = \left| \frac{1}{2}x^2 + 2|x| + 1 \right|$$

Bài 115. Lập bảng biến thiên, rồi tìm giá trị lớn nhất (GTLN – max) và giá trị nhỏ nhất (GTNN – min) của hàm số trên miền xác định được chỉ ra.

$$a/ y = x^2 - x \text{ trên } [-1; 3].$$

$$b/ y = 2x^2 - 3x \text{ trên } [4; 6].$$

$$c/ y = 3x - 6x^2 \text{ trên } [-5; -2].$$

$$d/ y = -x^2 + 5x - 4 \text{ trên } [1; 2].$$

$$e/ y = -x^2 + 5x + 3 \text{ trên } [1; 3].$$

$$f/ y = 3x - 6x^2 \text{ trên } [3; +\infty).$$

$$g/ y = x^2 - 5x \text{ trên } (-\infty; 3].$$

$$h/ y = -2x^2 + \sqrt{2}x \text{ trên } (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$$

Bài 116. Vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 5x + 6$. Hãy sử dụng đồ thị để biện luận theo tham số m , số điểm chung của parabol $y = -x^2 + 5x + 6$ và đường thẳng $y = m$.

Bài 117. Cho Parabol (P): $y = x^2 - 2x + 3$.

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị của parabol trên.

b/ Dựa vào đồ thị, biện luận số nghiệm của của phương trình $x^2 - 2x - m = 0$.

c/ Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với đường thẳng $\Delta : y = 2x + 1$ và đi qua đỉnh của parabol (P).

Bài 118. Cho Parabol (P): $y = x^2 - x + 2$.

a/ Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (P).

b/ Tìm tham số m để phương trình $x^2 - x - m\sqrt{2} = 0$ có duy nhất 1 nghiệm.

Bài 119. Định tham số m để các cặp đồ thị sau không cắt nhau; cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

$$a/ (P_1): y = x^2 - 2x + 4 \text{ và } (P_2): y = -x^2 + 2x + m.$$

$$b/ (P_1): y = mx^2 - mx + m \text{ và } (P_2): y = x^2 + (2 - m)x + 3.$$

Bài 120. Định tham số m để các cặp đồ thị sau tiếp xúc nhau (có duy nhất một điểm chung)

$$a/ (P_1): y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1 \text{ và } (P_2): y = x^2 - x + m.$$

$$b/ (P_1): y = x^2 + mx - m^2 \text{ và } (P_2): y = x^2 - 5mx - 6.$$

Bài 121. Cho Parabol (P): $y = x^2 - 3x + 2$ và đường thẳng $d : y = mx + 2$.

a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (P).

b/ Tìm tham số m để hai đồ thị của hai hàm số tiếp xúc nhau (có duy nhất một điểm chung), cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

c/ Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 3 - 2m = 0$.

Bài 122. Tìm điểm cố định của họ đồ thị các hàm số

$$a/ y = (m - 1)x^2 + 2mx - 3m + 1.$$

$$b/ y = (m - 2)x^2 - (m - 1)x + 3m - 4.$$

$$c/ y = mx^2 - 2mx + 1.$$

$$d/ y = m^2x^2 + 2(m - 1)x + m^2 - 1.$$

$$e/ y = (m - 1)x^3 - m + 2.$$

$$f/ y = mx^3 - mx + 2.$$

Bài 123. Chứng minh rằng với mọi m, đồ thị của mỗi hàm số sau luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và đỉnh I của đồ thị luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

$$a/ y = x^2 - mx + \frac{m^2}{4} - 1.$$

$$b/ y = x^2 - 2mx + m^2 - 1.$$

Bài 124. Tìm quỹ tích đỉnh của các Parabol sau

$$a/ y = x^2 + mx + 1.$$

$$b/ y = mx^2 - 2m^2x + m^3 - 2m^2 + 3, (m \neq 0).$$

Bài 125. Định tham số m để cặp đồ thị cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Khi đó, tìm quỹ tích trung điểm của giao điểm của hai đồ thị

$$a/ (P): y = x(x + 2), \quad d: y = m.$$

$$b/ (P): y = -x^2 + 2mx + m, \quad d: y = 3 - x.$$

Bài 126. Vẽ đồ thị hàm số và dựa vào đồ thị biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$a/ y = |2x^2 - 10x + 12|, \quad |2x^2 - 10x + 12| = m.$$

$$b/ y = x^2 + 4|x| + 3, \quad x^2 + 4|x| + 3 = m.$$

$$c/ y = |-x^2 + 3|x| - 8|, \quad |-x^2 + 3|x| - 8| = m.$$

$$d/ |y| = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3}, \quad \left| -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \right| = m.$$

Bài 127. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$a/ x^2 + x|x + 2| = m, \quad b/ |-x^2 + 3x - 2| = m.$$

$$c/ (x + 2)(|x| - 1) - m = 0, \quad d/ x^2 - 2|x| - 3 - m = 0.$$

$$e/ x|x - 3| - 4 - m^2 = 0, \quad f/ |x^2 + 3x| - |x - 2| - m^3 + 5 = 0.$$

$$g/ (x + 1)(1 - |x|) - 2m = 0, \quad h/ 2x^2 - 3|x + 1| - m = 0.$$

Bài 128. Tìm tham số m để phương trình sau có k nghiệm phân biệt

$$a/ (m - x^2 - x - 1)(m - x^2 + x) = 0, \quad k = 4.$$

$$b/ (x^2 - 2x - m)(x^2 + 4x + 2 - m) = 0, \quad k = 4.$$

$$c/ x^4 - 2x^3 - (2m - 1)x^2 + 2(m + 1)x + m^2 + m = 0, \quad k = 4.$$

Bài 129. Định tham số m để bất phương trình sau có nghiệm

$$a/ x^2 - 3x + m > \sqrt{(x - 1)(x - 2)}. \quad b/ 2x + m > \sqrt{5 - x}.$$

$$c/ |-x^2 + 6x - 5| < m. \quad d/ 2x - 4 > 3\sqrt{x - m}.$$

Bài 130. Cho hàm số $(P): y = (2 - m)x^2 + (3m + 1)x - 2m$, (C_m) .

- a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (P) khi $m = 1$, gọi là (C_1) .
- b/ Chứng minh rằng họ đồ thị (C_m) luôn đi qua điểm cố định.
- c/ Định tham số m để đồ thị hàm số (C_m) nhận đường thẳng $y = 2x + 1$ làm tiếp tuyến.
- d/ Dựa vào đồ thị (C_1) , biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 2x + 3 - 2(m + 1) = 0.$$

Bài 131. Cho Parabol $(P): y = x^2 - 1$.

- a/ Khảo sát và vẽ đồ thị (P) .
- b/ Xác định điểm M trên (P) để đoạn OM là ngắn nhất.
- c/ Chứng minh rằng khi OM ngắn nhất thì đường thẳng OM vuông góc với tiếp tuyến tại M của (P) .

Bài 132. Cho đường thẳng $d: y = 2x + 1 - 2m$ và Parabol (P) đi qua điểm $A(1; 0)$ và có đỉnh $S(3; -4)$.

- a/ Lập phương trình và vẽ Parabol (P) .
- b/ Chứng minh rằng d luôn đi qua một điểm cố định.
- c/ Chứng minh rằng d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 133. Cho Parabol $(P): y = f(x) = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d: y = g(x) = mx + 1$.

- a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ (P) .
- b/ Định m để (P) và d tiếp xúc nhau.
- c/ Cho m tùy ý. Chứng minh: $f(x) - g(x) \geq \frac{-m^2 - 8m - 8}{4}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Bài 134. Cho $(P_m): y = x^2 - 3mx + 5$.

- a/ Tìm tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 4.
- b/ Tìm quỹ tích đỉnh của (P_m) .
- c/ Tìm m để (P_m) có duy nhất một điểm chung với Ox .
- d/ Khi $m = 1$, viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị tại điểm có hoành độ bằng 1.
- e/ Định tham số m để đường thẳng $d: y = -x - 2$ cắt (P_m) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho OA vuông góc với OB . Tính diện tích tam giác OAB .

Bài 135. Cho $(P_m): y = x^2 - (m + 1)x + m - 6$.

- a/ Định m để Parabol đi qua điểm $A(-1; 2)$.
- b/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số khi $m = 3$.
- c/ Chứng minh (P_m) luôn đi qua một điểm cố định.
- d/ Chứng minh: $\forall x \in \mathbb{R}$ thì khoảng cách từ đỉnh của (P_m) đến Ox không nhỏ hơn 6.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 136. Xác định trục đối xứng, tọa độ đỉnh, các giao điểm với trục tung và trục hoành của parabol

a/ $y = 2x^2 - x - 2$.

b/ $y = -3x^2 - 6x + 4$.

c/ $y = -2x^2 - x + 2$.

d/ $y = \frac{1}{5}x^2 - 2x + 6$.

e/ $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$.

f/ $y = -2x^2 - 2$.

Bài 137. Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau

a/ $y = x^2$.

b/ $y = x^2 - 1$.

c/ $y = x^2 + 1$.

d/ $y = (x - 1)^2$.

e/ $y = (x + 1)^2$.

f/ $y = -x^2 + 2x - 2$.

g/ $y = 2x^2 + 6x + 3$.

h/ $y = 4x^2 - 2x - 6$.

i/ $y = -3x^2 - 6x + 4$.

k/ $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$.

l/ $y = -2x^2 - 2$.

m/ $y = -x^2 + 3x$.

Bài 138. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

a/ $y = |x^2 - 2x + 1|$.

b/ $y = y = |x^2 - 2|x| + 1|$.

c/ $y = x^2 + 4|x| + 3$.

d/ $y = \left| \frac{1}{2}x^2 + 2|x| + 1 \right|$.

e/ $y = |2x^2 - 10x + 12|$.

f/ $|y| = -\frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{21}{2}$.

Bài 139. Lập bảng biến thiên, rồi tìm giá trị lớn nhất (GTLN – max) và giá trị nhỏ nhất (GTNN – min) của hàm số trên miền xác định được chỉ ra.

a/ $y = -x^2 + 6x - 1$ trên $[-2; 7]$.

b/ $y = -6x^2 + 3x + 4$ trên $[1; 2]$.

c/ $y = -x^2 + 5x - 4$ trên $[1; 2]$.

d/ $y = x^2 + 3x - 5$ trên $[-3; -2]$.

e/ $y = 2x^2 + x + 5$ trên $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$.

f/ $y = 3x^2 - 4x$ trên $[1; +\infty)$.

g/ $y = 2x^2 + 3$ trên $(-\infty; -6] \cup [5; +\infty)$.

h/ $y = 3x - 6x^2$ trên $(-\infty; 2]$.

Bài 140. Xác định Parabol (P): $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ trong các trường hợp sau, biết:

a/ Qua điểm A(8;0) và có đỉnh I(5;12).

b/ Qua điểm A(3;6) và có đỉnh I(1;4).

c/ Qua điểm A(1;-2) và có đỉnh I $\left(\frac{4}{7}; -\frac{25}{8}\right)$.

d/ Qua điểm A(2;3) và có đỉnh I(1;-4).

e/ Có đỉnh I(3;6) và đi qua điểm M(1;-10).

f/ Qua ba điểm A(0;-1), B(1;-1), C(-1;1).

g/ Qua ba điểm A $\left(1; \frac{3}{2}\right)$, B $\left(-1; \frac{7}{2}\right)$, C(2;2).

h/ Qua ba điểm A(0;3), B(1;2), C(-1;16).

i/ Qua ba điểm A(-2;7), B(-1;-2), C(3;2).

j/ Qua điểm A(1;16) và cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là -1 và 5.

- k/ Đồ thị nhận đường thẳng $x = -\frac{4}{3}$ làm trục đối xứng và đi qua hai điểm $A(0; -2), B(1; -7)$.
- l/ Có trục đối xứng là $x = -2$, đi qua điểm $A(1; 4)$ và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = 2x - 1$
- m/ Có trục đối xứng là $x = 1$, cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 và chỉ có một giao điểm với trục hoành.

Bài 141. Tìm Parabol $(P): y = ax^2 + bx + 2$ trong các trường hợp sau:

- a/ Parabol (P) đi qua $M(1; 5)$ và $N(-2; 8)$.
- b/ Parabol (P) đi qua $A(3; 4)$ và có trục đối xứng là $x = -\frac{3}{2}$.
- c/ Parabol (P) có đỉnh là $I(2; -2)$.
- d/ Parabol (P) đi qua $B(-1; 6)$ và có tung độ đỉnh là $-\frac{1}{4}$.

Bài 142. Tìm điểm cố định của họ đồ thị

- a/ $y = mx^2 + 2mx - 3m$.
- b/ $y = m^2x^2 + 2(m-1)x + m^2$.
- c/ $y = (m-1)x^2 + 2x - 3m$.
- d/ $y = mx^2 - 2x + m$.
- e/ $y = (m-2)x^3 - m + 2$.
- f/ $y = mx^3 - 2mx^2 + x + (2-x)m$.

Bài 143. Tìm tọa độ giao điểm của các đường sau:

- a/ $d: y = x - 2$ $(P): y = -x^2$.
- b/ $d: y = 2x + 3$ $(P): y = x^2$.
- c/ $d: y = -x + 1$ $(P): y = 2x^2$.
- d/ $d: x + y - 1 = 0, (P): y - x^2 + 4x - 3 = 0$.
- e/ $d: 2x - y - 11 = 0$ $(P): y - x^2 + 6x - 5 = 0$.
- f/ $d: x + 2 - y = 0, (P): 2y - x^2 + 2x - 8 = 0$.

Bài 144. Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$ trong các trường hợp sau

- a/ Đi qua điểm $A(0; 1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $y = x - 1$ tại điểm $M(1; 0)$.
- b/ Đi qua điểm $A(0; 1)$ và tiếp xúc với hai đường $y = x - 1$ và đường $y = -2x + 1$.
- c/ Đi qua điểm $A(2; -3)$ và tiếp xúc với hai đường $y = 2x - 7$ và đường $y = -4x - 4$.
- d/ Đi qua hai điểm $A(0; 2), B(-2; 8)$ và tiếp xúc với trục hoành Ox .
- e/ Hàm số đạt cực tiểu bằng 2 và đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -2x + 6$ tại hai điểm có tung độ tương ứng bằng 2 và 10.

Bài 145. Cho các hàm số $(P_1): y = 2x(x + 2)$ và $(P_2): y = (x + 1)(x + 2)$.

- a/ Vẽ các đồ thị hàm số (P_1) và (P_2) trên cùng một hệ trục tọa độ và tìm giao điểm của chúng.
- b/ Định a, b, c để hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có cực đại bằng 8 và đồ thị của nó qua giao điểm của (P_1) và (P_2) .

Bài 146. Cho Parabol $(P): y = x^2 - 6x + 5$ và đường thẳng $d: y = ax + 1 - 2a$.

- a/ Khảo sát và vẽ đồ thị (P) và d trên cùng một hệ trục tọa độ.
- b/ Chứng minh rằng d luôn đi qua điểm cố định.

c/ Bằng đồ thị và phép toán. Chứng minh $x^2 - 6x + 5 = ax + 1 - 2a$ luôn có nghiệm.

Bài 147. Cho $(P_1): y = x^2 - 4x + 3$ và $(P_2): y = x^2 + 2x + 3$.

- a/ Vẽ (P_1) và (P_2) trên cùng một hệ trục tọa độ.
- b/ Tìm tọa độ giao điểm của chúng bằng đồ thị và phép tính.
- c/ Định m để đường thẳng $d: y = m$ cắt mỗi đồ thị tại hai điểm phân biệt.
- d/ Giả sử d cắt (P_1) tại hai điểm phân biệt A, B và d cắt (P_2) tại hai điểm C, D. Tính độ dài đoạn AB, CD theo m.
- e/ Tìm m để $AB = CD$.

Bài 148. Cho $(P_1): y = x^2 - 4x + 2$ và $(P_2): y = -x^2$.

- a/ Vẽ (P_1) và (P_2) trên cùng một hệ trục tọa độ.
- b/ Bằng phép tính, chứng minh rằng hai Parabol trên tiếp xúc nhau.
- c/ Gọi A là tiếp điểm. Lập phương trình đường thẳng d đi qua A và song song với đường thẳng $\Delta: y = 2x + 2013$.
- d/ Đường thẳng d cắt (P_1) tại M và cắt (P_2) tại N. Tìm tọa độ điểm M và N. Chứng minh rằng A là trung điểm của MN.
- e/ Viết phương trình tiếp tuyến chung của $(P_1): y = x^2 - 4x + 2$ và $(P_3): y = x^2 - x - 1$.

Bài 149. Cho Parabol $(P): y = x^2 - 6x + 5$.

- a/ Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (P) .
- b/ Gọi A và B là giao điểm của (P) và Ox ($x_A < x_B$). Viết phương trình đường thẳng d đi qua A và có hệ số góc bằng 1, đường thẳng Δ qua B và vuông góc với d .
- c/ Gọi C là giao điểm của d và Δ . Chứng minh rằng ΔABC vuông cân.

Bài 150. Định tham số m để các cặp đồ thị sau không cắt nhau, cắt nhau tại hai điểm phân biệt

- a/ $(P_1): y = 2x^2 + 3x - 5$ và $(P_2): y = -6x^2 + 9x - 2m$.
- b/ $(P_1): y = -x^2 + 3mx - 5m$ và $(P_2): y = 3x^2 + 5x - m$.

Bài 151. Định tham số m để các cặp đồ thị sau tiếp xúc nhau (có một điểm chung duy nhất)

- a/ $(P_1): y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$ và $(P_2): y = x^2 - x + m$.
- b/ $(P_1): y = -\frac{1}{3}x^2 + x + 4$ và $(P_2): y = x^2 - \frac{2}{3}x + m$.
- c/ $(P_1): y = -x^2 + x + 3$ và $(P_2): y = x^2 - x - 2m$.

Bài 152. Cho $(P): y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$.

- a/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (P) .
- b/ Viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(2;0)$ và có hệ số góc k. Biện luận theo k số giao điểm của d và (P) .
- c/ Một đường thẳng Δ đi qua $B(2;0)$ và cắt (P) theo một dây cung nhận B làm trung điểm. Tìm phương trình đường thẳng Δ .

Chương 3 PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH



A – ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

① Phương trình một ẩn $f(x) = g(x)$, (1).

- x_0 là một **nghiệm** của (1) nếu " $f(x_0) = g(x_0)$ " là một mệnh đề đúng.
- Giải phương trình là tìm **tất cả** các nghiệm của phương trình đó.
- Khi giải phương trình ta thường tìm **điều kiện xác định** của phương trình.

✪ Lưu ý

- ✧ Khi tìm điều kiện xác định (TXĐ) của phương trình, ta thường gặp các trường hợp sau
 - Nếu trong phương trình có chứa biểu thức $\frac{1}{P(x)}$ thì cần điều kiện $P(x) \neq 0$.
 - Nếu trong phương trình có chứa biểu thức $\sqrt{P(x)}$ thì cần điều kiện $P(x) \geq 0$.
 - Nếu trong phương trình có chứa biểu thức $\frac{1}{\sqrt{P(x)}}$ thì cần điều kiện $P(x) > 0$.
- ✧ Các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là hoành độ các giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

② Phương trình tương đương, phương trình hệ quả

Cho hai phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ (1) có tập nghiệm S_1 và $f_2(x) = g_2(x)$ (2)

- $(1) \Leftrightarrow (2)$ khi và chỉ khi $S_1 = S_2$.
- $(1) \Rightarrow (2)$ khi và chỉ khi $S_1 \subset S_2$.

③ Phép biến đổi tương đương

- Nếu một phép biến đổi phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của nó thì ta được một phương trình tương đương. Ta thường sử dụng các phép biến đổi sau
 - + Cộng hai vế của phương trình với cùng một biểu thức.
 - + Nhân hai vế của phương trình với một biểu thức có giá trị khác 0.
- Khi **biến phương** hai vế của một phương trình, nói chung ta được một phương trình **hệ quả**. Khi đó ta phải kiểm tra lại để loại bỏ **nghiệm ngoại lai**.

Bài 160. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình và giải phương trình đó

a/ $\frac{2x-3}{2} = \frac{4x+3}{2}$.

b/ $3x + \frac{5}{x-4} = 12 + \frac{5}{x-4}$.

c/ $5x + \frac{1}{x+3} = 15 + \frac{1}{x+3}$.

d/ $x^2 - \frac{1}{x-1} = 9 - \frac{1}{x-1}$.

e/ $3x + \frac{2}{x-5} = 15 + \frac{2}{x-5}$.

f/ $\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{x-1}{x^2-x+1} = \frac{3}{x(x^4+x^2+1)}$.

$$g/ \frac{9-x}{2009} + \frac{11-x}{2011} = 2.$$

$$h/ \frac{15-x}{2010} + \frac{17-x}{2012} + \frac{19-x}{2014} = 3.$$

$$i/ \frac{x-2014}{2007} + \frac{x-2012}{2009} + \frac{x-2010}{2011} = \frac{x-2007}{2014} + \frac{x-2009}{2012} + \frac{x-2011}{2010}.$$

Bài 161. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình và giải phương trình đó

$$a/ \sqrt{x+1} + x = 3 + \sqrt{x+1}.$$

$$b/ \sqrt{x-5} - x = 2 + \sqrt{x-5}.$$

$$c/ \frac{2x+1}{\sqrt{x-3}} = \frac{x+2}{\sqrt{x-3}}.$$

$$d/ \frac{2x^2}{\sqrt{x+1}} = \frac{8}{\sqrt{x+1}}.$$

$$e/ 1 + \sqrt{1-x} = \sqrt{x-2}.$$

$$f/ \sqrt{x+1} = \sqrt{2-x}.$$

$$g/ \sqrt{2x+1} = \frac{1}{x}.$$

$$h/ \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{x-1}}.$$

$$i/ \sqrt{x+1} = x+1.$$

$$j/ \sqrt{x-1} = 1-x.$$

$$k/ 2x+3 + \frac{4}{x-1} = \frac{x^2+3}{x-1}.$$

$$l/ \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+1}} = 3x^2+x+1.$$

$$m/ \frac{x}{\sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{x+3}}.$$

$$n/ \frac{2x+3}{x^2-4} = \sqrt{x+1}.$$

$$o/ x - \sqrt{3-x} = \sqrt{x-3} + 3.$$

$$p/ x^2 = \sqrt{2-x} = 3 + \sqrt{x-4}.$$

$$q/ x^2 + \sqrt{-x-1} = 4 + \sqrt{-x-1}.$$

$$r/ \frac{3x^2+1}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{\sqrt{x-1}}.$$

$$s/ \frac{x^2+3x+4}{\sqrt{x+4}} = \sqrt{x+4}.$$

$$t/ \frac{3x^2-x-2}{\sqrt{3x-2}} = \sqrt{3x-2}.$$

Bài 162. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình và giải phương trình đó

$$a/ \sqrt{x-3} (x^2-3x+2) = 0.$$

$$b/ \sqrt{x+1} (x^2-x-2) = 0.$$

$$c/ \frac{x}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-2}.$$

$$d/ \frac{x^2-4}{\sqrt{x+1}} = \frac{x+3}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}.$$

Bài 163. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình và giải phương trình đó

$$a/ |x-2| = x+1.$$

$$b/ |x+1| = x-2.$$

$$c/ 2|x-1| = x+2.$$

$$d/ |x-2| = 2x-1.$$

Bài 164. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình và giải phương trình đó

$$a/ \frac{|x|}{\sqrt{x-1}} = \frac{x}{\sqrt{x-1}}.$$

$$b/ \frac{|x-2|}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}.$$

$$c/ \frac{|x|}{\sqrt{2-x}} = \frac{x}{\sqrt{2-x}}.$$

$$d/ \frac{|x-1|}{\sqrt{x-2}} = \frac{1-x}{\sqrt{x-2}}.$$

Bài 165. Tìm các tham số m để các cặp phương trình sau đây tương đương nhau

$$a/ (x+1)^2 = 0 \text{ và } mx^2 - (2m+1)x + m = 0.$$

$$b/ x+2 = 0 \text{ và } \frac{mx}{x+3} + 3m - 1 = 0.$$

$$c/ x^2 - 9 = 0 \text{ và } 2x^2 + (m-5)x - 3(m+1) = 0.$$

$$d/ (3x-2) = 0 \text{ và } (m+3)x - m + 4 = 0. \quad e/ x+2 = 0 \text{ và } m(x^2+3x+2) + m^2x+2=0.$$

B – PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT $ax = b$



Xét phương trình bậc nhất: $ax + b = 0$ (1)		
Hệ số		Kết luận
$a \neq 0$		(1) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$
$a = 0$	$b \neq 0$	(1) vô nghiệm
	$b = 0$	(1) nghiệm đúng với mọi x

★ **Chú ý:** Khi $a \neq 0$ thì (1) được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 166. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

a/ $mx = 5$.

b/ $(m-1)x = m-1$.

c/ $(2m-1)x = m+3$.

d/ $(m+1)x = 2m+2$.

e/ $m(x-2) = 3x+1$.

f/ $(m-1)x = 2x+m-3$.

g/ $(m+1)(x-2) = 3m-1$.

h/ $(m-1)(x+1) = m^2-1$.

i/ $(m-3)x = m(m-1)-6$.

j/ $(2m-3)x = m(2m-5)+3$.

Bài 167. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

a/ $2mx = 2x + m + 4$.

b/ $m(x-4) = 5x-2$.

c/ $m(x+3) = x-m$.

d/ $(m+1)(x-2) = 3m-1$.

Bài 168. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

a/ $m(m-2)x = m-2$.

b/ $(m^2-3m)x = m^2-9$.

c/ $(m^2-3m+2)x = m-2$.

d/ $m^2(x-1) = mx-1$.

e/ $(m^2-m)x = 2x+m^2-1$.

f/ $m(m^2-1)x = m(m+1)$.

g/ $(m^2-1)x = m(m+1)(m+2)$.

h/ $m(x-m+3) = m(x-2)+6$.

Bài 169. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

a/ $x\sqrt{m-1} = m-1$.

b/ $(m-1)x = \sqrt{m-1}$.

c/ $\frac{x-m}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{x-1}$.

d/ $\frac{x-m}{\sqrt{3x-2}} + \sqrt{3x-2} = \frac{mx}{\sqrt{3x-2}}$.

Bài 170. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số

$$a/ \frac{mx}{m-4} = \frac{-2}{m-4}.$$

$$b/ \frac{(m-2)x}{2m-3} = \frac{m^2-4}{m-1}.$$

$$c/ \frac{m^2x}{2m-5} = \frac{mx-(m+1)}{2m-5}.$$

$$d/ \frac{m^2x}{m-5} + \frac{2mx-m^2+1}{m-5} = 1.$$

$$e/ \frac{x+ab}{a+1} + \frac{x+bc}{c+1} + \frac{x+b^2}{b+1} = 3b, (a, b, c \neq -1). \quad f/ \frac{x-a}{a} - b = \frac{x-b}{b} - a \quad (a, b \neq 0).$$

$$g/ \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} + \frac{x-a-b}{c} = 3, (a, b, c \neq 0). \quad h/ (ab+2)x + a = 2b + (b+2a)x.$$

Bài 171. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số

$$a/ \frac{3}{x-1} = m.$$

$$b/ \frac{2m-1}{x-2} = m-3.$$

$$c/ \frac{mx-2m}{x-2} = -2.$$

$$d/ \frac{(m+1)x+m-2}{x+3} = m.$$

$$e/ \frac{(m^2+3)x+6}{x-1} = m.$$

$$f/ \frac{m^2x-m^2}{x-1} = m.$$

Bài 172. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số

$$a/ |x-m| = |2x|.$$

$$b/ |3x+m| = |x-m+2|.$$

$$c/ |2mx+3| = 5.$$

$$d/ |mx-2| = |x+m|.$$

Bài 173. Cho phương trình: $(m^2-1)(x+2)+1=m \quad (*)$.

a/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có nghiệm.

b/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=3$.

c/ Tìm m để $x=3$ là nghiệm của phương trình $(*)$.

Bài 174. Cho phương trình $(m^2-m)x=2x+m^2-1 \quad (*)$.

a/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có nghiệm.

b/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=0$.

c/ Tìm m để $x=1$ là một nghiệm của phương trình $(*)$.

Bài 175. Tìm tham số m để các phương trình sau đây vô nghiệm.

$$a/ (m+1)x-(x+2)=0.$$

$$b/ m^2(x-1)=2(2x-m-4).$$

$$c/ \frac{x-m}{x-2} + \frac{x-2}{x} = 2.$$

$$d/ \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \frac{m-1}{\sqrt{x}}.$$

Bài 176. Định tham số để tập nghiệm của các phương trình sau là $\mathbb{R}$.

a/ $(m-2)x = m-1$.

b/ $mx + 3 = 3x + m$.

c/ $3mx - 1 = x - 9m^2$.

d/ $m^2(x-1) = 2(mx-2)$.

e/ $(m^2 + 2m - 3)x = m - 1$.

f/ $m^2(mx-1) = 2m(2x+1)$.

g/ $(mx+2)(x+1) = (mx+m^2)x$.

h/ $(mx+2)(x+1) = (mx+m^2)x$.

j/ $2ax - b + 4 = bx + 5x + a$.

l/ $(m+1)^2x = (2m+5)x + 2 + m$.

Bài 177. Tìm tham số m để các phương trình sau đây có nghiệm

a/ $m^2(x-1) = x - m$.

b/ $m^2(x-m) = x - m^2$.

c/ $(m^2 + 2)x - 2m = x - 3$.

d/ $m(x-m) = x + m - 2$.

e/ $m^2(x-1) + m = x(3m-2)$.

f/ $(m^2 - m)x = 2x + m^2 - 1$.

g/ $m^2(x-1) = 4x + 5m + 4$ với $x > 0$.

h/ $\frac{(m-3)x+2}{x-2} = m+1$.

Bài 178. Tìm tham số m để các phương trình sau đây có nghiệm duy nhất

a/ $m(m-1)x = m^2 - 1$.

b/ $m^2(mx-1) = 2m(2x+1)$.

c/ $\frac{x+2}{x-m} - \frac{x+3}{x+1} = 0$.

d/ $\frac{x-m}{x-2} + \frac{x-2}{x} = 2$.

e/ $|2x-m| = |x-1|$.

f/ $|mx-2| = |x+4|$.

Bài 179. *** Định các tham số m để các phương trình sau đây có nghiệm

a/ $|x-1| + 2x - 3 = m$.

b/ $2(|x| + m - 1) = |x| - m + 3$.

c/ $\frac{mx^2}{|x|-1} - m|x| = 2m+1$.

d/ $\frac{a-x}{a-1} - \frac{x-1}{a+1} = \frac{2a}{a^2-1}, (x \geq 0)$.

e/ $\frac{3x-m}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} = \frac{2x+5m+3}{\sqrt{x+1}}$.

f/ $\frac{2mx-1}{\sqrt{x-1}} - 2\sqrt{x-1} = \frac{m+1}{\sqrt{x-1}}$.

g/ $\frac{(2m+1)x+3}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{(2m+3)x+m-2}{\sqrt{4-x^2}}$.

h/ $x\sqrt{x+1} - \frac{x^2+x+2m}{\sqrt{x+1}} = m\sqrt{x+1}$.

i/ $\frac{x+m}{x-1} = \frac{x+3}{x-2}$.

j/ $\frac{x-m}{x-1} + \frac{x-1}{x-m} = 2$.

k/ $\frac{(m+1)x+m-2}{x+3} = m$.

l/ $\frac{x}{\sqrt{x+m}} = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$.

Bài 180. Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình có nghiệm nguyên

a/ $(m-2)x = m-1$.

b/ $(m-1)x = 2x + m - 3$.

b/ $m(x+3) = x - m$.

d/ $(m+1)(x-2) = 3m-1$.

c/ $(2m-3)x = m(2m-5) + 3$.

d/ $(3m-2)x - m = 4mx + 2m - 5$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 181. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m

a/ $mx = m + 1$.

b/ $(m - 1)x = 2m - 1$.

c/ $(m - 3)x = 2m - 4$.

d/ $(m + 1)x = 2m + 2$.

e/ $m(x + 1) = 3m + 2$.

f/ $m(x - 4) = 5x - 2$.

g/ $(3m - 1)x + m = 2x + 1$.

h/ $(m - 1)(x - 4) = 2x - 3$.

i/ $(m - 1)x = m^2 - 3m + 2$.

j/ $(2m - 3)x = m(2m - 5) + 3$.

Bài 182. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m

a/ $mx + 3 = 3x + m$.

b/ $(m - 1)x = 2x + m - 3$.

c/ $(3m - 1)x + m = 2x + 1$.

d/ $(m - 1)(x + 1) = m^2 - 1$.

e/ $m(m - 1)x = m^2 - 1$.

f/ $(2m^2 + m - 3)x = m - 1$.

g/ $m^2x - 3 = 9x + m$.

h/ $(m^2 + 2)x - 2m = x - 3$.

i/ $m(mx - 1) = (4m - 3)x - 3$.

j/ $m^2x + 4m - 3 = x + m^2$.

k/ $(m + 1)^2x - m = (2m + 5)x + 2$.

l/ $m^3x + 1 = m^2(x + 1)$.

m/ $3(m + 1)x + 4 = 2x + 5(m + 1)$.

n/ $2(m - 1)x - m(x - 1) = 2m + 3$.

o/ $m(4x - m + 3) = (4mx - 2m) + 6$.

p/ $m(x + m) - (4 + m)x = m^2 - 4x$.

q/ $x - \frac{mx - 1}{2} = \frac{m + 1}{3} - 2x$.

r/ $(m - 1)x - \frac{mx - 1}{3} = \frac{mx + 1}{2} - 2x$.

s/ $(m - 2)^2x = m(1 - 4x) + 2 + 8x$.

t/ $m^2x + m(5x - 2) = 6(1 - x)$.

u/ $m^2(x - 1) + m = x(3m - 2)$.

v/ $m^2x + 4m - 3 = m^2 + 6mx - 5x$.

w/ $(x - 1)m^2 - (2x + 1)m + x + 2 = 0$.

x/ $m^2(x - 1) + 3mx = (m^2 + 3)x - 1$.

y/ $a(ax + b) = 4ax + b^2 - 5$.

z/ $a(2 - ax) = 2b - ax$.

α/ $a(ax + 2b^2) - a^3 = b^2(x + a)$.

β/ $a^2x + 2ab = b^2x + a^2 + b^2$.

Bài 183. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m

a/ $x\sqrt{2m - 1} = 2m - 1$.

b/ $\frac{x + 1}{\sqrt{x}} = \frac{m}{\sqrt{x}}$.

c/ $\frac{x - m}{\sqrt{2x - 1}} = \frac{m}{\sqrt{2x - 1}} + \sqrt{2x - 1}$.

d/ $(x + 2m)\sqrt{x - 4} = 0$.

e/ $(mx + 1)\sqrt{x - 1} = 0$.

f/ $\frac{(m - 1)x}{2m - 3} = \frac{2m + 1}{2m - 3}$.

g/ $\frac{mx}{3m - 1} = \frac{2mx - (m + 1)}{3m - 1}$.

h/ $\frac{(m - 1)x}{m} = \frac{3mx}{m + 1}$.

i/ $\frac{m - x}{m - 1} - \frac{x - 1}{m + 1} = \frac{2a}{a^2 - 1}$.

j/ $\frac{2m - 3}{x + 3} - m + 4 = 0$.

$$k/ \frac{mx - (m + 2)}{2x - 1} = -4.$$

$$m/ \frac{x + 2}{x - m} = \frac{x + 1}{x - 1}.$$

$$o/ \frac{3mx - 2}{x - 2} = m + \frac{5m}{x - 2}.$$

$$q/ \frac{5x - m}{x - 2} - \frac{4x - 3}{x} = 1.$$

$$s/ \frac{5m - 2}{mx - 1} = -3.$$

$$u/ \frac{x - 2}{x + m} - \frac{3}{x + 1} = -2.$$

$$x/ \frac{ax + b}{x - a} = \frac{x - b}{x + a}.$$

$$l/ \frac{(m^2 + 1)x - 10}{x - 2} = m + 1.$$

$$n/ \frac{m}{mx + 3} = 2.$$

$$p/ \frac{x + m}{x + 1} + \frac{x - 2}{x} = 2.$$

$$r/ \frac{5x - m}{2x - 1} - \frac{4x - 3}{x} = -3.$$

$$t/ \frac{x - 2}{x - 3} = \frac{x}{x + m}.$$

$$v/ \frac{5}{2x - m} = \frac{3}{4 - mx}.$$

$$y/ \frac{x - a}{b + c} + \frac{x - b}{c + a} + \frac{x - c}{a + b} = 3.$$

Bài 184. Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số

$$a/ |x - 2m| = |x + 1|.$$

$$c/ |mx + 2x - 1| = |x|.$$

$$e/ |3x + m| = |2x - 2m|.$$

$$g/ |mx - 2| = |x + 4|.$$

$$i/ |mx + 1| = |2x + m - 3|.$$

$$b/ |m - 4x| = |x - 3m|.$$

$$d/ |mx - 3x| = |x - m|.$$

$$f/ |3m - x| = |5x - 4m|.$$

$$h/ |mx - x + 1| = |x + 2|.$$

$$j/ |ax + b| = |bx + a|.$$

Bài 185. Định tham số m để các phương trình sau vô nghiệm

$$a/ (4m^2 - 2)x = 1 + 2m - x.$$

$$c/ \frac{x - 2}{x - 3} = \frac{x}{x + m}.$$

$$e/ \frac{x + m}{x + 1} + \frac{x - 2}{x} = 2.$$

$$b/ (m + 1)^2 x - 2 = (4m + 9)x + m.$$

$$d/ \frac{x + m}{m + 1} - \frac{2}{x} = 1.$$

$$f/ \frac{x + 1}{x - m + 1} = \frac{x}{x + m + 2}.$$

Bài 186. Định tham số để phương trình sau có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

$$a/ m^2x + m + 2 = m^2 + 4x.$$

$$c/ m^2x + 4m - 3 = x + m^2.$$

$$e/ ax - b = 6x - 2bx + a.$$

$$b/ m^2(x - 1) = 9x + m - 6.$$

$$d/ m^3x = mx + m^2 - m.$$

$$f/ a(x - 1) + b(2x + 1) = x + 2.$$

Bài 187. Định tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$a/ m^2x = 4x + m^2 + m - 2.$$

$$c/ m^2(x - 1) = 4x - 3m + 2, (x > 0)$$

$$b/ m^2(x - m) = x - m.$$

$$d/ \frac{2x + m}{x - 1} - \frac{x + m - 1}{x} = 1.$$

Bài 188. Định tham số m để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$a/ \frac{x + 2}{x - m} = \frac{x + 1}{x - 1}.$$

$$b/ \frac{m}{mx + 3} = 2.$$

C – PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$



① Cách giải

$ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0) \quad (*)$	
$\Delta = b^2 - 4ac$	Kết luận
$\Delta > 0$	$(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
$\Delta = 0$	$(*)$ có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$.
$\Delta < 0$	$(*)$ vô nghiệm

Nhắm nghiệm

- Nếu $a + b + c = 0$ thì $(*)$ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -\frac{c}{a}$.
- Nếu $a - b + c = 0$ thì $(*)$ có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = -\frac{c}{a}$.

② Định lý Viét

Hai số x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ khi và chỉ khi chúng thoả mãn các hệ thức $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ và $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Dạng toán 1. Giải và biện luận phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

Để giải và biện luận phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ta cần xét các trường hợp có thể xảy ra của hệ số a:

- Nếu $a = 0$ thì trở về giải và biện luận phương trình bậc nhất $bx + c = 0$.
- Nếu $a \neq 0$ thì ta xét các trường hợp của biệt số Δ như trên.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 189. Giải và biện luận phương trình bậc hai

a/ $x^2 + 2(m-1)x - 2m + 5 = 0$.

b/ $2x^2 + 12x - 15m = 0$.

c/ $(m-1)x^2 + (2-m)x - 1 = 0$.

d/ $mx^2 - 2(m+3)x + m + 1 = 0$.

e/ $(2m-1)(m+2)x^2 - (5m+4)x + 3 = 0$.

f/ $(2m^2 - 5m + 2)x^2 + 2mx + 2 = 0$.

g/ $(m+3)x^2 - x + 2m - 1 = 0$.

h/ $(m-1)(m+2)x^2 - (2m+3)x - 1 = 0$.

Bài 190. Định tham số m để các phương trình sau đây có nghiệm

c/ $x^2 - 2(m-2)x + 2m^2 - 4m - 5 = 0$.

d/ $mx^2 + x - 1 = 0$.

g/ $x^2 - (2m+1)x + m(m+1) = 0$.

h/ $x^2 - (m-2)x + 1 - m = 0$.

k/ $3mx^2 + (4-6m)x + 3(m-1) = 0$.

l/ $(x-1)[(m+1)x-2] = 0$.

o/ $(mx-2)(2mx-x+1) = 0$.

p/ $mx^2 - (1-2m)x + m + 4 = 0$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 191. Giải và biện luận phương trình bậc hai

a/ $4x^2 + 2(m+3)x + 3 = 0$.

b/ $(m-1)x^2 + (2-m)x - 1 = 0$.

c/ $(2m-1)(m+2)x^2 - (5m+4)x + 3 = 0$.

d/ $(m+3)x^2 - x + 2m - 1 = 0$.

e/ $x^2 + 5x + 3m - 1 = 0$.

f/ $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$.

g/ $(m-1)x^2 + 2x + 1 = 0$.

h/ $(m-2)x^2 + (m-1)x - m = 0$.

Bài 192. Định tham số m để các phương trình sau đây có nghiệm

a/ $2x^2 + 3x + m - 1 = 0$.

b/ $(m-1)x^2 + 2(m+1)x - m = 0$.

c/ $x^2 - (m^2-1)x + m^2 - 2 = 0$.

d/ $(m+1)x^2 - (2m+1)x + m - 2 = 0$.

e/ $(m-2)x^2 + 2(m-3)x + m - 5 = 0$.

f/ $(m^2+1)x^2 - 2(m+3)x + 1 = 0$.

g/ $m(m+1)x^2 - (2m+1)x + 1 = 0$.

h/ $mx^2 - 2(m+3)x + m + 1 = 0$.

i/ $(m^2 - 5x - 36)x^2 - 2(m+4)x + 1 = 0$.

j/ $(mx-3)[(m+1)x-3] = 0$.

Dạng toán 2. Dấu của nghiệm số của phương trình $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ (1)

★ (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0$.

★ (1) có hai nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

★ (1) có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$.

★ (1) có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$.

✓ Lưu ý: Trong các trường hợp trên nếu yêu cầu hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 193. Tìm tham số m để các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt trái dấu

a/ $x^2 + 5x + 3m - 1 = 0$.

b/ $2x^2 + 12x - 15m = 0$.

c/ $x^2 - 4x + m + 1 = 0$.

d/ $mx^2 + mx - m - 2 = 0$.

e/ $(m - 2)^2 x^2 - x + m + 3 = 0$.

f/ $(2m^2 - m - 1)x^2 + 2x - m = 0$.

g/ $(m - 1)x^2 + (2 - m)x - 1 = 0$.

h/ $(m + 1)x^2 + 2(m + 4)x + m + 1 = 0$.

Bài 194. Định tham số m để các phương trình sau có hai nghiệm dương phân biệt

a/ $mx^2 - (m^2 - 2m - 2)x + m^2 - 5m + 6 = 0$.

b/ $mx^2 + (2 - 3m)x - 6 = 0$.

c/ $(m - 1)x^2 - (2m^2 - 2m - 1)x - 2m = 0$.

d/ $x^2 + (2m - 1)x - m = 0$.

e/ $(m + 1)x^2 - 2mx + m = 0$.

f/ $(m^2 - 1)x^2 + mx + 1 = 0$.

Bài 195. Định tham số m để các phương trình sau có hai nghiệm âm phân biệt

a/ $x^2 - (3m + 2)x + 2m^2 + 3m + 1 = 0$.

b/ $m^2x^2 - mx - 6 = 0$.

c/ $x^2 - 2mx - 4m - 1 = 0$.

d/ $x^2 + (1 - m)x + 2 - m = 0$.

e/ $(m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + m + 2 = 0$.

f/ $(2m - 1)x^2 + 2x + 1 = 0$.

Bài 196. Cho phương trình: $mx^2 - 2mx + m - 1 = 0$ (*). Tìm tham số m để

a/ Phương trình (*) có duy nhất một nghiệm âm.

b/ Phương trình (*) có hai nghiệm âm phân biệt.

Bài 197. Cho phương trình: $(m - 1)x^2 + 2(m - 3)x + m = 0$ (*). Tìm tham số m để

a/ Phương trình (*) có duy nhất một nghiệm dương.

b/ Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt.

Bài 198. Cho phương trình: $(m - 2)x^2 - (m - 1)^2 x + m = 0$ (*). Tìm tham số m để

a/ Phương trình (*) vô nghiệm

b/ Phương trình (*) không có nghiệm dương.

Bài 199. Cho phương trình: $(m - 1)x^2 - (m^2 + 1)x + 2m + 2 = 0$ (*). Tìm tham số m để

a/ Phương trình (*) vô nghiệm.

b/ Phương trình (*) không có nghiệm âm.

Bài 200. Cho phương trình: $(x + 2)[mx^2 + (m + 3)x - m - 3] = 0$ (*). Tìm tham số m để

a/ Phương trình (*) có hai nghiệm duy nhất và hai nghiệm đó âm.

b/ Phương trình (*) có ít nhất một nghiệm dương.

Bài 201. Cho phương trình: $\sqrt{x - 1}(x^2 - 4x + 1 - m) = 0$ (*). Tìm tham số m để

a/ Phương trình (*) có nghiệm.

b/ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt. (HD: đặt $t = x - 1$).

Bài 202. Biện luận theo m số nghiệm âm, số nghiệm dương của các phương trình sau
 $mx^2 + (m^2 - 3m + 1)x - 2m^2 + 3m - 1 = 0$.

Bài 203. Định m để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thỏa:

a/ $x^2 + 2mx - m^2 = 0$ $x_1 < x_2 < -1$.

b/ $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ $2 < x_1 < x_2$.

c/ $x^2 + (m-2)x - m - 1 = 0$ $x_1 < 3 < x_2$.

d/ $x^2 + (2m+3)x + 3m - 1 = 0$ $x_1 \leq -1 \leq x_2$.

e/ $mx^2 + 2mx + m - 3 = 0$ $x_1 \leq x_2 \leq 4$.

f/ $(m-1)x^2 + 2mx + m = 0$ $-3 \leq x_1 \leq x_2$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 204. Tìm tham số m để các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt trái dấu

a/ $x^2 + 2x - m = 0$.

b/ $x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$.

c/ $mx^2 - (m+1)x + m - 1 = 0$.

d/ $mx^2 - 2(m+3)x + m + 1 = 0$.

e/ $x^2 + x - m^2 + 1 = 0$.

f/ $x^2 - 2mx - m^2 + 2m = 0$.

g/ $(m+2)x^2 + 2x - m + 2 = 0$.

h/ $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$.

Bài 205. Định tham số m để các phương trình sau có hai nghiệm dương phân biệt

a/ $x^2 + (1-3m)x + 2m^2 - 2m = 0$.

b/ $x^2 + (5-2m)x + m^2 - 5m + 6 = 0$.

c/ $x^2 + (2m+3)x - m + 3 = 0$.

d/ $x^2 - 4mx + 3m^2 = 0$.

e/ $x^2 - 3x + m - 1 = 0$.

f/ $mx^2 + 2(m+1)x + m - 2 = 0$.

Bài 206. Định tham số m để các phương trình sau có hai nghiệm âm phân biệt

a/ $x^2 - (3m-1)x + 2m^2 - m = 0$.

b/ $mx^2 - (2m^2 + m + 1)x + 2m + 1 = 0$.

c/ $x^2 - 2(m+1)x + 3m - 1 = 0$.

d/ $x^2 + (1-4m)x + 3m^2 - m = 0$.

e/ $mx^2 - (4m+1)x + 4m + 2 = 0$.

f/ $mx^2 - x + m + 1 = 0$.

Bài 207. Cho phương trình: $(m^2 - 4)x^2 + 2(m+1)x - 1 = 0$ (*). Tìm tham số m để

a/ Phương trình (*) có ít nhất một nghiệm âm.

b/ Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu.

c/ Phương trình (*) có duy nhất một nghiệm dương.

Bài 208. Cho phương trình: $(x-1)[(m-1)x^2 + (m-1)x - 4] = 0$ (*). Tìm tham số m để

a/ Phương trình (*) có ba nghiệm dương phân biệt.

b/ Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt.

Bài 209. Biện luận theo m số nghiệm âm, số nghiệm dương của các phương trình sau

$$mx^2 - (m^2 + m - 1)x + m^2 - m = 0.$$

Bài 210. Định m để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thỏa:

- | | |
|--|--------------------------|
| a/ $x^2 - 2x - m^2 - 2m = 0$ | $x_1 < 2 < x_2$. |
| b/ $2x^2 - (m + 3)x - m^2 + 3m - 2 = 0$ | $x_1 < x_2 < 0$. |
| c/ $2x^2 + (m - 6)x - m^2 - 3m = 0$ | $1 \leq x_1 \leq x_2$. |
| d/ $mx^2 + (2m^2 - m - 1)x - 2m + 1 = 0$ | $x_1 \leq x_2 \leq 5$. |
| e/ $(m - 1)x^2 + (m^2 - m + 1)x + m^2 - m = 0$ | $4 < x_1 \leq x_2$. |
| f/ $(m^2 - 2m)x^2 + 2(m^2 - m - 1)x + m^2 - 1 = 0$ | $x_1 \leq -2 \leq x_2$. |

Dạng toán 3. Những bài toán liên quan đến định lý Viét

① Biểu thức đối xứng của các nghiệm s

Ta sử dụng công thức $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ để biểu diễn các biểu thức đối xứng của các nghiệm x_1, x_2 theo S và P. Chẳng hạn như:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = S^2 - 4P \\ x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P \\ x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 \right] = S(S^2 - 3P) \\ &\dots \end{aligned}$$

② Hệ thức của các nghiệm độc lập đối với tham số

Để tìm hệ thức của các nghiệm độc lập đối với tham số ta tìm

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad (S, P \text{ có chứa tham số } m).$$

Khử tham số m giữa S và P ta tìm được hệ thức giữa x_1 và x_2 .

③ Lập phương trình bậc hai

Nếu phương trình bậc hai có các nghiệm u và v thì phương trình bậc hai có dạng:

$$x^2 - Sx + P = 0, \text{ trong đó } \begin{cases} S = u + v \\ P = uv \end{cases}$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 211. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính

$$A = x_1^2 + x_2^2, \quad B = x_1^3 + x_2^3, \quad C = x_1^4 + x_2^4, \quad D = |x_1 - x_2|, \quad E = (2x_1 + x_2)(2x_2 + x_1).$$

$$a/ \quad x^2 - x - 5 = 0.$$

$$b/ \quad 2x^2 - 3x - 7 = 0.$$

c/ $3x^2 + 10x + 3 = 0$.

d/ $x^2 - 2x - 15 = 0$.

e/ $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

f/ $\sqrt{3}x^2 + 5x - \sqrt{2} = 0$.

Bài 212. Định tham số m để phương trình có một nghiệm cho trước. Tính nghiệm còn lại

a/ $2x^2 - (m + 3)x + m - 1 = 0$, $x_1 = 3$.

b/ $mx^2 - (m + 2)x + m - 1 = 0$ $x_1 = 2$.

c/ $(m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + m + 3 = 0$ $x_1 = 2$.

d/ $(4 - m)x^2 + mx + 1 - m = 0$ $x_1 = 1$.

Bài 213. Tìm hai số có

a/ Tổng là 19 và tích là 84.

b/ Tổng là 5 và tích là -24 .

c/ Tổng là -10 và tích là 16.

d/ Tổng là 12 và tích là 32.

Bài 214. Tìm tuổi của một học sinh, biết rằng sau 7 năm nữa tuổi của em sẽ bằng bình phương số tuổi của em cách đây 5 năm.

Bài 215. Tìm độ dài ba cạnh của một tam giác vuông biết cạnh dài nhất hơn cạnh thứ hai là $2m$ và cạnh thứ hai hơn cạnh ngắn nhất là $23m$.

Bài 216. Một miếng đất hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Nếu tăng chiều rộng thêm $3m$ và chiều dài tăng $4m$ thì diện tích miếng đất tăng gấp đôi. Hỏi kích thước miếng đất lúc đầu ?

Bài 217. Tìm độ dài ba cạnh của một tam giác vuông có chu vi bằng $30m$, biết hai cạnh góc vuông hơn kém nhau $7m$?

Bài 218. Định m để phương trình bậc hai có nghiệm x_1, x_2 thỏa đẳng thức theo sau

a/ $x^2 + mx + 7 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

b/ $x^2 - 2x + m + 2 = 0$ $x_2 - x_1 = 2$.

c/ $x^2 + (m - 1)x + m + 6 = 0$ $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

d/ $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$ $4(x_1 + x_2) = 7x_1x_2$.

e/ $x^2 - 4x + m + 3 = 0$ $|x_1 - x_2| = 2$.

f/ $x^2 - (m + 3)x + 2(m + 2) = 0$ $x_1 = 2x_2$.

g/ $x^2 - (m + 5)x - m + 6 = 0$ $2x_1 + 3x_2 = 13$.

h/ $4x^2 - (m + 3)x - 24 = 0$ $x_1 + 2x_2 = -1$.

i/ $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$ $2x_1 - 3x_2 = 1$.

j/ $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 2m + 4 = 0$ $x_1 = 2x_2$.

Bài 219. Cho phương trình: $x^2 + (2m - 3)x + m^2 - 2m = 0$ (*).

a/ Xác định tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt.

b/ Với giá trị nào của m thì phương trình (*) có hai nghiệm và tích của chúng bằng 8. Tìm các nghiệm trong trường hợp đó.

Bài 220. Cho phương trình: $mx^2 + (m^2 - 3)x + m = 0$ (*).

a/ Xác định tham số m để phương trình (*) có nghiệm kép và tìm nghiệm kép đó.

b/ Với giá trị nào của m thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa $x_1 + x_2 = \frac{13}{4}$.

Bài 221. Cho phương trình: $9x^2 + 2(m^2 - 1)x + 1 = 0 \quad (*)$.

a/ Chứng tỏ rằng với $m > 2$ phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt âm.

b/ Xác định m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa $x_1 + x_2 = -4$. Tính các nghiệm trong trường hợp đó.

Bài 222. Cho phương trình: $(m + 1)x^2 + (3m - 1)x + 2m - 2 = 0$. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 mà $x_1 + x_2 = 3$. Tính các nghiệm trong trường hợp đó.

Bài 223. Cho phương trình: $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0 \quad (*)$. Xác định m để

a/ Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt.

b/ Phương trình $(*)$ có một nghiệm bằng 2. Tính nghiệm kia.

c/ Phương trình $(*)$ có tổng bình phương các nghiệm bằng 2.

Bài 224. Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m = 0 \quad (*)$.

a/ Tìm m để phương trình $(*)$ có nghiệm $x = 0$. Tính nghiệm còn lại.

b/ Khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tìm hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập đối với m .

c/ Tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa: $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

Bài 225. Cho phương trình: $x^2 - (m^2 - 3m)x + m^3 = 0 \quad (*)$.

a/ Tìm m để phương trình $(*)$ có một nghiệm bằng bình phương nghiệm kia.

b/ Tìm m để phương trình $(*)$ có một nghiệm bằng 1. Tính nghiệm còn lại.

Bài 226. Cho phương trình: $x^2 - (m + 5)x - m - 6 = 0$. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa:

a/ Nghiệm này hơn nghiệm kia một đơn vị.

b/ $2x_1 + 3x_2 = 13$.

c/ Có hai nghiệm trái dấu sao cho nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

Bài 227. Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + 2m + 10 = 0 \quad (*)$.

a/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có nghiệm.

b/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có nghiệm thỏa:

$$\alpha/ \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2.$$

$$\beta/ 2x_2 - x_1 = 8.$$

$$\gamma/ x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) \leq 5.$$

$$\delta/ P = 10x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2 \text{ nhỏ nhất.}$$

Bài 228. Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0 \quad (*)$.

a/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m \in \mathbb{R}$.

b/ Tìm m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm trái dấu và có giá trị tuyệt đối bằng nhau.

Bài 229. Tìm tham số m để phương trình: $x^2 - \frac{15}{4}x + m = 0$ có hai nghiệm sau cho nghiệm này bằng bình phương nghiệm kia ?

Bài 230. Tìm các giá trị dương của m sao cho phương trình: $2x^2 - (m+2)x + 7 = m^2$ có hai nghiệm trái dấu và có giá trị tuyệt đối là nghịch đảo của nhau.

Bài 231. Cho phương trình: $2x^2 + 2x \sin \alpha = 2x + \cos^2 \alpha$ $(*)$ (α là tham số).

a/ Chứng minh phương trình $(*)$ có nghiệm với mọi α .

b/ Tìm α để tổng bình phương $(*)$ các nghiệm của phương trình đạt GTLN, GTNN.

Bài 232. Tìm m để phương trình: $\frac{x^2 - 2(2m+1)x + 3m^2 + 6m}{x-2} = 0$ có hai nghiệm thỏa

$$x_1 + 2x_2 = 16.$$

Bài 233. Cho hai phương trình: $x^2 - 8x + 4m = 0$ (1) và $x^2 + x - 4m = 0$ (2). Tìm tham số m để phương trình (1) có nghiệm gấp đôi nghiệm của phương trình (2).

Bài 234. Tìm tham số m để các phương trình sau có nghiệm x_1 và x_2 . Tìm hệ thức của x_1 và x_2 độc lập với tham số m .

a/ $mx^2 - (m-3)x + 2m + 1 = 0.$

b/ $(m-4)x^2 - 2(m-2)x + m - 1 = 0.$

c/ $(m-2)x^2 - (m+4)x + 2 - m = 0.$

d/ $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m - 3 = 0.$

e/ $x^2 - (m+1)x + m^2 + 4 = 0.$

f/ $mx^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0.$

g/ $x^2 - (2m-3)x + m^2 - 4 = 0.$

h/ $mx^2 - (2m+3)x + m - 4 = 0.$

Bài 235. Cho phương trình: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0$. Tìm tham số m để phương trình:

a/ Có ít nhất một nghiệm dương.

b/ Có nghiệm số thỏa mãn: $x_1 < 1 < x_2$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 236. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính

$$A = x_1^2 + x_2^2, B = x_1^3 + x_2^3, C = x_1^4 + x_2^4, D = |x_1 - x_2|, E = (2x_1 + x_2)(2x_2 + x_1).$$

a/ $x^2 - 5x + 3 = 0.$

b/ $2x^2 - 8x - 7 = 0.$

c/ $-8x^2 + 7x + 3 = 0.$

e/ $-3x^2 + \sqrt{2}x + \sqrt{3} = 0.$

Bài 237. Định tham số m để phương trình có một nghiệm cho trước. Tính nghiệm còn lại

a/ $(2m-1)x^2 - 4x + 4m - 3 = 0$

$x_1 = -1.$

b/ $(m-4)x^2 + x + m^2 - 4m + 1 = 0$

$x_1 = -1.$

c/ $(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$

$x_1 = 2.$

$$d/ \quad x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0 \quad x_1 = 0.$$

Bài 238. Định m để phương trình bậc hai có nghiệm x_1, x_2 thỏa đẳng thức theo sau

$$a/ \quad x^2 - (2m+x)x + m^2 + 3 = 0 \quad x_1^2 + x_2^2 = 25.$$

$$b/ \quad (m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0 \quad x_1^2 + x_2^2 = 2.$$

$$c/ \quad x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m + 4 = 0 \quad x_1^2 + x_2^2 = 20.$$

$$d/ \quad 2x^2 - (m+3)x + m - 1 = 0 \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3.$$

$$e/ \quad x^2 - mx + m - 1 = 0 \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{8}{5}.$$

$$f/ \quad x^2 - (m-2)x + m(m-3) = 0 \quad x_1 + 2x_2 = 1$$

$$c/ \quad x^2 + 2x + m = 0 \quad x_1 = 3x_2.$$

$$d/ \quad x^2 + 2(m-1)x - 2m + 5 = 0 \quad 2x_1 + 3x_2 = 1.$$

Bài 239. Tìm tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 . Khi đó hãy tìm hệ thức giữa chúng độc lập với tham số m.

$$a/ \quad mx^2 - (2m-1)x + m + 2 = 0. \quad b/ \quad (m+2)x^2 - 2(4m-1)x - 2m + 5 = 0.$$

$$c/ \quad (m+2)x^2 - (2m+1)x + \frac{3m}{4} = 0. \quad d/ \quad 3(m-1)x^2 - 4mx - 2m + 1 = 0.$$

$$e/ \quad mx^2 + (m+4)x + m - 1 = 0. \quad f/ \quad (m-1)x^2 + 2(m+2)x + m - 4 = 0.$$

Bài 240. Cho phương trình: $(m+2)x^2 + (2m+1)x + 2 = 0 \quad (*)$.

a/ Xác định tham số m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm này bằng -3 .

b/ Với giá trị nào của m thì phương trình $(*)$ có nghiệm kép? Tìm nghiệm kép đó?

Bài 241. Cho phương trình: $x^2 - 2(2m+1)x + 3 + 4m = 0 \quad (*)$.

a/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

b/ Tìm hệ thức x_1 và x_2 độc lập với tham số m.

c/ Tính theo m giá trị của biểu thức $A = x_1^3 + x_2^3$.

d/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có một nghiệm gấp 3 lần nghiệm kia.

e/ Lập phương trình bậc hai có các nghiệm là x_1^2, x_2^2 .

Bài 242. Tuổi của anh hiện nay gấp đôi tuổi của em, biết rằng sau 48 năm nữa tuổi của anh bằng bình phương số tuổi của em hiện nay. Hỏi tuổi của em hiện nay?

Bài 243. Chu vi một hình thoi bằng 34cm, hiệu hai đường chéo bằng 7cm. Tính độ dài hai đường chéo?

Bài 244. Một miếng đất hình vuông. Nếu tăng một cạnh thêm 30m thì được miếng đất mới hình chữ nhật có diện tích gấp 3 lần diện tích lúc đầu. Hỏi cạnh của miếng đất lúc đầu?

Bài 245. Tìm độ dài ba cạnh của một tam giác vuông biết chu vi và diện tích của tam giác lần lượt bằng 120m và $480m^2$.

Dạng toán 4. Phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0, (a \neq 0)$
Phương trình quy về phương trình bậc hai



① **Cách giải phương trình trùng phương:** $ax^4 + bx^2 + c = 0, (a \neq 0)$.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2, t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases} \quad (2)$$

② **Số nghiệm của phương trình trùng phương**

Để xác định số nghiệm của (1) ta dựa vào số nghiệm của phương trình (2) và dấu của chúng

- ✪ Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} (2) \text{ vô nghiệm} \\ (2) \text{ có nghiệm kép âm} \\ (2) \text{ có 2 nghiệm âm} \end{cases}$
- ✪ Phương trình (1) có 1 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} (2) \text{ có nghiệm kép bằng 0} \\ (2) \text{ có 1 nghiệm bằng 0, nghiệm còn lại âm} \end{cases}$
- ✪ Phương trình (1) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} (2) \text{ có nghiệm kép dương} \\ (2) \text{ có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm âm} \end{cases}$
- ✪ Phương trình (1) có 3 nghiệm (2) có 1 nghiệm bằng 0 và nghiệm còn lại dương.
- ✪ Phương trình (1) có 4 nghiệm (2) có 2 nghiệm dương phân biệt.

③ **Phương trình quy về phương trình bậc hai**

✪ **Dạng 1.** $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = K$ với $a+b = c+d$.

— Đặt $t = (x+a)(x+b) \Rightarrow (x+c)(x+d) = t - ab + cd$.

— Phương trình trở thành: $t^2 + (cd - ab)t - K = 0$ mà đã biết cách giải.

✪ **Dạng 2.** $(x+a)^4 + (x+b)^4 = K$.

— Đặt $t = x + \frac{a+b}{2} \Rightarrow x+a = t + \frac{a-b}{2}, x+b = t + \frac{b-a}{2}$.

— Phương trình trở thành: $2t^4 + 12\alpha^2 t^2 + 2\alpha^4 - K = 0$ với $\alpha = \frac{a-b}{2}$.

✪ **Dạng 3.** $ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0$ ($a \neq 0$) (phương trình đối xứng).

— Vì $x = 0$ không là nghiệm nên chia hai vế của phương trình cho x^2 , ta được:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x \pm \frac{1}{x}\right) + c = 0 \quad (*).$$

— Đặt $t = x + \frac{1}{x}$ (hay $t = x - \frac{1}{x}$) với $|t| \geq 2$.

— Phương trình (*) trở thành: $at^2 + bt + c - 2a = 0, (|t| \geq 2)$

— Giải phương trình $(**)$ tìm các nghiệm còn lại (nếu có)

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 246. Giải phương trình sau

a/ $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

c/ $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$.

e/ $x^4 + x^2 - 30 = 0$.

b/ $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

d/ $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$.

f/ $x^4 + 7x^2 - 8 = 0$.

Bài 247. Giải các phương trình sau

a/ $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$.

c/ $2x^3 + 7x^2 - 28x + 12 = 0$.

e/ $x^3 + x^2 + 4 = 0$.

b/ $x^3 + x^2 - x + 2 = 4x - 1$.

d/ $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = 0$.

f/ $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$.

Bài 248. Giải các phương trình sau

a/ $x(x-1)(x+1)(x+2) = 3$.

c/ $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7) = 297$.

e/ $(4x+1)(12x-1)(3x+2)(x+1) = 28$.

b/ $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 3$.

d/ $(x+2)(x-3)(x+1)(x+6) + 36 = 0$.

f/ $(x+1)^2(2x+1)(2x+3) - 18 = 0$

Bài 249. Giải các phương trình sau

a/ $x^4 + (x-1)^4 = 97$.

c/ $(x+4)^4 + (x+6)^4 = 2$.

b/ $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 2$.

d/ $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.

Bài 250. Giải các phương trình sau

a/ $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$.

c/ $x^4 + x^3 + 4x^2 + 5x + 25 = 0$.

e/ $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$.

b/ $x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$.

d/ $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

f/ $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$.

Bài 251. Giải các phương trình sau

a/ $x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18 = 0$.

c/ $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$.

b/ $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$.

d/ $3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$.

Bài 252. Giải các phương trình sau

a/ $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12 = 0.$

b/ $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + \frac{x-1}{x+1} + 1 = 0.$

c/ $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$

d/ $x^6 + x^5 - 13x^4 - 14x^3 + x + 1 = 0.$

e/ $(x^2 + 1)^2 + 3x(x^2 + 1) + 2x^2 = 0.$

f/ $(x^2 + 3x + 6)^2 + 2x^3 + 3x^2 + 12x = 0.$

g/ $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = 0.$

h/ $x^2(x-1)^2 + x(x^2-1) = 2(x+1)^2.$

Bài 253. Tìm tham số m để các phương trình sau có ba nghiệm phân biệt

a/ $x^3 - 3x^2 + 2 = mx + m - 2.$

b/ $x^3 - (2m+1)x^2 + mx + m = 0.$

c/ $x^3 - 2(m+1)x^2 + (7m-2)x + 4 - 6m = 0.$

d/ $mx^3 - (m-4)x^2 + (4+m)x - m = 0.$

e/ $x^3 + (1-m)x^2 - 3mx + 2m^2 = 0.$

f/ $x^3 - 2mx^2 + (4-3m^2)x + 4m = 0.$

Bài 254. Cho phương trình: $x^4 + (1+2m)x^2 + m^2 - 1 = 0$ (*)

a/ Tìm tham số m để phương trình (*) vô nghiệm.

b/ Tìm tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt.

c/ Tìm tham số m để phương trình (*) có bốn nghiệm phân biệt.

Bài 255. Cho phương trình: $mx^4 - 2(m+1)x^2 + m - 2 = 0$ (*)

a/ Tìm tham số m để phương trình (*) vô nghiệm.

b/ Tìm tham số m để phương trình (*) có nghiệm duy nhất.

c/ Tìm tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt.

d/ Tìm tham số m để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt.

e/ Tìm tham số m để phương trình (*) có bốn nghiệm phân biệt.

Bài 256. Cho phương trình: $(x+2)^4 + x^4 = 82 - m$ (*)

a/ Tìm tham số m để phương trình (*) vô nghiệm.

b/ Tìm tham số m để phương trình (*) có nghiệm duy nhất.

c/ Tìm tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt.

d/ Tìm tham số m để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt.

e/ Tìm tham số m để phương trình (*) có bốn nghiệm phân biệt.

Bài 257. Cho phương trình: $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 - m = 0$ (*)

a/ Tìm tham số m để phương trình (*) vô nghiệm.

b/ Tìm tham số m để phương trình (*) có nghiệm duy nhất.

c/ Tìm tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt.

d/ Tìm tham số m để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt.

e/ Tìm tham số m để phương trình (*) có bốn nghiệm phân biệt.

Bài 258. Cho phương trình: $x^3 - 2mx^2 + 2mx - 1 = 0$ (*)

- a/ Tìm tham số m để phương trình (*) vô nghiệm.
- b/ Tìm tham số m để phương trình (*) có nghiệm duy nhất.
- c/ Tìm tham số m để phương trình (*) có hai nghiệm.
- d/ Tìm tham số m để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt.
- e/ Tìm tham số m để phương trình (*) có ít nhất hai nghiệm.

Bài 259. Tìm tham số m để phương trình $x^3 + 3mx^2 - 3x - 3m + 2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 260. Cho phương trình: $(x^2 + 2mx - 3m^2)(x^2 - 1) = 0$ (*)

- a/ Tìm tham số m để phương trình (*) chỉ có đúng hai nghiệm.
- b/ Tìm tham số m để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt.
- c/ Tìm tham số m để phương trình (*) có ít nhất ba nghiệm phân biệt.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 261. Giải các phương trình sau

- a/ $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$.
- b/ $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$.
- c/ $2x^4 - 452x^2 + 450 = 0$.
- d/ $x^4 - x^2 - 6 = 0$.
- e/ $x^4 + x^2 - 20 = 0$.
- f/ $x^4 + 80x^2 - 81 = 0$.

Bài 262. Giải các phương trình sau

- a/ $(x + 5)(x + 6)(x + 8)(x + 9) = 40$.
- b/ $(x - 7)(x - 5)(x - 4)(x - 2) = 72$.
- c/ $(x + 2011)(x + 2013)(x + 2015)(x + 2017) = 4020$.
- d/ $(6x + 5)^2(3x + 2)(x + 1) - 35 = 0$.
- e/ $(2x - 1)(x - 1)(x - 3)(2x + 3) + 9 = 0$.
- f/ $(6x + 7)^2(3x + 1)(x + 1) - 6 = 0$.

Bài 263. Giải các phương trình sau

- a/ $x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0$.
- b/ $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 4x + 4 = 0$.
- c/ $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.
- d/ $x^4 + 3x^2 - 14x^2 - 6x + 4 = 0$.

Bài 264. Giải các phương trình sau

- a/ $x^3 - 8x^2 - 8x + 1 = 0$.
- b/ $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$.
- c/ $x^3 + 2x - 5x - 6 = 0$.
- d/ $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$.
- e/ $(x - 1)^3 + x^3 + (x + 1)^3 = (x + 2)^3$.
- f/ $(x + 6)^4 + (x + 4)^4 = 82$.
- g/ $2x^4 + (1 - 2x)^4 = \frac{1}{27}$.
- h/ $3x^4 + 10x^3 - 3x^2 - 10x + 3 = 0$.

Bài 265. Giải các phương trình sau

$$a/ (x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0. \quad b/ 3(x^2 - x + 1)^2 - 2(x + 1)^2 = 5(x^3 + 1).$$

$$c/ 2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1). \quad d/ x^2(x - 1)^2 + x(x^2 - 1) = 2(x + 1)^2.$$

Bài 266. Tìm tham số m để phương trình: $x^4 - (3m + 14)x^2 + (4m + 12)(2 - m) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Bài 267. Tìm tham số m để phương trình: $(m - 1)x^4 - mx^2 + m^2 - 1 = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 268. Cho phương trình: $x^4 - 2(m^2 - 2)x^2 + m^4 - 4m^2 = 0 \quad (*)$

a/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ vô nghiệm.

b/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt.

c/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt.

Bài 269. Cho phương trình: $x^4 - 2x^3 + x - m = 0 \quad (*)$

a/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ vô nghiệm.

b/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất.

c/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có bốn nghiệm phân biệt.

Bài 270. Định tham số m để phương trình: $(1 - m)x^3 + 2mx^2 - mx - 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

Bài 271. Định tham số m để phương trình: $x^3 - 2mx^2 + (4 - 3m^2)x + 4m = 0$ có ba nghiệm phân biệt

x_1, x_2, x_3 , đồng thời ba nghiệm này thỏa mãn đẳng thức: $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$.

Bài 272. Định tham số m để phương trình: $(x^2 + 2x - m)(x^2 - 3x + 4m) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 273. Cho phương trình: $\frac{3x^2 - mx + 2}{x - m} = 0 \quad (*)$

a/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ vô nghiệm.

b/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có ít nhất một nghiệm.

c/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt.

Dạng toán 5. Phương trình chứa ẩn trong dấu trị tuyệt đối



① **Định nghĩa và tính chất**

- $|A| = \begin{cases} A & \text{khi } A \geq 0 \\ -A & \text{khi } A < 0 \end{cases}$
- $|A| \geq 0, \forall A.$
- $|A.B| = |A|.|B|.$
- $|A|^2 = A^2.$
- $|A + B| = |A| + |B| \Leftrightarrow A.B \geq 0.$
- $|A - B| = |A| + |B| \Leftrightarrow A.B \leq 0.$
- $|A + B| = ||A| - |B|| \Leftrightarrow A.B \leq 0.$
- $|A - B| = ||A| - |B|| \Leftrightarrow A.B \geq 0.$

② **Cách giải**

Để giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối ta tìm cách để khử dấu giá trị tuyệt đối, bằng cách:

- Dùng định nghĩa hoặc tính chất của giá trị tuyệt đối.
- Bình phương hai vế.
- Đặt ẩn phụ.

$$\star \text{ Dạng 1. } |f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$\star \text{ Dạng 2. } |f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

$$\star \text{ Dạng 3. } a|f(x)| + b|g(x)| = h(x): \text{ dùng phương pháp chia khoảng để giải.}$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 274. Giải các phương trình sau

a/ $|2x - 1| = x + 3.$

b/ $|4x + 7| = 2x + 5.$

c/ $|4x + 7| = 4x + 7$

d/ $|2x^2 - 3x - 5| = 5x + 5.$

e/ $|x^2 - 4x - 5| = 4x - 17.$

f/ $|4x - 17| = x^2 - 4x - 5.$

Bài 275. Giải các phương trình sau

a/ $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = |2x - 1|.$

b/ $|5x + 1| = |2x - 3|.$

c/ $|3x - 4| = |x - 2|.$

d/ $|3x^2 - 2x| = |6 - x^2|.$

e/ $|x^2 - 2x| = |2x^2 - x - 2|.$

f/ $|x^2 - 4x - 5| = |2x^2 - 3x - 5|.$

Bài 276. Giải các phương trình sau

a/ $x^2 - 3|x| + 2 = 0$.

c/ $x^2 - 2x - 5|x - 1| - 5 = 0$.

e/ $|1 - 2x| - |x + 1| = x + 2$.

g/ $|x + 3| + |7 - x| = 10$.

b/ $x^2 - 2x + |x - 1| - 1 = 0$.

d/ $4x^2 - 4x - |2x - 1| - 1 = 0$.

f/ $|x - 2| + |x - 3| = 4$.

h/ $|2x - 5| + |2x^2 - 7x + 5| = 0$.

Bài 277. Giải các phương trình sau

a/ $|x - 1| + |2x + 1| = |3x|$.

c/ $|x - 1| - |x| + |2x + 3| = 2x + 4$.

e/ $\frac{3}{|x - 4| - 1} = |x + 3|$.

b/ $|x - 1| + |x + 2| + |x - 3| = 14$.

d/ $|2x - 3| = \frac{1}{x}$.

f/ $\frac{3x}{|x - 1|} = \frac{x - 2}{x}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 278. Giải các phương trình sau

a/ $|x - 2| = x + 1$.

b/ $|2x - 3| = x - 5$.

c/ $|x - 2| = 3x^2 - x - 2$.

e/ $|3x - 5| = 2x^2 + x - 3$.

g/ $|x^2 - 4x + 5| = 4x - 17$.

b/ $2|x - 1| = x + 2$.

b/ $|x + 3| = x^2 - 4x + 3$.

d/ $|4x + 1| = x^2 + 2x - 4$.

f/ $|x^2 - 5x + 4| = x + 4$.

h/ $|x^2 + 4x + 2| = \frac{5x + 16}{3}$.

Bài 279. Giải các phương trình sau

a/ $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = |3x - 2|$.

c/ $|x + 3| = |2x + 1|$.

e/ $|x^2 - 2x| = |x^2 - 5x - 6|$.

b/ $|3x + 1| = |2x + 3|$.

d/ $|x^2 - x - 2| = |x^2 + 2x|$.

f/ $|x^2 - x - 2| = |2x^2 - 3x - 5|$.

Bài 280. Giải các phương trình sau

a/ $x^2 - |x - 2| - 8 = 0$.

c/ $x^2 + 4x + 3|x + 2| = 0$.

e/ $|x - 1| + |2 - x| = 2x$.

g/ $|2x^2 - 3x - 3| + 2x^2 + 8x + 3 = 0$.

b/ $x^2 + 6x + |x + 3| + 10 = 0$.

d/ $x^2 - 2x - 5|x - 1| + 7 = 0$.

f/ $|x^2 - 2x - 3| = x^2 + |2x + 3|$.

h/ $|x + 1| + |x - 2| = 3$.

Bài 281. Giải các phương trình sau

a/ $\left| \frac{x + 2}{x - 2} \right| = 2$.

c/ $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x + 1} + \frac{|2x - 4|}{x - 1} - 3 = 0$.

b/ $x^2 + \frac{1}{x^2} - 10 = 2 \left| x - \frac{1}{x} \right|$.

d/ $\frac{x - 1}{x} - \frac{1}{|x + 1|} = \frac{2x - 1}{x^2 + x}$.

Dạng toán 6. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn



Phương pháp giải

Để giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn ta tìm cách để khử dấu căn, bằng cách:

— Nâng lũy thừa hai vế.

— Đặt ẩn phụ.

Lưu ý rằng: Khi thực hiện các phép biến đổi cần chú ý điều kiện để các căn được xác định

✧ **Dạng 1.** $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$

✧ **Dạng 2.** $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \text{ (hay } g(x) \geq 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

✧ **Dạng 3.** $af(x) + b\sqrt{f(x)} + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{f(x)}, t \geq 0 \\ at^2 + bt + c = 0 \end{cases}$

✧ **Dạng 4.** $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = h(x).$

- Đặt $u = \sqrt{f(x)}, v = \sqrt{g(x)}$ với $u, v \geq 0$.
- Đưa phương trình trên về hệ phương trình với hai ẩn là u và v .

✧ **Dạng 5.** $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} + \sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x).$

Đặt $t = \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}, t \geq 0$

✧ **Dạng 6.** $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C} \quad (*)$

Ta có $(*) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B})^3 = (\sqrt[3]{C})^3 \Leftrightarrow A + B + 3\sqrt[3]{AB}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = C \quad (**)$

Thay $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C}$ vào $(**)$, ta được: $(**) \Leftrightarrow A + B + 3\sqrt[3]{ABC} = C.$

✧ **Dạng 7.** $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{k(x)}$ với $\begin{cases} f(x) + h(x) = g(x) + k(x) \\ f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot k(x) \end{cases}$

- Biến đổi về dạng: $\sqrt{f(x)} - \sqrt{h(x)} = \sqrt{k(x)} - \sqrt{g(x)}.$
- Bình phương, giải phương trình hệ quả.

✧ **Dạng 8.** Nhân thêm lượng liên hiệp

- Dự đoán nghiệm và dùng nhân lượng liên hiệp để xuất hiện nhân tử chung.
- Các công thức thường dùng:

Biểu thức	Biểu thức liên hiệp	Tích
$\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$	$\sqrt{A} \mp \sqrt{B}$	$A - B$
$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B}$	$A + B$
$\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$	$\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B}$	$A - B$

BÀI TẬP ÁP DỤNG**Bài 282.** Giải các phương trình sau

a/ $\sqrt{2x-3} = x-3$.

b/ $\sqrt{5x+10} = 8-x$.

c/ $x - \sqrt{2x-5} = 4$.

d/ $\sqrt{x^2+x-12} = 8-x$.

e/ $\sqrt{x^2+2x+4} = \sqrt{2-x}$.

f/ $\sqrt{3x^2-9x+1} = x-2$.

g/ $\sqrt{3x^2-9x+1} = |x-2|$.

h/ $\sqrt{x^2-3x-10} = x-2$.

i/ $(x-3)\sqrt{x^2+4} = x^2-9$.

j/ $\sqrt{-x^2+4x-3} = 2x+5$.

Bài 283. Giải các phương trình sau

a/ $x^2-6x+9 = 4\sqrt{x^2-6x+6}$.

b/ $\sqrt{(x-3)(8-x)} + 26 = -x^2 + 11x$.

c/ $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$.

d/ $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}$.

e/ $x^2 + \sqrt{x^2+11} = 31$.

f/ $x^2-2x+8 - 4\sqrt{(4-x)(x+2)} = 0$.

Bài 284. Giải các phương trình sau

a/ $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$.

b/ $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$.

c/ $\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2-7} = 2$.

d/ $\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$.

e/ $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$.

f/ $\sqrt{x^2+x-5} + \sqrt{x^2+8x-4} = 5$.

g/ $\sqrt[3]{5x+7} - \sqrt[3]{5x-13} = 1$.

h/ $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}} + \sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}} = 4$.

Bài 285. Giải các phương trình sau

a/ $\sqrt{x+3} + \sqrt{6-x} = 3 + \sqrt{(x+3)(6-x)}$.

b/ $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{(2x+3)(x+1)} - 16$.

c/ $\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x-1)(3-x)} = 1$.

d/ $\sqrt{7-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{(7-x)(2+x)} = 3$.

e/ $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = 5$.

f/ $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x-9 + 2\sqrt{3x^2-5x+2}$.

g/ $1 + \frac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$.

h/ $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2+9x+9}$.

Bài 286. Giải các phương trình sau

a/ $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = -2$.

b/ $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x+2+4\sqrt{x-2}} + 3 = 0$

c/ $\sqrt{2x-4+2\sqrt{2x-5}} + \sqrt{2x+4+6\sqrt{2x-5}} = 14$.

$$d/ \sqrt{x+5} - 4\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} = 1.$$

$$e/ \sqrt{2x-2} - 2\sqrt{2x-1} - 2\sqrt{2x+3} - 4\sqrt{2x-1} + 3\sqrt{2x+8} - 6\sqrt{2x-1} = 4.$$

Bài 287. Giải các phương trình

$$a/ \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0.$$

$$b/ \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x-2}.$$

$$c/ \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}.$$

$$d/ \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}.$$

Bài 288. Giải các phương trình

$$a/ \sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x+1}.$$

$$b/ \sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{6x-2} + \sqrt{x^2+2x-3}.$$

$$c/ \sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x+3}.$$

$$d/ \sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2}.$$

Bài 289. Giải các phương trình

$$a/ \sqrt{x^2+12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2+5}.$$

$$b/ \sqrt{3x^2-5x+1} - \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3(x^2-x-1)} - \sqrt{x^2-3x+4}.$$

$$c/ \sqrt{x+2} + \sqrt{4-x} = 2x^2-5x-1.$$

$$d/ \sqrt{\frac{1-x}{x}} = \frac{2x+x^2}{1+x^2}.$$

$$e/ \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2} + \sqrt[3]{2x^2+1}.$$

$$f/ x^2+x-1 = (x+2)\sqrt{x^2-2x+2}.$$

$$g/ \sqrt[3]{x+24} + \sqrt{12-x} = 6.$$

$$h/ x^2 = (x-4)\left(1+\sqrt{1+x}\right)^2.$$

Bài 290. Giải các phương trình sau

$$a/ x^2 + \left(3 - \sqrt{x^2+2}\right)x = 1 + 2\sqrt{x^2+2}.$$

$$b/ (4x-1)\sqrt{x^3+1} = 2x^3+2x+1.$$

$$c/ x^2-1 = 2x\sqrt{x^2-2x}.$$

$$d/ (x+1)\sqrt{x^2-2x+3} = x^2+1.$$

$$e/ 4\sqrt{x+1}-1 = 3x+2\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x^2}.$$

$$f/ 2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x} = \sqrt{9x^2+16}.$$

$$g/ x^2-1 = 2x\sqrt{x^2+2x}.$$

$$h/ x^2+4x = (x+2)\sqrt{x^2-2x+4}.$$

Bài 291. Định tham số m để phương trình $\sqrt{2x^2-6x+m} = x-1$ có hai nghiệm phân biệt.

Bài 292. Định tham số m để phương trình $\sqrt{x^2-x+m} = \sqrt{x-3}$ có hai nghiệm phân biệt.

Bài 293. Định tham số m để phương trình $\sqrt{(2x^2+1)^2} = x^2-2(m-1)x+m^2-3m$ có nghiệm duy nhất.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 294.** Giải các phương trình sau (đưa về dạng cơ bản)

a/ $\sqrt{x-1} = x-3.$

b/ $\sqrt{x-2} = 4-x.$

c/ $2x - \sqrt{2x-1} = 7.$

d/ $\sqrt{3-x} = 3x-5.$

e/ $x - \sqrt{4x-3} = 2.$

f/ $\sqrt{x^2-x} = x.$

g/ $\sqrt{x^2-1} = x-1.$

h/ $\sqrt{5-x^2} = x-1.$

i/ $x-2 = \sqrt{x^2-4x+3}.$

j/ $x + \sqrt{1-x^2} = 1.$

k/ $x + \sqrt{4-x^2} = 2.$

l/ $\sqrt{16x+17} = 8x-23.$

m/ $\sqrt{-x^2+4x} = 2x-2.$

n/ $\sqrt{x^2-3x+2} = 2x-1.$

o/ $\sqrt{-x^2+4x-3} = 2x-5.$

p/ $\sqrt{3x^2+5x+1} + 1 = 4x.$

q/ $\sqrt{x^2-2x+1} = x^2-2x+1.$

r/ $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}} = \sqrt{3-2x-x^2}.$

s/ $2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4.$

t/ $\sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{x-3}.$

Bài 295. Giải các phương trình sau (dùng hằng đẳng thức)

a/ $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$

b/ $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} - \sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + 5 = 0.$

c/ $\sqrt{2x-4-2\sqrt{2x-5}} - \sqrt{2x+4+6\sqrt{2x-5}} + 4 = 0.$

d/ $\sqrt{2x-2+2\sqrt{2x-3}} = 4 + \sqrt{2x-6-6\sqrt{2x-3}}.$

e/ $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}.$

f/ $21x - 63 + 7\sqrt{10-4|3x-9|} = 0.$

Bài 296. Giải các phương trình sau (bình phương hai vế)

a/ $\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+2} = 1.$

b/ $\sqrt{x+4} - \sqrt{2x-6} = 1.$

c/ $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2.$

d/ $\sqrt{11-x} - \sqrt{x-1} = 2.$

e/ $\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2+7} = 2.$

f/ $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = \sqrt{5}.$

g/ $\sqrt{3x-5} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{x+2}.$

h/ $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-3}.$

i/ $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-8}.$

j/ $\sqrt{2-x} = \sqrt{7-x} - \sqrt{-3-2x}.$

k/ $\sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-1}.$

l/ $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-4}.$

m/ $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{3x-5}.$

n/ $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}.$

o/ $\sqrt{3x+4} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x+3}.$

p/ $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = \sqrt{2}.$

Bài 297. Giải các phương trình sau (đưa về tích)

$$a/ \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1 - x.$$

$$b/ \sqrt{x} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x} = x.$$

$$c/ \sqrt{x^2+10x+21} = 3\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x+7} - 6.$$

$$d/ \sqrt{x^2-x-2} - 2\sqrt{x-2} + 2 = \sqrt{x+1}.$$

$$e/ \sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2+2x-3}.$$

$$f/ \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+2)} = 2\sqrt{x^2}.$$

$$g/ \sqrt{x^2-8x+15} + \sqrt{x^2+2x-15} = \sqrt{x^2-9x+18}.$$

$$h/ \sqrt{2x^2+8x+6} + \sqrt{x^2-1} = 2x+2.$$

$$i/ \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 1 + \sqrt[3]{x^2+3x+2}.$$

$$j/ \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2+x}. \text{ Chia } x.$$

$$k/ \sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x^2+4x+3}.$$

$$l/ \sqrt{x+3} + \frac{4x}{\sqrt{x+3}} = 4\sqrt{x} \text{ chia } \sqrt{x+3}.$$

Bài 298. Giải các phương trình sau

$$a/ \sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1.$$

$$b/ \sqrt[3]{2+x+x^2} + \sqrt[3]{2-x-x^2} = \sqrt[3]{4}.$$

$$c/ \sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2\sqrt[3]{24+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{5+\sqrt{x}} = 1.$$

$$d/ \sqrt[4]{18-x} + \sqrt[4]{x-1} = 3.$$

$$e/ 2x + \sqrt{4|x|-1} = 0.$$

$$f/ x + 2\sqrt{|x|-1} = 0.$$

$$g/ -5x + \sqrt{2|x|+3} = 0.$$

$$h/ \sqrt{2|x-1|-3-x+1} = 0.$$

$$i/ 6x + 3 - 3\sqrt{2|2x+1|-5} = 0.$$

$$j/ 25x - 5 + 5\sqrt{1-5|x|-3} = 0.$$

Bài 299. Giải phương trình sau (đặt ẩn phụ)

$$a/ x^2 + \sqrt{x^2+11} = 31.$$

$$b/ 2\sqrt{\frac{3x-1}{x}} = \frac{x}{3x-1} + 1.$$

$$c/ \sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x} = 1.$$

$$d/ \sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}.$$

$$e/ \sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x} = 1.$$

$$f/ (x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2+3x}.$$

$$g/ 2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1} = x^2-2x-1.$$

$$h/ (x+4)(x+1) = 3\sqrt{x^2+5x+6} + 4.$$

$$i/ \sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1.$$

$$j/ \sqrt{x^2-3x+3} + \sqrt{x^2-3x+6} = 3.$$

$$k/ \sqrt{3x^2+6x+16} + \sqrt{x^2+2x} = 2\sqrt{x^2+2x+4}.$$

$$l/ 1 + \frac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}.$$

$$m/ \sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}} = 2.$$

$$n/ \frac{3+x}{3x} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{x}\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{x^2}}}.$$

$$o/ (x-3)(x+1) + 4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -3.$$

$$p/ (x-1)(x+2) + 2(x-1)\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} = 8.$$

$$q/ x + \sqrt{4-x^2} = 2 + 3x\sqrt{4-x^2}.$$

$$r/ x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9.$$

$$s/ \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4-2x.$$

$$t/ \sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x-12 + 2\sqrt{x^2-16}.$$

$$u/ \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16.$$

$$v/ \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x-9 + 2\sqrt{3x^2-5x+2}.$$

Bài 300. Giải phương trình (nhân lượng liên hiệp)

$$a/ \sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{5}.$$

$$b/ \frac{4}{x + \sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2+x}} = \frac{3}{x}.$$

$$c/ \frac{1}{1-\sqrt{1-x}} - \frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{3}}{x}.$$

$$d/ \sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$e/ \sqrt{x^2+1} - x = \frac{5}{2\sqrt{x^2+1}}.$$

$$f/ \frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \frac{3}{x}.$$

$$g/ 4(x+1)^2 = (2x+10)(1-\sqrt{3+2x})^2.$$

$$h/ 2x^2 = (x+9)(2-\sqrt{9+2x})^2.$$

$$i/ x + \sqrt{x^2+16} = \frac{40}{\sqrt{x^2+16}}.$$

$$j/ \frac{3x}{\sqrt{3x+10}} = \sqrt{3x+1} - 1.$$

$$k/ \sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \frac{3x-2}{\sqrt{3}}.$$

$$l/ (\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1) = 2x.$$

Bài 301. Giải các phương trình sau (bình phương hai vế)

$$a/ \sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} = 0.$$

$$b/ \sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2}.$$

$$c/ \sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+7} = \sqrt{x^2+x+3} + \sqrt{x^2+x+8}.$$

$$d/ \sqrt{3x^2-7x+3} - \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3x^2-5x-1} - \sqrt{x^2-3x+4}.$$

Bài 302. Giải các phương trình sau (không mẫu mực)

$$a/ \sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1.$$

$$b/ \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11.$$

$$c/ x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = 2.$$

$$d/ \sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}.$$

$$e/ \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0.$$

$$f/ \sqrt{x-1} - 3 + x = \sqrt{2(x-3)^2 + 2(x-1)}.$$

$$g/ x - 2\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x} + \sqrt{x^2-x} = 0.$$

$$h/ \sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x^2+4x+1}.$$

$$i/ \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} \left[\sqrt{(1+x)^3} - \sqrt{(1-x)^3} \right] = 2 + \sqrt{1-x^2}.$$

$$j/ \sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 2\sqrt{x(1-x)} + 1 = 2\sqrt{x(1-x)}.$$

Bài 303. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 3x + 13\sqrt{x+2} - 36 = 0$.

Bài 304. Định m để $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2m\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt{x(1-x)} = m^3$ có nghiệm duy nhất.

Bài 305. Định tham số m để các phương trình sau có nghiệm

$$a/ \sqrt{7-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{(7-x)(x+2)} = m.$$

$$b/ \sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} + \sqrt{(1+x)(8-x)} = m.$$

$$c/ \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} - \sqrt{(x-1)(3-x)} = m.$$

$$d/ \sqrt{5-x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2+6x-5} = m.$$

$$e/ \sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} = m.$$

BÀI TẬP QUA CÁC KÌ THI

Bài 306. Cao đẳng Hải Quan năm 1996

Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{3x-2} = 0$.

ĐS: $x = \frac{2}{3}$.

Bài 307. Cao đẳng Hải Quan Tp. Hồ Chí Minh năm 1999

Cho phương trình: $\sqrt{x+4}\sqrt{x-4} + x + \sqrt{x-4} = m \quad (*)$.

1/ Giải phương trình $(*)$ khi $m = 6$.

2/ Tìm tham số m để phương trình $(*)$ có nghiệm.

ĐS: 1/ $x = 4$. 2/ $m \geq 6$. Áp dụng phương pháp hàm số.

Bài 308. Cao đẳng Sư Phạm Nhà Trẻ Mẫu Giáo TW1 năm 2000

Giải phương trình: $1 + \sqrt{x-1} = \sqrt{6-x}$.

Bài 309. Cao đẳng Kiểm Sát phía Bắc năm 2000

Giải phương trình: $\frac{\sqrt[3]{7-x} - \sqrt[3]{x-5}}{\sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{x-5}} = 6-x$.

Bài 310. Cao đẳng Giao Thông năm 2000

Giải phương trình: $\sqrt[4]{8-x} + \sqrt[4]{89+x} = 5$.

Bài 311. Cao đẳng Sư Phạm Hà Nội khối A năm 2001

Giải phương trình: $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x^2-4} - 2x + 2$.

Bài 312. Cao đẳng Sư Phạm Kỹ Thuật Vinh năm 2001

Giải phương trình: $x^2 + \sqrt{x+7} = 7$.

Bài 313. Cao đẳng Sư Phạm Thể Dục TWII năm 2002

Cho phương trình: $x^2 - \sqrt{4-x^2} + m = 0 \quad (*)$.

1/ Giải phương trình $(*)$ khi $m = 2$.

2/ Định m để phương trình $(*)$ có nghiệm.

Bài 314. Cao đẳng Xây dựng số 3 năm 2002

Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+3} = 1 + \sqrt{x}$.

Bài 315. Cao đẳng Sư Phạm Nha Trang năm 2002

Giải phương trình: $\sqrt{x+2} + \sqrt{5-x} + \sqrt{(x+2)(5-x)} = 4$.

Bài 316. Cao đẳng Sư Phạm Bến Tre khối A năm 2002

Giải phương trình: $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} - \sqrt{x-1} = 0$.

Bài 317. Cao đẳng Giao Thông năm 2003

Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{2x+3} = 0$.

Bài 318. Cao đẳng Tài Chính Kế Toán IV năm 2003

Giải phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x+2}$.

Bài 319. Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 2004

Giải phương trình: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{(x-2)\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}$.

Bài 320. Cao đẳng Sư Phạm Mẫu Giáo TW1 năm 2004

Giải phương trình: $\sqrt{-x^2+4x-3} = 2x-5$.

Bài 321. Cao đẳng Sư Phạm Hà Nội năm 2005

Giải phương trình: $\sqrt{x^2-4x+5} + \sqrt{x^2-4x+8} = 4x-x^2+1$.

Bài 322. Cao đẳng Sư Phạm Quảng Nam năm 2005

Giải phương trình: $(x+2)\sqrt{x^2+3} = x^2+2x+3$.

Bài 323. Cao đẳng Sư Phạm Quảng Ngãi năm 2005

Giải phương trình: $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4} = 2x-6$.

Bài 324. Cao đẳng Xây Dựng số 3 – Cao đẳng Cộng đồng Vĩnh Long khối A, B năm 2005

Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} = 8 - \sqrt{x+1}$.

Bài 325. Đại học khối D năm 2005

Giải phương trình: $2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4$.

Bài 326. Dự bị 2 khối D Đại học năm 2002

Giải phương trình: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x-12 + 2\sqrt{x^2-16}$.

Bài 327. Dự bị 1 Đại học khối B năm 2005

Giải phương trình: $\sqrt{3x-3} - \sqrt{5-x} = \sqrt{2x-4}$.

Bài 328. Dự bị 1 Đại học khối D năm 2004

Cho phương trình: $x^2 + \left(m^2 - \frac{5}{3}\right)\sqrt{x^2+4} + 2 - m^3 = 0$. Chứng minh rằng với mọi $m \geq 0$

thì phương trình đã cho có nghiệm.

Bài 329. Cao đẳng Truyền Hình Tp. Hồ Chí Minh năm 2007

Giải phương trình: $\sqrt{7-x^2} + x\sqrt{x+5} = \sqrt{3-2x-x^2}$.

ĐS: $x = -1$.

Bài 330. Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

Xác định tham số m để phương trình: $x^2 - 6x + m + \sqrt{(x-5)(1-x)} = 0$ có nghiệm.

Bài 331. Đại học Quốc Gia Hà Nội khối D năm 1997 – 1998

Giải phương trình: $\sqrt{16x+17} = 8x-23$.

ĐS: $x = 4$.

Bài 332. Học Viện Ngân Hàng năm 1999 – 2000

Giải phương trình: $\sqrt{-x^2+4x}+2=2x$.

ĐS: $x = 2$.

Bài 333. Đại học Dược Hà Nội năm 1999 – 2000

Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{10-x^2} = x^2 - x - 12$.

ĐS: $x = -3$.

Bài 334. Đại học Y Dược Tp. HCM hệ trung cấp năm 1999 – 2000

Giải phương trình: $\sqrt{x-1} - 3 + x = \sqrt{2(x-3)^2 + 2(x-1)}$.

ĐS: $x = 5$. Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki.

Bài 335. Học Viện Kỹ Thuật Quân Sự năm 1999 – 2000

Giải phương trình: $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x-9 + 2\sqrt{3x^2-5x+2}$.

ĐS: $x = 2$. (Có thể giải theo phương pháp hàm số).

Bài 336. Đại học Ngoại Thương Hà Nội năm 1999 – 2000

Giải phương trình: $\sqrt{3-x+x^2} - \sqrt{2+x-x^2} = 1$.

ĐS: $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Đặt $t = x^2 - x$.

Bài 337. Đại học Nông Nghiệp I năm 1999 – 2000

Giải phương trình: $\sqrt{x^2-2x+5} + \sqrt{x-1} = 2$.

ĐS: $x = 1$. VT ≥ 2 nên dấu " $=$ " xảy ra khi $x = 1$.

Bài 338. Học Viện Kỹ Thuật Quân Sự năm 2001

Giải phương trình: $3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}$.

Bài 339. Đại học Xây Dựng năm 2001

Giải phương trình: $\sqrt{x^2-6x+6} = 2x-1$.

Bài 340. Đại học Mỏ – Địa Chất năm 2001

Giải phương trình: $x + \sqrt{4-x^2} = 2 + 3x\sqrt{4-x^2}$.

Bài 341. Học Viện Bưu Chính Viễn Thông năm 2001

Giải phương trình: $\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{5}$.

Bài 342. Đại học Ngân Hàng khối D – Đại học Quốc Gia Hà Nội khối B, D năm 2001

Giải phương trình: $\sqrt{4x-1} + \sqrt{4x^2-1} = 1$.

Bài 343. Học Viện Ngân Hàng khối A – Đại học Quốc Gia Hà Nội khối A năm 2001

Giải phương trình: $x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$.

Bài 344. Đại học Ngoại Ngữ năm 2001

Giải phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x-1)(4-x)} = 5$.

Bài 345. Đại học Dân Lập Ngoại Ngữ – Tin học Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

Giải phương trình: $(x+3)(1-x) = -5\sqrt{x^2+2x-7}$.

Bài 346. Đại học Bách Khoa Hà Nội khối A, D năm 2001

Giải phương trình: $\sqrt{2x^2+8x+6} + \sqrt{x^2-1} = 2x+2$.

Bài 347. Đại học Thủy Sản Hà Nội năm 2001

Giải phương trình: $\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} = \frac{x+5}{2}$.

Bài 348. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh khối D năm 1998 – 1999

Giải phương trình: $\sqrt{x+9} = 5 - \sqrt{2x+4}$.

ĐS: $x = 0$.

Bài 349. Đại học Quốc Gia Hà Nội khối B năm 1998 – 1999

Giải và biện luận phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} = m$.

ĐS:
$$\begin{cases} \sqrt{2} \leq m \leq 2 & \longrightarrow x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4m^2 - m^4} \\ m < \sqrt{2} \vee m > 2 & \longrightarrow \text{VN} \end{cases}$$

Bài 350. Đại học Huế khối A, V năm 1998 – 1999

Giải phương trình: $x^2 - 1 = \sqrt{x+1}$.

ĐS: $x = -1 \vee x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 351. Đại học Huế khối D năm 1998 – 1999

Giải phương trình: $\sqrt{4-x^2} = x+2$.

ĐS: $x = -2 \vee x = 0$.

Bài 352. Đại học Kinh Tế Quốc Dân năm 1998 – 1999

Cho phương trình $\sqrt{1+x} + \sqrt{8-x} = \sqrt{(1+x)(1-8)} = m \quad (*)$.

1/ Giải phương trình (*) khi $m = 3$.

2/ Tìm tham số m để phương trình (*) có nghiệm.

$$\text{ĐS: } 1/ x = -1 \vee x = 8 \quad 2/ 3 \leq m \leq \frac{9}{2} + 3\sqrt{2}.$$

Bài 353. Đại học Thương Mại năm 1998 – 1999

Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$.

$$\text{ĐS: } x = 1 \vee x = 2.$$

Bài 354. Đại học Ngoại Thương năm 1998 – 1999

Với giá trị nào của m thì phương trình: $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = m$.

$$\text{ĐS: } 0 < m \leq 2.$$

Bài 355. Đại học Dân lập Tôn Đức Thắng năm 1998 – 1999

Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 19}$.

$$\text{ĐS: } x = -2 \vee x = 1. \text{ Đặt } t = x^2 + x + 2.$$

Bài 356. Đại học Mỏ – Địa Chất năm 1998 – 1999

Giải và biện luận phương trình: $\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a} = a$ (với a là tham số).

Bài 357. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh khối A đợt 2 năm 1997 – 1998

Với giá trị nào của m thì phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = m$ có nghiệm?

$$\text{ĐS: } \frac{6\sqrt{2}-9}{2} \leq m \leq 3. \text{ Dùng phương pháp hàm số.}$$

Bài 358. Đại học Ngoại Thương Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 1997 – 1998

Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 15} = 3x - 2 + \sqrt{x^2 + 8}$.

$$\text{ĐS: } x = 1. \text{ Phương pháp hàm số.}$$

Bài 359. Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1997 – 1998

Cho phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m} \quad (*)$.

1/ Giải phương trình (*) khi $m = 9$.

2/ Xác định tham số m để phương trình (*) có nghiệm.

$$\text{ĐS: } 1/ x = 0 \vee x = 9 \vee x = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{2} \quad 2/ -\frac{9}{4} \leq m \leq 10.$$

Bài 360. Học Viện Kỹ Thuật Quân Sự năm 1997 – 1998

Cho phương trình: $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + 2m\sqrt{x(1-x)} - 2\sqrt{x(1-x)} = m^3 \quad (*)$.

1/ Giải phương trình (*) khi $m = -1$.

2/ Tìm giá trị của tham số m để phương trình (*) có một nghiệm duy nhất.

$$\text{ĐS: } 1/ x = \frac{1}{2} \quad 2/ m = -1 \vee m = 0.$$

Bài 361. Đại học Tổng Hợp Tp. Hồ Chí Minh năm 1991 – 1992

$$\text{Cho phương trình: } (x-3)(x+1) + 4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = m \quad (*)$$

1/ Giải phương trình $m = -3$.

2/ Với giá trị nào của m thì phương trình (*) có nghiệm ?

$$\text{ĐS: } t = (x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}, \quad 1/ x = 1 - \sqrt{5} \vee x = 1 - \sqrt{33} \quad 2/ m \geq -4.$$

Bài 362. Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 1991 – 1992

$$\text{Giải phương trình: } \sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1.$$

$$\text{ĐS: } x = -61 \vee x = 30.$$

Bài 363. Đại học khối B năm 2004

Xác định m để phương trình sau có nghiệm:

$$m\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2\right) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}.$$

$$\text{ĐS: } \sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1 \text{ (giải bằng phương pháp hàm số).}$$

Bài 364. Đại học khối D năm 2005

$$\text{Giải phương trình: } 2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4.$$

$$\text{ĐS: } x = 3.$$

Bài 365. Đại học khối B năm 2006

Tìm tham số m để phương trình: $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

$$\text{ĐS: } m \geq \frac{9}{2}.$$

Bài 366. Đại học khối D năm 2006

$$\text{Giải phương trình: } \sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0.$$

$$\text{ĐS: } x = 1; x = 2 - \sqrt{2}.$$

Bài 367. Dự bị 1 Đại học khối B năm 2006

$$\text{Giải phương trình: } \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2}.$$

$$\text{ĐS: } x = 2.$$

Bài 368. Dự bị 2 Đại học khối D năm 2006

Giải phương trình: $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$.

ĐS: $x = 5, x = 4$. Đưa về PT tích $(\sqrt{x-1} - 2)(\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}) = 0$.

Bài 369. Đại học khối A năm 2007

Tìm tham số m để phương trình sau có nghiệm thực: $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-1}$.

ĐS: $-1 < m \leq \frac{1}{3}$. Đặt $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, $0 \leq t < 1$. PT $\Leftrightarrow -3t^2 + 2t = m$. Dùng PP hàm số.

Bài 370. Đại học khối B năm 2007

Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của tham số m , phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt: $x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x-2)}$.

ĐS: PT $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ (x-2)(x^3 + 6x^2 - 32 - m) = 0 \end{cases}$. Dùng phương pháp hàm số.

Bài 371. Dự bị 2 Đại học khối B năm 2007

Tìm m để phương trình sau có đúng 1 nghiệm: $\sqrt[4]{x^4 - 13x + m} + x - 1 = 0$.

ĐS: $m = -\frac{3}{2} \vee m > 12$. Dùng phương pháp hàm số.

Bài 372. Dự bị 1 Đại học khối D năm 2007

Tìm m để phương trình sau có đúng 2 nghiệm: $\sqrt{x-3} - 2\sqrt{x-4} + \sqrt{x-6} - \sqrt{x-4} + 5 = m$.

ĐS: $2 < m \leq 4$. Đặt $t = \sqrt{x-4} \geq 0$.

Bài 373. Đại học khối A năm 2008

Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt

$$\sqrt[4]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[4]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m.$$

ĐS: $2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6} \leq m < 3\sqrt{2} + 6$. Dùng phương pháp hàm số.

Bài 374. Đại học khối A năm 2009

Giải phương trình: $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0$.

ĐS: $x = -2$.

Bài 375. Đại học khối B năm 2010

Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$.

ĐS: $x = 5$.

Bài 376. Toán Học Tuổi Trẻ – Tháng 3 năm 2005

Giải phương trình: $x = \left(2004 + \sqrt{x}\right)\left(1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}}\right)^2$.

ĐS: $x = 0 \leftarrow$ Đặt $y = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$.

Bài 377. Toán Học Tuổi Trẻ – Tháng 9 năm 2007

Giải phương trình: $\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 2$.

Bài 378. Tuyển chọn học sinh giỏi tỉnh Quảng Bình 21/12/2004

Giải phương trình: $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x + 5}$.

Bài 379. Tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Toán Đại học Sư Phạm Hà Nội I năm 1997 – 1998

Giải phương trình: $\sqrt{x + 1} + 2(x + 1) = x - 1 + \sqrt{1 - x} + 3\sqrt{1 - x^2}$.

HD: Đưa phương trình về hệ có một phương trình tích số:

$$u + 2u^2 = -v^2 + v + 3uv \Leftrightarrow u - v + v^2 - 3uv + 2v^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow u - v + (v - u)(v - 2u) = 0.$$

Email: vandoan_automobile@yahoo.com.vn --- Phone: 0929.031.789 --- 0937.533.007

D – HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN



① **Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn**
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

Tính các định thức: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$, $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$.

Xét D		Kết quả
$D \neq 0$		Hệ có nghiệm duy nhất $\left(x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D} \right)$.
$D = 0$	$D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$	Hệ vô nghiệm
	$D_x = D_y = 0$	Hệ có vô số nghiệm

Để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ta có thể dùng các cách giải đã biết như: phương pháp thế, phương pháp cộng đại số.

② **Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn**

Nguyên tắc chung để giải các hệ phương trình nhiều ẩn là **khử bớt ẩn** để đưa về các phương trình hay hệ phương trình có số ẩn ít hơn. Để khử bớt ẩn, ta cũng có thể dùng các phương pháp cộng đại số, phương pháp thế như đối với hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 380. Giải các hệ phương trình sau bằng cách dùng định thức

a/
$$\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$$

b/
$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$$

c/
$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$$

d/
$$\begin{cases} (\sqrt{2} + 1)x + y = \sqrt{2} - 1 \\ 2x - (\sqrt{2} - 1)y = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

e/
$$\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 16 \\ \frac{5}{2}x - \frac{3}{5}y = 11 \end{cases}$$

f/
$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 1 \\ 5x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Bài 381. Giải các hệ phương trình sau

a/
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{8}{y} = 18 \\ \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 51 \end{cases}$$

b/
$$\begin{cases} \frac{10}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 1 \\ \frac{25}{x-1} + \frac{3}{y+2} = 2 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} \frac{27}{2x-y} + \frac{32}{x+3y} = 7 \\ \frac{45}{2x-y} - \frac{48}{x+3y} = -1 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} 2|x+y| - |x-y| = 9 \\ 3|x+y| + 2|x-y| = 17 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} 2|x-6| + 3|y+1| = 5 \\ 5|x-6| - 4|y+1| = 1 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} 4|x+y| + 3|x-y| = 8 \\ 3|x+y| - 5|x-y| = 6 \end{cases}$$

Bài 382. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 4 \\ -4x + 2y + 5z = -6 \\ 2x + 5y + 3z = 8 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} x - 2y + z = 12 \\ 2x - y + 3z = 18 \\ -3x + 3y + 2z = -9 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$g/ \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 17 \\ 5x + y + 7z = 22 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} -3x + 2y - z = -2 \\ 5x - 3y + 2z = 10 \\ 2x - 2y - 3z = -9 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 4x - y + 3z = 10 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} x + 3y + 2z = 8 \\ 2x + y + z = 6 \\ 3x + y + z = 6 \end{cases}$$

$$h/ \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 6 \\ x + y + 2z = 7 \end{cases}$$

Bài 383. Giải và biện luận các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} mx + (m-1)y = m+1 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} (m-1)x + 2y = 3m-1 \\ (m+2)x - y = 1-m \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} (m+1)x - 2y = m-1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} mx + (m-2)y = 5 \\ (m+2)x + (m+1)y = 2 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} (m+4)x - (m+2)y = 4 \\ (2m-1)x + (m-4)y = m \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} mx + 2y = m+1 \\ 2x + my = 2m+5 \end{cases}$$

Bài 384. Trong các hệ phương trình sau hãy

- Giải và biện luận.
- Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên.

$$a/ \begin{cases} (m+1)x - 2y = m-1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} mx + y - 3 = 3 \\ x + my - 2m + 1 = 0 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} mx - y = 1 \\ x + 4(m+1)y = 4m \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases}$$

Bài 385. Trong các hệ phương trình sau hãy

- Giải và biện luận.
- Khi hệ có nghiệm (x, y) , tìm hệ thức giữa x, y độc lập đối với m

$$a/ \begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m + 5 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} 6mx + (2 - m)y = 3 \\ (m - 1)x - my = 2 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} mx + (m - 1)y = m + 1 \\ 2x + my = 2 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} -x + my = -3 \\ mx - 4y = m + 4 \end{cases}$$

Bài 386. Giải và biện luận các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} ax + y = b \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} y - ax = b \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} ax + y = a + b \\ x + 2y = a \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} (a + b)x + (a - b)y = a \\ (2a - b)x + (2a + b)y = b \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} ax + by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = 2ab \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} ax - by = a^2 - b \\ bx - b^2y = 4b \end{cases}$$

Bài 387. Định tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$a/ \begin{cases} mx + y = m \\ x + my = m^2 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} 6mx + (2 - m)y = 3 \\ (m - 1)x - my = 2 \end{cases}$$

Bài 388. Định tham số để hệ phương trình sau có vô số nghiệm

$$a/ \begin{cases} x - y = 1 \\ 4x - 4y = m + 1 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} -4x + my = m + 1 \\ (m + 6)x + 2y = 3 + m \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} ax + y = a + b \\ x + 2y = a \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} a^2x - by = a^2 - b \\ bx - b^2y = 2 + 4b \end{cases}$$

Bài 389. Định tham số m để hệ phương trình sau vô nghiệm

$$a/ \begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = -1 \end{cases}$$

Bài 390. Định tham số để hệ phương trình sau có nghiệm

$$a/ \begin{cases} mx + 2y = m \\ (m - 1)x + (m - 1)y = 1 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} mx + my = m - 1 \\ (m - 1)x + 2my = m + 1 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} m(m - 1)x + m(m + 1)y = m^3 + 2 \\ (m^2 - 1)x + (m^3 + 1)y = m^4 - 1 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} (a + b)x + (a - b)y = 2a \\ (a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)y = 2a^2 \end{cases}$$

Bài 391. Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

- Tìm hai số biết tổng của chúng bằng 188 và nếu lấy số lớn chia cho số nhỏ ta được thương bằng 5 và số dư bằng 2.
- Số công nhân ở hai xí nghiệp tỉ lệ với 2 và 3. Nếu số công nhân ở xí nghiệp I tăng 80 người và số công nhân ở xí nghiệp II tăng 40 người thì số công nhân mới ở hai xí nghiệp tỉ lệ với 3 và 4. Hỏi số công nhân lúc đầu ở mỗi xí nghiệp ?
- Tìm một số gồm hai chữ số biết: nếu đem số đó chia cho tổng số của hai chữ số đó ta được thương là 6; nếu đem cộng tích của hai chữ số đó với 25 ta được số đảo lại.

- d/ Hai công nhân phải làm một số dụng cụ bằng nhau trong cùng một thời gian. Người I mỗi giờ làm tăng 2 dụng cụ nên công việc hoàn thành trước 2 giờ. Người II mỗi giờ làm tăng 4 dụng cụ nên công việc hoàn thành trước 3 giờ và còn làm thêm 6 dụng cụ. Tính số dụng cụ mỗi công nhân phải làm và thời gian phải hoàn thành công việc ?

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 392. Dùng định thức để giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} 7x - y = 4 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} 4y - 2x - 1 = 0 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} 2x + y = 5 \\ y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - 4x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} \sqrt{5}x + y - 6 = 0 \\ x - \sqrt{5}y = -6 \end{cases}$$

Bài 393. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} 3x + 4y - 5z = 12 \\ -4x + 2y + 7z = 7 \\ 5x + 6y - 4z = 12 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} 0,3x_1 - 4,7x_2 + 2,3x_3 = 4,9 \\ -2,1x_1 + 3,2x_2 + 4,5x_3 = 7,6 \\ 4,2x_1 - 2,7x_2 + 3,7x_3 = 5,7 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 5 \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -7 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} -x - 3y + 4z = 3 \\ 3x + 4y - 2z = 5 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} 2x + 3y + z = -4 \\ 3x - 2y - 3z = 9 \\ 4x - 5y - 8z = 15 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} 2x + y - 2z = -4 \\ 4x + 3y + 3z = 4 \\ 6x + 5y + 4z = 4 \end{cases}$$

$$g/ \begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 3x - y + 3z = 7 \\ x + 3y - 3z = -3 \end{cases}$$

$$h/ \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x - y + z = 6 \\ x + 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

Bài 394. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số

$$a/ \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} ax + y - 3 = 0 \\ x + ay = 3a \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} 2x + my = m^2 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} mx - y + 1 = 0 \\ x + my + 2 = 0 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} x + my = 1 \\ mx + y = m^2 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} my - x + 3 = 0 \\ mx - 4y = m + 4 \end{cases}$$

$$g/ \begin{cases} (m-1)x - y = m + 2 \\ (m+1)x + 2y = m - 5 \end{cases}$$

$$h/ \begin{cases} (2a-1)x - y = 1 \\ x + (a+1)y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$i/ \begin{cases} mx + my = m - 1 \\ (m - 1)x + 2my = m + 1 \end{cases}$$

$$j/ \begin{cases} 2m^2x + 3(m + 1)y = 3 \\ m(x + y) - 2y = 2 \end{cases}$$

Bài 395. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số

$$a/ \begin{cases} ax - y = b \\ bx + y = a \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} (a + b)x + (a - b)y = a \\ (2a - b)x + (2a + b)y = b \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} m(m - 1)x + (m^2 + 2m - 2)y = m^2 + 2m - 3 \\ (m - 1)x + (m - 1)y = m - 1 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} m(m - 1)x + m(m + 1)y = m^3 + 2 \\ (m^2 - 1)x + (m^3 + 1)y = m^4 - 1 \end{cases}$$

Bài 396. Định tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$a/ \begin{cases} (m + 1)x + 8y - 4m = 0 \\ mx + (m + 3)y + 1 - 3m = 0 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} (m + 5)x + (2m + 3)y = 3m + 2 \\ (3m + 10)x + (5m + 6)y = 2m + 4 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} m|x| + (m - 1)(y - 2) = m - 1 \\ (m - 3)|x| + 2(y - 2) = 2m - 4 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} x - 2y = m \\ |mx - my| = |m - 1| \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} x + my = 1 \\ |mx + y| = 2m \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} mx^2 - 2y = m \\ x^2 + (m - 3)y = m - 1 \end{cases}$$

Bài 397. Định tham số m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất và tìm hệ thức độc lập giữa x và y

$$a/ \begin{cases} mx + y = 3 \\ x + my = 2m + 1 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} mx - y = 1 \\ x + 4(m + 1)y = 4m \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} 6mx + (2 - m)y = 3 \\ (m - 1)x - my = 2 \end{cases}$$

Bài 398. Định tham số để các hệ phương trình sau có vô số nghiệm

$$a/ \begin{cases} mx + 4y = 2m + 3 \\ (m + 1)x = 6y \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} (a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)y = a^2 \\ (a + b)x + (a - b)y = a + 1 \end{cases}$$

Bài 399. Định tham số m để các hệ phương trình sau vô nghiệm

$$a/ \begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 2x + y = m - 1 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} m^2x + (2 - m)y = 4 + m^3 \\ mx + (2m - 1)y = m^5 - 2 \end{cases}$$

Bài 400. Định tham số m để các hệ phương trình sau có nghiệm

$$a/ \begin{cases} (2m - 1)x - y = 1 \\ x + (m + 1)y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} (m + 3)x + (m - 3)y = 2m \\ (m^2 + 9)x + (m^2 - 9)y = 2m^2 \end{cases}$$

Bài 401. Tìm tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} x + (m + 2)y = 2m + 2 \\ mx + 2y = m^2 + 2 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất thỏa $x \geq y$.

Bài 402. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 4y = m^2 + 4 \\ x + (m + 3)y = 2m + 3 \end{cases} \quad (*)$

a/ Tìm tham số m để hệ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất.

b/ Giả sử hệ có nghiệm duy nhất (x, y) thì $x \geq y$ khi m bằng mấy ?

c/ Định tham số m để nghiệm của hệ $(*)$ có dạng $\begin{cases} x = 5 - 4t \\ y = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

Bài 403. Định tham số m để các hệ phương trình sau có nghiệm (x, y) sao cho biểu thức $P = x^2 + y^2$ có giá trị nhỏ nhất

a/ $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2y - x = m \end{cases}$

b/ $\begin{cases} x - 2y = 4 - m \\ 2x + y = 3m + 3 \end{cases}$

Bài 404. Định tham số m nguyên $(m \in \mathbb{Z})$ để các hệ sau có nghiệm nguyên

a/ $\begin{cases} 2mx + 3y = m \\ x + y = m + 1 \end{cases}$

b/ $\begin{cases} mx + y = 3 \\ x + my = 2m + 1 \end{cases}$

c/ $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$

d/ $\begin{cases} mx + 2y = m \\ (m - 1)x + (m - 1)y = 1 \end{cases}$

e/ $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x + 4(m + 1)y = 4m \end{cases}$

f/ $\begin{cases} mx + 2y + 3 = 0 \\ 3mx + y - 4m = 0 \end{cases}$

g/ $\begin{cases} mx - 2y = m - 2 \\ (m - 1)^2 x - y = m^2 - 1 \end{cases}$

h/ $\begin{cases} (m + 1)x + (3m + 1)y = 2 - m \\ 2x + (m + 2)y - 4 = 0 \end{cases}$

Bài 405. Định m nguyên để hệ có nghiệm nguyên dương

a/ $\begin{cases} mx + y - 3 = 0 \\ x + my - 2m - 1 = 0 \end{cases}$

b/ $\begin{cases} (m + 1)x - 2y = m - 1 \\ m^2x - y = m^2 + 2m \end{cases}$

Bài 406. Cho hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{ax} + \sqrt{by} = 3 \\ ax + by = \sqrt{ab} + 3 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của a và b sao cho hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = (1, 1)$.

Bài 407. Định b để hệ phương trình có nghiệm $\forall a \in \mathbb{R} : \begin{cases} ax + y = 3b \\ x + ay = b^2 + b \end{cases}$

Bài 408. Giả sử hệ $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$ có nghiệm. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Bài 409. Tìm một số có hai chữ số, biết hiệu của hai chữ số đó bằng 3. Nếu viết các chữ số theo thứ tự ngược lại thì được một số bằng $\frac{4}{5}$ số ban đầu trừ đi 10.

- Bài 410.** Ba cô Lan, Hương và Thúy cùng thuê một loại áo giống nhau. Số áo của Lan thuê trong 1 giờ ít hơn tổng áo của Hương và Thúy thuê trong 1 giờ là 5 áo. Tổng số áo của Lan thuê trong 4 giờ và Hương thuê trong 3 giờ nhiều hơn số áo của Thúy thuê trong 5 giờ là 30 áo. Số áo của Lan thuê trong 2 giờ cộng với số áo của Hương thuê trong 5 giờ và số áo của Thúy thuê trong 3 giờ tất cả được 76 áo. Hỏi trong một giờ mỗi cô thuê được mấy áo ?
- Bài 411.** Một công ty có 85 xe chở khách gồm hai loại, xe chở được 4 khách và xe chở được 7 khách. Dùng tất cả số xe đó, tối đa công ty chở một lần được 445 khách. Hỏi công ty đó có mấy xe mỗi loại ?
- Bài 412.** Một chủ cửa hàng bán lẻ mang 1 500 000 đồng đến ngân hàng đổi tiền xu để trả lại cho người mua. Ông ta đổi được tất cả 1450 đồng tiền xu các loại 2000 đồng, 1000 đồng và 500 đồng. Biết rằng số tiền xu loại 1000 đồng bằng hai lần hiệu của số tiền xu loại 500 đồng với số tiền xu loại 2000 đồng. Hỏi mỗi loại có bao nhiêu đồng tiền xu ?
- Bài 413.** Một gia đình có bốn người lớn và ba trẻ em mua vé xem xiếc hết 370 000 đồng. Một gia đình khác có hai người lớn và hai trẻ em cũng mua vé xem xiếc tại rạp đó hết 200 000 đồng. Hỏi giá vé người lớn và giá vé trẻ em là bao nhiêu ?
- Bài 414.** Nếu lấy một số có hai chữ số chia cho tích hai chữ số của nó thì được thương là 12 và dư là 18. Nếu lấy tổng bình phương các chữ số của số đó cộng với 9 thì được số đã cho. Hãy tìm số đó ?
- Bài 415.** Một đoàn xe tải chở 290 tấn xi măng cho một công trình xây đập thủy điện. Đoàn xe có 57 chiếc gồm ba loại, xe chở 3 tấn, xe chở 5 tấn và xe chở 7,5 tấn. Nếu dùng tất cả xe 7,5 tấn chở ba chuyến thì được số xi măng bằng tổng số xi măng do xe 5 tấn chở ba chuyến và xe 3 tấn chở hai chuyến. Hỏi số xe mỗi loại ?

E – HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN SỐ



① Hệ gồm 1 phương trình bậc nhất và 1 phương trình bậc hai

- Từ phương trình bậc nhất rút một ẩn theo ẩn kia.
- Thế vào phương trình bậc hai để đưa về phương trình bậc hai một ẩn.
- Số nghiệm của hệ tùy theo số nghiệm của phương trình bậc hai này.

② Hệ đối xứng loại 1 (I) $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ với $f(x, y) = f(y, x)$ và $g(x, y) = g(y, x)$.

Nhận dạng: khi ta hoán vị (đổi chỗ) x và y thì $f(x, y)$ và $g(x, y)$ không thay đổi.

Phương pháp giải:

- Đặt $S = x + y$ và $P = xy$.
- Đưa hệ phương trình (I) về hệ (II) với các ẩn S và P .
- Giải hệ (II) ta tìm được S và P .
- Tìm nghiệm (x, y) bằng cách giải phương trình $X^2 - SX + P = 0$.

③ Hệ đối xứng loại 2 (I) $\begin{cases} f(x, y) = 0 & (1) \\ f(y, x) = 0 & (2) \end{cases}$

Nhận dạng: khi hoán vị giữa x và y thì (1) biến thành (2) và ngược lại.

Phương pháp giải:

- Trừ (1) và (2) vế theo vế ta được: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) - f(y, x) = 0 & (3) \\ f(x, y) = 0 & (1) \end{cases}$
- Biến đổi (3) về phương trình tích: $(3) \Leftrightarrow (x - y) \cdot g(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$

— Lúc đó: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ x = y \\ f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$

- Giải các hệ trên ta tìm được nghiệm của hệ (I).

④ Hệ đẳng cấp (I) $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$

- Giải hệ khi $x = 0$ (hoặc $y = 0$).
- Khi $x \neq 0$, đặt $y = tx$. Thế vào hệ (I) ta được hệ theo t và x . Khử x ta tìm được phương trình bậc hai theo t . Giải phương trình này ta tìm được t , từ đó tìm được (x, y) .

★ Lưu ý: Ngoài các cách giải thông thường ta còn sử dụng phương pháp bất đẳng thức, phương pháp hàm số, lượng giác hóa (học ở lớp 11 và 12).

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 416. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x^2 - xy = 24 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ 3x + 4y = 84 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 + 2x + 3y - 6 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} 3x - 4y + 1 = 0 \\ xy = 3(x + y) - 9 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ xy + x + y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$g/ \begin{cases} y + x^2 = 4x \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$h/ \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x^2 - y^2 + 2y = 4 \end{cases}$$

$$i/ \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$$

$$j/ \begin{cases} 4x^2 - 3xy + y^2 = 1 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Bài 417. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2 + y^2 - xy - 2(x + y) = -31 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + y^2 + x + y = 8 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481 \\ x^2 + xy + y^2 = 37 \end{cases}$$

Bài 418. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} x - 3y = 4\frac{y}{x} \\ y - 3x = 4\frac{x}{y} \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} 2x^2 = y + \frac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \frac{1}{x} \end{cases}$$

Bài 419. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} 2x^2 - 4xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 + 2xy + 2y^2 = 7 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} y^2 - 3xy = 4 \\ x^2 - 4xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ 5x^2 - 9xy - 3y^2 = 15 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 5 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ 5x^2 - 7xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$$

Bài 420. Giải và biện luận các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x + y = m \\ x^2 - y^2 + 2x = 2 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} 4x^2 - 3xy + y^2 = 1 \\ 2x - y + m + 1 \end{cases}$$

Bài 421. Giải và biện luận các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2 + y^2 = 3 - 2m \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x + y = m + 1 \\ x^2y + xy^2 = 2m^2 - m - 3 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} (x+1)(y+1) = m + 5 \\ xy(x+y) = 4m \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 4 \\ x + y + xy = m \end{cases}$$

Bài 422. Giải và biện luận các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} x^2 = 3x + my \\ y^2 = 3y + mx \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x(3 - 4y^2) = m(3 - 4m^2) \\ y(3 - 4x^2) = m(3 - 4m^2) \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} xy + x^2 = m(y - 1) \\ xy + y^2 = m(x - 1) \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 3x - m \\ 2y^2 - x^2 = 3y - m \end{cases}$$

Bài 423. Giải và biện luận các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} x^2 + mxy + y^2 = m \\ x^2 + (m-1)xy + my^2 = m \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} xy - y^2 = 12 \\ x^2 - xy = m + 26 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = m \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 4 \\ x^2 + 5xy - 3y^2 = m \end{cases}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 424. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} 4x^2 - 3xy + y^2 = 1 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0 \\ x + y + 8 = 0 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 6 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} 4x^2 - 3xy + y^2 = 1 \\ 4x^2 + 4x - y^2 = -1 \end{cases}$$

Bài 425. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 4 \\ x + y + xy = 2 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x + xy + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2y + y^2x = 2 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = 17 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$$

$$g/ \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 13 \end{cases}$$

$$h/ \begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 18 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

$$i/ \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \\ x + y - \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$$

$$j/ \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ x + y - \sqrt{xy} = 4 \end{cases}$$

$$k/ \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 4 \\ x + y = 7 \end{cases}$$

$$l/ \begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1 \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2 \end{cases}$$

Bài 426. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x^2 = 13x + 4y \\ y^2 = 13y + 4x \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} xy + x^2 = 1 + y \\ xy + y^2 = 1 + x \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 3x - 2 \\ 2y^2 - x^2 = 3y - 2 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} 2x = y^2 - 4y + 5 \\ 2y = x^2 - 5x + 5 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$$

$$g/ \begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = 2 \\ 2y + \sqrt{x-1} = 2 \end{cases}$$

$$h/ \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1 \end{cases}$$

$$i/ \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 4 \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x-y} = 4 \end{cases}$$

$$j/ \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-2} = 3 \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x-2} = 3 \end{cases}$$

Bài 427. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} 2x^2 - 4xy + y^2 + 1 = 0 \\ 3x^2 + 2xy + 2y^2 = 7 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} y^2 - 3xy - 4 = 0 \\ x^2 - 4xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ x^2 - 4xy + 5y^2 = 5 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0 \\ 5x^2 - 7xy - 6y^2 = 0 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 - 4 = 0 \\ x^2 + 5xy - 3y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$g/ \begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \\ x|x| + y|y| = -2 \end{cases}$$

$$h/ \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21 \end{cases}$$

Bài 428. Định tham số m để hệ sau có nghiệm

$$a/ \begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ xy = 1 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = 1 - 3m \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 11 \\ xy(x - 2)(y - 2) = m \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} xy(x + 4)(y + 4) = m \\ x^2 + y^2 + 4(x + y) = 5 \end{cases}$$

Bài 429. Định tham số m để hệ có nghiệm duy nhất

$$a/ \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = m \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2m - 4 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = m \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} x + y + 2 = 2(x + 1)(y + 1) \\ x + y + xy = m \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = m + 6 \\ 2x + xy + 2y = m \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} x + xy + y = m \\ x^2y + y^2x = m - 1 \end{cases}$$

$$g/ \begin{cases} xy + x^2 = m(y - 1) \\ xy + y^2 = m(x - 1) \end{cases}$$

$$h/ \begin{cases} x + xy + y = m \\ x^2 + y^2 + xy = 1 - 2m \end{cases}$$

Bài 430. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x + xy + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} 2x^2y + xy^2 = 15 \\ 8x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + 3(x + y) = 28 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} xy - x + y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - x + y + xy = 6 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} x^3 - y^3 = 2 \\ xy(x - y) + 2 = 0 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ xy(x + y) + 2 = 0 \end{cases}$$

$$g/ \begin{cases} x^3 + y^3 + x^3y^3 = 17 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$$

$$h/ \begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ xy(x + y) = 2 \end{cases}$$

$$i/ \begin{cases} (x^2 + y^2)xy = 78 \\ x^4 + y^4 = 97 \end{cases}$$

$$j/ \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x(x + 1)y(y + 1) = 12 \end{cases}$$

$$k/ \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 + 2y = 11 \\ xy(x + 2)(y + 2) = 24 \end{cases}$$

$$l/ \begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9 \\ xy(x - 2)(y + 4) + 5 = 0 \end{cases}$$

$$m/ \begin{cases} x^3 + 2x = y \\ y^3 + 2y = x \end{cases}$$

$$n/ \begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$$

$$o/ \begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 3}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$$

$$q/ \begin{cases} 2x + y = \frac{3}{x^2} \\ 2y + x = \frac{3}{y^2} \end{cases}$$

Bài 431. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{y+2} = 1 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y + \sqrt{xy} = 7 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} \sqrt{x-4} + \sqrt{y-1} = 4 \\ x + y = 15 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} x + \sqrt{y+3} = 4 \\ y + \sqrt{x+2} = 3 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} 2x + \sqrt{y-2} + 4 = 0 \\ 2y + \sqrt{x+2} = 4 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} \sqrt{\frac{2x}{y}} + \sqrt{\frac{2y}{x}} = 3 \\ x - y + xy = 3 \end{cases}$$

Bài 432. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về hệ đối xứng loại 2

$$a/ \sqrt{2-x} = 2 - x^2.$$

$$b/ \sqrt{4-\sqrt{4+x}} = x.$$

$$c/ \sqrt{x^3-4} = \sqrt[3]{x^2+4}.$$

$$d/ x^3+2 = 3\sqrt[3]{3x-2}.$$

$$e/ \sqrt{5-\sqrt{5+x}} = x.$$

$$f/ x^3+1 = 2\sqrt[3]{2x-1}.$$

$$g/ x^2 - 2x = 2\sqrt{2x-1}$$

$$h/ x^3 = 4\sqrt[3]{4x-3} - 3.$$

Bài 433. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2y + y^2x = 3m - 8 \end{cases} \quad (*)$$

a/ Giải hệ (*) khi $m = \frac{7}{2}$.

b/ Tìm m để hệ (*) có nghiệm.

Bài 434. Tìm tham số m để hệ phương trình
$$\begin{cases} x + xy + y = m \\ x^2 + y^2 + xy = 1 - 2m \end{cases}$$
 có đúng hai nghiệm.

Bài 435. Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x + my - m = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases} \quad (*)$$

a/ Tìm tham số m để hệ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt.

b/ Gọi $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ là các nghiệm của hệ. Chứng minh: $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq 1$.

Bài 436. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7 \\ 3x + 2y = 23 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6 \\ x^2y + y^2x = 20 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2-y} = \sqrt{2} \\ \sqrt{y} - \sqrt{2-x} = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$g/ \begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \\ x+y = \sqrt{x+y+2} \end{cases}$$

$$i/ \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

$$k/ \begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

$$h/ \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$$

$$j/ \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 78 \end{cases}$$

$$l/ \begin{cases} 2(x+y) = 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$$

Bài 437. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} x + y = 8 \\ \sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9} = 10 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{2-y} = \sqrt{2-x} + \sqrt{y+1} \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} \sqrt{x + \frac{1}{y}} + \sqrt{x+y-3} = 3 \\ 2x + y + \frac{1}{y} = 8 \end{cases}$$

$$g/ \begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1} + x + \sqrt{y^2+x+y+1} + y = 18 \\ \sqrt{x^2+x+y+1} - x + \sqrt{y^2+x+y+1} - y = 2 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 3 \\ (x+1)\sqrt{y+1} + (y+1)\sqrt{x+1} = 6 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{y-1} = \sqrt{y-3} - \sqrt{x+2} \\ x^2 + y^2 - xy = 2y - x + 12 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} = y^2 + x \end{cases}$$

$$h/ \begin{cases} (x+y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2+y^2)\left(1 + \frac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases}$$

Bài 438. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} x^2 + xy + x + y = 4 \\ x + y + xy(x+y) = 4 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 \\ xy + x + 1 = x^2 \end{cases}$$

$$g/ \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$$

$$i/ \begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 13 \\ (x+y)(x^2-y^2) = 25 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x+y+1) + y(y+1) = 2 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = 1 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} x^2 + xy + 2x + 2y - 16 = 0 \\ (x+y)(4+xy) = 32 \end{cases}$$

$$h/ \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$$

$$j/ \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x-y)^3 \end{cases}$$

$$k/ \begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$l/ \begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$$

$$m/ \begin{cases} y^2 = (5x + 4)(4 - x) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 \end{cases}$$

$$n/ \begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

Bài 439. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} x^3(2 + 3y) = 8 \\ xy^3 - 2x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x^3 + y^2 = 2 \\ x^2 + xy + y^2 - y = 0 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} (x^2 + 1) + y(y + x) = 4y \\ (x^2 + 1)(y + x - 2) = y \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x + y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x + y} = 3 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\ 4x(x^3 - x^2 + x - 1) = y^2 + 2xy - 2 \end{cases}$$

Bài 440. Định tham số m để hệ sau có nghiệm

$$a/ \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = m \\ x + y - \sqrt{xy} = m \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} + y^2 + \frac{1}{y^2} = 15m - 10 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = m \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = m \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$$

Bài 441. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + m) \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases} \quad (*)$

a/ Chứng minh rằng nếu (x_0, y_0) là một nghiệm của hệ phương trình $(*)$ thì $(-x_0, -y_0)$ cũng là nghiệm. Từ đó tìm điều kiện cần của m để hệ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất.

b/ Thử lại các giá trị của m tìm ở câu a để có kết luận cuối cùng.

Bài 442. Trong các hệ phương trình sau

- Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên.
- Khi hệ có nghiệm (x, y) , tìm hệ thức giữa x, y độc lập với m.

$$a/ \begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2a - 1 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} mx + y = 3m \\ x + my = 2m + 1 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} x - 2y = 4 - m \\ 2x + y = 3m + 3 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2y - x = 10m + 5 \end{cases}$$

BÀI TẬP QUA CÁC KÌ THI

Bài 443. Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 1998

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = m \\ x + y - \sqrt{xy} = m \end{cases} \quad (*)$$

1/ Giải hệ phương trình $(*)$ khi $m = 4$.

2/ Tìm tham số m để hệ phương trình $(*)$ có nghiệm.

Bài 444. Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 1999 – Cao đẳng Sư Phạm Vinh năm 2001

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 - y^3 = m(x - y) \end{cases} \quad (*)$$

1/ Giải hệ phương trình $(*)$ khi $m = 1$.

2/ Tìm tham số m để hệ phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Bài 445. Cao đẳng Sư Phạm Hưng Yên khối A năm 2000

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 6 \\ x^2y + y^2x = 20 \end{cases}$$

Bài 446. Cao đẳng Y Tế Nam Định – Hệ Cao đẳng Điều Dưỡng chính qui năm 2000

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$$

Bài 447. Cao đẳng Kiểm Sát phía Nam năm 2000

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

Bài 448. Cao đẳng Giao Thông năm 2000

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3y = 9 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

Bài 449. Cao đẳng Sư Phạm Hà Nội khối A năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} |xy - 10| = 20 - x^2 \\ xy = 5 + y^2 \end{cases}$$

Bài 450. Cao đẳng Sư Phạm Nhà Trẻ Mẫu Giáo TW1 năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + xy = \frac{5}{4} \\ x^2y + xy^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Bài 451. Cao đẳng Sư Phạm Vĩnh Phúc khối A năm 2002

Giả sử (x, y) là các nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 2m - 1 \\ x^2 + y^2 = m^2 + 2m - 3 \end{cases}$$

Xác định tham số m để biểu thức $P = xy$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 452. Cao đẳng Xây Dựng số 3 năm 2002 – Học Viện Hàng Không năm 1997 – 1998

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 3 \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15 \end{cases}$$

Bài 453. Cao đẳng Sư Phạm Hà Tĩnh khối A, B năm 2002

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7(x - y) \\ x^2 + y^2 = x + y + 2 \end{cases}$$

Bài 454. Cao đẳng Sư Phạm Quảng Ngãi năm 2002

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 3x + 4 \\ 2y^2 - x^2 = 3y + 4 \end{cases}$$

Bài 455. Cao đẳng Kỹ Thuật Hà Tây 2002 – Học Viện Ngân Hàng Phân Viện TP.HCM năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 - 13xy + 15y^2 = 0 \end{cases}$$

Bài 456. Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Thái Bình năm 2002

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^3 + y^3 = 26 \end{cases}$$

Bài 457. Cao đẳng Sư Phạm Kỹ Thuật Vinh năm 2002

Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} xy + x^2 = a(y - 1) \\ xy + y^2 = a(x - 1) \end{cases}$$

Bài 458. Cao đẳng khối A, D năm 2003

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x = y^2 + y \\ x^2 + y^2 = 3(x + y) \end{cases}$$

Bài 459. Cao đẳng khối M, T năm 2003

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x^2 + 2x)(3x + y) = 18 \\ x^2 + 5x + y - 9 = 0 \end{cases}$$

Bài 460. Cao đẳng Nông Lâm năm 2003

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - 4xy = 3 \\ 2x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

Bài 461. Cao đẳng khối A năm 2004

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2y + xy^2 = 15 \\ 8x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$$

Bài 462. Cao đẳng Kinh Tế Kế Hoạch Đà Nẵng năm 2004

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy - x + y = -3 \\ x^2 + y^2 - x + y + xy = 6 \end{cases}$$

Bài 463. Cao đẳng Sư Phạm Kom Tum năm 2005

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Bài 464. Cao đẳng Sư Phạm Hà Nam năm 2005 – Đại học Ngoại Ngữ năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

Bài 465. Cao đẳng Sư Phạm Sóc Trăng năm 2005

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 2 \\ xy(x - y) = -2 \end{cases}$$

Bài 466. Cao đẳng Tài Chính Kế Toán IV năm 2005

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2y + y^2x = 2 \end{cases}$$

Bài 467. Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật I năm 2005

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + x^2 = 1 + y \\ xy + y^2 = 1 + x \end{cases}$$

Bài 468. Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

Xác định tham số m để hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + (m+2)x = my \\ y^2 + (m+2)y = mx \end{cases}$$
 có đúng hai nghiệm phân biệt

Bài 469. Đại học Đà Nẵng năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - xy - y = 1 \\ x^2 - xy^2 = 6 \end{cases}$$

Bài 470. Đại học Thái Nguyên năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$$

Bài 471. Đại học Y Hải Phòng năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 4 \\ xy(x-1)(y-1) = 4 \end{cases}$$

Bài 472. Học Viện Quân Y năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2 \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = 4 \end{cases}$$

Bài 473. Học Viện Hành Chính Quốc Gia – Đại học Sư Phạm Hà Nội khối B, M, T năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x + y + 2xy = 2 \end{cases}$$

Bài 474. Đại học Nông Nghiệp I khối A năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-y)^2 y = 2 \\ x^3 - y^3 = 19 \end{cases}$$

Bài 475. Đại học Cần Thơ khối A năm 2001

Tìm giá trị của a để hệ
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+3} + |y| = a \\ \sqrt{y^2+5} + |x| = \sqrt{x^2+5} + \sqrt{3} - a \end{cases}$$
 có đúng một nghiệm.

Bài 476. Đại học Văn Hóa khối D năm 2001 – Đại học Dân lập Đông Đô năm 1997 – 1998

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{7-y} = 4 \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{7-x} = 4 \end{cases}$$

ĐS: $x = y = 8$.

Bài 477. Phân Viện Báo Chí và Tuyên Truyền năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 = y + \frac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \frac{1}{x} \end{cases}$$

Bài 478. Đại học Thủy Lợi năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + y = \frac{3}{x^2} \\ 2y + x = \frac{3}{y^2} \end{cases}$$

Bài 479. Học Viện Quan Hệ Quốc Tế năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280 \end{cases}$$

Bài 480. Đại học Hàng Hải năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x - y)^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x - y)^2 \end{cases}$$

Bài 481. Đại học Thương Mại năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 1 + x^3y^3 = 19x^3 \\ x + xy^2 = -6x^2 \end{cases}$$

Bài 482. Đại học Ngoại Thương năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$$

Bài 483. Đại học Sư Phạm Tp. HCM khối A, B – Đại học Luật Tp. HCM khối A năm 2001

Xác định tham số a để hệ sau đây có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} (x+1)^2 = y+a \\ (y+1)^2 = x+a \end{cases}$$

Bài 484. Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh khối D, M, T năm 2001

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-2} = \sqrt{m} \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{m} \end{cases} \quad (\text{với } m \text{ là tham số}).$$

1/ Giải hệ phương trình khi $m = 0$.

2/ Xác định tham số m để hệ phương trình có nghiệm.

Bài 485. Trung Tâm Bồi Dưỡng Cán Bộ Y Tế Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 = 2y + x + m \\ y^3 = 2x + y + m \end{cases} \quad (*) \quad \text{với } m \text{ là tham số.}$$

1/ Giải hệ phương trình $(*)$ khi $m = 2$.

2/ Xác định các giá trị của tham số m để hệ $(*)$ có nghiệm duy nhất.

Bài 486. Đại học Kinh Tế Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy - y^2 = 12 \\ x^2 - xy = 26 + m \end{cases} \quad (*)$$

1/ Giải hệ phương trình $(*)$ khi $m = 2$.

2/ Với những giá trị nào của tham số m thì hệ phương trình đã cho có nghiệm.

Bài 487. Đại học Nông Lâm Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y = 6 \\ x^3 - y^3 = 126 \end{cases}$$

Bài 488. Đại học Dân lập Ngoại Ngữ – Tin học Tp. Hồ Chí Minh năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 = 5 \\ 3x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$$

Bài 489. Đại học Tài Chính Kế Toán Hà Nội năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$$

Bài 490. Đại học Mở Hà Nội năm 2001

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2x}{y}} + \sqrt{\frac{2y}{x}} = 3 \\ x - y + xy = 3 \end{cases}$$

Bài 491. Trường Sĩ Quan Lục Quân 2 – Cấp phân đội năm 1999 – 2000

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = m + 6 \\ 2x + xy + 2y = m \end{cases} (*) \text{ với } m \text{ là tham số.}$$

1/ Giải hệ phương trình (*) khi $m = -3$.

2/ Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình (*) có nghiệm duy nhất.

ĐS: a/ $S = \{(\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-1, -1)\}$ b/ $m = 21$.

Bài 492. Đại học Giao Thông Vận Tải năm 1999 – 2000

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy - 3x - 2y = 16 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 33 \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(-3 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}), (-3 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3})\}$.

Bài 493. Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1999 – 2000 hệ trung cấp

Giải và biện luận theo m hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = m \\ x^2 - y^2 + 2x = 2 \end{cases}$$

Bài 494. Đại học An Ninh khối D, G năm 1999 – 2000

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4 \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(1, 1)\}$. Có thể giải theo BĐT Bunhiacôpxki.

Bài 495. Đại học Hàng Hải năm 1999 – 2000

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 78 \end{cases} \quad (x > 0, y > 0).$$

ĐS: $S = \{(4, 9), (9, 4)\}.$

Bài 496. Đại Học Ngoại Thương Hà Nội năm 1999 – 2000

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x + y)\left(1 + \frac{1}{xy}\right) = 5 \\ (x^2 + y^2)\left(1 + \frac{1}{x^2y^2}\right) = 49 \end{cases}$$

ĐS: $S = \left\{ \left(\frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}, -1 \right), \left(-1, \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2} \right) \right\}.$

Bài 497. Đại học Hà Nội khối A, B năm 1999 – 2000

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} \\ 2y + \frac{1}{x} = \frac{3}{y} \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(1, 1), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\}.$

Bài 498. Đại học Sư Phạm Quy Nhơn năm 1999 – 2000

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = m + 1 \\ x^2y + y^2x = 2m^2 - m - 3 \end{cases} \quad (*)$$

1/ Giải hệ phương trình (*) khi $m = 3$.

2/ Chứng minh rằng với mọi m thì hệ phương trình (*) luôn có nghiệm.

ĐS: $S = \{(1, 3), (3, 1)\}.$

Bài 499. Đại học Sư Phạm Hà Nội 2 năm 1999 – 2000

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 4y = 1 \\ 3x^2 - 2y^2 - 9x - 8y = 3 \end{cases}$$

ĐS: $S = \left\{ \left(\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}, 0 \right), \left(\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}, -4 \right) \right\}.$

Bài 500. Đại học Sư Phạm Vinh năm 1999 – 2000

Tìm tham số m để hệ $\begin{cases} x^3 = y^2 + 7x^2 - mx \\ y^3 = x^2 + 7y^2 - my \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

ĐS: $m > 16$.

Bài 501. Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh đợt 2 năm 1998 – 1999

Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 + m \end{cases} \quad (*)$

1/ Giải hệ phương trình $(*)$ với $m = 0$.

2/ Với giá trị nào của tham số m thì hệ phương trình $(*)$ có nghiệm.

ĐS: 1/ $S = \left\{ (\pm 1, \pm 2), \left(\pm \frac{4}{\sqrt{3}}, \mp \frac{5}{\sqrt{3}} \right) \right\}$ 2/ $5 - 11\sqrt{3} \leq m \leq 5 + 11\sqrt{3}$.

Bài 502. Đại học Đà Nẵng năm 1998 – 1999

Giải và biện luận theo m số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 3m \\ 2y - \sqrt{xy} = 0 \end{cases}$

ĐS: $\begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 3m \longrightarrow S = \{(3m, 0)\}, \forall m \in \mathbb{R} \\ y = m \Rightarrow x = 4m \longrightarrow S = \{(4m, m)\}, \forall m \leq 0 \end{cases}$

Bài 503. Đại học Kiến Trúc năm 1998 – 1999

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^3 - x^3 = 7 \\ 2x^2y + 3xy^2 = 16 \end{cases}$

ĐS: $S = \{(1, 2)\}$.

Bài 504. Đại học Thái Nguyên khối D năm 1998 – 1999

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$

ĐS: $S = \{(4, 9), (9, 4)\}$.

Bài 505. Đại học Thủy Sản năm 1998 – 1999

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} = 3 \\ xy + yz + zx = 12 \end{cases}$

ĐS: $x = y = z = 2$. Nhân hai vế của (2) cho $xyz \dots$

Bài 506. Đại học Hàng Hải năm 1998 – 1999

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3|x| + 5y + 9 = 0 \\ 2x - |y| - 7 = 0 \end{cases}.$$

ĐS: $S = \left\{ \left(\frac{44}{7}, -\frac{39}{7} \right) \right\}$. Chia 4 trường hợp giải.

Bài 507. Đại học Mở – Địa Chất năm 1998 – 1999

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2y + y^2x = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(2, 3), (3, 2)\}$.

Bài 508. Đại học Mỹ Thuật năm 1998 – 1999

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 = 3x - y \\ y^2 = 3y - x \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(0, 0), (2, 2)\}$.

Bài 509. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh năm 1997 – 1998

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = m \\ (x + 1)y^2 + xy = m(y + 2) \end{cases} \quad (*)$$

1/ Giải hệ phương trình (*) khi $m = 4$.

2/ Tìm tất cả giá trị của tham số m để hệ phương trình (*) có nhiều hơn 2 nghiệm.

ĐS: 1/ $S = \{(2, 2), (3 \mp \sqrt{5}, 1 \pm \sqrt{5})\}$ 2/ $|m| > \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Bài 510. Đại học Ngoại Thương Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 1997 – 1998

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 9 \end{cases}$$

ĐS: $S = \left\{ \left(1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right), \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, 1 \right) \right\}$.

Bài 511. Đại học Mở – Địa Chất năm 1997 – 1998

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2y(x^2 - y^2) = 3x \\ x(x^2 + y^2) = 10y \end{cases}$$

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad S = \left\{ (0,0), (\pm 2, \pm 1), \left(\pm \frac{\sqrt{5\sqrt{15}}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3\sqrt{15}}}{2} \right) \right\}.$$

Bài 512. Đại học Ngoại Thương Hà Nội năm 1997 – 1998

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = m \end{cases} \quad (*)$$

1/ Giải hệ phương trình (*) với $m = 12$.

2/ Với giá trị nào của tham số m thì hệ phương trình (*) đã cho có nghiệm.

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad 1/ S = \{(1,2), (2,1), (1,-3), (-3,1), (-2,2), (2,-2), (-2,-3), (-3,-2)\}$$

$$2/ m \in \left[-\frac{33}{16}, 16 \right]$$

Bài 513. Đại học Xây Dựng năm 1997 – 1998

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (2x+y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(2x-y)^2 = 0 \\ 2x+y + \frac{1}{2x-y} = 3 \end{cases}$$

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad S = \left\{ \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{4} \right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right) \right\}. \text{ Chia hai vế PT (1) cho } (2x-y)^2.$$

Bài 514. Đại học Quốc Gia Hà Nội khối B năm 1997 – 1998

Giải và biện luận theo tham số a hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Bài 515. Đại học Quốc Gia Hà Nội khối A năm 1997 – 1998

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - 3y = \frac{4y}{x} \\ y - 3x = \frac{4x}{y} \end{cases}$$

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad x = y = -2.$$

Bài 516. Đại học Quốc Gia Hà Nội khối D năm 1997 – 1998

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ xy(x-y) = 2 \end{cases}$$

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad S = \{(-1,-2), (2,1)\}. \quad \underline{\text{Cách 1.}} \text{ Hệ đẳng cấp.} \quad \underline{\text{Cách 2.}} \text{ Đặt ẩn phụ } x-y=a, xy=b.$$

Bài 517. Đại học Thủy Lợi năm 1997 – 1998

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \\ x + y - \sqrt{xy} = 4 \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(1,9), (9,1)\}$.

Bài 518. Đại học Tổng Hợp năm 1991 – 1992

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2 + y^2 = m \end{cases} \quad (*)$$

1/ Giải hệ phương trình khi $m = 5$.

2/ Với giá trị nào của tham số m thì hệ phương trình $(*)$ có nghiệm.

ĐS: 1/ $S = \{(2,1), (1,2)\}$ 2/ $m \in [0;8]$.

Bài 519. Đại học Bách Khoa Tp. Hồ Chí Minh năm 1994 – 1995

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2y + xy^2 = 3m - 8 \end{cases} \quad (*)$$

1/ Giải hệ phương trình khi $m = \frac{7}{2}$.

2/ Với giá trị nào của tham số m thì hệ phương trình $(*)$ có nghiệm.

ĐS: 1/ $S = \left\{ \left(2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right) \right\}$ 2/ $m \leq \frac{13 + 3\sqrt{33}}{8} \vee m \geq 8$.

Bài 520. Đại học Sư Phạm Kỹ Thuật Tp. Hồ Chí Minh năm 1994 – 1995

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$$

ĐS: $x = y = 4$.

Bài 521. Đại học Dân lập Văn Hiến năm 1995 – 1996

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2(x + y) = 3(\sqrt[3]{x^2y} + \sqrt[3]{xy^2}) \\ \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 6 \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(8,64), (64,8)\}$.

Bài 522. Đại học khối B năm 2002

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x - y} = \sqrt{x - y} \\ x + y = \sqrt{x + y + 2} \end{cases}$$

ĐS: $S = \left\{ (1;1), \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \right\}$.

Bài 523. Đại học khối A năm 2003

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$$

ĐS: $S = \left\{ (1;1), \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right), \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) \right\}.$

Bài 524. Đại học khối B năm 2003

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(1;1)\}.$

Bài 525. Đại học khối D năm 2004

Tìm tham số m để hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$$
 có nghiệm.

ĐS: $0 \leq m \leq \frac{1}{4}.$

Bài 526. Dự bị 1 Đại học khối A năm 2005

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x + y + 1) + y(y + 1) = 2 \end{cases}$$

ĐS: $S = \left\{ (\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}; \sqrt{2}), (1; -2), (-2; 1) \right\}.$

Bài 527. Dự bị 2 Đại học khối A năm 2005

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2x + y + 1} - \sqrt{x + y} = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(2; -1)\}.$

Bài 528. Đại học khối A năm 2006

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(3;3)\}.$

Bài 529. Dự bị 1 Đại học khối A năm 2006

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(y + x) = 4y \\ (x^2 + 1)(y + x - 2) = y \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(1; 2), (-2; 5)\}$.

Bài 530. Dự bị 2 Đại học khối A năm 2006

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases}$$

ĐS: $S = \left\{ (\pm 3; \pm 1), \left(-4\sqrt{\frac{6}{13}}; \sqrt{\frac{6}{13}}\right), \left(4\sqrt{\frac{6}{13}}; -\sqrt{\frac{6}{13}}\right) \right\}$.

Sử dụng: $3(x^3 - y^3) = 6(4x + y) = (x^2 - 3y^2)(4x + y)$.

Bài 531. Dự bị 2 Đại học khối B năm 2006

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 13 \\ (x + y)(x^2 - y^2) = 25 \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(3; 2), (-2; -3)\}$. HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 19 \\ xy(x - y) = 6 \end{cases}$

Bài 532. Dự bị 1 Đại học khối D năm 2006

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x - y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x - y)^3 \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(2; 1), (-1; -2)\}$. Đặt $u = x - y$; $v = xy$.

Bài 533. Đại học khối D năm 2007

Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3} = 15m - 10 \end{cases}$$

ĐS: $\frac{7}{4} \leq m \leq 2 \vee m \geq 22$. Đặt $v = y + \frac{1}{y}$, $u = x + \frac{1}{x}$, ($|u| \geq 2$, $|v| \geq 2$). Dùng PP hàm số.

Bài 534. Dự bị 2 Đại học khối A năm 2007

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = 1 \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(1; 1), (-1; -1)\}$. Đặt $u = x^2 + xy$, $v = x^3y$.

Bài 535. Dự bị 2 Đại học khối B năm 2007

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(0;0), (1;1)\}$. Cộng 2 PT về theo vế, ta được:

$$VT = 2xy \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2 + 8}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2 + 8}} \right) = x^2 + y^2 = VP$$

Mà $|VT| \leq 2|xy| \leq x^2 + y^2 = VP$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = y = 1 \end{cases}$.

Bài 536. Dự bị 2 Đại học khối D năm 2007

Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} 2x - y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$$

ĐS: $m > 2$. PT $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 + (2-m)x - 1 = 0 \end{cases}$. Dùng tam thức bậc hai.

Bài 537. Đại học khối A năm 2008

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\frac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

ĐS: $S = \left\{ \left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}; -\sqrt[3]{\frac{25}{16}} \right), \left(1; -\frac{3}{2} \right) \right\}$. Đặt $u = x^2 + y$; $v = xy$.

Bài 538. Đại học khối B năm 2008

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$$

ĐS: $S = \left\{ \left(-4; \frac{17}{4} \right) \right\}$. HPT $\Rightarrow x(x+4)^3 = 0 \Rightarrow x = -4$ ($x \neq 0$).

Bài 539. Đại học khối D năm 2008

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(5;2)\}$. HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x-2y-1) = 0 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$. Lưu ý rằng: $x + y > 0$.

Bài 540. Đại học khối B năm 2009

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$$

ĐS: $S = \left\{ \left(1; \frac{1}{3}\right), (3; 1) \right\}$. Đặt $u = x + \frac{1}{y}$, $v = \frac{x}{y}$.

Bài 541. Đại học khối D năm 2009

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x + y + 1) - 3 = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$$

ĐS: $S = \left\{ (1; 1), \left(2; -\frac{3}{2}\right) \right\}$. HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 - \frac{3}{x} = 0 \\ (x + y)^2 - \frac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$. Đặt $u = x + y$; $v = \frac{1}{x}$.

Bài 542. Đại học khối A năm 2010

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (4x^2 + 1)x + (y - 3)\sqrt{5 - 2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3 - 4x} = 7 \end{cases}$$

ĐS: $S = \left\{ \left(\frac{1}{2}; 2\right) \right\}$. HPT $\Rightarrow 4x^2 + \left(\frac{5}{2} - 2x^2\right)^2 + 2\sqrt{3 - 4x} - 7 = 0$. Dùng PP hàm số.

Bài 543. Đại học khối A năm 2011

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x + y) = 0 \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x + y)^2 \end{cases}$$

ĐS: $S = \left\{ (1; 1), (-1; -1), \left(\pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right) \right\}$.

Bài 544. Tạp chí Toán học và tuổi trẻ số 379 tháng 1 năm 2009

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2(y + 1)(x + y + 1) = 3x^2 - 4x + 1 \\ xy + x + 1 = x^2 \end{cases}$$

ĐS: $S = \left\{ (1; -1), \left(-2; -\frac{5}{2}\right) \right\}$. Chia hai vế của (2) cho x, thay vào (1).

Bài 545. Tạp chí Toán học và tuổi trẻ số 379 tháng 1 năm 2009

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x - 1} = 2x - 2y \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(5; 2)\}$. Từ PT (1) $\Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 - (x + y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - 2y - 1) = 0$.

Bài 546. Tạp chí Toán học và tuổi trẻ số 379 tháng 1 năm 2009

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^2 = (5x + 4)(4 - x) & (1) \\ y^2 - 5x^2 - 4xy + 16x - 8y + 16 = 0 & (2) \end{cases}$$

ĐS: $S = \left\{ \left(-\frac{4}{5}; 0 \right), (0; 4) \right\}$. PT (2) $\Leftrightarrow y^2 - (4x + 8)y - 5x^2 + 16x + 16 = 0$. Xem như phương trình bậc hai với ẩn y .

Bài 547. Tạp chí Toán học và tuổi trẻ số 379 tháng 1 năm 2009

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(y + x) = 4y \\ (x^2 + 1)(y + x - 2) = y \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(1; 2), (-2; 5)\}$. Chia hai vế cho y , đặt $u = \frac{x^2 + 1}{y}$, $v = y + x - 2$.

Bài 548. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 379 tháng 1 năm 2009

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \frac{3}{(x + y)^2} = 7 \\ 2x + \frac{1}{x + y} = 3 \end{cases}$$

ĐS: $S = \{(0; 1)\}$. Biến đổi và đặt $u = x + y + \frac{1}{x + y}$ ($|u| \geq 2$), $v = x - y$.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG 3**Bài 549.** Giải và biện luận các phương trình sau

a/ $m^2x + 4m - 3 = x + m^2$.

b/ $a^2x + 2ab = b^2x + a^2 + b^2$.

c/ $(a+b)^2x + 2a^2 = 2a(a+b) + (a^2 + b^2)x$.

d/ $a(ax+b) = 4ax + b^2 - 5$.

Bài 550. Tìm m để các phương trình sau có nghiệm

a/ $\frac{2x+m}{x-1} - \frac{x+m-1}{x} = 1$.

b/ $\frac{m^2x}{|x|-1} - m|x| = 2m+1$.

c/ $\frac{2mx-1}{\sqrt{x}-1} - 2\sqrt{x-1} = \frac{m+1}{\sqrt{x}-1}$.

d/ $|x-1| + 2x - 3 = m$.

Bài 551. Giải và biện luận các phương trình sau

a/ $2x^2 + 12x - 15m = 0$.

b/ $x^2 - 2(m-1)x + m^2 = 0$.

c/ $x^2 - mx + m - 1 = 0$.

d/ $x^2 - 2(m-2)x + m(m-3) = 0$.

Bài 552. Tìm m để phương trình có một nghiệm x_0 . Tính nghiệm còn lại

a/ $x^2 - mx + m + 1 = 0$; $x_0 = -\frac{3}{2}$.

b/ $2x^2 - 3m^2x + m = 0$; $x_0 = 1$.

Bài 553. Trong các phương trình sau, tìm m để

- Phương trình có hai nghiệm trái dấu
- Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt
- Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt
- Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa: $x_1^3 + x_2^3 = 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

a/ $x^2 - 2(m-2)x + m(m-3) = 0$.

b/ $x^2 + 2(m-1)x + m^2 = 0$.

c/ $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0$.

d/ $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$.

e/ $(m+1)x^2 + 2(m+4)x + m + 1 = 0$.

f/ $x^2 - 4x + m + 1 = 0$.

Bài 554. Trong các phương trình sau, hãy

- Giải và biện luận phương trình
- Khi phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 , tìm hệ thức giữa x_1, x_2 độc lập với m

a/ $x^2 + (m-1)x - m = 0$.

b/ $x^2 - 2(m-2)x + m(m-3) = 0$.

c/ $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$.

d/ $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0$.

Bài 555. Giải các phương trình sau

a/ $x^2 + \sqrt{x^2 - 6} = 12$.

b/ $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31$.

$$c/ \sqrt{16x+17} = 8x-23.$$

$$d/ \sqrt{x^2-2x-8} = \sqrt{3}(x-4).$$

$$e/ \sqrt{3x^2-9x+1} + x - 2 = 0.$$

$$f/ \sqrt{51-2x-x^2} = 1-x.$$

$$g/ (x-3)\sqrt{x^2-4} = x^2-9.$$

$$h/ \sqrt{x+3} + 1 = \sqrt{3x-1}.$$

Bài 556. Giải các phương trình sau

$$a/ \sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} = x-2.$$

$$b/ \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x} - \sqrt{x+8}$$

$$c/ \sqrt{x-5} + \sqrt{x+3} = \sqrt{2x+4}.$$

$$d/ \sqrt{3x+4} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{x+3}.$$

$$e/ \sqrt{x^2-3x+3} + \sqrt{x^2-3x+6} = 3.$$

$$f/ \sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{3x-5}.$$

$$g/ \sqrt{3x-3} - \sqrt{5-x} = \sqrt{2x-4}.$$

$$h/ 2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4.$$

Bài 557. Giải các phương trình sau

$$a/ \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2.$$

$$b/ \sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}} + \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 2.$$

$$c/ \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \frac{x+3}{2}.$$

$$d/ x^2 - x - \sqrt{x^2 - x + 13} = 7.$$

$$e/ x^2 + 2\sqrt{x^2-3x+1} = 3x+4.$$

$$f/ 2x^2 + 3\sqrt{2x^2+x+1} = 9-x.$$

$$g/ x^2 - \sqrt{x^2-2x+4} = 2x-2.$$

$$h/ 2x^2 + 5\sqrt{x^2+3x+5} = 23-6x.$$

Bài 558. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} x+xy+y=-1 \\ x^2y+y^2x=-6 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^4-x^2y^2+y^4=13 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} x^2y+y^2x=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^5+y^5=x^2+y^2 \end{cases}$$

$$e/ \begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x^4+y^4+x^2y^2=21 \end{cases}$$

$$f/ \begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2+y^2+3(x+y)=28 \end{cases}$$

Bài 559. Giải các hệ phương trình sau

$$a/ \begin{cases} (x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=5 \\ (x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right)=49 \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} y(x^2+1)=2x(y^2+1) \\ (x^2+y^2)\left(1+\frac{1}{x^2y^2}\right)=24 \end{cases}$$

$$c/ \begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=4 \end{cases}$$

$$d/ \begin{cases} \frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}=\frac{2}{3} \\ (x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=6 \end{cases}$$

Chương 4**BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH****A – BẤT ĐẲNG THỨC****① Tính chất**

Điều kiện		Nội dung	
Cộng hai vế với số bất kì		$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	(1)
Nhân hai vế	$c > 0$ (một số dương)	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	(2a)
	$c < 0$ (một số âm)	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	(2b)
Cộng vế theo vế các BĐT cùng chiều		$a < b$ và $c < d \Leftrightarrow a + c < b + d$	(3)
Nhân từng vế BĐT khi biết nó dương $a > 0, c > 0$		$a < b$ và $c < d \Leftrightarrow ac < bd$	(4)
Nâng lũy thừa với $n \in \mathbb{Z}^+$	Mũ lẻ	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	(5a)
	Mũ chẵn	$0 < a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n}$	(5b)
Lấy căn hai vế	$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	(6a)
	a bất kỳ	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	(6b)
Nghịch đảo	Nếu a, b cùng dấu: $ab > 0$	$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	(7a)
	Nếu a, b trái dấu: $ab < 0$	$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	(7b)
Cộng hai vế BĐT cùng chiều	$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases}$	$a + c > b + d$	(8a)
Nhân hai vế BĐT cùng chiều khi biết chúng dương	$\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases}$	$ac > bd$	(8b)

✪ Lưu ý

- Không và không có quy tắc chia hai vế bất đẳng thức cùng chiều.
- Ta chỉ nhân hai vế bất đẳng thức khi biết chúng dương.
- Cần nắm vững các hằng đẳng thức đáng nhớ và cách biến đổi.

② **Một số bất đẳng thức thông dụng**

a/ **Số chính phương**: $a^2 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$ $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

b/ **Bất đẳng thức Cauchy** (Arithmetic Means – Geometric Means)

✧ Với $x, y \geq 0$ thì $\begin{cases} x + y \geq 2\sqrt{xy} & (1) \\ x^2 + y^2 \geq 2xy & (2) \end{cases}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

✧ Với $x, y \in \mathbb{R}$ thì $\begin{cases} xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 & (3) \\ (x+y)^2 \geq 4xy & (4) \end{cases}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

✧ Với $x, y, z \geq 0$ thì $\begin{cases} x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} & (5) \\ xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 & (6) \end{cases}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z$.

✧ Mở rộng cho n số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ không âm ta có: $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.

Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$.

— **Hệ quả**

- + Nếu $x, y > 0$ có $S = x + y$ không đổi thì $P = xy$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$.
- + Nếu $x, y > 0$ có $P = xy$ không đổi thì $S = x + y$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y$.

c/ **Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối**

Điều kiện	Nội dung
$x \in \mathbb{R}$	$ x \geq 0, x \geq x, x \geq -x$
$x > 0$	$ x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
	$ x \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -a \\ x \geq a \end{cases}$
$a, b \in \mathbb{R}$	$ a - b \leq a + b \leq a + b $

d/ **Bất đẳng thức về các cạnh của tam giác**

Với a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác, ta có

- $a, b, c > 0$.
- $|a - b| < c < a + b$.
- $|b - c| < a < b + c$.
- $|c - a| < b < c + a$.

e/ **Bất đẳng thức Bunhiacôpxki** (B.C.S).

✧ Với x, y bất kỳ, ta luôn có: $\begin{cases} (a.x + b.y)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) & (7) \\ |a.x + b.y| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} & (8) \end{cases}$

Dấu " $=$ " xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ hay $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

✧ Với x, y, z bất kỳ, ta luôn có:

$$\left| (a.x + b.y + c.z) \right|^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \quad (9)$$

$$\left| a.x + b.y + c.z \right| \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \quad (10)$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ hay $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

f/ Bất đẳng thức cộng mẫu số

Bất đẳng thức cộng mẫu số (BĐT Cauchy Schwarz) là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức BCS.

✧ Với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$, ta luôn có: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (11)$.

✧ Với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$, ta luôn có: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (12)$.

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Dạng toán 1. Chứng minh BĐT dựa vào định nghĩa và tính chất



✧ Để chứng minh một BĐT ta có thể sử dụng các cách sau

- Biến đổi BĐT cần chứng minh tương đương với một BĐT đã biết.
- Sử dụng một BĐT đã biết, biến đổi để dẫn đến BĐT cần chứng minh.

✧ Một số BĐT thường dùng

$$\bullet A^2 \geq 0. \quad \bullet A^2 + B^2 \geq 0. \quad \bullet A.B \geq 0 \text{ với } A, B \geq 0 \quad \bullet A^2 + B^2 \geq 2AB.$$

✧ Lưu ý

- Trong quá trình biến đổi, ta thường chú ý đến các hằng đẳng thức.
- Khi chứng minh BĐT ta thường tìm điều kiện để dấu đẳng thức xảy ra. Khi đó ta có thể tìm GTLN, GTNN của biểu thức.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 605. Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a/ $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

b/ $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

c/ $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$.

d/ $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc - ca)$.

e/ $a^4 + b^4 + c^4 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$.

f/ $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$.

$$g/ a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 6abc. \quad h/ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e).$$

$$i/ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}, (a, b, c > 0). \quad j/ a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}, (a, b, c \geq 0).$$

Bài 606. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$a/ \frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^3, (a, b \geq 0). \quad b/ a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3.$$

$$c/ a^4 + 3 \geq 4a. \quad d/ a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc, (a, b, c \geq 0).$$

$$e/ a^4 + b^4 \leq \frac{a^6}{b^2} + \frac{b^6}{a^2}, (a, b \neq 0). \quad f/ \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}, (ab > 1).$$

$$g/ \frac{a^2 + 3}{\sqrt{a^2 + 2}} > 2. \quad h/ (a^5 + b^5)(a+b) \geq (a^4 + b^4)(a^2 + b^2), (ab > 0).$$

Bài 607. Cho $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (1). Áp dụng bất đẳng thức (1) để chứng minh các bất đẳng thức sau

$$a/ (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq 8abc.$$

$$b/ (a^2 + 4)(b^2 + 4)(c^2 + 4)(d^2 + 4) \geq 256abcd.$$

$$c/ a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd.$$

Bài 608. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (2). Áp dụng bất đẳng thức (2) để chứng minh các bất đẳng thức sau

$$a/ (a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2). \quad b/ \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2.$$

$$c/ (a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca). \quad d/ a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c).$$

$$e/ \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}, (a, b, c > 0). \quad f/ a^4 + b^4 + c^4 \geq abc, (a+b+c=1).$$

Bài 609. Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ (*). Áp dụng (*) chứng minh các bất đẳng thức sau

$$a/ \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2.$$

$$b/ 1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

$$c/ 2 < \frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{b+c+d} + \frac{c+d}{c+d+a} + \frac{d+a}{d+a+b} < 3.$$

Bài 610. Cho $a, b \geq 0$. Chứng minh bất đẳng thức: $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a = ab(a+b)$ (3). Áp dụng bất đẳng thức (3) để chứng minh các bất đẳng thức sau

$$a/ \frac{a^3 + b^3}{ab} + \frac{b^3 + c^3}{bc} + \frac{c^3 + a^3}{ca} \geq 2(a + b + c).$$

$$b/ \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc} \text{ với } a, b, c > 0.$$

$$c/ \frac{1}{a^3 + b^3 + 1} + \frac{1}{b^3 + c^3 + 1} + \frac{1}{c^3 + a^3 + 1} \leq 1 \text{ với } a, b, c > 0 \text{ và } abc = 1.$$

$$d/ \frac{1}{a + b + 1} + \frac{1}{b + c + 1} + \frac{1}{c + a + 1} \leq 1 \text{ với } a, b, c > 0 \text{ và } abc = 1.$$

$$e/ \sqrt[3]{4(a^3 + b^3)} + \sqrt[3]{4(b^3 + c^3)} + \sqrt[3]{4(c^3 + a^3)} \geq 2(a + b + c) \text{ với } a, b, c \geq 0.$$

$$f/ \frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ac + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3} \text{ với } a, b, c > 0.$$

$$g/ \frac{1}{a^3 + abc + b^3} + \frac{1}{b^3 + abc + c^3} + \frac{1}{a^2 + abc + c^2} \leq \frac{1}{abc} \text{ với } a, b, c > 0.$$

$$h/ \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^2 - b^3}{cb + 3c^2} + \frac{5a^2 - c^3}{ac + 3a^2} \leq a + b + c \text{ với } a, b, c > 0.$$

Bài 611. Cho $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh bất đẳng thức sau (Min – cốp – xki)

$$\boxed{\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2} \geq \sqrt{(a + b)^2 + (x + y)^2}} \quad (4)$$

Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$a/ \text{ Cho } a, b \geq 0 \text{ thỏa } a + b = 1. \text{ Chứng minh: } \sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + b^2} \geq \sqrt{5}.$$

$$b/ \text{ Tìm GTNN của biểu thức } P = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{a^2}}.$$

$$c/ \text{ Cho } x, y, z > 0 \text{ thỏa mãn } x + y + z = 1. \text{ Chứng minh:}$$

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}.$$

$$d/ \text{ Cho } x, y, z > 0 \text{ thỏa mãn } x + y + z = \sqrt{3}. \text{ Tìm GTNN của biểu thức:}$$

$$P = \sqrt{223 + x^2} + \sqrt{223 + y^2} + \sqrt{223 + z^2}.$$

Bài 612. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh:

$$a/ ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

$$b/ abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(a + c - b).$$

$$c/ 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 > 0.$$

$$d/ a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a + b)^2 > a^3 + b^3 + c^3.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 613. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a/ $(a + b)^2 \geq 4ab$.

b/ $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$.

c/ $2(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)^2$.

d/ $a^4 + 4 \geq 4a^2$.

e/ $a + \frac{1}{4} \geq \sqrt{a}$.

f/ $a + b + \frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

g/ $a + b + c + \frac{3}{4} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

h/ $a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geq 4(a + b + c)$.

i/ $(a + b + c)^3 \geq 3(ab + bc + ca)$.

j/ $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$.

k/ $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$.

l/ $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$.

m/ $a^4 + b^4 + c^2 \geq a^2b^2 + c(b^2 + a^2)$.

n/ $a^6 + b^6 + c^2 \geq a^3b^3 + c(a^3 + b^3)$.

o/ $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$.

q/ $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$.

Bài 614. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a/ $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$; $(a, b \geq 0)$.

b/ $a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + a^2b^3$; $(a, b \geq 0)$.

c/ $a^5 + b^5 \geq a^4b + ab^4$; $(a, b \geq 0)$.

d/ $a^6 + b^6 \geq a^5b + ab^5$.

e/ $a^6 + b^6 \geq a^4b^2 + a^2b^4$.

f/ $a^4 + a + 1 > 0$.

Bài 615. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a/ $a^2 + a + 1 > 0$.

b/ $a^2 - a + 1 > 0$.

c/ $a^4 - a + 1 > 0$.

d/ $\frac{a^2 - a + 1}{a^2 + a + 1} \geq \frac{1}{3}$.

e/ $\frac{a^2 + a + 1}{a^2 - a + 1} \geq \frac{1}{3}$.

f/ $\frac{a^2 - a + 1}{a^2 + a + 1} \leq 3$.

g/ $\frac{a^2 + a + 1}{a^2 - a + 1} \leq 3$.

h/ $a^2 - ab + b^2 \geq 0$.

i/ $a^2 + ab + b^2 \geq 0$.

j/ $\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{1}{3}$.

k/ $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{1}{3}$.

l/ $\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a - b}{3}$; $(a, b > 0)$.

Bài 616. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a/ $x \geq 2\sqrt{x - 1}$; $(x \geq 1)$.

b/ $x - 2 \geq 2\sqrt{x - 3}$; $(x \geq 3)$.

$$c/ \quad x - 5 \geq 2\sqrt{x - 6}; \quad (x \geq 6).$$

$$d/ \quad \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2.$$

Bài 617. Cho các số thực $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$. Chứng minh rằng

$$a/ \quad a^2 - b^2 + c^2 \geq (a - b + c)^2.$$

$$b/ \quad a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \geq (a - b + c - d)^2.$$

Bài 618. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$a/ \quad x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z.$$

$$b/ \quad \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}; \quad (a, b > 0).$$

$$c/ \quad a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a) < 1; \quad [a, b, c \in (0; 1)].$$

$$e/ \quad a < \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a + b}{2} < b; \quad (0 < a < b).$$

$$f/ \quad \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}; \quad (a \geq b \geq c > 0).$$

$$g/ \quad \frac{ac + bd}{2} \geq \frac{a + b}{2} \cdot \frac{c + d}{2}; \quad (a \geq b, c \geq d \text{ hay } a \leq b, c \leq d): \text{BĐT Trê - bu - sep}.$$

$$h/ \quad \frac{ac + bd}{2} \leq \frac{a + b}{2} \cdot \frac{c + d}{2}; \quad (a \geq b, c \leq d \text{ hay } a \leq b, c \geq d): \text{BĐT Trê - bu - sep}.$$

$$i/ \quad \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}; \quad (a \neq 0, b \neq 0).$$

$$j/ \quad (ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2); \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}): \text{BĐT Bunhiacôpxki}.$$

$$k/ \quad (a^3 + b^3) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq (a + b)^2; \quad (a, b > 0).$$

$$l/ \quad \frac{a + b}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}}; \quad (a, b > 0).$$

$$m/ \quad (ax + by)(ay + bx) \geq (a + b)^2 xy; \quad (a, b, x, y \in \mathbb{R}; a, b > 0).$$

$$n/ \quad a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1) + a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc.$$

$$o/ \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e); \quad (a, b, c, d, e \in \mathbb{R}).$$

$$p/ \quad (ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c); \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}).$$

Dạng toán 2. Chứng minh BĐT dựa vào BDT Cauchy (AM – GM)



— Các dạng của bất đẳng thức Cauchy (AM – GM)

✧ Với $x, y \geq 0$ thì $\begin{cases} x + y \geq 2\sqrt{xy} & (1) \\ x^2 + y^2 \geq 2xy & (2) \end{cases}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

✧ Với $x, y \in \mathbb{R}$ thì $\begin{cases} xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 & (3) \\ (x+y)^2 \geq 4xy & (4) \end{cases}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y$.

✧ Với $x, y, z \geq 0$ thì $\begin{cases} x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} & (5) \\ xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 & (6) \end{cases}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z$.

✧ Mở rộng cho n số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ không âm ta có: $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.
Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$.

— Hệ quả

✧ Nếu $x, y > 0$ có $S = x + y$ không đổi thì $P = xy$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = y$.

✧ Nếu $x, y > 0$ có $P = xy$ không đổi thì $S = x + y$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = y$.

— Khái niệm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số (biểu thức)

Xét hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D

✧ M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$

✧ m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân và ngược lại

Bài 619. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a/ $(a + b)^2 \geq 4ab$.

b/ $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$.

c/ $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

d/ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}$.

e/ $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

f/ $(a + b)(1 + ab) \geq 4ab$.

$$g/ (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

$$h/ \left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 8.$$

$$i/ (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

$$j/ (a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geq 8a^2b^2c^2.$$

$$k/ (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc.$$

$$l/ (1+a+b)(a+b+ab) \geq 9ab.$$

$$m/ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^8 \geq 64ab(a+b)^2.$$

$$n/ 3a^3+7b^3 \geq 9ab^2 \text{ (Cao đẳng SP Quảng Bình)}.$$

$$o/ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geq \frac{16}{a+b+c+d}.$$

$$p/ (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq 2\sqrt{2(a+b)}\sqrt{ab}.$$

$$r/ \frac{x+4}{\sqrt{x+3}} \geq 2; (\forall x > -3).$$

$$s/ b+c \geq 16abc; \left(\forall \begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a+b+c=1 \end{cases} \right).$$

$$t/ (abc+2)(bc+2)(a+d)(d+1) \geq 32abcd. \quad u/ \frac{a+bc^4}{2c^2} \geq \sqrt{ab}.$$

Bài 620. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$a/ a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}.$$

$$b/ ab+bc+ca \geq \sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

$$a/ \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b} \geq a+b+c.$$

$$b/ \frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

$$c/ ab+\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geq a+b+1.$$

$$d/ \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c.$$

$$e/ \left(\frac{12}{5}\right)^x+\left(\frac{15}{4}\right)^x+\left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x+4^x+5^x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (Đại học khối B - 2005)}.$$

$$f/ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} \geq \frac{9}{x^2+y^2+z^2} \text{ với } x, y, z \neq 0 \text{ (Cao đẳng Sư phạm Nhà trẻ TW1 - 2000)}.$$

$$g/ a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1} \leq ab \text{ với } a \geq 1, b \geq 1 \text{ (Đại học Thái Nguyên D - 2001)}.$$

$$h/ \frac{2}{a^2+bc}+\frac{2}{b^2+ca}+\frac{2}{c^2+ab} \leq \frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab} \text{ (Cao đẳng Kinh tế Tp. HCM - 2007)}.$$

$$i/ \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \geq ab+bc+ca \text{ (Cao đẳng Cơ khí luyện kim - 2006)}.$$

Tách cặp nghịch đảo để áp dụng được Bất đẳng thức Cauchy

- Kỹ thuật tách nghịch đảo là kỹ thuật tách phân nguyên theo mẫu số để chuyển sang trung bình nhân thì các phần chứa biến số phải triệt tiêu chỉ còn lại là hằng số (hoặc biến gần giống biến bên vế phải). Để thực hiện công việc đó, ta thường thêm bớt hằng số hoặc thêm bớt biến số.
- Trong kĩ thuật này, đôi khi ta cần kết hợp với kĩ thuật đánh giá từ trung bình nhân sang trung bình cộng (Cauchy ngược): $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$; ($\forall a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$). Khi kết hợp kĩ thuật này, ta cần lưu ý: "Chỉ số căn là bao nhiêu thì số các số hạng ở trong căn là bấy nhiêu. Nếu số các số hạng nhỏ hơn chỉ số căn thì phải nhân thêm hay cộng vào (hằng số) để số các số hạng bằng số căn". Chẳng hạn như: CM: $a\sqrt{b-1} \leq \frac{ab}{2}$, $\forall a, b \geq 1$. Ta biến đổi:

$$\Rightarrow a\sqrt{b-1} = a\sqrt{(b-1) \cdot 1} \leq a \cdot \frac{(b-1) + 1}{2} = \frac{ab}{2}.$$

Bài 621. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a/ $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, ($\forall a, b > 0$).

b/ $\frac{x}{2} + \frac{18}{x} \geq 6$, ($\forall x > 0$).

c/ $x + 2y + \frac{25}{x} + \frac{27}{y^2} \geq 19$, ($\forall x, y > 0$).

d/ $x + \frac{1}{(x-y)y} \geq 3$, ($\forall x > y > 0$).

e/ $\frac{x}{2} + \frac{16}{x-2} \geq 3$, ($\forall x > 2$).

f/ $a + \frac{1}{a} \geq \frac{10}{3}$, ($\forall a \geq 3$).

g/ $a + \frac{1}{a^2} \geq \frac{9}{4}$, ($\forall a \geq 2$).

h/ $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$, ($\forall a \in \mathbb{R}$).

i/ $\frac{a^2 + b^2}{a - b} \geq 2\sqrt{2}$; ($\forall \begin{cases} a > b \\ ab = 1 \end{cases}$).

j/ $a + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3$, ($\forall a > b > 0$).

k/ $\frac{x+8}{\sqrt{x-1}} \geq 6$, ($\forall x > 1$).

l/ $a + \frac{4}{b(a-b)^2} \geq 2\sqrt{2}$, ($\forall a > b > 0$).

m/ $\frac{2a^3 + 1}{4b(a-b)} \geq 3$; ($\forall a \geq \frac{1}{2}$; $\frac{a}{b} > 1$).

n/ $x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 3$, ($\forall x > y \geq 0$).

Bài 622. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a/ $\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{xz} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z$.

b/ $a + \frac{1}{a} \geq \frac{17}{4}$, ($\forall a \geq 4$).

c/ $2a^4 + \frac{1}{1+a^2} \geq 3a^2 - 1$.

d/ $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$, ($\forall a > 1, b > 1$).

$$e/ \quad a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} \geq 3; \quad (\forall a > b \geq 0) \quad (\text{Vô định Nam Tư năm 1979}).$$

$$f/ \quad a + \frac{1}{c(a-b)(b-c)} \geq 4, \quad (\forall a, b, c > 0).$$

$$g/ \quad a + \frac{27}{2(a-1)(a+1)^3} \geq \frac{5}{2}, \quad (\forall : a > 1).$$

$$g/ \quad 2a + \frac{1}{(a-b)(b-c)(a+1)^3} \geq 4, \quad (\forall : a > b > c > 0).$$

$$i/ \quad \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{x+y+z}{2}, \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

$$j/ \quad (a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq (a+b+c)^2, \quad (\forall a, b, c > 0).$$

$$k/ \quad \frac{4}{x} + \frac{1}{4y} \geq 5, \quad \left(\forall x, y > 0; x+y = \frac{5}{4} \right) \quad (\text{Cao đẳng SP TP.HCM năm 2006}).$$

$$l/ \quad \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \geq 9, \quad (\forall a, b, c > 0) \quad (\text{Cao đẳng Kinh tế KTCN 1 - 06}).$$

$$m/ \quad \frac{xy\sqrt{z-4} + yz\sqrt{x-2} + zx\sqrt{y-3}}{xyz} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad (\forall x \geq 2; y \geq 3; z \geq 4) \quad (\text{CĐ - 05}).$$

$$n/ \quad \frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3}{2}, \quad \forall \begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ xyz = 1 \end{cases} \quad (\text{Dự bị 2 Đại học D - 2005}).$$

$$o/ \quad (1+x) \left(1 + \frac{y}{x} \right) \left(1 + \frac{9}{\sqrt{y}} \right)^2 \geq 256, \quad (\forall x, y > 0) \quad (\text{Dự bị 2 Đại học A - 2005}).$$

$$p/ \quad \sqrt{3+4^x} + \sqrt{3+4^y} + \sqrt{3+4^z} \geq 6, \quad \forall \begin{cases} x, y, z \in \mathbb{R} \\ x+y+z = 0 \end{cases} \quad (\text{Dự bị 1 Đại học A - 2005}).$$

$$q/ \quad \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}, \quad \forall : \begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}.$$

$$r/ \quad \frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} \geq \frac{a+b+c}{2}, \quad (\forall : a, b, c > 0).$$

$$s/ \quad P = \sqrt[3]{x+3y} + \sqrt[3]{y+3z} + \sqrt[3]{z+3x} \leq 3, \quad \forall \begin{cases} x+y+z = \frac{3}{4} \\ x, y, z > 0 \end{cases} \quad (\text{Dự bị Đại học B - 2005}).$$

Sử dụng BĐT bổ đề suy luận từ BĐT Cauchy (AM – GM)

- $(x + y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4$ hay $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$ (I). Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.
- $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$ hay $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}$ (II). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Rất nhiều bài toán chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm GTLN và GTNN của hàm số quy về hai bất đẳng thức cơ bản nói trên. Vì thế, có thể xem cách sử dụng hai bất đẳng thức này là một trong những cách sử dụng bất đẳng thức AM – GM (Cauchy) trong các bài toán cụ thể. Khi sử dụng, ta phải chứng minh lại, việc này xem như chứng minh BĐT bổ đề cho bài toán.

Bài 623. Cho $a, b > 0$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}$ (I). Áp dụng bất đẳng thức (I) để chứng minh

các bất đẳng thức sau

a/ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2 \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \right)$, ($\forall : a, b, c > 0$).

b/ $\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \geq 2 \left(\frac{1}{2a + b + c} + \frac{1}{a + 2b + c} + \frac{1}{a + b + 2c} \right)$, ($\forall : a, b, c > 0$).

c/ $\frac{1}{2a + b + c} + \frac{1}{a + 2b + c} + \frac{1}{a + b + 2c} \leq 1$, $\forall \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4 \\ a, b, c > 0 \end{cases}$ (Đại học A – 2005).

d/ $\frac{ab}{a + b} + \frac{bc}{b + c} + \frac{ca}{c + a} \leq \frac{a + b + c}{2}$, ($\forall : a, b, c > 0$).

e/ $\frac{2xy}{x + 2y} + \frac{8yz}{2y + 4z} + \frac{4xz}{4z + x} \leq 6$, $\forall \begin{cases} x + 2y + 4z = 12 \\ x, y, z > 0 \end{cases}$.

g/ Chứng minh rằng trong mọi $\triangle ABC$, ta luôn có: $\frac{1}{p - a} + \frac{1}{p - b} + \frac{1}{p - c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

Trong đó: $a = BC, b = AC, c = AB$ là độ dài ba cạnh và $p = \frac{a + b + c}{2}$ là nửa chu vi.

(Đại học Ngân Hàng Tp. HCM khối A năm 2001)

h/ $P = \frac{x - t}{t + y} + \frac{t - y}{y + z} + \frac{y - z}{z + x} + \frac{z - x}{x + t} \geq 0$, $\forall : x, y, z, t > 0$.

Bài 624. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$ (II). Áp dụng bất đẳng thức (II) để chứng minh các bất đẳng thức sau

a/ $\frac{2}{x + y} + \frac{2}{y + z} + \frac{2}{z + x} \geq \frac{9}{x + y + z}$, $\forall : a, b, c > 0$.

$$b/ \left(a^2 + b^2 + c^2 \right) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{3}{2} (a+b+c), \forall : a, b, c > 0.$$

$$c/ \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} \leq \frac{3}{4}, \forall : \begin{cases} x > y > z > 0 \\ x+y+z=1 \end{cases}.$$

$$d/ \frac{1}{a^2+2bc} + \frac{1}{b^2+2ac} + \frac{1}{c^2+2ab} \geq 9, \forall : a, b, c > 0.$$

$$e/ \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30, \forall : a, b, c > 0.$$

$$f/ \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \geq 6, \forall : x, y, z > 6.$$

$$g/ P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, \forall : a, b, c > 0.$$

$$h/ P = \frac{x^2}{1-x} + \frac{y^2}{1-y} + \frac{1}{x+y} + x + y \leq \frac{5}{2}, \forall : \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x+y < 1 \end{cases}.$$

$$i/ \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}, \forall : a, b, c > 0.$$

$$j/ P = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{15}{2}, \forall : \begin{cases} x + y + z \leq \frac{3}{2} \\ x, y, z > 0 \end{cases}.$$

Kỹ thuật đổi biến (đặt ẩn phụ) để áp dụng được BĐT Cauchy

Mục đích chính của việc đổi biến là chuyển bài toán từ tình thế khó biến đổi đại số (biến cũ) sang trạng thái dễ biến đổi đại số hơn (biến mới). Thông thường, với bài toán biến mới là những bài toán quen thuộc. Do đó, cần phải nắm vững các kỹ thuật biến đổi cũng như việc sử dụng thành thạo các BĐT thông dụng và cần nhớ rằng, nếu bài toán có điều kiện ràng buộc thì khi đổi biến cần chú ý điều kiện biến mới sao cho khi đặt ẩn thì điều kiện ban đầu và cuối cùng được đảm bảo, chẳng hạn như: Cho $a, b, c > 0$ và $abc = 1$. Tìm GTLN – GTNN của biểu thức $P = \dots\dots\dots$. Từ điều kiện, ta có thể đặt

$$a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x} \text{ nhằm đảm bảo điều kiện ban đầu: } abc = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} = 1.$$

Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$\text{Bài 625. } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}, \forall : a, b, c > 0 \text{ (BĐT : Nesbitt) HD : } \begin{cases} b+c = x > 0 \\ c+a = y > 0 \\ a+b = z > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Bài 626. } \frac{\sqrt{x-2011}}{x+2} + \frac{\sqrt{x-2012}}{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{2013}} + \frac{1}{2\sqrt{2012}}, (\forall : x > 2012) \text{ HD : } \begin{cases} a = \sqrt{x-2011} \geq 0 \\ b = \sqrt{x-2012} \geq 0 \end{cases}.$$

Bài 627. $\frac{x}{2x+y+z} + \frac{y}{2y+z+x} + \frac{z}{2z+x+y} \leq \frac{3}{4}, (\forall : x, y, z > 0)$ HD : $\begin{cases} a = 2x + y + z > 0 \\ b = 2y + z + x > 0 \\ c = 2z + x + y > 0 \end{cases}$

Bài 628. $\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq a+b+c, \forall : a, b, c$ là độ dài của ba cạnh ΔABC .
HD : $\begin{cases} b+c-a = x > 0 \\ c+a-b = y > 0 \\ a+b-c = z > 0 \end{cases}$

Bài 629. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC , ta luôn có: $abc \geq (b+a-c)(a+c-b)(b+c-a)$ với a, b, c là ba cạnh của tam giác ΔABC .

HD : $\begin{cases} x = b + a - c \\ y = a + c - b \\ z = b + c - a \end{cases}$

Bài 630. $\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1, \forall : \begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$ (IMO - 2000).

HD : $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}.$

Bài 631. $\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{cb} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ac} \geq \sqrt{3}, \forall : \begin{cases} a, b, c > 0 \\ ab + bc + ca = abc \end{cases}$ HD : $\begin{cases} x = \frac{1}{a} \\ y = \frac{1}{b} \\ z = \frac{1}{c} \end{cases}$

Bài 632. $\frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(x+z)} + \frac{1}{z^3(y+x)} \geq \frac{3}{2}, \forall : \begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$ HD : $\begin{cases} x = \frac{1}{a} \\ y = \frac{1}{b} \\ z = \frac{1}{c} \end{cases}$ (IMO - 1995).

Bài 633. $\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+xz} + \sqrt{z+yx} \geq \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}, \forall : \begin{cases} x, y, z > 0 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$ HD : $\begin{cases} x = \frac{1}{a} \\ y = \frac{1}{b} \\ z = \frac{1}{c} \end{cases}$

Bài 634. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{3}{2}\sqrt{xyz}, \forall : \begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = x + y + z + 2 \end{cases}$ HD : $\frac{1}{1+x} = a, \frac{1}{1+y} = b, \frac{1}{1+z} = c.$

Bài 635. $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \geq 36, \forall : \begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ HD : $x = \frac{a}{a+b+c}, y = \frac{b}{a+b+c}, z = \frac{c}{a+b+c}.$

Sử dụng công thức diện tích tam giác để áp dụng BĐT Cauchy

Trong nhiều bài toán BĐT tam giác thì diện tích tam giác là chiều cầu nối các mối quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác. Do đó, ta cần nắm vững các công thức tính diện tích tam giác, đồng thời kết hợp thành thạo với 4 kỹ thuật áp dụng BĐT Cauchy đã trình bày ở trên.

$$S = \frac{a.h_a}{2} = \frac{b.h_b}{2} = \frac{c.h_c}{2} = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{ca \sin B}{2} = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr.$$

Trong đó

- + a, b, c lần lượt là độ dài của ba cạnh BC, AC, AB trong $\triangle ABC$.
- + h_a, h_b, h_c là các chiều cao xuất phát lần lượt từ các đỉnh A, B, C .
- + R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.
- + $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi $\triangle ABC$.

Bài 636. Trong $\triangle ABC$ cho bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp lần lượt là R, r . Chứng minh:
 $R \geq 2r$.

Bài 637. Cho $\triangle ABC$ có diện tích bằng $\frac{3}{2}$. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB và h_a, h_b, h_c là các chiều cao xuất phát lần lượt từ các đỉnh A, B, C . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \geq 3. \quad (\text{Dự bị 6 - Đại học 2002}).$$

Bài 638. Cho $\triangle ABC$ có độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và S là diện tích.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$.

Bài 639. Cho $\triangle ABC$ có độ dài các cạnh lần lượt là a, b, c và S là diện tích. Các trung tuyến và đường cao lần lượt xuất phát từ các đỉnh A, B, C là m_a, m_b, m_c và h_a, h_b, h_c . Chứng minh rằng:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 3\sqrt{3}S \quad \text{và} \quad (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \geq 27S^2.$$

Bài 640. Cho $\triangle ABC$ có độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và S là diện tích.

Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{S}}.$$

Bài 641. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{1}{r^2}.$$
 Trong đó: a, b, c lần lượt là độ dài 3 cạnh BC, CA, AB ; p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Bài 642. Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy để tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

$$a/ \quad y = \frac{x}{2} + \frac{18}{x}, \quad (\forall : x > 0). \qquad b/ \quad y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}, \quad (\forall : x > 1).$$

$$c/ y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{x+1}, \left(\forall : x > -1 \right).$$

$$d/ y = \frac{x}{3} + \frac{5}{2x-1}, \left(\forall : x > \frac{1}{2} \right).$$

$$e/ y = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x}, \left(\forall : 0 < x < 1 \right).$$

$$f/ y = \frac{x^3+1}{x^2}, \left(\forall : x > 0 \right).$$

Bài 643. Áp dụng Bất đẳng Cauchy để tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau

$$a/ y = (x+3)(5-x), \left(\forall : -3 \leq x \leq 5 \right). \quad b/ y = x(6-x), \left(\forall : 0 \leq x \leq 6 \right).$$

$$c/ y = (x+3)(5-2x), \left[\forall : -3 \leq x \leq \frac{5}{2} \right]. \quad d/ y = (2x+5)(5-x), \left[\forall : -\frac{5}{2} \leq x \leq 5 \right].$$

$$e/ y = (6x+3)(5-2x), \left[\forall : -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \right]. \quad f/ y = x^2\sqrt{9-x^2}, \left(\forall : -3 \leq x \leq 3 \right).$$

$$g/ y = \frac{x}{x^2+2}, \left(\forall : x > 0 \right).$$

$$h/ y = \frac{x^2}{(x^2+2)^3}.$$

Bài 644. Cho hai số thực dương không âm x, y thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.

(Trích đề thi tuyển sinh đại học khối D năm 2009)

Bài 645. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $xy \neq 0$ và $xy(x+y) = x^2 - xy + y^2$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\text{biểu thức: } A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}.$$

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2006)

Bài 646. Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} \geq 3 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = abcd$.

Bài 647. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\text{biểu thức: } P = \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}.$$

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học Sài Gòn khối A,B – 2007)

Bài 648. Cho x, y, z là ba số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz} \right) + y \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx} \right) + z \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy} \right).$$

(Trích đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2007)

Dạng toán 3. Chứng minh BĐT dựa vào BDT Bunhiacopxki (B.C.S)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$	Cho $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$
$\textcircled{1} (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (a.c + b.d)^2$ Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.	$\textcircled{1} (a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2) \geq (a.m + b.n + c.p)^2$ Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$.
$\textcircled{2} \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq a.c + b.d $ Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.	$\textcircled{2} \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2)} \geq a.m + b.n + c.p $ Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$.
$\textcircled{3} \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq a.c + b.d$ Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \geq 0$.	$\textcircled{3} \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2)} \geq a.m + b.n + c.p$ Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} \geq 0$.

Bài 649. Chứng minh các bất đẳng thức sau

- a/ Nếu $2x + 3y = 4$ thì $2x^2 + 3y^2 \geq \frac{16}{5}$. b/ Nếu $6x + y = 5$ thì $9x^2 + y^2 \geq 5$.
- c/ Nếu $3x + 4y = 7$ thì $x^2 + y^2 \geq \frac{49}{25}$. d/ Nếu $6x + 12y = 5$ thì $4x^2 + 9y^2 \geq 1$.
- e/ Nếu $3x + 4y = 10$ thì $x^2 + y^2 \geq 4$. f/ Nếu $x + 7y = 10$ thì $x^2 + y^2 \geq 2$.
- g/ Nếu $3a + 4b = 7$ thì $3a^2 + 4b^2 \geq 7$. h/ Nếu $2a - 3b = 7$ thì $3a^2 + 5b^2 \geq \frac{735}{47}$.
- i/ Nếu $3a - 5b = 8$ thì $7a^2 + 11b^2 \geq \frac{2464}{137}$. j/ Nếu $a + 2b = 2$ thì $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$.
- k/ Nếu $2a + 3b = 5$ thì $2a^2 + 3b^2 \geq 5$. l/ $(x - 2y + 1)^2 + (2x - 4y + 5)^2 \geq \frac{9}{5}$.

Bài 650. Chứng minh các bất đẳng thức sau

- a/ Nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì $|3x + 4y| \leq 5$. b/ Nếu $x^2 + 2y^2 = 8$ thì $|2x + 3y| \leq 2\sqrt{17}$.
- c/ Nếu $x^2 + 4y^2 = 1$ thì $|x - y| \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$. d/ Nếu $36x^2 + 16y^2 = 9$ thì $|y - 2x| \leq \frac{5}{4}$.
- e/ Nếu $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$ thì $|x(u + v) + y(u - v)| \leq \sqrt{2}$.
- f/ Nếu $4(a - 1)^2 + 9(b - 2)^2 = 5$ thì $|2a + 6b - 20| \leq 5$.

Bài 651. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a/ Nếu $x \in [1;3]$ thì $A = 6\sqrt{x-1} + 8\sqrt{3-x} \leq 10\sqrt{2}$.

b/ Nếu $x \in [1;5]$ thì $B = 3\sqrt{x-1} + 4\sqrt{5-x} \leq 10$.

c/ Nếu $x \in [-2;1]$ thì $C = \sqrt{1-x} + \sqrt{2+x} \leq \sqrt{6}$.

d/ Nếu $x \in [4;13]$ thì $D = 2\sqrt{x-4} + \sqrt{13-x} \leq 3\sqrt{5}$.

e/ Nếu $x \in [-5;20]$ thì $E = 3\sqrt{x+5} + 2\sqrt{20-x} \leq 13$.

f/ Nếu $x \in [-9;20]$ thì $F = 5\sqrt{x+9} + 2\sqrt{20-x} \leq 29$.

Bài 652. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a/ Nếu $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$ thì $\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} + \sqrt{1-z} \leq \sqrt{6}$.

b/ Nếu $a, b, c \in \mathbb{R}$ thì $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$.

c/ Nếu $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ thì $a + 3b + 5c \leq \sqrt{35}$.

d/ Nếu $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ thì $a + 2b + 2\sqrt{5}c \leq 5$.

e/ Nếu $a > c > 0$ và $b > c > 0$ thì $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$.

f/ Nếu $4a + 9b + 16c = 49$ thì $\frac{1}{a} + \frac{25}{b} + \frac{64}{c} \geq 49$.

g/ Nếu $a + b + c = 1$ thì $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} \leq 2\sqrt{3}$.

h/ Nếu $a + b + c = 12$ thì $\sqrt{a+3} + \sqrt{b+2} + \sqrt{c+1} \leq 3\sqrt{6}$.

i/ Nếu $a + b + c = 4$ thì $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq 2\sqrt{6}$.

j/ Nếu a, b, c là ba số thực thay đổi thỏa $a + b + c = 6$ thì $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$.

Bài 653. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a/ Nếu $a + b \geq 1$ thì $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

b/ Nếu $a + b \geq 1$ thì $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$.

c/ Nếu $a + b \geq 1$ thì $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

d/ Nếu $a + b = 2$ thì $a^4 + b^4 \geq 2$.

e/ Nếu $a, b > c \geq 0$ thì $(a+b)^2 \leq (a^3 + b^3) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$.

f/ Nếu $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} = 2\sqrt{1+z}$ thì $x + y \geq 2z$.

g/ Nếu $a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) \leq \frac{4}{3}$ thì $a + b + c \leq 4$.

h/ Nếu $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}$ thì $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$ (Đại học A – 2003).

i/ Nếu $a, b, c \geq 0$ thì $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$.

j/ Nếu $x, y, z > 0$ thì $\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \geq 1$.

Bài 654. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

a/ $A = \sqrt{7-x} + \sqrt{2+x}$, với $-2 \leq x \leq 7$. b/ $B = 6\sqrt{x-1} + 8\sqrt{3-x}$ với $x \in [1; 3]$.

c/ $C = y - 2x + 5$ với $36x^2 + 16y^2 = 9$. d/ $D = 2x - y - 2$ với $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

e/ $E = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}$.

f/ $F = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+5}$.

g/ $G = 2\sqrt{x-4} + \sqrt{8-x}$.

h/ $H = 5\sqrt{x+1} + 3\sqrt{6-x}$.

i/ $I = 4\sqrt{x+3} + 5\sqrt{4-x}$.

j/ $J = \sqrt{1-2x} + \sqrt{x+8}$.

Bài 655. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức (nếu có)

a/ Cho $x, y \in \mathbb{R}$ và $x^2 + y^2 = 5$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $A = 2x + y$.

b/ Cho $x, y \in \mathbb{R}$ và $2x^2 + 3y^2 = 6$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $B = 4x + 2y$.

c/ Cho $x, y \in \mathbb{R}$ và $x^2 + 4y^2 = 10$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $C = 3x + 5y$.

d/ Cho $x, y, z \in \mathbb{R}$ và $xy + yz + zx = 1$. Tìm GTNN của biểu thức $D = x^4 + y^4 + z^4$.

e/ Cho $x, y \in \mathbb{R}$ và $x^2 + y^2 = 1$. Tìm GTLN của biểu thức $E = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$.

f/ Cho $a \geq 1$. Tìm GTLN của biểu thức $F = \sqrt{a + \sin x} + \sqrt{a - \sin x}$.

g/ Cho $x, y > 0$ và $x + y = 1$. Tìm GTNN của biểu thức $G = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$.

h/ Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Tìm GTLN của $H = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} + \sqrt{1-z}$.

i/ Cho $x \in [-2; 2]$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $I = x + \sqrt{4-x^2}$ (Đại học B – 2003).

Dạng toán 4. Chứng minh BĐT dựa vào BĐT Cauchy Schwarz



Thực chất bất đẳng thức **Cauchy Schwarz** là hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Bunhiacôpxki mà ở đây để dễ hình dung, tôi gọi tắt là bất đẳng thức cộng mẫu số.

— Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$. Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho: $\left(\frac{a}{\sqrt{x}}, \frac{b}{\sqrt{y}}\right); (\sqrt{x}, \sqrt{y})$, ta được:

$$\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right)(x + y) \stackrel{\text{Bunhiacôpxki}}{\geq} \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{y}} \cdot \sqrt{y}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a + b)^2}{x + y} \quad (\text{I})$$

— Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$. Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki cho bộ 3 số:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{x}}, \frac{b}{\sqrt{y}}, \frac{c}{\sqrt{z}}\right); (\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}), \text{ ta được:}$$

$$\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z}\right)(x + y + z) \stackrel{\text{Bunhiacôpxki}}{\geq} \left(\frac{a}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} + \frac{b}{\sqrt{y}} \cdot \sqrt{y} + \frac{c}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{z}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a + b + c)^2}{x + y + z} \quad (\text{II})$$

Bài 656. Cho ba số thực dương $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\frac{a^2}{b + c} + \frac{b^2}{c + a} + \frac{c^2}{a + b} \geq \frac{(a + b + c)^2}{2}$.

Bài 657. Cho a, b, c là độ dài của ba cạnh ΔABC .

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b + c - a} + \frac{b^2}{c + a - b} + \frac{c^2}{a + b - c} \geq a + b + c$.

Bài 658. Cho ba số $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$.

Bài 659. Cho ba số thực a, b, c bất kỳ. Chứng minh: $\frac{a^3}{b + c} + \frac{b^3}{c + a} + \frac{c^3}{a + b} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$.

Bài 660. Cho ba số $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\frac{a}{(b + c)^2} + \frac{b}{(c + a)^2} + \frac{c}{(a + b)^2} \geq \frac{9}{4(a + b + c)}$.

Bài 661. Cho $a, b, c > 0$ thỏa điều kiện $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{a + 2b^2} + \frac{b^2}{b + 2c^2} + \frac{c^2}{c + 2a^2} \geq 1$.

Bài 662. (IMO – Shortlist – 1993). Cho bốn số thực dương a, b, c, d .

Chứng minh rằng: $\frac{a}{b + 2c + 3d} + \frac{b}{c + 2d + 3a} + \frac{c}{d + 2a + 3b} + \frac{d}{a + 2b + 3c} \geq \frac{2}{3}$.

Dạng toán 5. Chứng minh BĐT dựa vào phương pháp tọa độ véc tơ

Trong một số bài toán, ta có thể đưa về tọa độ để tìm GTLN và GTNN. Do đó, ta cần nắm vững một số kiến thức cơ bản về tọa độ trong mặt phẳng Oxy.

$$\textcircled{1} \quad \vec{a} = (x, y) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\textcircled{2} \quad A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \text{ và } AB + AC \geq BC.$$

$$\textcircled{3} \quad |\vec{u}| - |\vec{v}| \leq |\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \Rightarrow \text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \vec{u}, \vec{v} \text{ cùng hướng.}$$

$$\textcircled{4} \quad |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}|. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ cùng hướng.}$$

$$\textcircled{5} \quad |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|.$$

Bài 663. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}$.

HD: $\vec{u} = (a+c; b), \vec{v} = (a-c; b).$

Bài 664. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{a^2 + 4b^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 + 4b^2 - 2a - 12b + 10} \geq 5$.

HD: $\vec{u} = (a+3; 2b), \vec{v} = (1-a; 3-2b).$

Bài 665. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{a^2 + ac + c^2} \geq \sqrt{b^2 + bc + c^2}$.

HD: Cách 1. $\vec{u} = \left(a + \frac{b}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}b\right), \vec{v} = \left(-\left(a + \frac{c}{2}\right); \frac{\sqrt{3}}{2}c\right).$

Cách 2. $A\left(a + \frac{b}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}c\right), B\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}c\right), C\left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2}; 0\right)$

(Dự bị Cao đẳng Giao Thông II – 2003)

Bài 666. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Chứng minh: $\sqrt{4\cos^2 a \cos^2 b + \sin^2(a-b)} + \sqrt{4\sin^2 a \sin^2 b + \sin^2(a-b)} \geq 2$.

HD: $\vec{u} = (2\cos a \cos b; \sin(a-b)), \vec{v} = (2\sin a \sin b; \sin(a-b)).$

Bài 667. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y^2 + yz + z^2 = 16 \end{cases}$$

Chứng minh: $xy + yz + zx \leq 8$.

HD: $\vec{u} = \left(y + \frac{x}{2}; \frac{\sqrt{3}x}{2} \right), \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}x}{2}; y + \frac{z}{2} \right).$

Bài 668. Tìm GTNN của $P = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}, x \in \mathbb{R}.$

HD: Cách 1. $\vec{u} \left(\frac{1}{2} - x; \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \vec{v} \left(x + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$ Cách 2. $A \left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right), B \left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right), C(x, 0).$

Bài 669. Cho x, y, z và $x + 3y + 5z \leq 3.$

Chứng minh: $3xy\sqrt{625z^4 + 4} + 15yz\sqrt{x^4 + 4} + 5zx\sqrt{81y^2 + 4} \geq 45\sqrt{5}xyz.$

HD: $\vec{u} = \left(x; \frac{2}{x} \right), \vec{v} = \left(3y; \frac{2}{3y} \right), \vec{w} = \left(5z + \frac{2}{5z} \right).$

Bài 670. Cho $x, y \in \mathbb{R}.$ Chứng minh: $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + y^2 + 1} + \sqrt{y^2 - 6y + 10} \geq 5.$

HD: $\vec{u} = (x; 2), \vec{v} = (1 - x; y), \vec{w} = (-1; 3 - y).$

Bài 671. Cho $x, y \in \mathbb{R}.$ Chứng minh: $-\frac{1}{2} \leq \frac{(x + y)(1 - xy)}{(1 + x^2)(1 + y^2)} \leq \frac{1}{2}.$

HD: $\vec{u} = (2x; 1 - x^2), \vec{v} = (1 - y^2; 2y).$

Bài 672. Nếu $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}$ thì $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$ (Đại học A – 2003).

HD: $\vec{u} = \left(\frac{1}{x} - x; \sqrt{2} \right), \vec{v} = \left(\frac{1}{y} - y; \sqrt{2} \right), \vec{w} = \left(\frac{1}{z} - z; \sqrt{2} \right).$

Dạng toán 6. Ứng dụng BĐT để giải phương trình



❖ **Loại 1. Tổng hai số không âm:** $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$

❖ **Loại 2. Phương pháp đối lập**

• Giải phương trình: $f(x) = g(x) \quad (*)$

• Nếu chứng minh được $\begin{cases} f(x) \geq M \\ g(x) \leq M \end{cases}$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$

Bài 673. Giải các phương trình sau

a/ $\sqrt{x - 4} + \sqrt{6 - x} = x^2 - 10x + 27.$

$$b/ \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11.$$

$$c/ \sqrt{x-6} + \sqrt{x-2} = x^2 - 6x + 13.$$

$$d/ \sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = 3x^2 - 12x + 4.$$

$$e/ \sqrt{2x-1} + \sqrt{19x-2x} = \frac{6}{-x^2 + 10x - 24}.$$

$$g/ x^2 - 2x + 3 = \sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{-3x^2 + 3x + 1}.$$

$$h/ \sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = x^2 - x + 2.$$

$$i/ \sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} = 3.$$

$$j/ \sqrt{25x(2x^2 + 9)} = 4x + \frac{3}{x}.$$

Bài 674. Giải các phương trình sau

$$a/ \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x-1} = 1 - x^2 + 2x.$$

$$b/ \sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2.$$

$$c/ \sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{2x^2 + 4x + 3} = 2 - 2x - x^2.$$

$$d/ \sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = \sqrt{24 - 2x - x^2}.$$

$$e/ \sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 2 + 2x - x^2.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN BĐT & GTLN (max) – GTNN (min)

Bài 675. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$a/ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e), \quad (\forall : a, b, c, d, e \in \mathbb{R}).$$

$$b/ \frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad (\forall : a > 0, b > 0).$$

$$c/ a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) < 1, \quad (\forall : 0 < a, b, c < 1).$$

$$d/ a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc.$$

Bài 676. Tìm GTNN (min) của của hàm số

$$a/ y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}, \quad (\forall : x > 1).$$

$$b/ y = x + \frac{4}{x-1}, \quad (\forall : x > 1).$$

$$c/ y = x + 1 + \frac{4}{x-3}, \quad (\forall : x > 3).$$

$$d/ y = \frac{x}{1-x} + \frac{5}{x}, \quad (\forall : 0 < x < 1).$$

$$e/ y = \frac{x+3}{4} + \frac{16}{x+1}, \quad (\forall : x > -1).$$

$$f/ y = \frac{(4+x)(x+2)}{x}, \quad (\forall : x > 0).$$

$$g/ y = 3x + \frac{1}{x^3}, (\forall : x > 0).$$

$$h/ y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x}, (\forall : x > 0).$$

Bài 677. Tìm GTNN (min) của của hàm số

$$a/ y = \frac{x^2}{x-1}, (\forall : x > 1).$$

$$b/ y = \frac{x^4 + 1}{x^2}, (\forall : x \neq 0).$$

$$c/ y = \frac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}}, (\forall : x \in \mathbb{R}).$$

$$d/ y = (x+1)^2 + \left(\frac{x^2}{x+1} + 2\right)^2, (\forall : x \neq -1).$$

Bài 678. Tìm GTNN (min) của các biểu thức sau

$$a/ P = x + \frac{1}{4x}, (\forall : x > 0).$$

$$b/ P = 4x + \frac{1}{x}, (\forall : x > 0).$$

$$c/ P = x - 1 + \frac{2}{x-1}, (\forall : x > 1).$$

$$d/ P = x + 2 + \frac{3}{x+2}, (\forall : x > -2).$$

$$e/ P = 3(x-1) + \frac{1}{12(x-1)}, (\forall : x > 1).$$

$$f/ P = 4(x+3) + \frac{1}{4(x+3)}, (\forall : x > -3).$$

$$g/ P = x + \frac{1}{4(x+2)}, (\forall : x > -2).$$

$$h/ P = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-2}, (\forall : x > 2).$$

$$i/ P = \frac{x^2}{x-1}, (\forall : x > 1).$$

$$j/ P = 5x + \frac{1}{20(x-1)}, (\forall : x > 1).$$

Bài 679. Tìm GTNN (min) của các biểu thức sau

$$a/ P = 5x + \frac{180}{x-1}, (\forall : x > 1).$$

$$b/ P = \frac{x^2 + 5x + 4}{x}, (\forall : x > 0).$$

$$c/ P = \frac{x^2 + 2x + 3}{x}, (\forall : x > 0).$$

$$d/ P = \frac{(x+1)(x+9)}{x}, (\forall : x > 0).$$

$$e/ P = \frac{(2x+5)(5x+14)}{x}, (\forall : x > 0).$$

$$f/ P = \frac{x^2 + x + 4}{x+1}, (\forall : x > -1).$$

$$g/ P = \frac{x^2 - x + 9}{x-2}, (\forall : x > 2).$$

$$h/ P = \frac{1+x^2}{x+2}, (\forall : x > -2).$$

Bài 680. Chứng minh các bất đẳng thức

$$a/ a + 1 \geq 2a, (\forall : a > 0).$$

$$b/ a + \frac{1}{4} \geq \sqrt{a}, (\forall : a > 0).$$

$$c/ a^2 + 2 \geq 2a\sqrt{2}, (\forall : a \in \mathbb{R}).$$

$$d/ b \geq 2\sqrt{b-1}, (\forall : b \geq 1).$$

$$e/ b \geq 4\sqrt{b-4}, (\forall : b \geq 4).$$

$$f/ b \geq 6\sqrt{b-9}, (\forall : b \geq 9).$$

$$g/ b \geq 2\sqrt{3}\sqrt{b-3}, (\forall : b \geq 3).$$

$$g/ ab \geq 2a\sqrt{2}\sqrt{b-2}, (\forall : a \geq 0, b \geq 2).$$

$$h/ ab \geq 8\sqrt{b-16}, (\forall : a \geq 0, b \geq 16).$$

$$i/ a + \frac{1}{(a-b)b} \geq 3, (\forall : a > b > 0).$$

Bài 681. Tìm GTNN (min) của các biểu thức sau

$$a/ P = \frac{x+1}{\sqrt{x}}, (\forall : x > 0).$$

$$b/ P = \frac{4x+1}{\sqrt{x}}, (\forall : x > 0).$$

$$c/ P = \frac{x^2}{x-1}, (\forall : x > 1).$$

$$d/ P = \frac{x^2}{x-4}, (\forall : x > 4).$$

$$e/ P = \frac{x^2}{x-5}, (\forall : x > 5).$$

$$f/ P = \frac{x^2}{x^2-9}, (\forall : x > 9).$$

Bài 682. Tìm GTNN (min) của các biểu thức sau

$$a/ P = \frac{x}{\sqrt{x-1}}, (\forall : x > 1).$$

$$b/ P = \frac{x}{\sqrt{x-3}}, (\forall : x > 3).$$

$$c/ P = \frac{xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}}, (\forall : x, y > 1).$$

$$d/ P = \frac{xy}{\sqrt{(x-4)(y-1)}}, (\forall : x > 4, y > 1).$$

$$e/ P = \frac{xy}{\sqrt{(x-9)(y-9)}}, (\forall : x, y > 9).$$

$$f/ P = \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x-1)(y-1)}, (x, y > 1).$$

Bài 683. Tìm GTLN (max) của các biểu thức sau

$$a/ P = \frac{\sqrt{x-1}}{x}, (\forall : x > 1).$$

$$b/ P = \frac{\sqrt{x-2}}{x}, (\forall : x > 2).$$

$$c/ P = \frac{\sqrt{x-3}}{x-1}, (\forall : x > 3).$$

$$d/ P = \frac{\sqrt{x-2}}{x-1}, (\forall : x > 2).$$

$$e/ P = \frac{\sqrt{(x-1)(y-1)}}{xy}, (\forall : x, y > 1).$$

$$f/ P = \frac{\sqrt{(x-1)(y-4)}}{xy}, (\forall : x > 1, y > 4).$$

Bài 684. Tìm GTLN (max) và GTNN (min) của các biểu thức sau

$$a/ P = \sqrt{5-3x} + \sqrt{x+6}.$$

$$b/ P = \sqrt{7-2x} + \sqrt{3x+4}.$$

$$c/ P = \sqrt{11-4x} + \sqrt{2x+5}.$$

$$d/ P = \sqrt{14-3x} + \sqrt{x+5}.$$

$$e/ P = 2\sqrt{3-4x} + \sqrt{4+x}.$$

$$f/ P = 3\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{8-3x}.$$

Bài 685. Tìm GTLN (max) và GTNN (min) của các biểu thức sau

$$a/ P = 4\sqrt{3x+2} + \sqrt{9-x}.$$

$$b/ P = 2x + 7y, (\forall : 3x^2 + 8y^2 = 1).$$

$$c/ P = 2x + y, (\forall : 2x^2 + 5y^2 = 8).$$

$$d/ P = x + 3y, (\forall : 4x^2 + 3y^2 = 7).$$

Bài 686. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$a/ (1+x)(1+y) \geq 4, (\forall : x, y \geq 0; xy = 1).$$

$$b/ (1+x)(1+y)(1+z) \geq 8, (\forall : x, y, z \geq 0; xyz = 1).$$

$$c/ (x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz, (\forall : x, y, z \geq 0).$$

$$d/ \left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right) \geq 8, (\forall : x, y, z > 0).$$

Bài 687. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$a/ 8(p-a)(p-b)(p-c) \leq abc \text{ với } a, b, c \text{ là ba cạnh của } \Delta ABC \text{ và } p \text{ là nửa chu vi.}$$

$$b/ abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \text{ với } a, b, c \text{ là ba cạnh của } \Delta ABC.$$

$$c/ \frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ với } a, b, c \text{ là ba cạnh của } \Delta ABC.$$

$$d/ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b-c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+c-a}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c+a-b}} \geq 3 \text{ với } a, b, c \text{ là ba cạnh của } \Delta ABC.$$

Bài 688. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$a/ (x+y)(x+y+8) \geq 8\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}), (\forall : x, y \geq 0).$$

$$b/ (x+y)^2 + 18(x+y) \geq 12\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}), (\forall : x, y \geq 0).$$

$$c/ (x+y)^2 + 4(x+y) \geq 4x\sqrt{2y} + 4y\sqrt{2x}, (\forall : x, y \geq 0).$$

$$d/ (x+y)^2 + x+y \geq 2x\sqrt{2y} + 2y\sqrt{2x}, (\forall : x, y \geq 0).$$

$$e/ (x+y)^2 + \frac{x+y}{2} \geq 2x\sqrt{y} + 2y\sqrt{x}, (\forall : x, y \geq 0).$$

Bài 689. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$a/ x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \leq xy, (\forall : x, y \geq 1).$$

$$b/ x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4} \leq \frac{xy}{2}, (\forall : x, y \geq 1).$$

$$c/ xy\sqrt{z-1} + yz\sqrt{x-1} + zx\sqrt{y-1} \leq \frac{3xyz}{2}, (\forall : x, y, z \geq 1).$$

$$d/ xy\sqrt{z-1} + yz\sqrt{x-4} + zx\sqrt{y-9} \leq \frac{11xyz}{12}, (\forall : x \geq 4, y \geq 9, z \geq 1).$$

$$e/ \frac{x^2 + y^2}{x-y} \geq 2\sqrt{2}, (\forall : x, y \in \mathbb{R}, xy = 1, x > y).$$

Bài 690. Cho ba số thực $x, y, z > 0$. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$a/ x + y + 1 \geq \sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

$$b/ x + y + 4 \geq \sqrt{xy} + 2(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

$$c/ \quad xy + yz + zx \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}. \quad d/ \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}.$$

$$e/ \quad x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x + y + z). \quad f/ \quad \frac{x^8 + y^8 + z^8}{x^3 y^3 z^3} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Bài 691. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$a/ \quad \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \geq 6, \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

$$b/ \quad \frac{2008-x}{x} + \frac{2008-y}{y} + \frac{2008-z}{z} \geq 6, \quad (\forall : x + y + z = 2008).$$

$$c/ \quad \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq x^2 + y^2 + z^2, \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

$$d/ \quad \frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq xy + yz + zx, \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

$$e/ \quad \frac{x^4}{y^2} + \frac{y^4}{z^2} + \frac{z^4}{x^2} \geq xy + yz + zx, \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

$$f/ \quad \frac{x^2+y^2}{z} + \frac{y^2+z^2}{x} + \frac{z^2+x^2}{y} \geq 2(x+y+z), \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

$$g/ \quad \frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

$$h/ \quad \frac{x}{y^3} + \frac{y}{z^3} + \frac{z}{x^3} \geq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}, \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

$$i/ \quad \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{4z^2}{x} \geq x + 3y, \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

Bài 692. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$a/ \quad \frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}, \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

$$b/ \quad \frac{xy}{x+y} + \frac{yz}{y+z} + \frac{zx}{z+x} \leq \frac{x+y+z}{2}, \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

$$c/ \quad \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \leq \frac{x+y+z}{2}, \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

$$d/ \quad \frac{x^2}{y+2z} + \frac{y^2}{z+2x} + \frac{z^2}{x+2y} \geq \frac{x+y+z}{3}, \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

$$e/ \quad \frac{x^2}{3y+2z} + \frac{y^2}{3z+2x} + \frac{z^2}{3x+2y} \geq \frac{x+y+z}{5}, \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

$$f/ \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{16z^2}{x+y} \geq \frac{1}{9}(64z - x - y), \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

$$g/ \frac{x^3}{y+z} + \frac{y^3}{z+x} + \frac{z^3}{x+y} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

$$h/ \frac{x^3}{2y+z} + \frac{y^3}{2z+x} + \frac{z^3}{2x+y} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}, \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

$$i/ \frac{x^3}{2y+3z} + \frac{y^3}{2z+3x} + \frac{z^3}{2x+3y} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{5}, \quad (\forall : x, y, z > 0).$$

Bài 693. Chứng minh các bất đẳng thức sau

$$a/ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

$$b/ \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

$$c/ \frac{a}{b+3c} + \frac{b}{c+3a} + \frac{c}{a+3b} \geq \frac{3}{4}.$$

$$d/ \frac{2a}{3b+5c} + \frac{2b}{3c+5a} + \frac{2c}{3a+5b} \geq \frac{3}{4}.$$

$$e/ \frac{a}{2b+4c} + \frac{b}{2c+4a} + \frac{c}{2a+4b} \geq \frac{1}{2}.$$

$$f/ \frac{a}{b+2c+3a} + \frac{b}{c+2a+3b} + \frac{c}{a+2b+3c} \leq \frac{1}{2}.$$

Bài 694. Cho $a, b, c > 0$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 3$. Chứng minh rằng:

$$a/ a + b + c \leq 3.$$

$$b/ a^2 + b^2 + c^2 \leq 3.$$

$$c/ a^4 + b^4 + c^4 \geq 3.$$

$$d/ a^5 + b^5 + c^5 \geq 3.$$

$$e/ a^6 + b^6 + c^6 \geq 3.$$

$$f/ a^7 + b^7 + c^7 \geq 3.$$

Bài 695. Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$a/ \frac{1}{\sqrt{xy}} \geq \frac{2}{x+y}.$$

$$b/ \frac{1}{xy} \geq \frac{2}{x^2 + y^2}.$$

$$c/ \frac{1}{x^2 y^2} \geq \frac{2}{x^4 + y^4}.$$

$$d/ \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} \geq \frac{2}{x^2 + yz}.$$

$$e/ \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} \geq \frac{2}{x + \sqrt{yz}}.$$

$$f/ \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} \geq \frac{2x}{3}, \quad (\forall : 0 \leq x < 2).$$

$$g/ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 2x, \quad (\forall : 0 \leq x < 1).$$

$$h/ \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \geq \frac{x}{2}, \quad (\forall : 0 \leq x < 2).$$

$$i/ \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \geq x, \quad (\forall : 0 \leq x < 1).$$

$$j/ \frac{1}{\sqrt{x+y}} \geq \frac{2}{1+x+y}.$$

Bài 696. Tìm GTLN (max) của các biểu thức

$$a/ P = x(4-x).$$

$$b/ P = x(9-x).$$

$$c/ P = (x+2)(4-x).$$

$$d/ P = (x+5)(3-x).$$

$$e/ P = |x| \sqrt{1-x^2}.$$

$$f/ P = |x| \sqrt{4-x^2}.$$

Bài 697. Tìm GTLN (max) của các biểu thức

$$a/ P = \frac{x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1}}{xy}.$$

$$b/ P = \frac{x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-4}}{xy}.$$

$$c/ P = \frac{x\sqrt{y-25} + y\sqrt{x-25}}{xy}.$$

$$d/ P = \frac{x\sqrt{y-4} + y\sqrt{x-1}}{xy}.$$

$$e/ P = \frac{x\sqrt{y-2} + y\sqrt{x-3}}{xy}.$$

$$f/ P = \frac{x\sqrt{y-5} + y\sqrt{x-2}}{xy}.$$

Bài tập qua các kì thi

Bài 698. Cao đẳng Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh năm 1996

$$\text{Cho } x, y \text{ thỏa mãn điều kiện } \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (3-x)(4-y)(2x+3y)$.

Bài 699. Cao đẳng Sư Phạm Nhà Trẻ Mẫu Giáo TW 1 năm 2000

$$\text{Cho } x, y, z \neq 0. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \geq \frac{9}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Bài 700. Cao đẳng Kiểm Sát năm 2000

$$1/ \text{ Cho } a, b \neq 0. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của } S = \frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} - \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

2/ Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của ΔABC .

$$\text{Chứng minh rằng: } (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

Bài 701. Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Hải Dương khối A năm 2002

$$\text{Cho hai số thực } x, y \text{ thỏa hệ thức } x + y = 1. \text{ Chứng minh: } x^4 + y^4 \geq \frac{1}{8}.$$

Bài 702. Cao đẳng Kinh Tế Kế Hoạch Đà Nẵng năm 2004

$$\text{Cho } a, b, c \text{ là ba số thực thỏa } \begin{cases} a^3 > 36 \\ abc = 1 \end{cases}. \text{ Chứng minh: } \frac{a^2}{2} + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Bài 703. Cao đẳng Sư Phạm Sóc Trăng khối A năm 2005

$$\text{Cho hai số thực } a, b \text{ thỏa mãn điều kiện } a + b > -1. \text{ Chứng minh: } a^3 + b^3 + 1 > 3ab.$$

Bài 704. Cao đẳng Sư Phạm Hà Nội năm 2005

$$\text{Cho ba số } x, y, z > 0. \text{ Chứng minh: } \frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3} \geq \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}.$$

Bài 705. Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Cần Thơ năm 2005

Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}} = 1$. Chứng minh: $ab + bc + ca \geq \frac{abc}{3}$.

Khi nào đẳng thức xảy ra ?

Bài 706. Cao đẳng Kinh Tế Kế Hoạch Đà Nẵng năm 2005

Cho hai số a, b thỏa $a \geq 4, b \geq 4$. Chứng minh rằng: $a + b \leq \frac{a^2 + ab + b^2}{6}$.

Bài 707. Dự bị Cao đẳng Giao Thông II năm 2003

Cho 3 số bất kì x, y, z . Chứng minh: $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$.

Bài 708. Cao đẳng Bán Công Hoa Sen khối A năm 2006

Cho $x, y, z > 0$ và $xyz = 1$. Chứng minh rằng: $x^3 + y^3 + z^3 \geq x + y + z$.

Bài 709. Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Cần Thơ khối A năm 2006

Cho 3 số dương x, y, z thỏa $x + y + z \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Bài 710. Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Cần Thơ khối B năm 2006

Cho $a, b, c, d > 0$. Chứng minh: $\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$.

Bài 711. Cao đẳng Kỹ Thuật Cao Thắng khối A năm 2006

Chứng minh rằng nếu $x > 0$ thì $(x+1)^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1 \right) \geq 16$.

Bài 712. Cao đẳng Kinh Tế Kỹ Thuật Công Nghiệp 1 khối A năm 2006

Cho 3 số dương a, b, c . Chứng minh: $\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} \geq 9$.

Bài 713. Cao đẳng Y Tế 1 năm 2006

Cho các số thực x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} y \leq 0 \\ x^2 + x = y + 12 \end{cases}$.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức: $P = xy + x + 2y + 17$.

Bài 714. Cao đẳng Bán công Hoa Sen khối D năm 2006

Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = xyz \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = xyz$.

Bài 715. Học Viện Hàng Không Việt Nam năm 1999 – 2000

Cho $a, b, c, u, v \geq 0$. Đặt $A = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}$, $B = \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}$.

1/ Chứng minh: $\frac{u^2 + v^2}{u + v} \geq \frac{u + v}{2}$ và $A = B$.

2/ Chứng minh: $A \geq \frac{a + b + c}{2}$. Khi nào dấu " $=$ " xảy ra ?

Bài 716. Đại học An Ninh khối D, G năm 1999 – 2000

Cho 3 số x, y, z thay đổi, nhận giá trị thuộc đoạn $[0; 1]$.

Chứng minh rằng: $2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + y^2z + z^2x) \leq 3$.

Bài 717. Đại học Hàng Hải năm 1999 – 2000

Cho $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leq \frac{3}{2} \leq \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}.$$

Bài 718. Đại học Nông nghiệp I khối A năm 1999 – 2000

Cho 3 số dương a, b, c thỏa điều kiện $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{bc}{a^2b + a^2c} + \frac{ca}{b^2c + b^2a} + \frac{ab}{c^2a + c^2b}.$$

Bài 719. Đại học Nông Nghiệp I khối D năm 1999 – 2000

Chứng minh rằng với mọi a, b ta có: $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}.$

Bài 720. Học Viện Quan Hệ Quốc Tế năm 1999 – 2000

Cho các số x, y thỏa $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}.$

ĐS: $\max P = 1$ khi $(x, y) = \{(0, 1), (1, 0)\}$; $\min P = \frac{2}{3}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$. PP hàm số.

Bài 721. Đại học Đà Nẵng năm 1999 – 2000

Chứng minh rằng nếu $a + b \geq 0$ thì $(a + b)(a^2 + b^2)(a^3 + b^3) \leq 4(a^6 + b^6).$

Bài 722. Đại học Huế khối A, V năm 1999 – 2000

Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn điều kiện $a \geq -1, b \geq -4, c \geq 2, d \geq 3$.

Chứng minh: $\frac{\sqrt[4]{(a+1)(b+4)(c-2)(d-3)}}{a+b+c+d} \leq \frac{1}{4}.$

Bài 723. Đại học Quốc Gia Hà Nội khối D năm 1999 – 2000

Với a, b, c là 3 số thực dương thỏa điều kiện: $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b^2 + 2a^2}}{ab} + \frac{\sqrt{c^2 + 2b^2}}{bc} + \frac{\sqrt{a^2 + 2c^2}}{ca} \geq \sqrt{3}.$$

Bài 724. Đại học Bách khoa Hà Nội khối A năm 1999 – 2000

Cho 2 số a, b thỏa điều kiện $a + b \geq 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^3$.

Bài 725. Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh khối D, E năm 1999 – 2000

Cho 3 số a, b, c bất kì. Chứng minh các BĐT:

$$a/ a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca. \quad b/ (ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c).$$

Bài 726. Đại học Thủy Lợi II năm 1999 – 2000

Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c ta đều có: $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3$.

Bài 727. Đại học Y Hà Nội năm 1999 – 2000

Giả sử x, y là hai số dương thỏa điều kiện $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $x + y$.

Bài 728. Đại học Tây Nguyên khối A, B năm 1999 – 2000

CMR với mọi x, y, z dương và $x + y + z = 1$ thì $xy + yz + zx > \frac{18xyz}{2 + xyz}$.

Bài 729. Đại học An Ninh Nhân Dân năm 1999 – 2000

Cho $x \in [0; 1]$. Chứng minh rằng: $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} \leq \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2}}$.

Khi nào dấu "=" xảy ra.

HD: Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki. Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$.

Bài 730. Đại học Quốc Gia Tp. Hồ Chí Minh đợt 2 khối D năm 1999 – 2000

Chứng minh: $\frac{3\sqrt{4^t + 2}}{2^t + 1} > \sqrt{t} + \sqrt{3-t}, \forall t \in [0; 3]$.

HD: Sử dụng BĐT Bunhiacôpxki

Bài 731. Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1998 – 1999

Cho 3 số a, b, c khác 0. Chứng minh: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

Bài 732. Đại học Y Dược Tp. Hồ Chí Minh năm 1997 – 1998

Chứng minh trong ΔABC , ta có: $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}$.

Trong đó: p là nửa chu vi của tam giác.

Bài 733. Đại học Ngoại Thương Tp. Hồ Chí Minh khối A năm 1997 – 1998

Giả sử x, y, z là những số dương thay đổi thỏa điều kiện $x + y + z \leq \frac{3}{2}$.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

HD: $\min P = \frac{15}{2}$ khi $x = y = z = \frac{1}{2}$.

Bài 734. Học Viện Quan Hệ Quốc Tế khối A năm 1997 – 1998

Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh: $\frac{x^5}{y^4} + \frac{y^5}{z^4} + \frac{z^5}{x^4} \geq 1$.

HD: Sử dụng Cauchy xoay vòng: $\frac{x^5}{y^4} + \frac{y^5}{z^4} + \frac{z^5}{x^4} \geq \dots \geq x + y + z \geq 1$.

Bài 735. Đại học Ngoại Thương Hà Nội năm 1997 – 1998

1/ Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$.

2/ Giả sử $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$.

HD: 1/ Sử dụng BĐT bổ đề: "nếu $\frac{x}{y} < 1$ thì $\frac{x}{y} < \frac{x+\alpha}{y+\alpha}$; ($\forall x, y, \alpha > 0$)".

2/ Biến đổi $P = \frac{x+1-1}{x+1} + \frac{y+1-1}{y+1} + \frac{z+1-1}{z+1} = 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$.

Bài 736. Đại học Thủy Lợi năm 1997 – 1998

Cho 4 số dương a, b, c, d . Chứng minh: $\frac{a^2}{b^5} + \frac{b^2}{c^5} + \frac{c^2}{d^5} + \frac{d^2}{a^5} \geq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}$.

HD: Tách cặp nghịch đảo $\frac{a^2}{b^5}, \frac{a^2}{b^5}, \frac{a^2}{b^5}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^3}$. Tương tự đối với cặp còn lại.

Bài 737. Đại học Đà Nẵng khối A năm 2001 đợt 2

Cho $a + b + c > 0$ thỏa: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh: $\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Bài 738. Học viện Ngân Hàng Tp. Hồ Chí Minh khối năm A năm 2000 – 2001

Cho ΔABC có 3 cạnh là a, b, c và p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Bài 739. Đại học Nông nghiệp I Hà Nội khối A năm 2000 – 2001

Cho 3 số $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{2\sqrt{x}}{x^3 + y^2} + \frac{2\sqrt{y}}{y^3 + z^2} + \frac{2\sqrt{z}}{z^3 + x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$.

Bài 740. Đại học Quốc gia Hà Nội khối D năm 2000 – 2001

Chứng minh rằng với mọi $x \geq 0$ và với mọi $\alpha > 1$ ta luôn có: $x^\alpha + \alpha - 1 \geq \alpha x$.

Từ đó chứng minh rằng với 3 số dương a, b, c bất kì thì: $\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$

Bài 741. Đại học Vinh khối A, B năm 2000 – 2001

Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3 thì:

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \geq 13.$$

Bài 742. Đại học năm 2002 dự bị 1

Gọi x, y, z là khoảng cách từ điểm M thuộc miền trong của ΔABC có 3 góc nhọn đến các cạnh

BC, CA, AB . Chứng minh rằng: $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$ (a, b, c là các cạnh của

ΔABC , R là bán kính đường tròn ngoại tiếp). Dấu “=” xảy ra khi nào ?

Bài 743. Đại học năm 2002 dự bị 6

Cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB và

h_a, h_b, h_c tương ứng là độ dài các đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \geq 3.$$

Bài 744. Đại học khối D năm 2005

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}. \text{ Khi nào đẳng thức xảy ra ?}$$

Bài 745. Đại học khối B năm 2005 dự bị 1

Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = \frac{3}{4}$.

Chứng minh rằng: $\sqrt[3]{a+3b} + \sqrt[3]{b+3c} + \sqrt[3]{c+3a} \leq 3$. Khi nào đẳng thức xảy ra ?

Bài 746. Đại học khối B năm 2005 dự bị 2

Chứng minh rằng: nếu $0 \leq y \leq x \leq 1$ thì $x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài 747. Đại học khối D năm 2005 dự bị 2

Cho x, y, z là 3 số dương và $xyz = 1$. Chứng minh: $\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3}{2}$.

Bài 748. Đại học khối A năm 2006

Cho 2 số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện: $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$

Phần II

HÌNH HỌC

Email: vandoan_automotive@yahoo.com --- Phone: 0929.031.789 --- 0933755607

Chương 1

VÉCTƠ VÀ PHÉP TOÁN



A – VÉCTƠ VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN VÉCTƠ

① Các khái niệm mở đầu

— Vectơ là một đoạn thẳng có hướng

- Một đầu được xác định là gốc, còn đầu kia là ngọn.
- Hướng từ gốc đến ngọn gọi là hướng của vectơ.
- Độ dài của vectơ là độ dài đoạn thẳng xác định bởi điểm đầu và điểm cuối của vectơ.

A $\longrightarrow$ BO

— Vectơ có gốc A, ngọn B được ký hiệu là $\overrightarrow{AB}$ và độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được ký hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$ là khoảng giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Ngoài ra, vectơ còn được ký hiệu bởi một chữ cái in thường phía trên có mũi tên như $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, $\vec{u}$, độ dài của $\vec{a}$ ký hiệu là $|\vec{a}|$.

— Vectơ không, ký hiệu $\vec{0}$ là vectơ có

- Điểm gốc và điểm ngọn trùng nhau.
- Độ dài bằng 0.
- Hướng bất kỳ.

— Hai vectơ **cùng phương** khi chúng **cùng nằm trên một đường thẳng** hoặc nằm trên **hai đường thẳng song song**. Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ được gọi là cùng phương

$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ A, B, C, D : \text{thẳng hàng} \end{cases}$

C $\xrightarrow{A}$ B $\xrightarrow{D}$ D

A $\xrightarrow{A}$ B

— **Hướng của hai vectơ** : Hai vectơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc ngược hướng. Ta chỉ xét hướng của vectơ khi chúng cùng phương

+ Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ gọi là cùng hướng:

$\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ \text{Hai tia } AB, CD \text{ cùng hướng.} \end{cases}$

A $\xrightarrow{\quad}$ B
C $\xrightarrow{\quad}$

+ Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ gọi là ngược hướng:

$\overrightarrow{AB} \updownarrow \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ \text{Hai tia } AB, CD \text{ ngược hướng.} \end{cases}$

A $\xrightarrow{\quad}$ B
D $\xleftarrow{\quad}$ C

— Góc của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là góc tạo bởi hai tia Ox, Oy, lần lượt cùng hướng với hai tia

AB và CD. Nghĩa là : $\widehat{xOy} = (\widehat{AB, CD})$.

A $\xrightarrow{\quad}$ B
C $\xrightarrow{\quad}$ D
 $\widehat{xOy} = 0^\circ$

+ Khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ không cùng hướng thì $0^\circ \leq \widehat{xOy} \leq 180^\circ$.

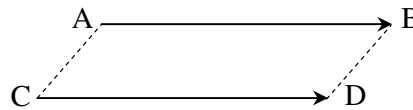
Khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng thì $\widehat{xOy} = 0^\circ$.

B $\xleftarrow{x}$ A $\xrightarrow{y}$ C $\xrightarrow{D}$
 0° $\widehat{xOy} \leq 180^\circ$

D $\xleftarrow{A}$ C $\xrightarrow{B}$
 $\widehat{xOy} = 180^\circ$

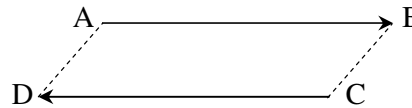
- Hai vectơ **bằng nhau** khi và chỉ khi chúng **cùng hướng** và có **độ dài bằng nhau**.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{CD} \text{ cùng hướng.} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \text{ hay } AB = CD \end{cases}$$



- Hai vectơ **đối nhau** khi và chỉ khi chúng **ngược hướng** và **cùng độ dài**.

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{CD} \text{ ngược hướng.} \\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \text{ hay } AB = CD \end{cases}$$



② Cách phép toán trên vectơ

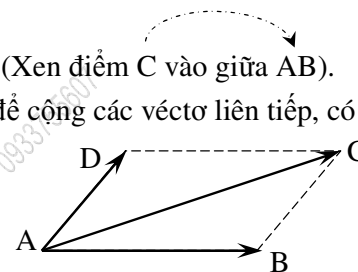
a/ Tổng của hai vectơ

- Quy tắc ba điểm (Quy tắc tam giác hay quy tắc Chasles)

— Với ba điểm bất kỳ A, B, C ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (Xen điểm C vào giữa AB).

— Quy tắc 3 điểm còn được gọi là hệ thức Chasles dùng để cộng các vectơ liên tiếp, có thể mở rộng cho trường hợp nhiều vectơ như sau:

$$\overrightarrow{A_1A_n} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$



- Quy tắc hình bình hành

— Cho ABCD là hình bình hành thì $\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} \end{cases}$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$

— Quy tắc hình bình hành dùng để cộng các vectơ chung gốc.

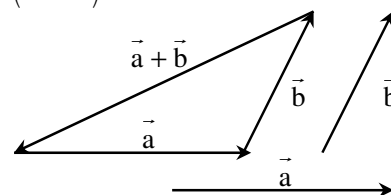
- Tính chất: • $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ • $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ • $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

b/ Hiệu của hai vectơ

- Vectơ đối

— Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

— Tổng của hai vectơ đối là vectơ $\vec{0}$: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.



Minh họa hệ thức Chasles

- Quy tắc tam giác đối với hiệu vectơ

Với ba điểm A, B, C bất kì, ta luôn có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.

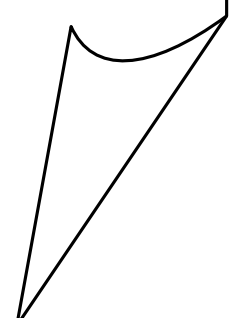
c/ Tích của một số đối với một vectơ

- Định nghĩa: Cho một số thực $k \neq 0$ và một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Tích $k \cdot \vec{a}$ là một vectơ có $\begin{cases} k \cdot \vec{a} \text{ cùng hướng với } \vec{a} \text{ nếu } k > 0 \\ k \cdot \vec{a} \text{ ngược hướng với } \vec{a} \text{ nếu } k < 0 \end{cases}$

- Tính chất

$$\begin{aligned} &\bullet k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b} & \bullet (k+h)\vec{a} = k\vec{a} + h\vec{a} & \bullet 1 \cdot \vec{a} = \vec{a} \\ &\bullet k(h\vec{a}) = (kh)\vec{a} & \bullet (-1)\vec{a} = -\vec{a} & \bullet 0 \cdot \vec{a} = \vec{0} \end{aligned}$$



➤ Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Điều kiện cần và đủ để 2 vectơ $\vec{a}; \vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là tồn tại một số k để $\vec{a} = k.\vec{b}$.

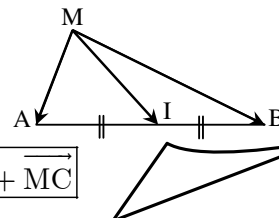
d/ Trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

— I là trung điểm của AB $\Leftrightarrow \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ hay $\vec{IA} = \vec{IB} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ hay $\vec{IA} = -\vec{IB}$.

— I là trung điểm AB và M là điểm bất kì $\vec{2MI} = \vec{MA} + \vec{MB}$.

— G là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

— G là trọng tâm ΔABC và M bất kỳ $\Leftrightarrow \vec{3MG} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$

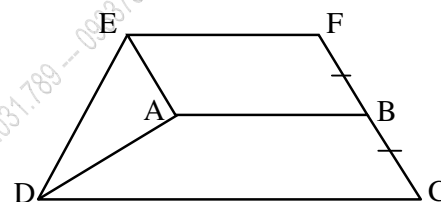


Dạng toán 1. Đại cương về vectơ



Bài 1. Cho hình vẽ bên cạnh, biết $EF \parallel AB \parallel DC$. Hãy tìm

- Hai vectơ bằng nhau.
- Hai vectơ đối nhau.
- Hai vectơ không cùng phương.
- Hai vectơ cùng phương không bằng nhau cũng không đối nhau.



Bài 2. Cho 4 điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Có 5 hệ thức vectơ và 5 mệnh đề được đặt ở hai cột tương ứng, hãy nối chúng lại với nhau để tạo thành một suy luận đúng ?

Cột I	Cột II
1/ $\vec{AD} = \vec{DB}$	A : "ABCD là hình bình hành"
2/ $\vec{AB} = -3\vec{AC}$	B: "ABDC là hình bình hành"
3/ $\vec{AB} = \vec{CD}$	C: "ACBD là hình bình hành"
4/ $\vec{DC} = \vec{DA} + \vec{DB}$	D: "D là trung điểm AB"
5/ $\vec{AD} = \vec{BC}$	E: "C $\in$ AB"

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD. Hãy chỉ ra các vectơ ($\neq \vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối là một trong bốn điểm ABCD. Trong số các vectơ trên, hãy chỉ ra

- Các vectơ cùng phương.
- Các cặp vectơ cùng phương nhưng ngược hướng.
- Các cặp vectơ bằng nhau.

Bài 4. Cho lục giác đều ABCDEF có tâm O.

- Tìm các vectơ khác các vectơ không ($\neq \vec{0}$) và cùng phương với $\vec{AO}$.
- Tìm các vectơ bằng với các vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{CD}$.

c/ Hãy vẽ các vectơ bằng với vectơ $\overrightarrow{AB}$ và có điểm đầu là O, D, C.

d/ Hãy vẽ các vectơ bằng với vectơ $\overrightarrow{AB}$ và có điểm gốc là O, D, C.

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.

a/ Tìm các vectơ bằng với vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b/ Tìm các vectơ bằng với vectơ $\overrightarrow{OA}$.

c/ Vẽ các vectơ bằng với $\overrightarrow{OA}$ và có điểm ngọn là A, B, C, D.

Bài 6. Cho 3 điểm A, B, C phân biệt. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đó ?

Bài 7. Cho 5 điểm A, B, C, D, E phân biệt. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đó ?

Bài 8. Cho $\triangle ABC$ có A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

a/ Chứng minh: $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{A'B'}$.

b/ Tìm các vectơ bằng với $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{C'A'}$.

Bài 9. Cho vectơ $\overrightarrow{AB}$ và một điểm C. Hãy dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Bài 10. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, BC.

Chứng minh: $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QN}$, $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{PN}$.

Bài 11. Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh:

a/ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = AC$.

b/ Nếu $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}|$ thì ABCD là hình chữ nhật.

Bài 12. Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh là a. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.

Bài 13. Cho hình vuông ABCD cạnh là a. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$.

Bài 14. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$.

Bài 15. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a, trục tâm H. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HC}$.

Bài 16. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tính độ dài của các vectơ

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Bài 17. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H là trục tâm của $\triangle ABC$, B' là điểm đối xứng với B qua O. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$.

Bài 18. Tứ giác ABCD là hình gì nếu có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Bài 19. Cho $|\vec{a} + \vec{b}| = 0$. So sánh về độ dài, phương và hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bài 20. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ khác vectơ không. Khi nào có đẳng thức xảy ra ?

a/ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

b/ $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

Bài 21. Cho $\triangle ABC$. Vẽ D đối xứng với A qua B, E đối xứng với B qua C và F đối xứng với C qua A. Gọi G là giao điểm giữa trung tuyến AM của $\triangle ABC$ với trung tuyến DN của $\triangle DEF$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của GA và GD. Chứng minh:

a/ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NM}$.

b/ $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{NI}$.

Bài 22. Cho $\triangle ABC$ và M là một điểm không thuộc các cạnh của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Vẽ điểm P đối xứng với M qua D , điểm Q đối xứng với P qua E , điểm N đối xứng với Q qua F . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{NA}$.

Bài 23. Cho hai $\triangle ABC$ và $\triangle AEF$ có cùng trọng tâm G . Chứng minh: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FC}$.

Bài 24. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD . E, F lần lượt là giao điểm của AM, AN với BD . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}$.

Bài 25. Cho hình chữ nhật $ABCD$, kẻ $AH \perp BD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DH và BC . Kẻ $BK \perp AM$ và cắt AH tại E . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EB}$.

Bài 26. Cho $\triangle ABC$ có G là trọng tâm.

a/ Hãy phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b/ Gọi E, F là hai điểm xác định bởi các điều kiện: $\overrightarrow{EA} = 2\overrightarrow{EB}$, $3\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FC} = \vec{0}$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{EF}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Bài tập trắc nghiệm

Bài 27. Vectơ có điểm đầu là D điểm cuối là E được kí hiệu là

- A. DE . B. $|\overrightarrow{DE}|$. C. $\overrightarrow{ED}$. D. $\overrightarrow{DE}$.

Bài 28. Với vectơ $\overrightarrow{ED}$ (khác vectơ không) thì độ dài đoạn thẳng ED được gọi là:

- A. Phương của vectơ $\overrightarrow{ED}$. B. Hướng của vectơ $\overrightarrow{ED}$.
C. Giá của vectơ $\overrightarrow{ED}$. D. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{ED}$.

Bài 29. Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi:

- A. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.
B. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.
C. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh của một tam giác đều.
D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

Bài 30. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai ?

- A. Hai vectơ đối nhau thì cùng phương. B. Hai vectơ bằng nhau thì cùng phương.
C. Hai vectơ cùng phương thì đối nhau. D. Hai vectơ cùng phương thì bằng nhau.
E. Hai vectơ bằng nhau thì cùng độ dài. F. Hai vectơ có cùng độ dài thì bằng nhau.

Bài 31. Phát biểu nào sau đây là đúng ?

- A. Hai vectơ không bằng nhau thì có độ dài không bằng nhau.
B. Hiệu của hai vectơ có độ dài bằng nhau là vectơ – không.
C. Tổng của hai vectơ khác vectơ – không là một vectơ khác vectơ – không.
D. Hai vectơ cùng phương với 1 vectơ ($\neq \vec{0}$) thì hai vectơ đó cùng phương với nhau.

Bài 32. Cho hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng ?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. B. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$.

Bài 33. Cho hình chữ nhật $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD , phát biểu nào là đúng ?

- A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$. B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
C. $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$.

Bài 34. Với ba điểm phân biệt G, H và K thì số vectơ mà điểm đầu và điểm cuối lấy trong số các điểm đã cho là:

- A. 3. B. 6. C. 9. D. Vô số.

Bài 35. Cho tứ giác ABCD, số vectơ (khác vectơ không) mà điểm đầu và điểm cuối lấy trong số các điểm là đỉnh của tứ giác đã cho là:

- A. 6. B. 12. C. 18. D. 24.

Bài 36. Cho trước vectơ $\overrightarrow{MN} \neq \vec{0}$ thì số vectơ cùng phương với vectơ đã cho là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Bài 37. Cho trước vectơ $\overrightarrow{MN}$ khác vectơ không thì số vectơ cùng hướng với vectơ đã cho là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Bài 38. Cho trước vectơ $\overrightarrow{MN}$ khác vectơ không thì số vectơ bằng vectơ đã cho là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Bài 39. Hai vectơ ngược hướng thì phải:

- A. Bằng nhau. B. Cùng phương. C. Cùng độ dài. D. Cùng điểm đầu.

Bài 40. Cho tứ giác ABCD có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là sai ?

- A. ABCD là hình bình hành. B. BDCA là hình bình hành.
C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Bài 41. Nếu hai vectơ cùng ngược hướng với một vectơ thứ ba (và cả vectơ đều khác vectơ không) thì hai vectơ đó:

- A. Bằng nhau. B. Cùng độ dài. C. Cùng hướng. D. Ngược hướng.

Bài 42. Nếu 3 điểm A, B, C thẳng hàng thì các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ chỉ có thể xảy ra khả năng:

- A. Bằng nhau. B. Cùng phương.
C. Cùng hướng. D. Cùng độ dài.

Bài 43. Nếu có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì:

- A. Tam giác ABC là tam giác cân. B. Tam giác ABC là tam giác đều.
C. A là trung điểm của đoạn BC. D. Điểm B trùng với điểm C.

Bài 44. Cho hình bình hành ABCD. Khi đó $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ bằng:

- A. $\overrightarrow{BD}$. B. $\overrightarrow{CB}$. C. $\vec{0}$. D. Một kết quả khác.

Bài 45. Cho lục giác đều ABCDEF, gọi O là giao điểm các đường chéo, khi đó cặp vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:

- A. $\overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{DE}$. B. $\overrightarrow{FO}$ và $\overrightarrow{CO}$. C. $\overrightarrow{OF}$ và $\overrightarrow{ED}$. D. $\overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{ED}$.

Bài 46. Cho hình bình hành MNPQ, khi đó:

- A. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$. B. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{QM}$.
C. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ và $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{QM}$. D. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ và $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$.

Bài 47. Cho tam giác MNP vuông tại M và $MN = 3\text{cm}$, $MP = 4\text{cm}$. Khi đó độ dài của vectơ $\overrightarrow{NP}$ là:

- A. 3cm. B. 4cm. C. 5cm. D. 6cm.

Bài 48. Các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA của $\triangle ABC$. Khi đó:

- A. $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE}$. B. $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FD}$.
C. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. D. $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FC}$.

Bài 49. Cho tứ giác ABCD (các đỉnh lấy theo thứ tự đó), các điểm M, N, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Khi đó:

- A. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EF}$. B. $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{FM}$. C. $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{EF}$. D. $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{FN}$.

Dạng toán 2. Chứng minh một đẳng thức vectơ



Phương pháp giải

☛ **Sử dụng**

☞ Quy tắc 3 điểm:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \text{ xen điểm C.}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}, \text{ hiệu hai vectơ cùng gốc.}$$

☞ Quy tắc hình bình hành : Với hình bình hành ABCD là luôn có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

☞ Quy tắc trung điểm: Với điểm M tùy ý và I là trung điểm của AB ta luôn có:

$$2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \quad \left(\text{hay } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \text{ hay } \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ hay } \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \right)$$

⇒ Kết hợp với các tính chất phép cộng, trừ vectơ và phép nhân một số với một vectơ để thực hiện phép biến đổi tương đương cho biểu thức cần chứng minh.

☛ **Về mặt thực hành**, ta có thể lựa chọn một trong các trường hợp biến đổi sau:

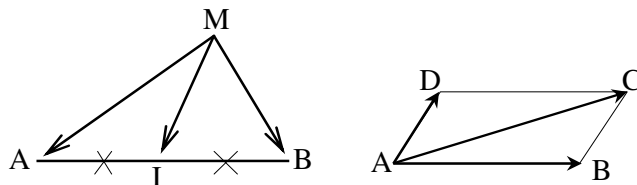
☞ **Hướng 1.** Biến đổi một vế thành vế còn lại (VT ⇒ VP hoặc VP ⇒ VT). Khi đó :

- + Nếu xuất phát từ vế phức tạp, ta cần thực hiện việc đơn giản biểu thức.
- + Nếu xuất phát từ vế đơn giản, ta cần thực hiện việc phân tích vectơ.

☞ **Hướng 2.** Biến đổi đẳng thức cần chứng minh về 1 đẳng thức đã biết là luôn đúng.

☞ **Hướng 3.** Biến đổi đẳng thức vectơ đã biết là luôn đúng thành đẳng thức cần CM.

☞ **Hướng 4.** Tạo dựng hình phụ, dựa vào tính chất của hình để biến đổi,...



MỘT SỐ BÀI TẬP MẪU

Bài tập 1. Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Bài giải tham khảo

☛ **Cách giải 1.** Thực hiện phép biến đổi VT

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Ta có: } VT &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \underbrace{(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB})}_{\text{xen D}} + \underbrace{(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD})}_{\text{xen B}} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \underbrace{(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD})}_{\vec{0}} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = VP \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

☛ **Lời bình 1.** Để thực hiện việc biến đổi VT ⇒ VP, ta ý thức được rằng cần tạo ra sự xuất hiện của các vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{CB}$, do đó trong lời giải trên với vectơ $\overrightarrow{AB}$ ta xen vào điểm D, còn vectơ $\overrightarrow{CD}$ ta xen vào điểm B. Với tư tưởng này, ta tiến hành phép biến đổi VP ⇒ VT, thông qua cách giải 2, cụ thể như sau:

☛ **Cách giải 2.** Thực hiện phép biến đổi VP

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Ta có: } \overrightarrow{VP} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \underbrace{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})}_{\text{xen B}} + \underbrace{(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB})}_{\text{xen D}} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \underbrace{(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB})}_0 \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{VT} \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

✎ **Cách giải 3.** Thực hiện phép biến đổi biểu thức

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} \text{ (luôn đúng)} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{VT} = \overrightarrow{VP} \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Qui tắc trừ $\xrightarrow{\quad}$

Bài tập 2. Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD

a/ Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$.

b/ Gọi G là trung điểm của EF. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{EF}$.

Bài giải tham khảo

a/ **Chứng minh:** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$.

✓ **Chứng minh:** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Ta có: } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \quad (1) \end{aligned}$$

✓ **Chứng minh:** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$.

$$\bullet \text{ Ta có: F là trung điểm của DC và E là điểm bất kỳ} \Rightarrow 2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EC} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Ta lại có: E là trung điểm của AB và F là điểm bất kỳ} \Rightarrow 2\overrightarrow{FE} &= \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} \\ \Rightarrow -2\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} \Rightarrow 2\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FB} \quad (3) \end{aligned}$$

• Cộng vế theo vế của (2) cho (3) ta được:

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FB} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DA}) - (\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \underbrace{(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DA})}_{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}} + \underbrace{(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CB})}_{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}} + \underbrace{(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB})}_0 - \underbrace{(\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FC})}_0 = 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

$$\text{Hay } 4\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BC} = 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF} \quad (4)$$

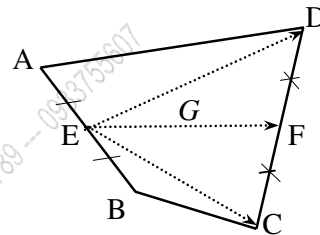
$$\bullet \text{ Từ (1), (4)} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF} \text{ (đpcm).}$$

b/ **Chứng minh:** $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{EF}$

$$\bullet \text{ Ta có: E là trung điểm của AB và G là điểm bất kỳ} \Rightarrow 2\overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} \quad (5).$$

$$\bullet \text{ Ta lại có: F là trung điểm của BC và G là điểm bất kỳ} \Rightarrow 2\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} \quad (6).$$

$$\bullet \text{ Lấy (5) + (6)} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} \quad (7).$$



- Do G là trung điểm của EF nên: $\overrightarrow{GF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$ (8)
- Thay (8) vào (7) $\Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{EF}(\text{đpcm})$.

Bài tập 3. Cho $\triangle ABC$. Gọi G là **trọng tâm** của tam giác và M là điểm tùy ý trong mặt phẳng.

Chứng minh rằng:

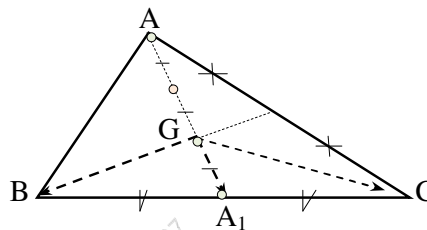
$$\text{a/ } \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \\ \text{GA} + \text{GB} + \text{GC} = 0 \end{array}$$

$$\text{b/ } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

Bài giải tham khảo

a/ Chứng minh: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

- Gọi A_1 là trung điểm của BC.
 - Ta có A_1 là trung điểm của BC và G là điểm bất kỳ
 $\Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{2GA_1}$ (1)
 - Theo tính chất trọng tâm thì: $\overrightarrow{2GA_1} = -\overrightarrow{GA}$ (2) (**G chia đoạn AA_1 ra 3 đoạn bằng nhau**)
 - Từ (1), (2) $\Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (đpcm).
-



b/ Chứng minh: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

- Тако: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}$
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow = 3\overrightarrow{MG} + \underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_0 = 3\overrightarrow{MG} \quad (\text{δpcm}).$

★ **Lời bình 2.** Thông qua kết quả câu b/, ta có thể khẳng định được rằng nếu $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ thì M là trọng tâm của ΔABC (**dùng để chứng minh 1 điểm là trọng tâm Δ**), thật vậy:

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\vec{MG} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv G.$$

Bài tập 4. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của BC, H là **trực tâm** (giao điểm của **3 đường cao**), O là tâm đường tròn **ngoại tiếp** (giao điểm của **3 đường trung trực** cạnh, đặc biệt đối với tam giác **vuông** thì **tâm ngoại** là **trung điểm cạnh huyền**) của tam giác.

a/ Chứng minh: $AH = 2OM$.

b/ Chứng minh: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{2HO}$.

Bài giải tham khảo

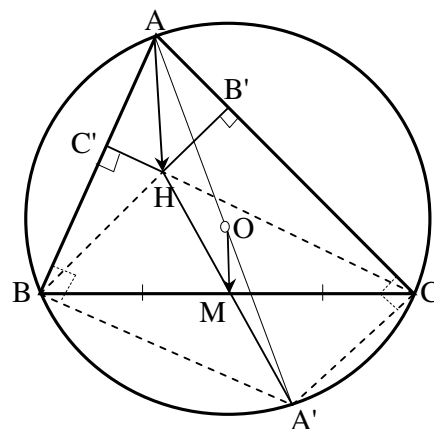
a/ Chứng minh: $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$

- Gọi A' là điểm đối xứng của A qua O thì AA' là đường kính của đường tròn tâm (O) .

$$\text{Nên } \widehat{ABA'} = 90^\circ \text{ hay } \left. \begin{array}{l} A'B \perp AB \\ CC' \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow A'B \parallel CH \quad (1)$$

$$\widehat{\text{ACA}'} = 90^\circ \text{ hay } \left. \begin{array}{l} \text{A'C} \perp \text{CA} \\ \text{BB}' \perp \text{CA} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{A'C} \parallel \text{BH} \quad (2)$$

- Từ $(1), (2) \Rightarrow A'BHC$ là hình bình hành.



$\Rightarrow M$ là trung điểm đường chéo HA .

- Do O là trung điểm AA' nên OM là đường trung bình $\triangle AHA'$.

$$\Rightarrow OM \parallel AH \text{ và } OM = \frac{1}{2} AH \Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM} \text{ (đpcm)}.$$

b/ **Chứng minh:** $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.

- Do O là trung điểm của AA' và H là điểm bất kì $\Rightarrow 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA'}$ (3).
- Mà $HBA'C$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$ (4)
- Thay (4) vào (3) $\Rightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ (đpcm).

Bài tập 5. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là tâm của đường tròn **nội tiếp** tam giác (giao điểm của 3 đường **phân giác trong**). Chứng minh rằng: $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Bài giải tham khảo

- Dựng hình bình hành AB_2IC_2 có $AB_2 \parallel CC_1$ và $AC_2 \parallel BB_1$.

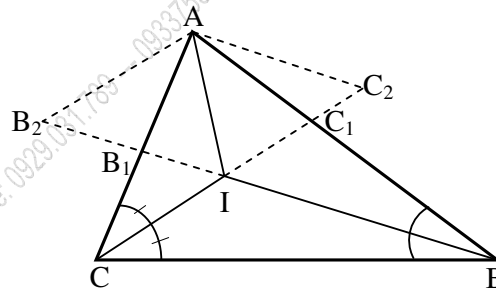
$$\text{Ta được: } \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB_2} + \overrightarrow{IC_2} \quad (1)$$

- Do $IC_1 \parallel B_2A$, áp dụng định lý Thales ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{IB_2}{IB} = \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{b}{a} \\ \overrightarrow{IB_2} \uparrow \downarrow \overrightarrow{IB} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB_2} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{IB} \quad (2)$$

- Tương tự: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{IC_2}{IC} = \frac{B_1A}{B_1C} = \frac{c}{a} \\ \overrightarrow{IC_2} \uparrow \downarrow \overrightarrow{IC} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC_2} = -\frac{c}{a}\overrightarrow{IC} \quad (3)$

- Thay (2), (3) vào (1) ta được: $\overrightarrow{IA} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{IB} - \frac{c}{a}\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (đpcm).



Bài tập 6. Cho $\triangle ABC$. Gọi M là điểm trên cạnh BC . Chứng minh: $\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC}.\overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC}.\overrightarrow{AC}$.

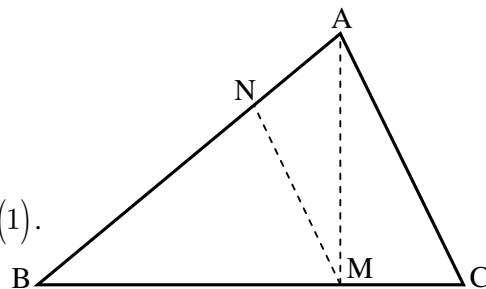
Bài giải tham khảo

✎ **Cách giải 1.**

- Kẻ $MN \parallel AC$ ($N \in AB$).
- Áp dụng định lý Thales ta có :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AN}{MC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AN = \frac{MC}{BC}.AB \\ \overrightarrow{AN} \uparrow \downarrow \overrightarrow{AB}, \frac{MC}{BC} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{MC}{BC}.\overrightarrow{AB} \quad (1).$$

- Và $\left\{ \begin{array}{l} \frac{NM}{AC} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow NM = \frac{MB}{BC}.AC \\ \overrightarrow{NM} \uparrow \downarrow \overrightarrow{AC}; \frac{MB}{BC} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{NM} = \frac{MB}{BC}.\overrightarrow{AC} \quad (2).$



Bài 56. Cho ΔABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và O là điểm bất kỳ.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

Bài 57. Cho hình bình hành ABCD tâm O, M là điểm bất kỳ. Chứng minh rằng:

a/ $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

b/ $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AB}$.

c/ $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$.

d/ $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Bài 58. Cho hai tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm tương ứng là G và G'.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

Bài 59. Cho tam giác ABC. Gọi E là trung điểm đoạn BC. Các điểm M, N theo thứ tự đó nằm trên cạnh BC sao cho E là trung điểm đoạn MN. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}$.

Bài 60. Cho ngũ giác đều ABCDE có tâm là O. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

Bài 61. Cho ΔABC . Gọi A' là điểm đối xứng của B qua A, B' là điểm đối xứng của C qua B, C' là điểm đối xứng của A qua C.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$ (với O là điểm bất kỳ).

Bài 62. Cho lục giác đều ABCDEF có tâm là O. Chứng minh rằng: với M là điểm tùy ý thì ta luôn có:

a/ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

b/ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

c/ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD}$.

d/ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}$.

Bài 63. Cho ΔABC , vẽ bên ngoài các hình bình hành ABIF; BCPQ; CARS.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RF} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$.

Bài 64. Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn tâm O có trục tâm H, kẻ đường kính AD.

a/ Chứng minh rằng: $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$.

b/ Gọi H' là điểm đối xứng của H qua O. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH'}$.

Bài 65. Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi M thuộc cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng:

a/ $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$.

b/ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Bài 66. Cho tứ giác ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD và O, M là điểm bất kỳ. Chứng minh rằng:

a/ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

b/ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c/ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$.

Bài 67. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA và G là trung điểm của FH, M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

a/ $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$.

b/ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$.

c/ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}$.

Bài 68. Cho hình bình hành ABCD có tâm O và E là trung điểm của AD. Chứng minh rằng:

a/ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

b/ $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{AB}$.

c/ $\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC}$.

Bài 69. Cho 4 điểm A, B, C, D. Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của đoạn thẳng BC, CD.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{DA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$.

Bài 70. Cho ΔABC . Trên cạnh BC lấy các điểm D, E, F sao cho: $BD = DE = EF = FC$.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AE}$.

Bài 71. Cho tứ giác ABCD có AB không song song với CD. Gọi M, N, P, Q lần lượt theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BC, AC, DB.

a/ Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ và $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$.

b/ Chứng minh các điểm M, N, P, Q là 4 đỉnh của một hình bình hành.

c/ Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN và O là điểm bất kỳ.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OI}$.

Bài 72. Cho hình bình hành ABCD có tâm là O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, DC. Chứng minh rằng:

a/ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$.

b/ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB})$.

c/ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Bài 73. Cho ΔABC có 3 góc nhọn. Gọi H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. D là điểm đối xứng với A qua O.

a/ Chứng minh rằng BHCD là hình bình hành. Từ đó hãy tính tổng $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$.

b/ Chứng minh rằng: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

c/ Có nhận xét gì về 3 điểm O, G, H?

Bài 74. Cho ΔABC . Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Gọi K, D lần lượt là trung điểm của MN và BC. Chứng minh rằng:

a/ $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

b/ $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 75. Cho tứ giác ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Bài 76. Cho đều ΔABC có tâm là O. Gọi M là điểm thuộc miền trong của tam giác và D, E, F lần lượt là hình chiếu của M lên 3 cạnh của tam giác. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Bài 77. Cho ΔABC . Gọi H là trực tâm của tam giác.

Chứng minh rằng: $\tan A \cdot \overrightarrow{HA} + \tan B \cdot \overrightarrow{HB} + \tan C \cdot \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

Bài 78. Cho ΔABC . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{\sin A \cdot \vec{IA}} + \overrightarrow{\sin B \cdot \vec{IB}} + \overrightarrow{\sin C \cdot \vec{IC}} = \vec{0}$.

Bài 79. Cho ΔABC . Lấy điểm M tùy ý thuộc miền trong tam giác.

Chứng minh rằng: $S_{\Delta MBC} \cdot \overrightarrow{MA} + S_{\Delta MAC} \cdot \overrightarrow{MB} + S_{\Delta MAB} \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Kết quả trên còn đúng khi M ở ngoài tam giác không ?

HD: Gọi A' là giao điểm của đường thẳng MA với BC. Ta có: $\overrightarrow{MA'} = \frac{A'C}{BC} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{A'B}{BC} \cdot \overrightarrow{MC}$.

$$\text{Và } \frac{A'C}{BC} = \frac{S_{\Delta MA'C}}{S_{\Delta MA'B}} = \frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta MAB}}, \quad \frac{MA'}{MA} = \frac{S_{\Delta MA'B}}{S_{\Delta MAB}} = \frac{S_{\Delta MA'C}}{S_{\Delta MAC}} = \frac{S_{\Delta MA'B} + S_{\Delta MA'C}}{S_{\Delta MAB} + S_{\Delta MAC}}.$$

Bài 80. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt thuộc các đoạn AD và BC sao cho: $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} = \frac{m}{n}$.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN} = \frac{n \cdot \overrightarrow{AB} + m \cdot \overrightarrow{DC}}{m + n}$.

Bài 81. Cho đoạn AB. Trên đoạn AB lấy điểm C sao cho $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$ và S là điểm bất kỳ.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{SC} = \frac{n}{m+n} \cdot \overrightarrow{SA} + \frac{m}{m+n} \cdot \overrightarrow{SB}$.

Bài 82. Cho hình chữ nhật có tâm là O và S là điểm bất kỳ.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$ **HD:** $\overrightarrow{SA}^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA})^2$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 83. Cho hình bình hành ABCD có tâm O và điểm M tùy ý. Chứng minh rằng

a/ $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB}$.

b/ $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

c/ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$.

d/ $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$.

e/ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO}$.

f/ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Bài 84. Cho ΔABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a/ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

b/ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$.

c/ $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

d/ $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MP} = \vec{0}$.

e/ $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$.

f/ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

g/ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

h/ $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PC}$.

Bài 85. Cho hình thang OABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Chứng minh rằng:

a/ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

b/ $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$.

c/ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$.

Bài 86. Cho ΔABC có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G. M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

$$a/ \overrightarrow{2AC} - \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}. \quad b/ \overrightarrow{2AB} + 3\overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{IC}. \quad c/ \overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MI}.$$

Bài 87. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB, D là trung điểm của BC, N là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$. Gọi K là trung điểm của MN. Chứng minh rằng:

$$a/ \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}. \quad b/ \overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Bài 88. Cho tam giác ABC, có AM là trung tuyến. I là trung điểm của AM.

$$a/ \text{Chứng minh: } 2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

$$b/ \text{Với điểm O bất kỳ, chứng minh: } 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OI}.$$

Bài 89. Cho ΔABC với M là điểm tùy ý.

$$a/ \text{Chứng minh rằng } \vec{a} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \text{ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.}$$

$$b/ \text{Dựng điểm D sao cho } \overrightarrow{CD} = \vec{a}. \text{ CD cắt AB tại K. Chứng minh: } \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CK}.$$

Bài 90. Cho đường tròn tâm I nội tiếp trong ΔABC , tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Gọi a, b, c lần lượt theo thứ tự là độ dài của các cạnh BC, CA, AB của ΔABC .

$$\text{Chứng minh: } a.\overrightarrow{IM} + b.\overrightarrow{IN} + c.\overrightarrow{IP} = \vec{0}.$$

Bài 91. Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD, EF.

$$a/ \text{Chứng minh: } \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}) \text{ với I bất kì.}$$

$$b/ \text{Hãy tìm điểm G sao cho } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}.$$

$$c/ \text{Gọi } G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6 \text{ tương ứng là trọng tâm của } \Delta ABC, \Delta DEF, \Delta ABCD, \Delta EFA, \Delta CDE, \Delta FAB. \text{ Chứng minh rằng: } G_1G_2, G_3G_4, G_5G_6 \text{ cùng đồng qui tại một điểm.}$$

Dạng toán 3. Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ – Cm đường qua điểm cố định

❖ **Phương pháp giải**

Bài toán. Xác định điểm M thỏa một đẳng thức vectơ cho trước ?

— Bước 1. Ta biến đổi đẳng thức đã cho (bằng xen điểm, hiệu 2 vectơ cùng gốc, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...) về dạng: $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$. Trong đó điểm O đã biết trước và vectơ $\vec{v}$ đã biết.

— Bước 2. Nếu muốn dựng điểm M, ta lấy điểm O làm gốc, dựng 1 vectơ bằng 1 vectơ $\vec{v}$, khi đó điểm ngọn của vectơ này chính là điểm M.

❖ **Lưu ý**

— Lưu ý 1. Thông thường, biểu thức $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$ là những biểu thức đặc biệt (trung điểm, trọng tâm, điểm chia đoạn theo tỉ lệ $a = k.b$, hình bình hành, ...). Ta dựa vào biểu thức này để dựng hình.

— Lưu ý 2. Một số cách chứng minh thường dùng

✧ Để chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta cần chứng minh 1 trong các hệ thức:

- $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$.
- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- $2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}$.
- $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (O bất kỳ).

✧ Để chứng minh điểm G là trọng tâm của ΔABC , ta cần chứng minh 1 trong các hệ thức:

- $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
- Với I là trung điểm của cạnh BC thì $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
- Với O là điểm bất kì trong mặt phẳng thì: $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

✧ Để chứng minh ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$

✧ Để chứng minh hai điểm A_1 và A_2 trùng nhau ta có thể chứng minh 1 trong các hệ thức:

- $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2}$ với O là điểm bất kỳ.

✧ Điều kiện cần và đủ để ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trọng tâm là: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

✧ Nếu $\overrightarrow{MB} = k.\overrightarrow{MC}$ ($k \neq 1$) thì $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} - k.\overrightarrow{AC}}{1 - k}$

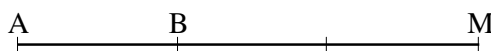
(hay điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k ($k \neq 1$)).

MỘT SỐ BÀI TẬP MẪU

Bài tập 7. Cho điểm A, B. Xác định điểm M biết: $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Bài giải tham khảo

- Ta có: $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} - 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.
- Do đó, M được xác định như sau:
 - M nằm trên đường thẳng AB và nằm ngoài đoạn AB, gần B. Hai vectơ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng hướng.
 - Độ dài $AM = 3AB$, nghĩa là điểm B chia AM ra 3 đoạn bằng nhau.



Bài tập 8. Cho ΔABC . Gọi M là trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC, sao cho $NC = 2NA$.
Hãy xác định K và D khi

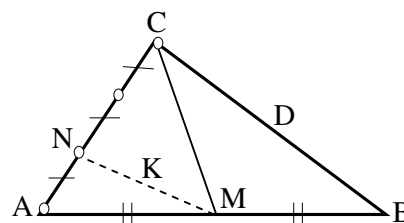
a/ $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$.

b/ $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0}$.

Bài giải tham khảo

a/ **Xác định điểm K thỏa:** $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0} \quad (1)$

- Theo giả thiết thì: $\begin{cases} AB = 2AM \\ \overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{AM} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} \quad (2)$
- $\begin{cases} AC = 3AN \\ \overrightarrow{AC} \uparrow \overrightarrow{AN} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN} \quad (3)$



- Thay (2) và (3) vào (1) ta được: $6\overrightarrow{AM} + 6\overrightarrow{AN} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$.
 $\Rightarrow K$ là trung điểm của MN.

b/ **Xác định điểm D thỏa:** $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0} \quad (4)$

- Ta có $\overrightarrow{KD} = \underbrace{\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK}}_{\text{Xen A-}} \quad (5)$. Mà theo (4) $\Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad (6)$

- Thay (6) vào (5) ta được: $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad (7)$

- Thay (7) vào (4): $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\left(\overrightarrow{AD} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
 $\Rightarrow D$ là trung điểm của BC.

Bài tập 9. Cho hình bình hành ABCD, hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn:

a/ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD}$.

b/ $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.

c/ Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$.

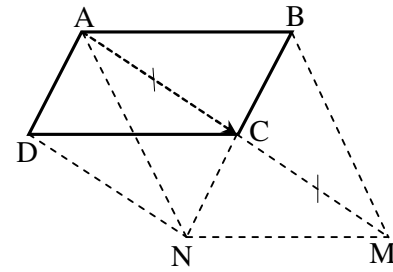
Bài giải tham khảo

a/ **Dựng điểm M thỏa:** $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD}$

- Ta có: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

- Do ABCD là hình bình hành nên:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC}} \Rightarrow C \text{ là trung điểm của } AM.$$



b/ **Dựng điểm N thỏa:** $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$

- Ta có: $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \underbrace{(\overrightarrow{NC} - \overrightarrow{NA})}_{\overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{ND} = \underbrace{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})}_{\overrightarrow{AC}} - \overrightarrow{AC}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AC}} \Rightarrow N \text{ là đỉnh thứ tư của hình bình hành DACN.}$

c/ **Chứng minh:** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$

- Ta có DACN là hình bình hành (câu b) nên $NC = DA$
- Mà ABCD là hình bình hành (giả thiết) nên $DA = BC$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABMN là hình bình hành (do có 2 đường chéo NB và AM cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường) $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA}$ (đpcm).

Bài tập 10. Cho trước 2 điểm A, B và hai số thực α, β thỏa mãn: $\alpha + \beta \neq 0$

a/ Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn: $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

b/ Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có: $\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MI}$.

Bài giải tham khảo

a/ **Chứng minh:** tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn: $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

- Ta có: $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{AI} = \beta \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \overrightarrow{AB}.$

- Vì A, B cố định nên vectơ $\frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \overrightarrow{AB}$ không đổi, do đó tồn tại duy nhất điểm I thỏa đề bài.

b/ **Chứng minh:** $\forall M : \alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MI}$.

- Ta có: $\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} = \alpha \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + \beta \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MI} + \underbrace{\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} = (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MI}.$
- Vậy $\alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \cdot \overrightarrow{MI}, \forall M$ (đpcm).

★ **Lời bình 3**

- Nếu $\alpha = \beta = 1$ thì điểm I chính là trung điểm của AB.
- Bài toán trên được mở rộng cho ba điểm A, B, C và bộ 3 số thực α, β, γ cho trước thỏa mãn: $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, nghĩa là:
 - + Tồn tại điểm I duy nhất thỏa mãn: $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$
 - + Từ đó suy ra với điểm M bất kỳ, ta luôn có: $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} + \gamma \cdot \overrightarrow{IC} = (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \overrightarrow{MI}$. Và khi: $\alpha = \beta = \gamma = 1$ thì I là trọng tâm của ΔABC .
- Bài toán trên vẫn đúng với n điểm $A_i (i = \overline{1, n})$ và bộ số thực $\alpha_i (i = \overline{1, n})$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$
- Kết quả trên dùng để giải bài toán: "Cho n điểm $A_i, i = \overline{1, n}$ và bộ số thực $\alpha_i, i = \overline{1, n}$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. Tìm số thực k và điểm cố định I sao cho đẳng thức véc-tơ: $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \overrightarrow{MA_i} = k \cdot \overrightarrow{MI}$ thỏa mãn với mọi điểm M".

Bài tập 11. Cho tứ giác ABCD, M là điểm tùy ý. Trong mỗi trường hợp hãy tìm số k và điểm cố định I, J, K sao cho đẳng thức véc-tơ sau thỏa mãn với mọi điểm M.

- a/ $2 \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MI}$
- b/ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} = k \cdot \overrightarrow{MJ}$
- c/ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3 \cdot \overrightarrow{MD} = k \cdot \overrightarrow{MK}$

Bài giải tham khảo

a/ **Tìm k thỏa:** $2 \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MI}$.

- Vì $2 \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MI} \quad (1)$ thỏa với mọi M, do đó nó cũng đúng với $M \equiv I$.
- Khi đó: $2 \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = k \cdot \overrightarrow{II} = \vec{0} \quad (2) \Leftrightarrow 2 \cdot \overrightarrow{IA} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow I$ được xác định. Nó nằm trên đường thẳng AB, ngoài đoạn AB, véc-tơ $\overrightarrow{IA}$ ngược chiều với véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và có độ lớn $IA = \frac{1}{3} AB$
- Từ (2) ta có: $2 \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (2 + 1) \cdot \overrightarrow{MI} = 3 \cdot \overrightarrow{MI} \quad (3)$ (áp dụng lời bình 3 và $M \equiv I$)
- Từ (1), (3) $\Rightarrow 3 \cdot \overrightarrow{MI} = k \cdot \overrightarrow{MI} \Rightarrow k = 3$.

b/ **Tìm k thỏa:** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} = k \cdot \overrightarrow{MJ}$.

- Vì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} = k \cdot \overrightarrow{MJ} \quad (4)$ thỏa mãn với mọi M nên nó đúng với $M \equiv J$.
- Khi đó: $\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2 \cdot \overrightarrow{JC} = k \cdot \overrightarrow{JJ} = \vec{0} \quad (5)$
- Gọi E là trung điểm của AB, từ (5) $\Rightarrow 2 \cdot \overrightarrow{JE} + 2 \cdot \overrightarrow{JC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{JC} = \vec{0} \Rightarrow J$ là trung điểm của CE.
- Từ (5), ta được: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} = (1 + 1 + 2) \cdot \overrightarrow{MJ} = 4 \cdot \overrightarrow{MJ} \quad (6)$

- Từ (4), (6) $\Rightarrow k.MJ = 4.MJ \Rightarrow k = 4$.

c/ **Tìm k thỏa:** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3.\overrightarrow{MD} = k.\overrightarrow{MK}$.

- Vì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3.\overrightarrow{MD} = k.\overrightarrow{MK}$ (7) thỏa mãn $\forall : M$ nên nó đúng với $M \equiv K$.
- Khi đó: $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 3.\overrightarrow{KD} = k.\overrightarrow{KK} = \vec{0}$ (8)
- Gọi G là trọng tâm ΔABC , từ (8) $\Rightarrow 3.\overrightarrow{KG} + 3.\overrightarrow{KD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{KD} \Rightarrow K$ là trung điểm của GD.
- Từ (8), ta được: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3.\overrightarrow{MD} = (1 + 1 + 1 + 3).\overrightarrow{MK} = 6.\overrightarrow{MK}$ (9).
- Từ (7), (9) $\Rightarrow k.\overrightarrow{MK} = 6.\overrightarrow{MK} \Rightarrow k = 6$.

Bài tập 12. Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh ΔANP và ΔCMQ có cùng trọng tâm.

Bài giải tham khảo

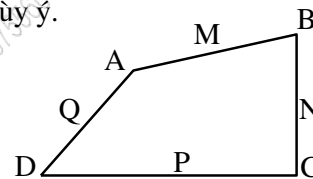
Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của ΔANP và ΔCMQ , O là một điểm tùy ý.

- Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OG_1} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ} = 3\overrightarrow{OG_2} \end{cases} \quad (1)$$

• Mặt khác:

$$\left\{ \begin{array}{l} \circ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \\ \circ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) \end{array} \right\} \quad (2)$$

- Từ (1), (2) $\Rightarrow \overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OG_2} \Rightarrow G_1 \equiv G_2 \Rightarrow \Delta ANP$ và ΔCMQ có cùng trọng tâm (đpcm).



BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 93. Cho ΔABC . Hãy dựng hình và

- Tìm điểm I sao cho: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- Tìm điểm K sao cho: $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$.
- Tìm điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
- Tìm điểm N sao cho: $\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} = \vec{0}$.
- Tìm điểm P sao cho: $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.
- Tìm điểm Q sao cho: $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{BC}$.
- Tìm điểm L sao cho: $2\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
- Tìm điểm H sao cho: $2\overrightarrow{HA} - 3\overrightarrow{HB} = 3\overrightarrow{BC}$.
- Tìm điểm R sao cho: $2\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

j/ Tìm điểm S sao cho: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{BC}$.

k/ Tìm điểm T sao cho: $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

l/ Tìm điểm U sao cho: $3\overrightarrow{UA} + \overrightarrow{UB} + \overrightarrow{UC} = \vec{0}$.

m/ Tìm điểm X sao cho: $3\overrightarrow{XA} - 2\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = \vec{0}$.

Bài 94. Cho hình bình hành ABCD và ACEF.

a/ Dựng các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{FN} = \overrightarrow{BD}$.

b/ Chứng minh $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MN}$.

Bài 95. Cho $\triangle ABC$, hai điểm D và E.

1/ Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ thì O là trọng tâm $\triangle ABC$.

2/ Xác định điểm M thỏa: (+ dựng hình)

a/ $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

b/ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

c/ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME}$.

d/ $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

3/ Xác định điểm N thỏa: (+ dựng hình)

a/ $\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} = \vec{0}$.

b/ $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

c/ $2\overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{NB} + 4\overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

d/ $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + 3(\overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NE}) = \vec{0}$.

4/ Gọi P là điểm xác định bởi $5\overrightarrow{PA} - 7\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PI} = \vec{0}$ và G là trọng tâm của $\triangle ABC$.

a/ Chứng minh: $\overrightarrow{GP} = 2\overrightarrow{AB}$.

b/ Với $AP \cap BG = Q$. Hãy tính tỉ số $\frac{QA}{QP}$.

5/ Gọi A' là điểm đối xứng của A qua B, B' là điểm đối xứng của B qua C và C' là điểm đối xứng của C qua A. Chứng minh rằng hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có cùng trọng tâm J.

Bài 96. Cho $\triangle ABC$.

a/ Xác định các điểm D và E sao cho: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

b/ Chứng minh C là trung điểm của đoạn thẳng ED.

Bài 97. Cho hình bình hành ABCD.

a/ Hãy xác định các điểm M, P sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB}$.

b/ Chứng minh rằng P là trung điểm của đoạn thẳng DP.

Bài 98. Cho 4 điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow AB$ và CD có cùng trung điểm.

Bài 99. Cho O, A, B, C là 4 điểm bất kỳ trong mặt phẳng. Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

a/ Hãy dựng các điểm D, E, F sao cho:

$\overrightarrow{OD} = \vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$, $\overrightarrow{OE} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$, $\overrightarrow{OF} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

b/ Chứng minh rằng A là trung điểm của đoạn thẳng DE và C là trung điểm của đoạn FD.

c/ Chứng minh hệ thức: $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Bài 100. Cho hai điểm A và B.

a/ Dựng các điểm E, F sao cho $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

b/ Chứng minh hai đoạn thẳng AB và EF có cùng trung điểm.

Bài 101. Cho $\triangle ABC$.

a/ Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta luôn có: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

b/ Hãy dựng điểm D sao cho: $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

Bài 102. Cho $\triangle ABC$.

a/ Dựng điểm P sao cho $3\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

b/ Chứng minh rằng vectơ $\vec{v} = 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

Bài 103. Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm là G và $\triangle A'B'C'$ có trọng tâm là G'.

a/ Chứng minh hệ thức: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$.

b/ Suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm.

Bài 104. Cho hai tam giác ABC và $\triangle A'B'C'$ có cùng trọng tâm là G. Gọi G_1, G_2, G_3 theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác: $\triangle BCA', \triangle CAB', \triangle ABC'$. Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm của $\triangle G_1G_2G_3$.

Bài 105. Cho $\triangle ABC$. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB. Chứng minh rằng hai tam giác $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có chung trọng tâm.

Bài 106. Cho hình bình hành ABCD và một điểm E thuộc miền trong của hình bình hành. Chứng minh rằng hai $\triangle ACE$ và $\triangle BDE$ có cùng trọng tâm. Điều đó còn đúng khi E nằm ở ngoài hình bình hành không?

Bài 107. Cho $\triangle ABC$, các đường cao AA', BB', CC'.

Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ thì $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Bài 108. Cho $\triangle ABC$ và D là điểm bất kỳ. DA, DB, DC theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A', B', C'.

Chứng minh rằng nếu ta có: $\overrightarrow{BA'} - \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB'} - \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{C'B} = \vec{0}$ thì D là trọng tâm $\triangle ABC$.

Bài 109. Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Bài 110. Cho $\triangle ABC$ và số thực k. Gọi A', B', C' lần lượt được xác định bởi $\overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{CA}$. Chứng minh: $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

HD: Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} = k.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA'} - \overrightarrow{GA} = k.(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) \\ \overrightarrow{BB'} = k.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB'} - \overrightarrow{GB} = k.(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB}) \\ \overrightarrow{CC'} = k.\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{GC'} - \overrightarrow{GC} = k.(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC}) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} = \vec{0} \Rightarrow G \equiv G'$$

Bài 111. Cho tứ giác ABCD.

1/ Tìm điểm cố định I để các hệ thức sau thỏa mãn.

a/ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = k.\overrightarrow{MI}$.

b/ $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} = k.\overrightarrow{MI}$.

c/ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = k.\overrightarrow{MI}$.

d/ $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 4\overrightarrow{MD} = k.\overrightarrow{MI}$.

2/ Nếu tồn tại $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Chứng minh O xác định duy nhất.

3/ Nếu ABCD là hình bình hành. Với mọi M, hãy tìm k và điểm cố định I thỏa:

a/ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = k.\overrightarrow{MI}$.

b/ $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = k.\overrightarrow{MI}$.

c/ $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = k.\overrightarrow{MI}$.

4/ Xác định điểm S để: $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$.

Bài 112. Cho ΔABC , điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn đẳng thức: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

a/ Chứng minh rằng: MN luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

b/ Gọi P là trung điểm của CN. Chứng minh: MP luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

HD: a/ $\overrightarrow{MN} = (1 + 5 - 1)\overrightarrow{MI}$.

b/ $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}) = 3\overrightarrow{MJ}$.

Bài 113. Cho tứ giác lồi ABCD, điểm M trong mặt phẳng thỏa: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} + 4\overrightarrow{MD}$.

a/ Chứng minh: MN luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi.

b/ Gọi P là trọng tâm ΔABN . Chứng minh: MP luôn đi qua điểm cố định khi M thay đổi.

Bài 114. Cho ΔABC . Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh rằng ΔABC và ΔMNP có cùng trọng tâm khi và chỉ khi: $\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB}$.

Bài 115. Cho ΔABC , M là một điểm trong tam giác. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh BC, CA, AB.

Chứng minh rằng M là trọng tâm của ΔABC khi và chỉ khi:

$a^2.\overrightarrow{MH} + b^2.\overrightarrow{MI} + c^2.\overrightarrow{MK} = \vec{0}$ với a, b, c là độ dài 3 cạnh BC, AC, AB.

Bài 116. Cho ΔABC . Gọi O, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

Bài 117. Cho lục giác ABCDEF có $AB \perp EF$ và hai tam giác ACE và ΔBDF có cùng trọng tâm.

Chứng minh rằng: $AB^2 + EF^2 = CD^2$.

Dạng toán 4. Phân tích (tính) vectơ – Chứng minh 3 điểm thẳng hàng – Song song**① Tính 1 vectơ theo các vectơ không cùng phương** (biểu diễn vectơ).

★ Đặt vấn đề. Trong dạng toán này chúng ta giải quyết đòi hỏi " Biểu diễn vectơ thành tổ hợp vectơ " dựa vào định lý: "Cho trước 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$) và không cùng phương. Với mọi vectơ $\vec{c}$ bao giờ cũng tìm được 1 cặp số thực α, β duy nhất, sao cho: $\vec{c} = \alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b}$ ".

★ Phương pháp giải. Ta có thể chọn 1 trong 2 hướng giải sau:

- Hướng 1. Từ giả thiết xác định được tính chất hình học, rồi từ đó khai triển vectơ cần biểu diễn bằng phương pháp xen điểm, hiệu 2 vectơ cùng gốc, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...
- Hướng 2. Từ giả thiết lập được mối quan hệ vectơ giữa các đối tượng, rồi từ đó khai triển biểu thức này bằng phương pháp xen điểm, hiệu 2 vectơ cùng gốc, qui tắc hình bình hành, tính chất trung điểm, trọng tâm, ...

★ Lưu ý

- Lưu ý 1. Ta dùng xen điểm, hiệu vectơ cùng gốc, ... vào vectơ $\vec{c}$ dựa vào vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.
- Lưu ý 2. Nếu vectơ cần biến đổi (hay tính) có thể biến đổi bằng nhiều cách khác nhau. Lúc đó ta để ý đến việc cộng (trừ, lập tỉ số,...) về theo về.

② Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Để chứng minh 3 điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh: $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$ (1)

Để nhận được (1), ta lựa chọn một trong hai hướng sau:

- Sử dụng các qui tắc biến đổi vectơ.
- Xác định (tính) vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ thông qua một tổ hợp trung gian.

★ Lưu ý

- Dựa vào lời bình 3, ta có thể suy luận được phát biểu sau: " Cho ba điểm A, B, C. Điều kiện cần và đủ để A, B, C thẳng hàng là: $\overrightarrow{MC} = \alpha.\overrightarrow{MA} + (1 - \alpha).\overrightarrow{MB}$ với điểm M tùy ý và số thực α bất kỳ". Đặc biệt khi: $0 \leq \alpha \leq 1$ thì $C \in AB$. Kết quả trên còn được sử dụng để tìm điều kiện của tham số k (hoặc m) cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng.
- Nếu không dễ nhận thấy k trong biểu thức $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$, ta nên quy đồng biểu thức phân tích vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ để tìm ra số k.

③ Để chứng minh $AB \parallel DC$ ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{DC}$.

MỘT SỐ BÀI TẬP MẪU

Bài tập 13. Cho ΔABC , gọi G là trọng tâm của tam giác và B_1 là điểm đối xứng của B qua G . Gọi M là trung điểm của BC . Hãy biểu diễn các vectơ (tính)

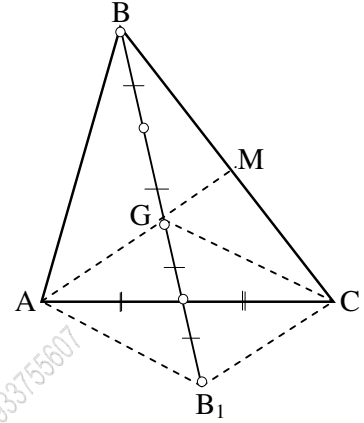
a/ $\overrightarrow{CB_1}$ và $\overrightarrow{AB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. b/ $\overrightarrow{MB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bài giải tham khảo

Theo giả thiết thì AB_1CG là hình bình hành.

a/ **Tính vectơ** $\overrightarrow{CB_1}$ và $\overrightarrow{AB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

- Ta có $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ (1)
 - Mà M là trung điểm của đoạn BC nên: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$
 - Thay vào (1) ta được: $\overrightarrow{CB_1} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
 - Ta lại có: $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
- $$\Rightarrow \overrightarrow{AB_1} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$



b/ **Tính vectơ** $\overrightarrow{MB_1}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

- Ta có: $\overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{MB_1} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$

Bài tập 14. Cho ΔABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm ΔABC .

a/ Tính $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. b/ Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{AJ}$.

Bài giải tham khảo

Từ giả thiết ta được:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2CI = 3BI \\ \overrightarrow{IC} \uparrow \downarrow \overrightarrow{IB} \end{array} \right\} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB} \quad (1) \quad \& \quad \left\{ \begin{array}{l} 5JB = 2JC \\ \overrightarrow{JB} \uparrow \uparrow \overrightarrow{JC} \end{array} \right\} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC} \quad (2)$$

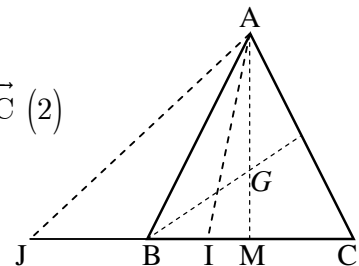
a/ **Tính các vectơ** $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

- Tính $\overrightarrow{AI}$ theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

$$\text{Từ (1) ta được: } 2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) = -3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI})$$

$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \quad (3)$$

- Tính $\overrightarrow{AJ}$ theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.



Từ (2) ta được: $\vec{5JB} = 2\vec{JC} \Leftrightarrow 5(\vec{AI} - \vec{AJ}) = 2(\vec{AC} - \vec{AJ})$

$$\Leftrightarrow 3\vec{AJ} = 5\vec{AB} - 2\vec{AC} \Rightarrow \boxed{\vec{AJ} = \frac{5}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC}} \quad (4)$$

b/ **Tính các véctơ** $\vec{AG}$ theo $\vec{AI}$ và $\vec{AJ}$

• Gọi M là trung điểm của BC, ta có: $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) \quad (5).$

• Mặt khác từ hệ tạo bởi (3), (4), ta nhận được:
$$\begin{cases} \vec{AB} = \frac{5}{8}\vec{AI} + \frac{3}{8}\vec{AJ} \\ \vec{AC} = \frac{25}{16}\vec{AI} - \frac{9}{16}\vec{AJ} \end{cases} \quad (6)$$

• Thay (6) vào (5) ta nhận được:
$$\boxed{\vec{AG} = \frac{35}{48}\vec{AI} - \frac{1}{16}\vec{AJ}}.$$

Bài tập 15. Cho hình bình hành ABCD, tâm O. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD

và P là điểm thỏa mãn hệ thức: $\vec{OP} = -\frac{1}{3}\vec{OA}.$

a/ Chứng minh hệ thức: $\vec{3AP} - 2\vec{AC} = \vec{0}.$

b/ Chứng minh 3 điểm B, P, N thẳng hàng.

c/ Chứng minh 3 đường AC, BD và MN đồng quy.

Bài giải tham khảo

a/ **Chứng minh:** $\vec{3AP} - 2\vec{AC} = \vec{0}.$

• Ta có: $\vec{OP} = -\frac{1}{3}\vec{OA} \Leftrightarrow 3\vec{OP} = -\vec{OA} \Leftrightarrow 3(\vec{OA} + \vec{AP}) = -\vec{OA} \Rightarrow 4\vec{OA} + 3\vec{AP} = \vec{0} \quad (1)$

• Do O là trung điểm của AC nên: $\vec{OA} = -\frac{1}{2}\vec{AC}.$

• Thay vào (1) $\Rightarrow 3\vec{AP} - 2\vec{AC} = \vec{0} \quad (\text{đpcm}).$

b/ **Chứng minh:** B, P, N thẳng hàng.

• Tính $\vec{BP}$ theo $\vec{BA}, \vec{BC}.$

$$\text{Ta có: } \vec{BP} = \vec{BA} + \vec{AP}, \text{ mà } \vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AC} \Rightarrow \vec{BP} = \vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{AC} \quad (2)$$

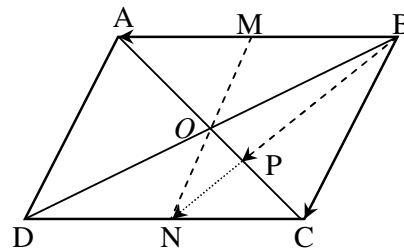
Do ABCD là hình bình hành nên $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC}$, thay vào (2), ta được:

$$\vec{BP} = \vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC} = \frac{1}{3}\vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{BC} \Rightarrow 3\vec{BP} = \vec{BA} + 2\vec{BC} \quad (3)$$

• Tính $\vec{BN}$ theo $\vec{BA}, \vec{BC}.$

$$\text{Ta có: } \vec{BN} = \frac{1}{2}(\vec{BD} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}\vec{BD} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{BC}) + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{BA}$$

$$\Rightarrow 2\vec{BN} = \vec{BA} + 2\vec{BC} \quad (4).$$



- So sánh: từ $(3), (4) \Rightarrow 3\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{BN} \Rightarrow \overrightarrow{PB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} \Rightarrow P, B, N$ thẳng hàng (đpcm).

c/ **Chứng minh:** AC, BD và MN đồng quy (nghĩa là $cm \ AC \cap BD = O \in MN \leftarrow M, O, N$ thẳng hàng)

- Do MO là đường trung bình $\Delta ABD \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$
 - ON là đường trung bình $\Delta ACB \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$
- $$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} \\ \overrightarrow{ON} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$$

Hay O là trung điểm của MN $\Rightarrow O$ cùng thuộc 3 đường AC, BD, MN hay AC, BD và MN đồng quy

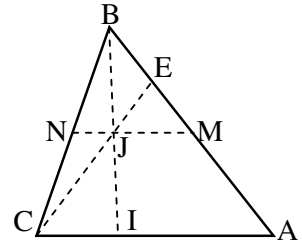
Bài tập 16. Cho ΔABC , trọng tâm G. Gọi M, N lần lượt theo thứ tự là trung điểm của hai đoạn thẳng AB và BC. Lấy 2 điểm I, J sao cho: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

a/ Chứng minh rằng: M, N, J thẳng hàng.
 b/ Chứng minh J là trung điểm của BI.
 c/ Gọi $E \in AB$ thỏa $\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB}$. Xác định k để C, E, J thẳng hàng.

Bài giải tham khảo

a/ **Chứng minh** M, N, J thẳng hàng.

- Ta có: $2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}) + 3(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}) = \vec{0} \quad (1)$
 - Do M là trung điểm của AB và J là điểm bất kỳ nên: $2\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}$
 N là trung điểm của BC và J là điểm bất kỳ nên: $2\overrightarrow{JN} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}$
- $$\left. \begin{array}{l} 2\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} \\ 2\overrightarrow{JN} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} \end{array} \right\} \quad (2)$$
- Thay (2) vào (1) ta được: $4\overrightarrow{JM} + 6\overrightarrow{JN} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{JM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{JN} \Rightarrow J, M, N$ thẳng hàng (đpcm)



b/ **Chứng minh** J là trung điểm của BI.

- Ta có: $2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IJ}) + 5(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IJ}) + 3(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IJ}) = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC}) + 5\overrightarrow{IB} - 10\overrightarrow{IJ} = \vec{0} \quad (2)$
- Mà $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, thay vào (2) ta được: $\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IJ} \Rightarrow J$ là trung điểm của BI (đpcm).

c/ **Tìm k thỏa** $\overrightarrow{AE} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ để C, E, J thẳng hàng. (nghĩa là tính $\overrightarrow{AE}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và so sánh $\Rightarrow k$).

- Do I là trung điểm của BI và C là điểm bất kỳ $\Rightarrow \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI}) \quad (4)$
- Mà theo giả thiết: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I$ chia CA ra làm 5 đoạn và I gần C $\Rightarrow \overrightarrow{CI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA} \quad (5)$

$$\text{Thay (5) vào (4) ta được: } \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CA}.$$

$$\Rightarrow CJ \text{ cắt } AB \text{ tại điểm } E \text{ thỏa } \frac{1}{2}\overrightarrow{EB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{EA} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{5}\overrightarrow{EA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{5}{7}.$$

- ❖ **Lời bình 5.** Trong lời giải ở câu c/ chúng ta đã sử dụng kết quả: "Nếu $\overrightarrow{MN} = \alpha \cdot \overrightarrow{MA} + \beta \cdot \overrightarrow{MB}$ thì đường thẳng MN sẽ cắt đường thẳng AB tại điểm I thỏa mãn $\alpha \cdot \overrightarrow{IA} + \beta \cdot \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ".

Bài tập 17. Cho hình bình hành ABCD, có tâm là O và E, F được xác định bởi các hệ thức

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{k} \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CF} = \frac{1}{k} \overrightarrow{CD}, (k \neq 0).$$

- a/ Chứng minh rằng $\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{OF}$ là 2 vectơ đối nhau. Chứng minh O, E, F thẳng hàng và O là trung điểm của EF.
b/ Chứng minh tứ giác AECF là hình bình hành.

Bài giải tham khảo

a/ **Chứng minh rằng** $\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ là 2 vectơ đối nhau

$$\bullet \text{ Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{AE} = \frac{1}{k} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \frac{1}{k} \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OE} = \frac{1}{k} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} = \frac{1}{k} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{CF} = \frac{1}{k} \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OF} = \frac{1}{k} \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OF} = \frac{1}{k} \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CO} = \frac{1}{k} \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{OC} \end{cases} \quad (1)$$

$$\bullet \text{ Do ABCD là hình bình hành nên } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} \\ \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC} \end{cases} \quad (2)$$

- Từ (1), (2) $\Rightarrow \overrightarrow{OE} = -\overrightarrow{OF} \Rightarrow \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ là 2 vectơ đối nhau.
 $\Rightarrow \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0} \Rightarrow O$ là trung điểm EF (đpcm).

b/ **Chứng minh** tứ giác AECF là hình bình hành

- Từ $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{k} \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CF} = \frac{1}{k} \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ta suy ra $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC} \Rightarrow$ AECF là hình bình hành.

Bài tập 18. Cho $\triangle ABC$ và hai điểm D, E thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{DB} = k \cdot \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{EB} = \frac{1}{k} \overrightarrow{EC}, (k \neq 1)$

a/ Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}; \overrightarrow{DE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$.

b/ Chứng minh $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ có cùng trọng tâm

c/ Điểm F, I thỏa $\overrightarrow{FA} = k \cdot \overrightarrow{FB}; \overrightarrow{IC} = k \cdot \overrightarrow{IA}$. Chứng minh: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$.

Bài giải tham khảo

a/ **Biểu diễn các vectơ** $\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}; \overrightarrow{DE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$.

- **Tính** $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{DB} = k \cdot \overrightarrow{DC} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{k}{k-1} \overrightarrow{AC} + \frac{1}{k-1} \overrightarrow{AB} \quad (1)$$

- Tính $\overrightarrow{AE}$ theo $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{EB} = \frac{1}{k} \overrightarrow{EC} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}) \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{1}{k-1} \overrightarrow{AC} + \frac{k}{k-1} \overrightarrow{AB} \quad (2)$$

- Tính $\overrightarrow{DE}$ theo $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} \quad (3)$$

$$\text{Thay (1), (2) vào (3) và rút gọn, ta được: } \overrightarrow{DE} = \frac{k+1}{k-1} (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}).$$

b/ Chứng minh $\triangle ABC$ và $\triangle ADE$ có cùng trọng tâm

- Từ $\overrightarrow{DB} = k \cdot \overrightarrow{DC}$ ta biến đổi được: $\overrightarrow{DB} = \frac{k}{1-k} \cdot \overrightarrow{BC}$
- Từ $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{k} \cdot \overrightarrow{EC}$ ta biến đổi được: $\overrightarrow{EC} = \frac{k}{1-k} \cdot \overrightarrow{CB}$
- Ta có: $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DG}$; $\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EC}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB}$
- Vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$
 $\Rightarrow G$ là trọng tâm của $\triangle ADE$ (Đpcm).

c/ Điểm F, I thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{FA} = k \cdot \overrightarrow{FB}$; $\overrightarrow{IC} = k \cdot \overrightarrow{IA}$. Chứng minh: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

- Ta có: $\overrightarrow{IC} = k \cdot \overrightarrow{IA} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{k-1} \cdot \overrightarrow{AC}$
 Mà $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} \Rightarrow \overrightarrow{BI} = -\frac{1}{k-1} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$
- Từ giả thiết: $\overrightarrow{FA} = k \cdot \overrightarrow{FB} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{k}{k-1} \cdot \overrightarrow{AB}$ và ta tính ra $\overrightarrow{CF} = \frac{k}{k-1} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
- Nên $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CF} = \frac{k}{k-1} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{-1}{k-1} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} + \frac{k}{k-1} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{-1}{k-1} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$ (Đpcm).

BÀI TẬP ÁP DỤNG**Biểu diễn véctor – Chứng minh 3 điểm thẳng hàng – Đồng qui – Đường qua điểm**

Bài 118. Cho ΔABC có M, D lần lượt là trung điểm của AB, BC và N là điểm trên cạnh AC sao cho $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{NC}$. Gọi K là trung điểm của MN. Hãy tính các véctor $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{KD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

$$\text{HD: } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{KD} = \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Bài 119. Cho ΔABC . Trên hai cạnh AB và AC lấy hai điểm D và E sao cho $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{EA}$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của DE và BC. Hãy tính véctor $\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

$$\text{HD: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{8} \cdot \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{MI} = \frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{3}{8} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Bài 120. Cho 4 điểm A, B, C, D thỏa: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$. Chứng minh: B, C, D thẳng hàng.

HD: Tính $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Bài 121. Cho ΔABC , lấy điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$; $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

a/ Tính $\overrightarrow{PM}$; $\overrightarrow{PN}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$.

b/ Chứng minh ba điểm: M, N, P thẳng hàng.

Bài 122. Cho ΔABC có hai đường trung tuyến BN, CP. Hãy biểu thị các véctor $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}$ theo các véctor $\overrightarrow{BN}$; $\overrightarrow{CP}$.

$$\text{HD: } \overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CP} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BN}; \quad \overrightarrow{CA} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BN} + \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{CP}; \quad \overrightarrow{AB} = \frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{BN} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CP}.$$

Bài 123. Cho ΔABC . Gọi I, J nằm trên cạnh BC và BC kéo dài sao cho $2CI = 3BI$, $5JB = 2JC$. Gọi G là trọng tâm của tam giác.

a/ Tính $\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$.

b/ Tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$.

$$\text{HD: } \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Bài 124. Cho ΔABC có G là trọng tâm tam giác và I là điểm đối xứng của B qua G. M là trung điểm của BC. Hãy tính $\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{CI}$; $\overrightarrow{MI}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$.

$$\text{HD: } \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{MI} = -\frac{5}{6} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Bài 125. Cho ΔABC có trọng tâm là G và các đường trung tuyến AM, BP. Gọi G' là điểm đối xứng với điểm G qua P.

a/ Hãy biểu diễn các véctor $\overrightarrow{AG'}$; $\overrightarrow{CG'}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$.

b/ Chứng minh hệ thức: $5\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{MG'}$.

HD: $\overrightarrow{AG'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CG'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Tính $\overrightarrow{MG'}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$.

Bài 126. Cho hình bình hành ABCD. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CD. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AN}$.

HD: $\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{CD} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$.

Bài 127. Cho tứ giác ABCD có M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AD, BC. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DC}$ và theo $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DB}$.

HD: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

Bài 128. Cho ΔABC . Gọi I là điểm đối xứng của trọng tâm G qua B.

a/ Chứng minh: $\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b/ Đặt $\overrightarrow{AG} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AI} = \vec{b}$. Tính $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ theo $\vec{a}$; $\vec{b}$.

HD: $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ và $\overrightarrow{AC} = \frac{5}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Bài 129. Cho ΔABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tính các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$.

Bài 130. Cho ΔABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $IB = 3IC$.

a/ Tính $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$.

b/ Gọi J và K lần lượt là các điểm thuộc cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC$ và $KB = 3KA$.

Tính $\overrightarrow{JK}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$.

c/ Tính $\overrightarrow{BC}$ theo $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{JK}$.

Bài 131. Cho hình bình hành ABCD có tâm là O. Hãy tính các vectơ sau theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

a/ $\overrightarrow{AI}$ với I là trung điểm của $\overrightarrow{BO}$.

b/ $\overrightarrow{BG}$ với G là trọng tâm ΔOCD .

Bài 132. Cho lục giác đều ABCDEF. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{EF}$ theo các vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$.

Bài 133. Cho ΔABC và điểm D thỏa hệ thức $3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

a/ Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ rồi nêu cách dựng D.

b/ Xác định điểm E thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

HD: $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$, E nằm trên đường thẳng BC và có $EM = BC$.

Bài 134. Cho ΔABC . Các điểm D, E, G được xác định bởi hệ thức: $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CE}$, $2\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GC}$.

a/ Chứng minh $BE \parallel CD$.

b/ Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh: A, G, M thẳng hàng.

HD: a/ Tính $\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{CD}$ theo $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ b/ $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA}$.

Bài 135. Cho hình bình hành ABCD và 2 điểm E, F thỏa các hệ thức: $2\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$, $3\overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.
a/ Chứng minh ba điểm A, E, F thẳng hàng.

b/ Xác định vị trí điểm M để hệ thức sau được thỏa mãn: $2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{AF} = \vec{0}$.

Bài 136. Cho $\triangle ABC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và P, Q là hai điểm được xác định bởi hệ thức:
 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CQ} = k.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$, trong đó k là một số thực.

a/ Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$.

b/ Xác định giá trị của k để A, P, Q thẳng hàng.

c/ Tính giá trị của k để đường thẳng PQ đi qua điểm M.

HD: $\overrightarrow{AP} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AQ} = k.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$, $k = -\frac{1}{2}$, $k = \frac{2}{5}$.

Bài 137. Cho $\triangle ABC$.

a/ Dựng các điểm E, F, G thỏa các hệ thức: $\overrightarrow{BE} = -3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF} = 3\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF}$.

b/ Chứng minh điểm G nằm trên đường thẳng BC.

HD: $\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{BC} \Rightarrow B, G, C$ thẳng hàng.

Bài 138. Cho $\triangle ABC$.

a/ Dựng các điểm E, F, M, N sao cho các đẳng thức sau được thỏa: $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{FN} = 4\overrightarrow{BC}.$$

b/ Các điểm A, M, N có thẳng hàng không? Tại sao?

HD: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} \rightarrow$ thẳng hàng.

Bài 139. Cho $\triangle ABC$ và hai điểm I, F được xác định bởi: $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FB} + 3\overrightarrow{FC} = \vec{0}$.
Chứng minh rằng ba điểm I, F, B thẳng hàng.

HD: $\overrightarrow{FB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{FI} \rightarrow I, F, B$ thẳng hàng.

Bài 140. Cho $\triangle ABC$.

a/ Dựng các điểm E và D sao cho: $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, $5\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.

b/ Chứng minh các điểm A, D, E thẳng hàng.

HD: $5\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} \rightarrow A, D, E$ thẳng hàng.

Bài 141. Cho $\triangle EDF$.

a/ Dựng điểm H sao cho $\overrightarrow{EH} = 4\overrightarrow{ED} - 3\overrightarrow{EF}$.

b/ Chứng minh điểm H nằm trên DF.

HD: $\overrightarrow{DH} = 3\overrightarrow{FD} \rightarrow D, H, F$ thẳng hàng $\rightarrow H$ nằm trên DF hay $H \in DF$.

Bài 142. Cho $\triangle ABC$ có I là trung điểm của trung tuyến AM và D là điểm thỏa hệ thức: $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

a/ Biểu diễn vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$.

b/ Chứng minh ba điểm B, I, D thẳng hàng.

HD: $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD} \rightarrow B, I, D$ thẳng hàng.

Bài 143. Cho hình bình hành ABCD.

a/ Dựng các điểm E, F sao cho: $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.

b/ Dựng điểm G sao cho tứ giác AEGF là hình bình hành.

c/ Chứng tỏ 3 điểm A, C, G thẳng hàng.

HD: $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AC} \rightarrow A, C, G$ thẳng hàng.

Bài 144. Cho hình bình hành ABCD. Gọi I là trung điểm của AB và I là điểm thỏa hệ thức: $3\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID}$. Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

HD: $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AE} \rightarrow A, C, E$ thẳng hàng.

Bài 145. Cho ΔABC .

a/ Dựng các điểm K, L sao cho: $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$, $2\overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \vec{0}$.

b/ Chứng minh ba điểm A, K, L thẳng hàng.

HD: Biểu diễn $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AL}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ rồi so sánh.

Bài 146. Cho ΔABC . Gọi M là trung điểm của cạnh AB, N và P là hai điểm thỏa mãn hệ thức:

$\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

HD: Tính $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ rồi so sánh.

Bài 147. Cho ΔABC . Hai điểm M, N được xác định bởi: $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$. Chứng minh MN đi qua trọng tâm ΔABC .

HD: Tính $\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{GN} \rightarrow \overrightarrow{GM} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{GN} \rightarrow G, M, N$ thẳng hàng $\rightarrow$ đpcm.

Bài 148. Cho ΔABC .

a/ Dựng các điểm D, E thỏa các hệ thức: $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

b/ Chứng minh ba điểm A, C, E thẳng hàng.

HD: $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \rightarrow A, C, E$ thẳng hàng.

Bài 149. Cho hình bình hành ABCD. Gọi I là trung điểm của cạnh BC và E là điểm xác định bởi

$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm D, E, I thẳng hàng.

HD: Tính $\overrightarrow{DE}$ và $\overrightarrow{DI}$ theo $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$.

Bài 150. Cho ΔABC có trung tuyến AD và M là trung điểm AD. Điểm N được lấy trên AC sao cho

$3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

HD: Tính $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{BN}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ rồi so sánh.

Bài 151. Cho ΔABC có M là trung điểm BC và O là trung điểm của AM. Trên BC lấy điểm I sao cho

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh ba điểm I, J, O thẳng hàng.

HD: Tính $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IO}$ theo $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ rồi so sánh.

Bài 152. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N là hai điểm di động trên AB, CD sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC}$ và I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC.

a/ Tính $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$.

b/ Chứng minh trung điểm P của MN nằm trên đường thẳng IJ.

Bài 153. Cho $\triangle ABC$. Gọi M, N, P là các điểm thỏa: $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BN}$, $4\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AC}$.

a/ Tính $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MP}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$.

b/ Chứng minh rằng M, I, P thẳng hàng với điểm I thỏa: $16\overrightarrow{AI} = 9\overrightarrow{AN}$.

Bài 154. Cho $\triangle ABC$ với I, J, K được xác định bởi: $\overrightarrow{IB} = m\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{JC} = n\overrightarrow{JA}$, $\overrightarrow{KA} = p\overrightarrow{KB}$.

a/ Tính $\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{IK}$ theo m, n, p, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b/ Tìm mối liên hệ giữa m, n, p để I, J, K thẳng hàng.

Bài 155. Cho tứ giác ABCD với I, J là trung điểm của AB và CD. Gọi điểm M, N thỏa mãn các hệ thức: $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} + k\overrightarrow{ND} = \vec{0}$ ($k \neq -1$) và O là trung điểm của MN.

a/ Chứng minh O, I, J thẳng hàng

b/ Chứng minh O cũng là trung điểm của RS với R và S được xác định bởi các hệ thức:

$$\overrightarrow{RA} = -\overrightarrow{RD}, \overrightarrow{SB} = -k\overrightarrow{SC}.$$

Bài 156. Cho $\triangle ABC$ có J chia $\overrightarrow{BC}$ theo tỉ số bằng -3, N chia $\overrightarrow{AC}$ theo tỉ số bằng -1, K chia $\overrightarrow{BA}$ theo tỉ số bằng 3.

a/ Chứng minh rằng: K, N, J thẳng hàng.

b/ Tính tỉ số $\frac{IB}{IN}$, $\frac{AJ}{AI}$ với $I = AJ \cap BN$.

Bài 157. Cho hình bình hành ABCD có tâm O. M, N trên cạnh AB, CD thỏa $3AM = AB$, $2CN = CD$.

a/ Tính $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b/ Gọi G là trọng tâm $\triangle BMN$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AG} = -\frac{11}{8}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

c/ Gọi I thỏa mãn đẳng thức $11\overrightarrow{BI} = 6\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng A, I, G thẳng hàng.

d/ Tìm điểm M thỏa: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{AB}$.

Bài 158. Cho $\triangle ABC$. Lấy điểm I thỏa $3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ và M là giao điểm của đường thẳng IJ và BC. Đặt $\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{MC}$.

a/ Chứng minh rằng: $12\overrightarrow{IJ} = 9\overrightarrow{BC} - 6\overrightarrow{BA}$.

b/ Tính $\overrightarrow{IM}$ theo $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$.

c/ Tìm giá trị m?

Bài 159. Cho $\triangle ABC$. Gọi P, Q, R lần lượt là các điểm thỏa các đẳng thức: $3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AQ} = 2\overrightarrow{QC}$, $k\overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RB}$ với ($k \neq 1$).

a/ Chứng minh rằng: $21\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{BC} + 7\overrightarrow{BA}$.

b/ Chứng minh rằng: $\overrightarrow{RP} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$.

c/ Tìm k sao cho P, Q, R thẳng hàng.

Bài 160. Cho hình bình hành ABCD.

a/ Gọi I, F, K lần lượt là các điểm thỏa các hệ thức $\overrightarrow{AI} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = \beta \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AK} = \gamma \cdot \overrightarrow{AD}$.

Chứng minh điều kiện cần và đủ để I, F, K thẳng hàng là $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ ($\alpha, \beta, \gamma \neq 0$).

b/ Gọi M, N là hai điểm lần lượt trên đoạn AB và CD sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$, $\frac{CN}{CD} = \frac{1}{2}$. Gọi G là

trọng tâm của ΔBMN . Tính $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Gọi H là điểm xác định bởi $\overrightarrow{BH} = k \cdot \overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{AH}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ và k. Tìm k để đường thẳng AH qua điểm G.

Bài 161. Cho tứ giác ABCD. Lấy các điểm M, N theo thứ tự thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DN} = k \cdot \overrightarrow{DC}$.

a/ Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MN} = (1 - k) \cdot \overrightarrow{AD} + k \cdot \overrightarrow{BC}$.

b/ Gọi E, F, I lần lượt theo thứ tự thuộc các AD, BC và MN sao cho $\overrightarrow{AE} = l \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF} = l \cdot \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{MI} = l \cdot \overrightarrow{MN}$. Chứng minh rằng: E, F, I thẳng hàng.

Bài 162. Cho ΔABC . Gọi O, G, H lần lượt theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm của ΔABC . Chứng minh rằng: O, H, G thẳng hàng.

Chứng minh song song

Bài 163. Cho hình thang ABCD, đáy AB. Gọi M, N theo thứ tự là các trung điểm của AD, BC.

a/ Chứng minh: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

b/ Chứng minh: $MN \parallel DC$.

HD: b/ Vì $AB \parallel DC \Rightarrow \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{DC} \dots \rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{k}{2} \overrightarrow{DC}$.

Bài 164. Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và I là điểm thỏa mãn hệ thức $4\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh: $MP \parallel BG$.

HD: Hãy chứng minh $\overrightarrow{MI} = \frac{3}{4} \overrightarrow{MG}$.

Bài 165. Cho tứ giác ABCD. Gọi E và F lần lượt là trọng tâm của ΔABD và BCD. Chứng minh: $EF \parallel AC$.

HD: Gọi I là trung điểm BD, hãy chứng minh $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CA}$.

Bài 166. Cho ΔABC có M là trung điểm của cạnh BC. Các điểm D, E thỏa mãn các đẳng thức $\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$. Chứng minh: $DE \parallel AM$.

HD: Hãy chứng minh $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{6} \overrightarrow{DE}$.

Bài 167. Cho ΔABC . Dựng các điểm M, N sao cho: $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$.

Chứng minh: $MN \parallel BC$.

HD: Hãy chứng minh $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$.

Bài 168. Cho ΔABC . Dựng các điểm I, J sao cho: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$. Chứng minh: $IC \parallel BJ$.

HD: Hãy chứng minh $\overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$.

Bài 169. Cho hình bình hành ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Dựng các điểm E, F thỏa mãn: $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DI}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BJ}$. Chứng minh: $EF \parallel CE$.

HD: Hãy chứng minh $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \\ \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{CE}$.

Bài 170. Cho tứ giác ABCD. Qua đỉnh A kẻ đường thẳng song song với cạnh BC, đường này cắt đường chéo BD tại điểm E. Đường thẳng qua B song song với cạnh AD, cắt đường chéo AC tại điểm F. Chứng minh rằng: $EF \parallel CD$.

HD: Hai vectơ $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA} \rightarrow \overrightarrow{OC} = m.\overrightarrow{OA}$.

Tương tự $\overrightarrow{OD} = n.\overrightarrow{OB} \rightarrow \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) = m.\overrightarrow{OA} - n.\overrightarrow{OB}$.

Vì $AE \parallel BC$ nên $\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OE}} = \frac{\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{OA}} = m \Rightarrow \overrightarrow{OE} = \frac{1}{m}\overrightarrow{OB}$, tương tự: $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{n}\overrightarrow{OA}$.

Ta có: $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF} = \frac{1}{m}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{n}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{m+n}(n\overrightarrow{OB} - m\overrightarrow{OA})$.

$\Rightarrow \overrightarrow{FE} = -\frac{1}{m.n}(m\overrightarrow{OA} - n\overrightarrow{OB}) \Rightarrow \overrightarrow{FE} = -\frac{1}{m.n}\overrightarrow{DC} \Rightarrow FE \parallel DC$.

Bài 171. Cho ΔABC . Các điểm D, E, G được xác định bởi hệ thức: $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{CE}$, $2\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GC}$.

a/ Chứng minh $BE \parallel CD$.

b/ Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh: A, G, M thẳng hàng.

Bài 172. Cho ΔABC , M là trung điểm của cạnh AB và D, E, F theo thứ tự được xác định bởi các hệ thức: $3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$; $\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} - 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$; $5\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

a/ Chứng minh rằng: $EM \parallel BC$.

b/ Chứng minh rằng: ba điểm A, D, E thẳng hàng.

c/ Chứng minh rằng: ba đường thẳng AD, BC, MF đồng qui tại một điểm.

Dạng toán 5. Tìm môđun (độ dài) của véctơ – Quỹ tích điểm và Điểm cố định



① **Tìm môđun (độ dài) của véctơ:** $|\vec{u} \pm \vec{v} \pm \vec{w} \pm \alpha \dots|$

— **Bước 1.** Ta biến đổi (rút gọn) biểu thức $\vec{u} \pm \vec{v} \pm \vec{w} \pm \alpha \dots = \vec{\beta}$ bằng các phương pháp đã học sao cho véctơ $\vec{\beta}$ đơn giản nhất.

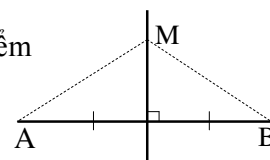
— **Bước 2.** Tính độ dài (môđun) của $|\vec{\beta}|$ dựa vào tính chất của hình đã cho, ...

② **Quỹ tích điểm:**

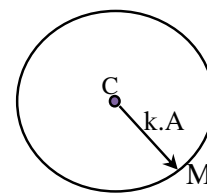
★ **Đặt bài toán:** Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn điều kiện Ω cho trước ?

★ **Phương pháp giải:** Sử dụng các phương pháp biến đổi để đưa về các trường hợp sau

— **Trường hợp 1:** Nếu $|\vec{MA}| = |\vec{MB}|$ với A, B cho trước (cố định) thì điểm M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB.

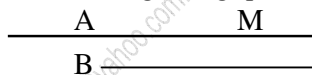


— **Trường hợp 2:** Nếu $|\vec{MC}| = k \cdot |\vec{AB}|$ với A, B, C cho trước (cố định) thì điểm M thuộc đường tròn tâm C, bán kính k.AB.

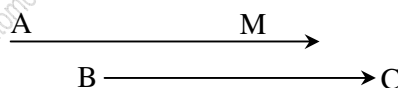


— **Trường hợp 3:** Nếu $\vec{MA} = k \cdot \vec{BC}$ với A, B, C cho trước (cố định) thì:

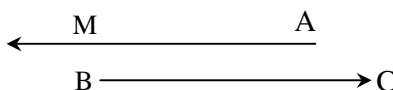
+ Với $k \in \mathbb{R}$ thì điểm M thuộc đường thẳng qua A song song với BC.



+ Với $k \in \mathbb{R}^+$ thì điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song BC theo hướng BC.



+ Nếu $k \in \mathbb{R}^-$ thì điểm M thuộc nửa đường thẳng qua A song song BC ngược hướng BC.



Tìm môđun (độ dài)

Bài 173. Cho ΔABC vuông tại A có $AB = AC = 2(\text{cm})$. Tính $|\vec{AB} + \vec{AC}|$?

Bài 174. Cho ΔABC đều cạnh a, trọng tâm G. Hãy tính

a/ $|\vec{AB} - \vec{AC}|$.

b/ $|\vec{AB} + \vec{AC}|$.

c/ $|\vec{GB} + \vec{GC}|$.

Bài 175. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 5(\text{cm})$, $BC = 10(\text{cm})$. Tính $|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}|$?

Bài 176. Cho ΔABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$, $BC = 2(\text{cm})$. Tìm $|\vec{AB}|, |\vec{AC}|, |\vec{AB} + \vec{AC}|, |\vec{AC} - \vec{AB}|$?

Bài 177. Cho ΔABC vuông tại B có $\widehat{A} = 30^\circ$, $\overrightarrow{AB} = a$. Gọi I là trung điểm của AC. Hãy tính $|\overrightarrow{AC}|$, $|\overrightarrow{AI}|$, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$, $|\overrightarrow{BC}|$?

Bài 178. Cho hình thang vuông tại A và D có $AB = AD = a$, $\widehat{C} = 45^\circ$. Tính $|\overrightarrow{CD}|$, $|\overrightarrow{BD}|$?

Bài 179. Cho ΔABC vuông tại A có $BC = 15(\text{cm})$, $AC = 5(\text{cm})$. Tính $|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}|$, $|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}|$?

Bài 180. Cho hình thang cân ABCD có đáy nhỏ AD và đường cao cùng bằng $2(\text{cm})$ và $\widehat{B} = 45^\circ$. Tính $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}|$, $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}|$, $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB}|$?

Bài 181. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Chứng minh:

a/ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$.

b/ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = AC$.

c/ Nếu $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CD}|$ thì ABCD là hình chữ nhật.

Bài 182. Cho hình vuông ABCD cạnh a, lấy điểm M tùy ý. Chứng minh các vectơ sau đây không đổi và tính độ dài của chúng ?

a/ $\vec{u} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$.

b/ $\vec{v} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$.

c/ $\vec{x} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$.

d/ $\vec{y} = 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$.

Quĩ tích điểm

Bài 183. Cho 2 điểm cố định A, B. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a/ $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$.

b/ $|\overrightarrow{2MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{2MB}|$.

HD: a/ Đường tròn đường kính AB

b/ Trung trực của AB.

Bài 184. Cho ΔABC . Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a/ $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = \frac{3}{2}|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$.

b/ $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$.

c/ $|\overrightarrow{2MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{4MB} - \overrightarrow{MC}|$

d/ $|\overrightarrow{4MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

HD: a/ Trung trực của IG (I là trung điểm của BC, G là trọng tâm ΔABC).

b/ Dựng hình bình hành ABCD. Tập hợp là đường tròn tâm D, bán kính BA.

Bài 185. Cho ΔABC .

a/ Xác định điểm I sao cho: $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b/ Chứng minh rằng đường thẳng nối 2 điểm M, N xác định bởi hệ thức:

$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ luôn đi qua một điểm cố định.

c/ Tìm tập hợp các điểm H sao cho: $|\overrightarrow{3HA} - 2\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}| = |\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB}|$.

d/ Tìm tập hợp các điểm K sao cho: $2|\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}| = 3|\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC}|$.

Bài 186. Cho ΔABC .

a/ Xác định điểm I sao cho: $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b/ Xác định điểm D sao cho: $3\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

c/ Chứng minh 3 điểm A, I, D thẳng hàng.

d/ Tìm tập hợp các điểm M sao cho: $\left| \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \right| = \left| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right|$.

Bài 187. Đại học Mở Địa Chất năm 1999 – 2000

Cho ΔABC , M là điểm tùy ý trong mặt phẳng.

a/ Chứng minh: $\vec{v} = 3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ không đổi.

b/ Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn: $\left| 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \right| = \left| \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right|$.

HD: a/ Chứng minh: $\vec{v} = 3\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$. b/ M thuộc đường tròn tâm I, bán kính $\frac{1}{3}BC$.

Bài 188. Cho ΔABC , tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn:

a/ $k\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$, ($k \in \mathbb{R}$). b/ $\overrightarrow{MA} + (1-k)\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

HD: a/ Đường thẳng qua B, // AC. b/ Đường trung bình // AC.

Bài 189. Cho ΔABC . Lấy hai điểm M, N di động trên các tia AB và AC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CA}$. Dụng hình bình MNCP. Tìm tập hợp những điểm P.

Bài 190. Cho ΔABC , các điểm M, N, P di động trên các tia BC, CA và AB sao cho $\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB}$. Dụng hình bình hành MNPQ. Tìm tập hợp điểm Q.

Bài 191. Cho ΔABC . Hai điểm M và N thay đổi sao cho $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

a/ Dụng điểm I thỏa mãn điều kiện: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

b/ Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 192. Cho ΔABC và đường thẳng d cố định. Tìm điểm M trên d sao cho

a/ $\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

b/ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

c/ $\vec{x} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

d/ $\vec{y} = 5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

Bài 193. Cho hình bình hành ABCD có tâm O, hai điểm M, N di động sao cho

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 194. Cho hình bình hành ABCD có các điểm M, I, N lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD sao cho

$AM = \frac{1}{3}AB$, $BI = k.BC$, $CN = \frac{1}{2}CD$. Gọi G là trọng tâm của ΔBMN . Định k để AI qua G.

Bài 195. Cho ΔABC có I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Một đường thẳng d luôn thay đổi đi qua I lần lượt cắt CA, CB tại A', B'. Chứng minh giao điểm của AB' và A'B nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 196. Cho ΔABC đều, tâm O, M là điểm di động trên đường tròn cố định (O, b) (nằm trong Δ). Gọi A', B', C' tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ M xuống các cạnh BC, CA, AB của tam giác và G' là trọng tâm của $\Delta A'B'C'$.

a/ Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

b/ Chứng minh rằng G' di động trên một đường tròn cố định.

B – HỆ TRỤC TỌA ĐỘ



① Trục tọa độ

- Trục tọa độ (trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm gốc O và một vector đơn vị $\vec{e}$. Kí hiệu $(O; \vec{e})$.
- Tọa độ của vector trên trục: $\vec{u} = (a) \Leftrightarrow \vec{u} = a \cdot \vec{e}$.
- Tọa độ của điểm trên trục: $M(k) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = k \cdot \vec{e}$.
- Độ dài đại số của vector trên trục: $\overline{AB} = a \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = a \cdot \vec{e}$.

🔍 Lưu ý

- Nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} = AB$.
- Nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{e}$ thì $\overline{AB} = -AB$.
- Nếu $A(a), B(b)$ thì $\overline{AB} = b - a$.
- Hệ thức Saclo: Với A, B, C tùy ý trên trục, ta có: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

② Hệ trục tọa độ

- Hệ gồm hai trục tọa độ Ox, Oy vuông góc với nhau. Vector đơn vị trên Ox, Oy lần lượt là $\vec{i}, \vec{j}$. O là gốc tọa độ, Ox là trục hoành, Oy là trục tung.
- Tọa độ của vector đối với hệ trục tọa độ: $\vec{u} = (x; y) \Leftrightarrow \vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.
- Tọa độ của điểm đối với hệ trục tọa độ: $M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$.
- Tính chất: $\vec{a} = (x; y), \vec{b} = (x'; y'), k \in \mathbb{R}, A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$.
 - $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ • $\vec{a} \pm \vec{b} = (x \pm x'; y \pm y')$.
 - $k\vec{a} = (kx; ky)$ • $\vec{b} \uparrow \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$.
 - $\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
 - Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB: $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}; y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$.
 - Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC: $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.
 - Tọa độ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k \neq -1$: $x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k}; y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k}$.
- (M chia đoạn AB theo tỉ số $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$).
- Để ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \frac{x_B - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y_B - y_A}{y_C - y_A}$

Dạng toán 1. Tọa độ vectơ – Biểu diễn vectơ



① Tọa độ vectơ

Ta cần nhớ các kết quả sau

— Với hai điểm $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) \\ AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \end{cases}$$

— Với hai vectơ $\begin{cases} \vec{a} = (x_1, y_1) \\ \vec{b} = (x_2, y_2) \end{cases}$, ta có:
$$\begin{cases} \vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} \\ \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \\ \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2) \end{cases}$$

② Biểu diễn vectơ

Bài toán: Hãy biểu diễn vectơ $\vec{c} = (c_1, c_2)$ theo các vectơ $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$.

Bước 1. Giả sử $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ (1).

Bước 2. Ta có: $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \alpha(a_1, a_2) + \beta(b_1, b_2) = (\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2)$.

Vậy (1) xảy ra khi và chỉ khi:
$$\begin{cases} c_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 \\ c_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 \end{cases} \quad (*)$$

Giải hệ (*), ta tìm được (α, β) . Thay vào (1), ta được kết quả bài toán.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 197. Viết tọa độ của các vectơ sau

a/ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i}$, $\vec{d} = -2\vec{j}$.

b/ $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$, $\vec{d} = -4\vec{j}$, $\vec{e} = 3\vec{i}$.

c/ $\vec{a} = 5\vec{i}$, $\vec{b} = -3\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{d} = 0$, $3\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$.

Bài 198. Viết dưới dạng $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ khi biết tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là

a/ $\vec{u} = (2; -3)$, $\vec{u} = (-1; 4)$, $\vec{u} = (2; 0)$, $\vec{u} = (0; -1)$.

b/ $\vec{u} = (1; 3)$, $\vec{u} = (4; -1)$, $\vec{u} = (1; 0)$, $\vec{u} = (0; 0)$.

c/ $\vec{u} = (1, -1)$, $\vec{u} = (5, 0)$, $\vec{u} = (0, -2)$, $\vec{u} = (7, 7)$.

Bài 199. Cho $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = (0; 3)$. Tìm tọa độ của các vectơ sau

$$a/ \vec{x} = \vec{a} + \vec{b}; \vec{y} = \vec{a} - \vec{b}; \vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b}. \quad b/ \vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b}; \vec{v} = 2 + \vec{b}; \vec{w} = 4\vec{a} - 0,5\vec{b}.$$

Bài 200. Cho $\vec{a} = (2; 0)$, $\vec{b} = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $\vec{c} = (4; -6)$.

- a/ Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$.
 b/ Tìm 2 số m, n sao cho: $m\vec{a} + \vec{b} - n\vec{c} = \vec{0}$.

Bài 201. Cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-1; 4)$, $\vec{c} = (0; 4)$. Tìm tọa độ và độ dài của các vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ biết:

- a/ $\vec{u} = 2\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c} + 5\vec{j}$.
 b/ $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} + 2\vec{i}$.

Bài 202. Biểu diễn vectơ $\vec{c}$ theo các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ biết

- a/ $\vec{a} = (2; -1)$, $\vec{b} = (-3; 4)$ và $\vec{c} = (-4; 7)$.
 b/ $\vec{a} = (1; 1)$, $\vec{b} = (2; -3)$ và $\vec{c} = (-1; 3)$.
 c/ $\vec{a} = (-4; 3)$, $\vec{b} = (-2; -1)$ và $\vec{c} = (0; 5)$.
 d/ $\vec{a} = (4; 2)$, $\vec{b} = (5; 3)$ và $\vec{c} = (2; 0)$.
 e/ $\vec{a} = (2; -2)$, $\vec{b} = (1; 4)$ và $\vec{c} = (5; 0)$.
 f/ $\vec{a} = (1; 3)$, $\vec{b} = (1; 1)$ và $\vec{c} = (4; 3)$.

Bài 203. Cho $\vec{u} = (2; -5)$, $\vec{v} = (3; 4)$, $\vec{w} = (-5; 7)$.

- a/ Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a} = \vec{u} + 3\vec{v} - 5\vec{w}$.
 b/ Tìm tọa độ của vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} + \vec{x} = \vec{0}$.
 c/ Phân tích vectơ $\vec{b} = (7; 2)$ theo hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.
 d/ Tìm m biết rằng $\vec{c} = (6; m)$ cùng phương với $\vec{w}$.

Bài 204. Cho $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; 4)$, $\vec{c} = (-7; 2)$.

- a/ Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$.
 b/ Tìm tọa độ của vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.
 c/ Tìm các số k, l để $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$.

Bài 205. Cho bốn điểm A(1; 1), B(2; -1), C(4; 3) và D(16; 3). Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Bài 206. Cho bốn điểm A(0; 1), B(2; 0), C(-1; 2), D(6; -4). Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Bài 207. Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (3; -4)$, $\vec{c} = (-7; 2)$.

- a/ Tìm tọa độ vectơ $2\vec{a} + 4\vec{b} - 5\vec{c}$.
 b/ Tìm tọa độ của vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + 2\vec{a} = 5\vec{b} - \vec{c}$.
 c/ Hãy phân tích vectơ $\vec{c}$ theo vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bài 208. Cho hai điểm A(-1; 1), B(1; 3).

- a/ Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{BM} = (3; 0)$.
 b/ Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} = (1; 1)$.

Dạng 2. Xác định điểm thỏa mãn điều kiện cho trước



Bài toán: Xác định điểm M thỏa mãn một đẳng thức vectơ hay độ dài

Bước 1. Gọi $M(x, y)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bước 2. Tọa độ hóa các vectơ có trong đẳng thức hoặc sử dụng công thức về khoảng cách giữa hai điểm, để chuyển biểu thức về biểu thức đại số.

Bước 3. Giải phương trình hoặc hệ trên, ta nhận được tọa độ điểm M.

Bài 209. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(x, y)$.

- a/ Tìm tọa độ điểm A đối xứng với M qua trục Ox.
- b/ Tìm tọa độ điểm B đối xứng với M qua trục Oy.
- c/ Tìm tọa độ điểm C đối xứng với M qua O.

Bài 210. Cho hai điểm $A(3; -5), B(1; 0)$.

- a/ Tìm tọa độ điểm C sao cho: $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$.
- b/ Tìm điểm D đối xứng của A qua C.
- c/ Tìm điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -3$.

Bài 211. Cho hình bình hành ABCD có $A(-1; -2), B(3; 2), C(4; -1)$. Tìm tọa độ đỉnh D.

Bài 212. Cho hai điểm $A(1; -1), B(4; 3)$.

- a/ Tìm tọa độ và môđun của vectơ $\overrightarrow{AB}$.
- b/ Tìm tọa độ trung điểm I của AB.
- c/ Tìm điểm M chia đoạn thẳng theo tỉ số $k = 2$.
- d/ Tìm điểm C sao cho $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$.

Bài 213. Cho ba điểm $A(1; -2), B(0; 4), C(3; 2)$.

- a/ Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$.
- b/ Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB.
- c/ Tìm tọa độ điểm M sao cho: $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
- d/ Tìm tọa độ điểm N sao cho: $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Bài 214. Cho ba điểm $A(1; -2), B(2; 3), C(-1; -2)$.

- a/ Tìm tọa độ điểm D đối xứng của A qua C.
- b/ Tìm tọa độ điểm E là đỉnh thứ tư của hình bình hành có 3 đỉnh là A, B, C.
- c/ Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 215. Cho ba điểm $A(-2;1), B(3;-2), C(0;3)$.

- a/ Tìm tọa độ của $\vec{u} = \vec{AB} + 3\vec{BC} - 2\vec{CA}$.
 b/ Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác và tìm trọng tâm G của $\triangle ABC$.
 c/ Tìm tọa độ điểm D sao cho $\vec{CD} = 2\vec{AB} + 3\vec{BC}$.
 d/ Tìm điểm E sao cho ABCE là hình bình hành. Tìm tâm của hình bình hành đó.

Bài 216. Cho ba điểm $A(2;3), B(-1;1), C(6;0)$.

- a/ Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 4\vec{AB} + 3\vec{AC} - 2\vec{BC}$.
 b/ Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng và tìm tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$.
 c/ Tìm tọa độ điểm D để tứ giác ABCD là hình bình hành. Tìm tâm của hình bình hành đó.

Bài 217. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(3;0), B(-3;0)$. Xác định tọa độ điểm C và D sao cho

- a/ $\vec{CA} + 3\vec{CB} = \vec{0}$.
 b/ $\vec{DA} - 3\vec{DB} = \vec{0}$.

Bài 218. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(-3;6), B(1;-2), C(6;3)$.

- a/ Tìm tọa độ điểm D để ABCD là hình bình hành và tìm tọa độ trọng tâm G của $\triangle ABC$.
 b/ Tìm tọa độ điểm E thỏa biểu thức vectơ $\vec{CE} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$.
 c/ Tìm tọa độ điểm F thỏa biểu thức vectơ $\vec{AF} + 2\vec{BF} - 4\vec{CF} = \vec{0}$.
 d/ Tìm điểm K thỏa biểu thức vectơ $4\vec{KA} - 3\vec{BK} + \vec{CK} = \vec{0}$.
 e/ Tìm vectơ trung tuyến $\vec{AA_4}$ (làm theo ba cách).
 f/ Tìm tâm I và bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
 g/ Tìm các điểm A_1, A_2, A_3 sao cho $\triangle ABC$ nhận các điểm đó làm trung điểm các cạnh.
 h/ Tìm các điểm M, N, P sao cho $\triangle MNP$ nhận các điểm A, B, C làm trung điểm các cạnh.
 i/ Tìm hai điểm chia đoạn AC làm ba phần bằng nhau.
 j/ Tìm các tỉ số mà điểm A chia đoạn BC, điểm B chia đoạn AC, điểm C chia đoạn AB
 k/ Tìm diện tích của $\triangle ABC$ và diện tích đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Bài 219. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(0;2), B(6;4), C(1;-1)$. Câu hỏi tương tự bài 218.

Bài 220. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(-1;3), B(2;4), C(0;1)$. Câu hỏi tương tự bài 218.

Bài 221. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(2;2), B(-5;1), C(3;5)$. Câu hỏi tương tự bài 218.

Bài 222. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(1;6), B(4;-4), C(4;0)$. Câu hỏi tương tự bài 218.

Bài 223. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(-1;1), B(1;3), C(-2;0)$. Câu hỏi tương tự bài 218.

Bài 224. Tìm điểm M sao cho $x_M^2 + y_M^2$ nhỏ nhất khi biết tọa độ M có dạng

- a/ $M(1 + 2t; 1 + 3t)$.
 b/ $M(1 - 2t; 1 + t)$.

Bài 225. Cho hai điểm $A(4;4), B(0;1)$. Tìm điểm C trên Oy sao cho trung trực của đoạn AC đi qua B.

Bài 226. Trong mặt phẳng Oxy cho $\triangle ABC$ có $A(-1;1), B(5;3)$, đỉnh C nằm trên trục tung Oy và trọng tâm G của $\triangle$ thuộc trục hoành Ox. Tìm tọa độ điểm C và tính diện tích $\triangle ABC$.

Bài 227. Tìm hai điểm M, N $\in (P): y^2 = x$. Biết rằng $\vec{IM} = 4\vec{IN}$ và $I(0;2)$.

Dạng 3. Vectơ cùng phương và Ứng dụng



Cần nhớ các kết quả sau

- Với hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2)$. Để hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.
- Với ba điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$. Để A, B, C thẳng hàng thì
$$\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \frac{x_C - x_A}{y_C - y_A}.$$
- Với ΔABC bất kỳ thì $CA + CB \geq AB$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow A, B, C$ thẳng hàng.
- $|\vec{u}| - |\vec{v}| \leq |\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \Rightarrow$ Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng phương và hướng.
- $|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}|$. Dấu " $=$ " xảy ra $\Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ cùng phương và hướng.

Lưu ý

- ✧ $\vec{a} = (x, y) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ và $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- ✧ Nhớ vững công thức tính diện tích Δ , các bất đẳng thức cơ bản (Cauchy, B.C.S).
- ✧ Để chứng minh ba điểm là ba đỉnh Δ , ta chứng minh ba điểm đó không thẳng hàng.

Bài 228. Cho $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}, \vec{b} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm giá trị của k để hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương.

Bài 229. Trong mặt phẳng Oxy cho $\vec{a} = (x^2 + 1; 3x - 2), \vec{b} = (2; 1)$ và điểm $A(0; 1)$.

a/ Tìm x để vectơ $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{b}$.

b/ Tìm tọa độ điểm M để vectơ $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{b}$ và có độ dài bằng $\sqrt{5}$.

Bài 230. Cho ba điểm $A(-1; 1), B(1; -2), C(-2; 0)$. Chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, từ đó suy ra ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 231. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm sau và chứng minh chúng thẳng hàng

a/ $A(-1; 4), B(-1; 6), C(-1; -2)$.

b/ $A(6; 2), B(-2; 2), C(0; 2)$.

c/ $A(1; 3), B(2; 5), C(4; 9)$.

d/ $A(0; 4), B(3; 2), C(-9; 10)$.

Bài 232. Cho ba điểm $A(x; 3), B(-4; 2), C(3; 5)$. Tìm x để A, B, C thẳng hàng.

Bài 233. Cho ba điểm $A(4; y), B(2; -3), C(6; 3)$. Tìm y để A, B, C thẳng hàng.

Bài 234. Cho ba điểm $A(1; 1), B(-2; 1), C(m + 1; 2m + 3)$. Tìm m để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 235. Trong Oxy cho bốn điểm $A(-1; 5), B(2; \frac{1}{2}), C(3; -1), D(\frac{1}{3}; 3)$. Chứng minh rằng:

a/ D nằm trên đường thẳng AB.

b/ $B \in$ đoạn AC.

Bài 236. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(-3; 4), B(1; 1), C(9; -5)$.

a/ Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b/ Tìm tọa độ điểm D sao cho A là trung điểm của BD.

c/ Tìm tọa độ điểm E trên trục hoành Ox sao cho A, B, E thẳng hàng.

Bài 237. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(-1;4)$, $B(-3;-2)$, $C(2;3)$.

a/ Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác và tìm các vectơ trung tuyến tương ứng.

b/ Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

c/ Tìm điểm E trên trục tung Oy sao cho ba điểm A, C, E thẳng hàng.

Bài 238. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(-1;4)$, $B(-3;-2)$, $C(-4;-2)$.

a/ Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b/ Tìm tọa độ điểm D sao cho ABCD là hình bình hành.

c/ Tìm tọa độ điểm E(x;6) sao cho A, B, E thẳng hàng.

Bài 239. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(-6;2)$, $B(2;6)$, $C(7;-8)$.

a/ Chứng minh rằng ba điểm đó không thẳng hàng.

b/ Tìm tọa độ trọng tâm G và tâm I đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

c/ Tìm tọa độ điểm H sao cho ABGH là hình bình hành.

Bài 240. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(2;5)$, $B(1;2)$, $C(4;-7)$.

a/ Chứng minh A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b/ Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} + 5\vec{i}$.

c/ Tìm điểm N trên trục hoành Ox sao cho A, B, N thẳng hàng.

Bài 241. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(0;4)$, $B(3;2)$, $D(3;0)$.

a/ Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng, biết rằng $C(-6-3t;8+2t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

b/ Chứng minh rằng A, B, D không thẳng hàng. Từ đó tính chu vi của $\triangle ABD$.

ĐS: a/ $\overrightarrow{AC} = -(2+t)\overrightarrow{AB}$. b/ $2p = 7 + \sqrt{13}$.

Bài 242. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(2;1)$, $B(6;-1)$.

a/ Tìm điểm $M \in Ox$ sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng.

b/ Tìm điểm $N \in Oy$ sao cho ba điểm A, B, N thẳng hàng.

c/ Tìm điểm P khác B sao cho A, B, P thẳng hàng và $PA = 2\sqrt{5}$.

ĐS: $M(4;0)$, $N(0;2)$, $P(-2;3)$.

Bài 243. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(-1;-4)$, $B(3;4)$.

a/ Tìm điểm $M \in Ox$ sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng.

b/ Tìm điểm $N \in Oy$ sao cho ba điểm A, B, N thẳng hàng.

c/ Tìm điểm P khác B sao cho A, B, P thẳng hàng và $PA = 3\sqrt{5}$.

ĐS: $M(1;0)$, $N(0;-2)$, $P_1(2;2) \vee P_2(-4;-10)$.

Bài 244. Đại học Nông Nghiệp năm 1996 – 1997

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(1;1)$, $B(3;3)$, $C(2;0)$.

a/ Tính diện tích $\triangle ABC$.

b/ Hãy tìm tất cả các điểm M trên trục hoành Ox sao cho góc $\widehat{AMB}$ nhỏ nhất.

ĐS: $S_{\triangle ABC} = 2$ (đ.v.d.t) và $M \equiv O$.

Bài 245. Trong mặt phẳng Oxy cho ba điểm $A(1;3)$, $B(3;1)$, $C(2;4)$.

a/ Tính diện tích $\triangle ABC$.

b/ Tìm tất cả các điểm $M \in Ox$ sao cho góc $\widehat{AMB}$ nhỏ nhất.

Bài 246. Trích bộ đề tuyển sinh Đại học – Cao đẳng – Đề 97 – câu Va.

Tìm trên trục hoành Ox điểm P sao cho tổng các khoảng cách từ P đến các điểm A và B là nhỏ nhất (hay $(PA + PB)_{\min}$). Biết rằng:

a/ $A(1;1), B(2;-4)$.

b/ $A(1;2), B(3;4)$.

HD: a/ A, B khác phía $Ox \Rightarrow P_o(x;0) = Ox \cap AB$. A, P_o, B thẳng hàng $\Rightarrow P_o\left(\frac{6}{5};0\right) \equiv P$.

b/ A, B cùng phía Ox . Lấy A_1 đối xứng với A qua $Ox \Rightarrow A_1(1;-2) \Rightarrow P \equiv P_o\left(\frac{5}{3};0\right)$.

Bài 247. Tìm trên đường thẳng $d: x + y = 0$ điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến các điểm A và B là nhỏ nhất trong các trường hợp sau

a/ $A(1;1), B(-2;-4)$.

b/ $A(1;1), B(3;-2)$.

Bài 248. Cho điểm $M(4;1)$ và hai điểm $A(a;0), B(0;b)$ với $a, b > 0$ sao cho A, B, M thẳng hàng.

Xác định tọa độ điểm A, B sao cho

a/ Diện tích tam giác OAB là nhỏ nhất $(S_{\Delta OAB \min})$.

b/ $OA + OB$ nhỏ nhất.

c/ $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

HD: A, B, M thẳng hàng $\Rightarrow \frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1$ (*).

a/ (*) $\Leftrightarrow 1 = \frac{4}{a} + \frac{1}{b} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} \frac{4}{\sqrt{ab}} \Rightarrow ab \geq 16 \Leftrightarrow S \geq 8$. Vậy $A(8;0), B(0;2)$.

b/ (*) $\Leftrightarrow a = \frac{4b}{b-1} \Rightarrow OA + OB = \frac{4}{b-1} + b - 1 + 5 \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 9$. Vậy $A(6;0), B(0;3)$.

c/ $(4^2 + 1^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \stackrel{\text{B.C.S}}{\geq} \left(\frac{4}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{17}$. Vậy $A\left(\frac{17}{4};0\right), B(0;17)$.

Bài 249. Cho điểm $M(2;1)$ và hai điểm $A(a;0), B(0;b)$ với $a, b > 0$ sao cho A, B, M thẳng hàng.

Xác định tọa độ điểm A, B sao cho

a/ Diện tích tam giác OAB là nhỏ nhất $(S_{\Delta OAB \min})$.

b/ $OA + OB$ nhỏ nhất.

c/ $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ nhỏ nhất.

Bài 250. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx + 2b^2}$ với a, b là các hằng số thỏa điều kiện $a < 0, b > 0$.

ĐS: $y_{\min} = \sqrt{2}(b - a)$ khi A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow M \equiv O$.

Bài 251. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$.

Bài 252. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 4x + 8} + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

Bài 253. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2ax + 2a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx + 2b^2}$ với $a, b \in \mathbb{R}$.

Bài 254. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13}.$$

ĐS: $P_{\min} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

Bài 255. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 2} + \sqrt{\cos^2 \alpha + 6 \cos \alpha + 13}.$$

Bài 256. Cho ba điểm $A(0;6)$, $B(2;5)$, $M(2t-2;t)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho

$$a/ (MA + MB)_{\min} \quad b/ |MA - MB|_{\max}.$$

Bài 257. Cho ba điểm $A(1;2)$, $B(2;5)$, $M(2t+2;t)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho

$$a/ (MA + MB)_{\min} \quad b/ |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|_{\max}.$$

$$c/ |MA - MB|_{\max} \quad d/ |MA - MB|_{\min}.$$

Bài 258. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{(a+c)^2 + b^2} + \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \geq 2\sqrt{a^2 + b^2}$.

HD: $\vec{u} = (a+c; b), \vec{v} = (a-c; b)$.

Bài 259. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{a^2 + 4b^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 + 4b^2 - 2a - 12b + 10} \geq 5$.

HD: $\vec{u} = (a+3; 2b), \vec{v} = (1-a; 3-2b)$.

Bài 260. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{a^2 + ac + c^2} \geq \sqrt{b^2 + bc + c^2}$.

HD: Cách 1. $\vec{u} = \left(a + \frac{b}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}b\right), \vec{v} = \left(-\left(a + \frac{c}{2}\right); \frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$.

Cách 2. $A\left(a + \frac{b}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}c\right), B\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}c\right), C\left(\frac{b}{2} - \frac{c}{2}; 0\right)$

(Dự bị Cao đẳng Giao Thông II – 2003)

Bài 261. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Chứng minh: $\sqrt{4 \cos^2 a \cos^2 b + \sin^2(a-b)} + \sqrt{4 \sin^2 a \sin^2 b + \sin^2(a-b)} \geq 2$.

HD: $\vec{u} = (2 \cos a \cos b; \sin(a-b)), \vec{v} = (2 \sin a \sin b; \sin(a-b))$.

Bài 262. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ y^2 + yz + z^2 = 16 \end{cases}$.

Chứng minh: $xy + yz + zx \leq 8$.

HD: $\vec{u} = \left(y + \frac{x}{2}; \frac{\sqrt{3}x}{2}\right), \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}x}{2}; y + \frac{z}{2}\right)$.

Bài 263. Tìm GTNN của $P = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

HD: Cách 1. $\vec{u} = \left(\frac{1}{2} - x; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \vec{v} = \left(x + \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Cách 2. $A\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C(x, 0)$.

Bài 264. Cho x, y, z và $x + 3y + 5z \leq 3$.

Chứng minh: $3xy\sqrt{625z^4 + 4} + 15yz\sqrt{x^4 + 4} + 5zx\sqrt{81y^2 + 4} \geq 45\sqrt{5}xyz$.

HD: $\vec{u} = \left(x; \frac{2}{x}\right), \vec{v} = \left(3y; \frac{2}{3y}\right), \vec{w} = \left(5z + \frac{2}{5z}\right)$.

Bài 265. Cho $x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + y^2 + 1} + \sqrt{y^2 - 6y + 10} \geq 5$.

HD: $\vec{u} = (x; 2), \vec{v} = (1 - x; y), \vec{w} = (-1; 3 - y)$.

Bài 266. Cho $x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh: $-\frac{1}{2} \leq \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1}{2}$.

HD: $\vec{u} = (2x; 1 - x^2), \vec{v} = (1 - y^2; 2y)$.

Bài 267. Nếu $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{cases}$ thì $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}$ (Đại học A – 2003).

HD: $\vec{u} = \left(\frac{1}{x} - x; \sqrt{2}\right), \vec{v} = \left(\frac{1}{y} - y; \sqrt{2}\right), \vec{w} = \left(\frac{1}{z} - z; \sqrt{2}\right)$.

Chương 2

TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

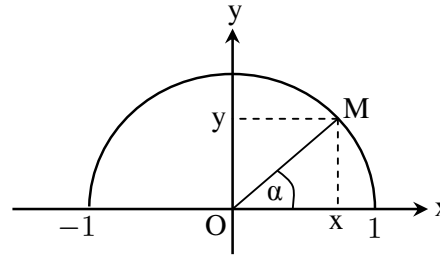


A – GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ

① Định nghĩa

Lấy M trên nửa đường tròn đơn vị tâm O. Xét góc nhọn $\widehat{xOM}$. Giả sử $M(x; y)$. Khi đó

- $\sin \alpha = y$ (tung độ).
- $\cos \alpha = x$ (hoành độ).
- $\tan \alpha = \frac{y}{x}, \left(\frac{\text{Tung độ}}{\text{Hoành độ}} \right), (x \neq 0)$.
- $\cot \alpha = \frac{x}{y}, \left(\frac{\text{Hoành độ}}{\text{Tung độ}} \right), (y \neq 0)$.



🔍 Lưu ý

- Nếu α tù thì $\cos \alpha < 0, \tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$.
- $\tan \alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 90^\circ, \cot \alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$.

② Tính chất

"cos đối – sin bù – phụ chéo"

- Góc phụ nhau $\begin{cases} \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \\ \tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha \\ \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha \end{cases}$
- Góc bù nhau $\begin{cases} \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \\ \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha \\ \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha \end{cases}$

③ Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

④ Các hệ thức cơ bản (cần nhớ: $0 \leq \sin \alpha \leq 1$ và $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$)

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, (\cos \alpha \neq 0)$.
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, (\sin \alpha \neq 0)$.
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, (\sin \alpha \cdot \cos \alpha \neq 0)$.
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, (\cos \alpha \neq 0)$.
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, (\sin \alpha \neq 0)$.

Bài 268. Trong mặt phẳng Oxy cho $M(3;4)$. Hãy tìm $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ với $x = \widehat{xOM}$.

Bài 269. Trong mặt phẳng Oxy cho $M(x;4)$ và $\widehat{xOM} = 120^\circ$. Hãy tìm x .

Bài 270. Trong mặt phẳng Oxy cho $M(x;y)$ và $\alpha = \widehat{xOM}$. Hãy cho biết dấu của x và y khi α nhọn, $\alpha = 120^\circ$, α tù.

Bài 271. Tính giá trị các biểu thức sau

$$\begin{aligned} a/ A &= a \sin 0^\circ + b \cos 0^\circ + c \sin 90^\circ. & b/ B &= a \cos 90^\circ + b \sin 90^\circ + c \sin 180^\circ. \\ c/ C &= a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ. & d/ D &= 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ. \\ e/ E &= 4a^2 \sin^2 45^\circ - 3(a \tan 45^\circ)^2 + (2a \cos 45^\circ)^2. \end{aligned}$$

Bài 272. Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a/ \sin x + \cos x \text{ khi } x \text{ bằng } 0^\circ; 45^\circ; 60^\circ. \quad b/ 2 \sin x + \cos 2x \text{ khi } x \text{ bằng } 45^\circ; 30^\circ.$$

Bài 273. Cho biết một giá trị lượng giác của một góc, tính các giá trị lượng giác còn lại:

$$\begin{aligned} a/ \sin \beta &= \frac{1}{4}, \beta \text{ nhọn.} & b/ \cos \alpha &= -\frac{1}{3}. \\ c/ \tan x &= 2\sqrt{2}. & d/ \cos \alpha &= -\frac{5}{13}, (90^\circ < \alpha < 180^\circ). \\ e/ \sin \alpha &= \frac{4}{5}, (0 < \alpha < 180^\circ). & f/ \cot \alpha &= -\frac{1}{2}, (0^\circ < \alpha < 90^\circ). \end{aligned}$$

Bài 274. Biết $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. Tính $\cos 15^\circ, \tan 15^\circ, \cot 15^\circ, \cos 75^\circ, \cos 105^\circ$.

Bài 275. Cho biết một giá trị lượng giác của một góc, tính giá trị của một biểu thức:

$$\begin{aligned} a/ \text{Biết } \sin x &= \frac{1}{3}, 90^\circ < x < 180^\circ. \text{ Tính } A = \frac{\tan x + 3 \cot x + 1}{\tan x + \cot x}. \\ b/ \text{Biết } \tan \alpha &= \sqrt{2}. \text{ Tính } B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}. \\ c/ \text{Biết } \tan \alpha &= \sqrt{2}. \text{ Tính } C = \frac{3 \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}. \\ d/ \text{Biết } \sin \alpha &= \frac{3}{2}. \text{ Tính } D = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha}. \\ e/ \text{Biết } \cot x &= -3. \text{ Tính } E = \frac{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x}{2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x}. \end{aligned}$$

Bài 276. Cho biết $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

a/ Chứng minh rằng: $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$.

b/ Đặt $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Hãy tính

$$\begin{aligned} \bullet A &= \sin \alpha \cdot \cos \alpha. & \bullet B &= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha. \\ \bullet C &= \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha. & \bullet D &= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha. \end{aligned}$$

Bài 277. Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{4}{3}$. Hãy tìm

a/ $A = \sin \alpha \cos \alpha$.

b/ $B = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

c/ $C = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

d/ $D = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$.

f/ $F = \sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha$.

g/ $G = \frac{\cos^2 \alpha - \cot^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha}$.

Bài 278. Chứng minh các đẳng thức sau:

a/ $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x$.

b/ $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

c/ $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$.

d/ $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

e/ $\frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$.

f/ $\frac{\cos^2 x - \cot^2 x}{\sin^2 x - \tan^2 x} = \cot^2 x$.

g/ $\frac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \frac{\sin x + \cos x}{\tan^2 x - 1} = \sin x + \cos x$.

h/ $\sin x \cdot \cos x (1 + \tan x)(1 + \cot x) = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x$.

i/ $\sin x \left(\sqrt{\frac{1}{2 + 2 \cos x} + \frac{1}{2 - 2 \cos x}} - \sin x \right) = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$, biết $0^\circ < x < 180^\circ$.

Bài 279. Đơn giản (rút gọn) các biểu thức sau

a/ $A = \sqrt{1 + \cos x} \cdot \sqrt{1 - \cos x}$.

b/ $B = \sin \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$.

c/ $C = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} + \tan x \cdot \cot x$.

d/ $D = \frac{1 - 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{(\sin x + \cos x)^2}$.

e/ $E = \sin(90^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \sin^2 x (1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$.

f/ $F = \frac{2 \cos(180^\circ - x) - \cos(90^\circ - x) + \cot(180^\circ - x)}{\sin x - 4 \cos(90^\circ - x)}$.

g/ $G = \frac{\cos 36^\circ - \sin 234^\circ}{\sin 144^\circ - \cos 126^\circ} \cdot \cos 54^\circ$.

h/ $H = \cot x \left(\frac{1 + \sin^2 x}{\cos x} - \cos x \right)$.

i/ $I = \frac{\cos(90^\circ + x) \cos(270^\circ + x) \tan(x + 180^\circ)}{\sin(180^\circ + x) \cos(270^\circ - x) \tan(x - 90^\circ)}$.

j/ $J = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{7\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{7\pi}{2}\right)$.

k/ $K = \sin x - \sqrt{\cot^2 x - \cos^2 x}$, $(180^\circ < x < 270^\circ)$.

$$l/ L = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}, \quad (0^\circ < x < 90^\circ).$$

$$m/ M = \frac{1}{\sin x + \sqrt{\cot^2 x - \cos x}}, \quad (90^\circ < x < 180^\circ).$$

$$n/ N = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 170^\circ + \cos 180^\circ.$$

$$o/ O = \cos^2 12^\circ + \cos^2 78^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ.$$

$$p/ P = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ.$$

Bài 280. Cho A, B, C lần lượt là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$a/ \sin(B + C) = \sin A.$$

$$b/ \cos(B + C) = -\cos A.$$

$$c/ \sin(A + B) = \sin C.$$

$$d/ \cos(A + B) = -\cos C.$$

$$e/ \sin \frac{A + B}{2} = \cos \frac{C}{2}.$$

$$f/ \tan \frac{A + B - C}{2} = \cot C.$$

$$g/ \tan \frac{A + B}{2} = \cot \frac{C}{2}.$$

$$h/ \cos \frac{B + C}{2} = \sin \frac{A}{2}.$$

$$i/ \tan(A + B) = -\tan C.$$

$$j/ \sin \frac{A + B + 3C}{2} = \cos C.$$

$$k/ \tan \frac{A + B - 2C}{2} = \cot \frac{3C}{2}.$$

$$l/ \sin \frac{A + B - 2C}{2} = \cos \frac{3C}{2}.$$

$$m/ \cos(A - B + C) = -\cos 2B.$$

$$n/ \tan \frac{B + C - 2A}{2} = \cot \frac{3A}{2}.$$

Bài 281. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến (hay biểu thức độc lập với biến số)

$$a/ A = 2 \cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x.$$

$$b/ B = \cos^6 x + 2 \sin^4 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x \cos^4 x + \sin^4 x.$$

$$c/ C = (\cot x + \tan x)^2 - (\cot x - \tan x)^2.$$

$$d/ D = \cos(x - 60^\circ) \cos(x - 45^\circ) + \cos(x + 30^\circ) + \cos(135^\circ + x).$$

$$e/ E = \sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x}.$$

$$f/ F = \frac{2}{\tan x - 1} + \frac{\cot x + 1}{\cot x - 1}.$$

$$g/ G = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cos x}.$$

B – TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ



① Góc giữa hai vectơ

Cho $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Từ một điểm O bất kì vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Khi đó $(\vec{a}, \vec{b}) = \widehat{AOB}$ với $0^\circ \leq \widehat{AOB} \leq 180^\circ$.

🔍 Lưu ý

- $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
- $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.
- $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.
- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

② Tích vô hướng của hai vectơ

✧ Định nghĩa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$. Đặc biệt: $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = |\vec{a}|^2$.

✧ Tính chất: với $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kỳ và $\forall k \in \mathbb{R}$, ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$.
- $a^2 \geq 0$; $a^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.
- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = a^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2$.
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = a^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2$.
- $a^2 - b^2 = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$.
- $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$ là góc nhọn.
- $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$ là góc tù.
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b})$ là góc vuông.

③ Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

(Hoành nhân hoành + Tung nhân tung = hằng số)

- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$.
- Để chứng minh $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, ta chứng minh $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ hay $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$.

(Dùng để chứng minh ba đỉnh của một tam giác)

- Với $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- Khi tính tích vô hướng 2 vectơ, ta nên để ý đến chiều nhằm xác định đúng góc.

— Tính $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ và $\hat{B}$.

— Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = 3(\text{cm})$. Hãy tính $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$.

Bài 287. Cho ΔABC vuông tại A có $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC. Biết rằng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.
Hãy tính AB, AC.

Bài 288. Cho ΔABC đều cạnh a và AM là trung tuyến của tam giác. Tính các tích vô hướng sau

a/ $\overrightarrow{AC} \cdot (2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC})$.

b/ $\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$.

c/ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$.

d/ $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

e/ $(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$.

f/ $m = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Bài 289. Cho ΔABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tính các tích vô hướng sau theo a, b, c

a/ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

b/ $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

c/ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Bài 290. Cho ΔABC có $AB = 3a$, $AC = a$, $\hat{A} = 60^\circ$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Suy ra độ dài cạnh BC và độ dài đường trung tuyến AM.

Bài 291. Cho ΔABC có

a/ $AB = 2$, $AC = 3$, $\hat{A} = 60^\circ$. Hãy tính độ dài cạnh BC.

b/ $AB = 3$, $BC = 4$, $\hat{B} = 45^\circ$. Hãy tính độ dài cạnh AC.

c/ $CA = 5$, $BC = 6$, $\hat{C} = 120^\circ$. Hãy tính độ dài cạnh AB.

Bài 292. Cho ΔABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng:

(1) : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

(2) : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ **(Định lý hàm cos)**

(3) : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Bài 293. Cho ΔABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 9$.

a/ Tính $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$.

b/ Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

c/ Tính độ dài ba đường trung tuyến AM, BN, CP của tam giác ABC.

Bài 294. Cho tam giác ABC có $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 8$.

a/ Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, rồi suy ra giá trị của góc A.

b/ Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

c/ Gọi D là điểm trên CA sao cho $CD = 3$. Tính $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Bài 295. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính giá trị các biểu thức sau

a/ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b/ $\overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$.

c/ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

d/ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$.

e/ $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$.

f/ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$.

$$g/ \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \right) \left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \right). \quad h/ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Bài 296. Cho ΔABC có $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Gọi G là trọng tâm và D, E, F lần lượt là chân đường phân giác trong của góc A, B, C . Tính

a/ Tích vô hướng của các vectơ: $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{AB}$.

b/ Độ dài các cạnh AG, BG, CG .

c/ Tính giá trị của $S = \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}$.

Bài 297. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $BC = 4$, $CA = 3$.

a/ Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$, rồi suy ra $\cos A, \cos B, \cos C$.

b/ Gọi G là trọng tâm của ΔABC . Tính $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$.

c/ Tính giá trị biểu thức $S = \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$.

d/ Gọi AD là phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ ($D \in BC$). Tính $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, suy ra AD .

HD: a/ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}$, $\cos A = -\frac{1}{4}$ b/ $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{5}{3}$ c/ $S = -\frac{29}{6}$.

d/ Đường phân giác $\overrightarrow{DB} = \frac{AB}{AC} \cdot \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5} \overrightarrow{AC}$, $AD = \frac{\sqrt{54}}{5}$.

Bài 298. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $A = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC .

a/ Tính BC, AM .

b/ Tính IJ , trong đó I, J được xác định bởi: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC}$.

HD: a/ $BC = \sqrt{19}$, $AM = \frac{\sqrt{7}}{2}$. b/ $IJ = \frac{2}{3} \sqrt{133}$.

Bài 299. Cho hình thang vuông $ABCD$, đường cao $AB = 2a$, đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = 2a$.

a/ Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

b/ Gọi I là trung điểm của CD , tính $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD}$. Suy ra góc của hai vectơ $\overrightarrow{AI}$ và $\overrightarrow{BD}$.

Bài 300. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB = a\sqrt{3}$, cạnh đáy $AD = a$, $BC = 2a$.

a/ Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$. Suy ra góc nhọn tạo bởi hai đường AC và BD .

b/ Gọi G là trọng tâm của ΔBCD và tính $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Bài 301. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm I , cạnh $AB = a$, $AD = b$. Tính theo a, b các tích vô hướng

a/ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \right) \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \right)$.

b/ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$ với M là điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$.

Bài 302. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

a/ Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .

b/ Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

c/ Tìm tọa độ trực tâm H và trọng tâm G của tam giác ABC .

d/ Tính chu vi, diện tích tam giác ABC .

e/ Tìm tọa độ điểm M trên Oy để B, M, A thẳng hàng.

f/ Tìm tọa độ điểm N trên Ox để tam giác ANC cân tại N .

Bài 314. Cho ΔABC biết $A(1;2), B(-3;-4)$.

a/ Tìm tọa độ hình chiếu của A lên BC.

b/ Tìm diện tích tam giác ABC.

Bài 315. Cho ba điểm $A(7;4), B(0;3), C(4;0)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của A lên BC. Từ đó suy ra tọa độ điểm A_1 là điểm đối xứng với A qua BC.

Bài 316. Cho ΔABC , biết $A(1;2), B(-1;1), C(5;-1)$.

a/ Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b/ Tính cos và sin góc A.

c/ Tìm tọa độ chân đường cao A_1 của ΔABC .

d/ Tìm tọa độ trực tâm H của ΔABC .

e/ Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC .

f/ Tìm tọa độ tâm I đường tròn ngoại tiếp Δ .

g/ Chứng minh rằng I, H, G thẳng hàng.

Bài 317. Cho $A(0;2), B(6;9), C(4;1), D(2;10)$.

a/ Chứng minh: ΔABC vuông.

b/ Chứng minh: ABCD là hình chữ nhật.

c/ Gọi C' thỏa $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$. Tìm C' , suy ra D đối xứng với C' qua B.

Bài 318. Cho ΔABC có $AB = a, AC = 2a$. Gọi D là trung điểm cạnh AC, M là điểm thỏa

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$. Chứng minh BD vuông góc với AM.

Bài 319. Cho ΔABC có góc A nhọn. Vẽ bên ngoài ΔABC các tam giác vuông cân đỉnh A là $\Delta ABD, \Delta ACE$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng: $AM \perp DE$.
Nếu góc A tù hoặc vuông thì kết quả trên còn đúng không? Tại sao?

Bài 320. Cho ΔABC cân tại A, H là trung điểm của BC và D là hình chiếu của H lên AC, M là trung điểm của HD. Chứng minh $AM \perp BD$.

Bài 321. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì.

a/ Chứng minh: $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

b/ Từ đó suy ra một cách chứng minh định lý: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Bài 322. Cho tam giác ABC với ba trung tuyến AD, BE, CF.

Chứng minh: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} = 0$.

Bài 323. Cho ΔABC đều, trên BC, CA, AB lấy các điểm D, E, F thỏa $3\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BC}, 3\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CA}$ và $15\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{AB}$. Chứng minh: $AD \perp EF$.

Bài 324. Cho hình vuông OACB và một điểm M thuộc OC. Kẻ đường PP' qua M và vuông góc với OA, đường QQ' qua M và vuông góc với OB.

a/ Chứng minh: $AM = PQ$.

b/ Chứng minh: $AM \perp PQ$.

Bài 325. Cho ba điểm A, B, M. Gọi O là trung điểm của AB.

Chứng minh rằng: $4OM^2 = AB^2 \Leftrightarrow MA \perp MB$.

Bài 326. Cho ΔABC có $AB = c, BC = a, AC = b$. Chứng minh điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến BM và CN vuông góc nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Bài 327. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông tại A là $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2$.

Bài 328. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm (O). Gọi H là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

a/ Tính $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$. Suy ra H là trực tâm của tam giác ABC.

b/ Tìm hệ thức giữa độ dài ba cạnh tam giác ABC là a, b, c sao cho $AH \perp AM$ với M là trung điểm của BC.

Bài 329. Cho hình vuông ABCD.

a/ Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Chứng minh $AM \perp BN$.

b/ Gọi P, Q tương ứng trên BC, CD sao cho $BP = \frac{1}{4}BC$, $CQ = \frac{1}{4}CD$.

Chứng minh $AP \perp BQ$.

Bài 330. Cho hình chữ nhật ABCD có

a/ $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của AD. Chứng minh: $BK \perp AC$.

b/ $AB = a$, $AD = b$. Gọi K là trung điểm của AD và L trên tia DC sao cho $DL = \frac{b^2}{2a}$.

Chứng minh: $BK \perp AL$.

Bài 331. Cho tứ giác ABCD có $AC \perp BD$ tại M. Gọi P là trung điểm của AD. Chứng minh rằng:

$$MP \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}.$$

Bài 332. Cho hình vuông ABCD, điểm M nằm trên AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của DC. Chứng minh tam giác BMN là tam giác vuông cân.

Bài 333. Cho hình thang vuông ABCD có đường cao $AB = h$, cạnh đáy $AD = a$, $BC = b$. Tìm điều kiện giữa a, b, h để:

a/ $AC \perp BD$.

b/ $\widehat{AIB} = 90^\circ$ với I là trung điểm của CD.

Bài 334. Cho hình thang vuông ABCD, đường cao $AB = 2a$, $AD = a$, $BC = 4a$.

a/ Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$. Suy ra góc giữa AC và BD.

b/ Gọi I là trung điểm của CD, J là điểm di động trên cạnh BC. Dùng tích vô hướng để tính BJ sao cho AJ và BI vuông góc.

Bài 335. Cho hình thang vuông ABCD, hai đáy $AD = a$, $BC = b$, đường cao $AB = h$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, h để

a/ $BD \perp CI$ với I là trung điểm của AB. b/ $AC \perp DI$.

c/ $BM \perp CN$ với M, N lần lượt theo thứ tự là trung điểm của AC và BD.

ĐS: a/ $h^2 = 2ab$. b/ $h^2 = 2ab$. c/ $h^2 = 2b^2 - ab$.

Bài 336. Cho tứ giác ABCD.

a/ Chứng minh: $AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.

b/ Suy ra điều kiện cần và đủ để tứ giác có hai đường chéo vuông góc là:

$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$$

Bài 337. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A, gọi M là trung điểm của BC. Lấy các điểm B_1, C_1 trên AB và AC sao cho $AB \cdot AB_1 = AC \cdot AC_1$. Chứng minh: $AM \perp B_1C_1$.

Bài 338. Cho $\triangle ABC$ cân đỉnh A, O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, M là trung điểm của AB, E là trọng tâm của $\triangle ACM$. Chứng minh: $OE \perp CM$.

Bài 339. Cho $\triangle ABC$ cân đỉnh A, O là tâm đường tròn ngoại tiếp, gọi BB_1 và CC_1 là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh: $OA \perp B_1C_1$.

Bài 340. Cho đường tròn tâm O và một điểm P thuộc miền trong của đường tròn. Qua P, kẻ hai dây AB, CD vuông góc nhau. Gọi M là trung điểm của dây BD. Chứng minh: $PM \perp AC$.

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức và tìm quỹ tích điểm thỏa biểu thức về tích vô hướng hay độ dài. Sử dụng tích vô hướng giải bài toán cực trị.



① Chứng minh đẳng thức tích vô hướng hay độ dài

- Với các biểu thức về tích vô hướng, ta sử dụng định nghĩa hoặc tích chất của tích vô hướng. Cần đặc biệt lưu ý phép phân tích vectơ để biến đổi (quy tắc ba điểm +, −, quy tắc trung điểm, quy tắc hình bình hành, ...).
- Với các công thức về độ dài, ta thường sử dụng: $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$. Cần nắm vững các hình tính của những hình cơ bản.

② Xác định điểm, quỹ tích điểm thỏa mãn đẳng thức về tích vô hướng hay độ dài

Bài toán: Tìm điểm M thỏa mãn đẳng thức $f(\overrightarrow{\Omega}, \overrightarrow{\Omega})$ về tích vô hướng hay độ dài.

⇒ Ta biến đổi biểu thức ban đầu về một trong các dạng sau:

✪ **Dạng 1.** $AM^2 = k > 0$, thì điểm M thuộc đường tròn tâm A, bán kính $R = \sqrt{k}$.

✪ **Dạng 2.** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ với A, B cố định và k không đổi. Khi đó:

✧ Gọi I là trung điểm của AB, ta được:

$$k = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2.$$

$$IM^2 = k + IA^2 = k + \frac{AB^2}{4} = IM^2 = k + IA^2 = k + \frac{AB^2}{4} \stackrel{\text{đặt}}{=} l.$$

✧ Khi đó:

- Nếu $l < 0$ thì M không tồn tại.
- Nếu $l = 0$ thì $M \equiv I$: là trung điểm của AB.
- Nếu $l > 0$ thì M thuộc đường tròn tâm I bán kính $R = \sqrt{l}$.

✪ **Dạng 3.** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ với A, B cố định. Khi đó:

✧ Gọi M_0, A_0 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M, A lên BC, ta được:

$$k = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{M_0A_0} \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0A_0} = \frac{k}{BC}, \text{ có giá trị không đổi và do } A_0 \text{ cố định nên } M_0 \text{ cố định.}$$

✧ Vậy điểm M thuộc đường vuông góc với BC tại M_0 . Đặc biệt, khi $k = 0$ thì M thuộc đường thẳng qua A và vuông góc với BC.

③ Sử dụng tích vô hướng giải bài toán cực trị

Phương pháp: Sử dụng tích vô hướng biến đổi biểu thức cần tìm cực trị về biểu thức độ dài, chẳng hạn như:

$$S = MI^2 + c \text{ với } c \text{ là hằng số và } I \text{ cố định.}$$

$$S_{\min} = c \text{ đạt được khi } MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I.$$

✧ **Lưu ý:** Cần nắm vững cách tìm cực trị ở phần đại số (BĐT Cauchy, BCS,...)

Chứng minh đẳng thức tích vô hướng hay về độ dài

Bài 341. Cho hai điểm A và B. Gọi O là trung điểm của AB và M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - OA^2.$$

Bài 342. Cho ΔABC , gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = MA^2 - MB^2$.

Bài 343. Cho ΔABC đều, cạnh a , có đường cao AH và trọng tâm G . Tính $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{BH}$.

Bài 344. Cho $\triangle ABC$ và một điểm M tùy ý. Chứng minh: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

Bài 345. Chứng minh rằng:

a/ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ với mọi điểm M, A, B, C. (gọi là hệ thức Euler).

b/ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ với mọi điểm A, B, C.

c/ $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} (MQ^2 + NP^2 - MP^2 - NQ^2)$ với mọi điểm M, N, P, Q.

Bài 346. Cho $\triangle ABC$ với ba đường trung tuyến AD, BE, CF .

Chứng minh: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0$.

Bài 347. Cho I là trung điểm của đoạn AB , M là một điểm tùy ý. Gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng AB . Chứng minh rằng:

$$\text{a/ } \overrightarrow{\text{MI}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = \frac{1}{2}(\text{MB}^2 - \text{MA}^2). \quad \text{b/ } \overrightarrow{\text{MA}} \cdot \overrightarrow{\text{MB}} = \text{MI}^2 - \frac{1}{4}\text{AB}^2.$$

$$\text{c/ } MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2. \quad \text{d/ } |MA^2 - MB^2| = 2IH.AB.$$

Bài 348. Cho hình chữ nhật ABCD và điểm M tùy ý. Chứng minh:

a/ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$. b/ $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

Bài 349. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN.

a/ Chứng minh: $\overrightarrow{AM}.AI = \overrightarrow{AB}.AI$, $\overrightarrow{BN}.BI = \overrightarrow{BA}.BI$.

b/ Tính $\overrightarrow{AM}.AI + \overrightarrow{BN}.BI$ theo R.

Bài 350. Cho ΔABC có trực tâm H, M là trung điểm của BC. Chứng minh: $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} BC^2$.

Bài 351. Cho hình chữ nhật ABCD, M là một điểm bất kì. Chứng minh:

a/ $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ b/ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

c/ $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}$ (O là tâm của hình chữ nhật).

Bài 352. Cho ΔABC có AA', BB', CC' là các trung tuyến, G là trọng tâm, M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

a/ $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

b/ $\overrightarrow{MA'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB'} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC'} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

c/ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

d/ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 - \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

e/ $MA^2 + MB^2 + MC^2 = MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 + \frac{1}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

Bài 353. Cho ΔABC có G là trọng tâm và M là điểm tùy ý. Chứng minh rằng:

a/ $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

b/ $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$.

c/ $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ (đẳng thức Leibniz).

Bài 354. Cho ΔABC , M là trung điểm của BC , I là trung điểm của AM .

Chứng minh rằng: $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$.

Bài 355. Cho ΔABC , H là trực tâm, M là trung điểm của BC , I là trung điểm AM . Chứng minh rằng:

a/ $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4}BC^2$.

b/ $MH^2 + MA^2 = AH^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

Bài 356. Cho ΔABC đều nội tiếp trong đường tròn tam O bán kính R , $M \in (O)$. Chứng minh rằng:

a/ $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$.

b/ $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3R^2$.

c/ $MA = MB + MC$ (M thuộc cung nhỏ BC).

Bài 357. Cho đường thẳng AB cắt đường thẳng d ở M và một điểm C trên d (C khác M). Chứng minh rằng d là tiếp tuyến của đường tròn (ABC) khi và chỉ khi $MC^2 = MA \cdot MB$.

Bài 358. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh: $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$. Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để tứ giác có hai đường chéo vuông góc nhau.

Bài 359. Cho ΔABC và hai điểm M, M' bất kỳ. Gọi I và I' , H và H' , K và K' theo thứ tự là hình chiếu của M và M' lên BC, CA, AB . Chứng minh: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{KK'} = 0$.

Bài 360. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh a và góc $A = 60^\circ$. Chứng minh rằng với mọi điểm M , ta có $MA^2 - MB^2 + MC^2 - MD^2 = a^2$.

Bài 361. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O, R) , H là trực tâm của ΔABC . Chứng minh rằng:

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \text{ với } a, b, c \text{ là độ dài tương ứng của } \Delta ABC.$$

Bài 362. Cho MM_1 là đường kính bất kỳ của đường tròn tâm O , bán kính R và A là một điểm cố định, đặt $OA = d$. Giả sử AM cắt (O) tại N .

a/ Chứng minh rằng tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM_1}$ có giá trị không phụ thuộc vào điểm M .

b/ Chứng minh rằng tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ có giá trị không phụ thuộc vào vị trí điểm M .

Bài 363. Cho nửa đường tròn đường kính AB , có AC, BD là hai dây cung thuộc nửa đường tròn, cắt nhau tại E . Chứng minh: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = AB^2$.

Bài 364. Cho ΔABC đều cạnh bằng a . Gọi M là điểm tùy ý trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Chứng minh rằng: $MA^4 + MB^4 + MC^4 = 2a^4$.

Tập hợp điểm và cực trị

Bài 365. Cho ΔABC có $AB = 3$. Tìm tập hợp điểm M thỏa điều kiện

a/ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 6$.

b/ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 8$.

Bài 366. Cho $AB = a$ có trung điểm I . Tìm tập hợp điểm M thỏa điều kiện

a/ $2MA^2 + MB^2 = a^2$.

b/ $2MA^2 - MB^2 = k$ (k cho trước).

c/ $MA^2 - 3MB^2 = a^2$.

d/ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

d/ $MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

e/ $2MA^2 - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ (k cho trước)

Bài 367. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tìm tập hợp điểm M sao cho

a/ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = a^2$.

b/ $MA^2 - MB^2 + MC^2 = a^2$.

c/ $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = 2a^2$.

d/ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = k$ (k cho trước).

e/ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 5a^2$.

f/ $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MD^2$.

g/ $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 3a^2$.

Bài 368. Cho ΔABC . Tìm tập hợp điểm M thỏa điều kiện

a/ $MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$.

b/ $3MA^2 - 2MB^2 - MC^2 = 0$.

c/ $2MB^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = BC^2$.

d/ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = k$ (k cho trước).

e/ $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0$.

f/ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = MC^2 - MB^2 + BC^2$.

g/ $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MC}$.

h/ $MA^2 = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$.

i/ $MA^2 + MB^2 + MC^2 = AB^2 + AC^2$.

k/ $2MA^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$.

$$I/ \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} \right) \left(2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right) = 0. \quad m/ 2MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}.$$

Bài 369. Cho tứ giác ABCD, I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2} IJ^2.$$

Bài 370. Cho ΔABC đều cạnh a. Tìm tập điểm M thỏa điều kiện

$$a/ MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2.$$

$$b/ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MB}.$$

$$c/ MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0.$$

$$d/ \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MA^2 + \frac{a^2}{2}.$$

$$e/ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{5a^2}{2}. \quad f/ MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2 = 0.$$

$$g/ 2MA^2 + MB^2 - MC^2 = a^2.$$

$$h/ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{a^2}{4}.$$

Bài 371. Cho hình bình hành ABCD. Biện luận theo k tập hợp những điểm thỏa mãn:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k.$$

Bài 372. Cho ΔABC có G là trọng tâm và M là điểm tùy ý.

$$a/ \text{ Chứng minh rằng: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

b/ Chứng minh rằng: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$. Từ đó suy ra vị trí của điểm M để $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

ĐS: $M \equiv G$.

Bài 373. Cho hình bình hành ABCD, tâm O, M là điểm bất kỳ.

$$a/ \text{ Chứng minh rằng: } MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2 - 2(OB^2 - OA^2).$$

b/ Giả sử M di động trên đường tròn (D), tìm các vị trí của M để $MA^2 - MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

ĐS: M là hình chiếu vuông góc của D lên (D).

Bài 374. Cho ΔABC đều, cạnh bằng 6 (cm). Lấy M là một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC .

Đặt $S = MA^2 - MB^2 - MC^2$. Tìm vị trí của điểm M để S đạt giá trị nhỏ nhất, lớn nhất ?

$$\underline{\text{ĐS:}} \quad S_{\min} = -a^2, \quad S_{\max} = \frac{2a^2}{3}.$$

Bài 375. Cho ΔABC , G là trọng tâm và M là điểm tùy ý.

a/ Chứng minh rằng vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí M.

b/ Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Chứng minh rằng:

$$MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{v}.$$

c/ Giả sử M di động trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Tìm vị trí của điểm M để

$MA^2 + MB^2 - 2MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

Bài 376. Cho ΔABC nhọn. Tìm điểm M sao cho $MA + MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 377. Cho ΔABC có $\hat{A} = 120^\circ$. Tìm điểm M sao cho $MA + MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 378. Cho ΔABC nhọn. Tìm trên các đường thẳng BC, CA, AB các điểm X, Y, Z sao cho chu vi ΔXYZ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 379. Cho ΔABC có M là điểm tùy ý. Tìm vị trí M trong các trường hợp sau

a/ $MA^2 + MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b/ M thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $MA^2 + 3MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 380. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O.

a/ Chứng minh rằng: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = a^2 \Leftrightarrow M$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

b/ Chứng minh rằng: $MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MD^2 = 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MD})$.

c/ Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + MB^2 + MC^2 - 3MD^2$ khi M di động trên đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD.

Email: vandoan_automobile@yahoo.com.vn --- Phone: 0929.647.789 --- 03755607

C – HỆ THỨC LƯỢNG TAM GIÁC



Cho ΔABC có:

- Độ dài các cạnh: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.
- Độ dài các đường trung tuyến vẽ từ các đỉnh A, B, C : m_a, m_b, m_c
- Độ dài các đường cao vẽ từ các đỉnh A, B, C : h_a, h_b, h_c
- Bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác: R, r
- Nửa chu vi tam giác: p
- Diện tích tam giác: S

1. Định lí côsin:
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{cases}$$

2. Định lí sin:
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3. Độ dài trung tuyến:
$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \end{cases}$$

4. Diện tích tam giác:
$$S = \begin{cases} = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c \\ = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C \\ = \frac{abc}{4R} = pr \\ = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \end{cases}$$

Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác khi biết một số yếu tố cho trước.

5. Hệ thức lượng trong tam giác vuông (nhắc lại)

Cho ΔABC vuông tại A , AH là đường cao.

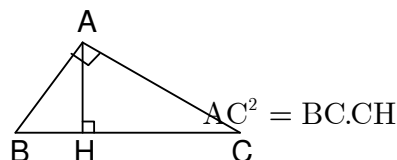
• $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (định lí Pi-ta-go)

• $AB^2 = BC \cdot BH$,

• $AH^2 = BH \cdot CH$,

• $AH \cdot BC = AB \cdot AC$

• $b = a \cdot \sin B = a \cdot \cos C = c \tan B = c \cot C$; $c = a \cdot \sin C = a \cdot \cos B = b \tan C = b \cot C$



6. Hệ thức lượng trong đường tròn (bổ sung)

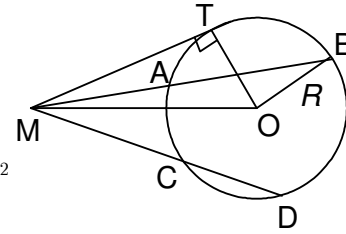
Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M cố định.

- Từ M vẽ hai cát tuyến MAB, MCD .

$$P_{M/(O)} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = MO^2 - R^2$$

- Nếu M ở ngoài đường tròn, vẽ tiếp tuyến MT .

$$P_{M/(O)} = MT^2 = MO^2 - R^2$$

**BÀI TẬP ÁP DỤNG**

Bài 1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta có;

a) $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$ b) $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$

c) $h_a = 2R \sin B \sin C$ d) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

e) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

Bài 2. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

a) Nếu $b + c = 2a$ thì $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ b) Nếu $bc = a^2$ thì $\sin B \sin C = \sin^2 A$, $h_b h_c = h_a^2$

c) A vuông $\Leftrightarrow m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$

Bài 3. Cho tứ giác lồi $ABCD$, gọi α là góc hợp bởi hai đường chéo AC và BD .

a) Chứng minh diện tích S của tứ giác cho bởi công thức: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$.

b) Nêu kết quả trong trường hợp tứ giác có hai đường chéo vuông góc.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , $BC = a$, đường cao AH .

a) Chứng minh $AH = a \cdot \sin B \cdot \cos B$, $BH = a \cdot \cos^2 B$, $CH = a \cdot \sin^2 B$.

b) Từ đó suy ra $AB^2 = BC \cdot BH$, $AH^2 = BH \cdot HC$.

Bài 5. Cho $\triangle AOB$ cân đỉnh O , OH và OK là các đường cao. Đặt $OA = a$, $\widehat{AOH} = \alpha$.

a) Tính các cạnh của $\triangle OAK$ theo a và α .

b) Tính các cạnh của các tam giác OHA và AKB theo a và α .

c) Từ đó tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ theo $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$.

Bài 6. Giải tam giác ABC , biết:

a) $c = 14$; $\widehat{A} = 60^\circ$; $\widehat{B} = 40^\circ$

b) $b = 4,5$; $\widehat{A} = 30^\circ$; $\widehat{C} = 75^\circ$

c) $c = 35$; $\widehat{A} = 40^\circ$; $\widehat{C} = 120^\circ$

d) $a = 137,5$; $\widehat{B} = 83^\circ$; $\widehat{C} = 57^\circ$

Bài 7. Giải tam giác ABC , biết:

a) $a = 6,3$; $b = 6,3$; $\widehat{C} = 54^\circ$

b) $b = 32$; $c = 45$; $\widehat{A} = 87^\circ$

c) $a = 7$; $b = 23$; $\widehat{C} = 130^\circ$

d) $b = 14$; $c = 10$; $\widehat{A} = 145^\circ$

Bài 8. Giải tam giác ABC , biết:

a) $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$

b) $a = 6$; $b = 7,3$; $c = 4,8$

c) $a = 4$; $b = 5$; $c = 7$

d) $a = 2\sqrt{3}$; $b = 2\sqrt{2}$; $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$