# Chuyên đề 2: LƯỢNG GIÁC

## ✓ *Vấn đề 1:* PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

### A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

**1. Phương trình lượng giác cơ bản**

$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k2\pi$

$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right.$

$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$

$\cot x = \cot\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$)

**2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác**

$a\sin^2x + b\sin x + c = 0$. Đặt $t = \sin x$, $|t| \le 1$

$a\cos^2x + b\cos x + c = 0$. Đặt $t = \cos x$, $|t| \le 1$

$a\tan^2x + b\tan x + c = 0$. Đặt $t = \tan x$

$a\cot^2x + b\cot x + c = 0$. Đặt $t = \cot x$

**3. Phương trình bậc nhất đối với sinx, cosx**

$$a\sin x + b\cos x = c \ (*)$$

Điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \ge c^2$

- *Cách 1:* Chia hai vế cho $\sqrt{a^2+b^2} \ne 0$

$(*) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Do $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$

Nên có thể đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$

Khi đó:

$(*) \Leftrightarrow \sin x\cos\alpha + \sin\alpha\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- *Cách 2:* Chia hai vế cho a (giả sử $a \ne 0$)

$(*) \Leftrightarrow \sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$

Đặt $\frac{b}{a} = \tan\alpha$. Khi đó: $(*) \Leftrightarrow \sin x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos x = \frac{c}{a}$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos\alpha + \sin\alpha\cos x = \frac{c}{a}\cos\alpha \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$$

- *Cách 3:* Đặt ẩn số phụ.
  - Xét $x = (2k+1)\pi$ với ($k \in \mathbb{Z}$) có là nghiệm 0
  - Xét $x \neq (2k+1)\pi$ với ($k \in \mathbb{Z}$)

  Đặt $t = \tan\frac{x}{2}$

  Khi đó: $(*) \Leftrightarrow a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} = c \Leftrightarrow (b+c)t^2 - 2at + c - b = 0$

**4. Phương trình đối xứng:** $a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$

Khi đó: $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$

Thay vào phương trình ta được phương trình đại số theo t.

- *Chú ý:* $a(\sin x - \cos x) + b\sin x\cos x + c = 0$

  Đặt $t = \sin x - \cos x$ (với $|t| \leq \sqrt{2}$)

**5. Phương trình đẳng cấp bậc 2 đối với sinx, cosx**

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

- Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) có là nghiệm không?
- Xét $\cos x \neq 0$. Chia 2 vế cho $\cos^2 x$ ta thu được phương trình bậc 2 theo tanx.

- *Chú ý:* Nếu là phương trình đẳng cấp bậc k đối với sinx, cosx thì ta xét cosx = 0 và xét cosx ≠ 0 chia 2 vế của phương trình cho $\cos^k x$ và ta thu được một phương trình bậc k theo tanx.

## B. ĐỀ THI

**Bài 1:** ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2011

Giải phương trình: $\frac{1+\sin 2x + \cos 2x}{1+\cot^2 x} = \sqrt{2}\sin x.\sin 2x$.

***Giải***

Điều kiện: $\sin x \neq 0$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \sqrt{2}\sin x.\left(2\sin x\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x\left(1+\sin 2x+\cos 2x\right)=2\sqrt{2}\sin^2 x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow 1+\sin 2x+\cos 2x=2\sqrt{2}\cos x \text{ (vì } \sin x\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+2\sin x\cos x-2\sqrt{2}\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \vee \cos x+\sin x=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \vee \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \text{ } (k\in Z) \text{ (Thỏa điều kiện } \sin x\neq 0).$$

Vậy nghiệm của (1) là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$ $(k\in Z)$.

**Bài 2:** ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2011

| Giải phương trình: $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$ |
|---|

***Giải***

$$\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$$

$\Leftrightarrow$ $2\sin x.\cos^2 x + \sin x.\cos x = 2\cos^2 x - 1 + \sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow$ $\sin x.\cos x(2\cos x + 1) = \cos x(2\cos x + 1) + \sin x - 1$

$\Leftrightarrow$ $\cos x\,(2\cos x + 1)(\sin x - 1) = \sin x - 1$

$\Leftrightarrow$ $\sin x - 1 = 0$ hoặc $\cos x\,(2\cos x + 1) = 1$

$\Leftrightarrow$ $\sin x = 1$ hoặc $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $\sin x = 1$ hoặc $\cos x = -1$ hoặc $\cos x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \text{ hoặc } x=\pi+k2\pi \text{ hoặc } x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \text{ hoặc } x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3} (k\in Z)$$

**Bài 3:** ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2011

| Giải phương trình: $\dfrac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$ |
|---|

***Giải***

$\dfrac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$. Điều kiện: $\tan x \neq -\sqrt{3}$ và $\cos x\neq 0$.

$$\Leftrightarrow \sin 2x+2\cos x-\sin x-1=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\cos x-\left(\sin x+1\right)=0$$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x+1)-(\sin x+1)=0 \Leftrightarrow (\sin x+1)(2\cos x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1 \text{ (Loại vì khi đó cosx = 0)}\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \ (k\in Z).$$

So với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$ ($k\in Z$).

**Bài 4:** CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2011

| Giải phương trình: $\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0$. |
|---|

***Giải***

$\cos 4x + 12\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 + 6(1-\cos 2x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x - 3\cos 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1$ hay $\cos 2x = 2$ (loại)

$\Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi$ ($k\in Z$).

**Bài 5:** ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2010

| Giải phương trình: $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ |
|---|

***Giải***

Điều kiện: $\cos x\neq 0$ và $\tan x\neq -1$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{(1+\sin x+\cos 2x).(\sin x+\cos x)}{1+\tan x}=\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+\sin x+\cos 2x).(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}\cos x=\cos x$$

$\Leftrightarrow 1+\sin x+\cos 2x=1 \Leftrightarrow \sin x+\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=1$(loại) hay $\sin x=-\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ hay $x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi$ ($k\in Z$)

**Bài 6:** ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2010

| Giải phương trình $(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$ |
|---|

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương:

$(2\sin x\cos x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos x + 2) + \sin x(2\cos^2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos x + 2) + \sin x.\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x\,(\cos x + \sin x + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cos x + \sin x + 2 = 0 \ \ (\text{vn})\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\ 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

**Bài 7:** ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2010

| |
|---|
| Giải phương trình $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$ |

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương:

$$2\sin x\cos x - 1 + 2\sin^2 x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) + 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x + \sin x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x + \sin x = -2\ \ (\text{VN})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right.\ (k \in \mathbb{Z}).$$

**Bài 8:** CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2010

| |
|---|
| Giải phương trình $4\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2(8\sin x - 1)\cos x = 5$. |

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương:

$$2(\cos 4x + \cos x) + 16\sin x\cos x - 2\cos x = 5$$

$$\Leftrightarrow\ 2\cos 4x + 8\sin 2x = 5\ \Leftrightarrow\ 2 - 4\sin^2 2x + 8\sin 2x = 5$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 2x - 8\sin 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{3}{2}\ (\text{loại})\ \text{hay}\ \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi\ \text{hay}\ 2x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi\ \text{hay}\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

**Bài 9:** ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2009

| |
|---|
| Giải phương trình: $\dfrac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$. |

***Giải***

Điều kiện: sinx ≠ 1 và sinx ≠ $-\frac{1}{2}$ (*)

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$(1-2\sin x)\cos x = \sqrt{3}(1+2\sin x)(1-\sin x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x-\sqrt{3}\sin x = \sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+k2\pi \text{ hoặc } x = -\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3} \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Kết hợp (*), ta được nghiệm: $x = -\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbb{Z})$

**Bài 10:** ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2009

| |
|---|
| Giải phương trình: sinx + cosxsin2x + $\sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right)$ |

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương:

$$(1-2\sin^2 x)\sin x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x \Leftrightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right) = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow 4x = 3x-\frac{\pi}{6}+k2\pi \text{ hoặc } 4x = -3x+\frac{\pi}{6}+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy: $x = -\frac{\pi}{6}+k2\pi$; $x = \frac{\pi}{42}+k\frac{2\pi}{7}\ (k\in\mathbb{Z})$.

**Bài 11:** ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2009

| |
|---|
| Giải phương trình: $\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x\cos 2x-\sin x = 0$ |

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương:

$$\sqrt{3}\cos 5x-(\sin 5x+\sin x)-\sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x-\frac{1}{2}\sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}-5x\right) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}-5x = x+k2\pi \text{ hay } \frac{\pi}{3}-5x = \pi-x+k2\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy: $x = \frac{\pi}{18}+k\frac{\pi}{3}$ hay $x = -\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$

**Bài 12:** CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2009

Giải phương trình $(1 + 2\sin x)^2\cos x = 1 + \sin x + \cos x$

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương:

$(1 + 4\sin x + 4\sin^2 x)\cos x = 1 + \sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow \cos x + 4\sin x\cos x + 4\sin^2 x\cos x = 1 + \sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow 1 + \sin x = 0$ hay $4\sin x\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \sin x = -1$ hay $\sin 2x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ hay $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$ hay $x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

**Bài 13:** ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2008

Giải phương trình: $\dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\dfrac{7\pi}{4} - x\right)$

***Giải***

Ta có: $\sin\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos x$

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = -4\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x) = -2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\sin x\cos x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)\left(1 + \sqrt{2}\sin 2x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x + \sin x = 0 \\ \sin 2x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \sin 2x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{8} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Bài 14:** ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2008

Giải phương trình: $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x\cos x$

***Giải***

$$\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x.\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x.\cos x \qquad (1)$$

**<u>Cách 1:</u>** Phương trình đã cho tương đương:

$$\sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sqrt{3}\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \tan x = -\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nghiệm của phương trình là: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ và $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

**<u>Cách 2:</u>**
- cosx = 0 không phải là nghiệm của phương trình (1).
- Chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^3 x$ ta được:

$$\tan^3 x - \sqrt{3} = \tan x - \sqrt{3}\tan^3 x$$

$$\Leftrightarrow (\tan x + \sqrt{3})(\tan^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -\sqrt{3}\\ \tan x = \pm 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 15:** ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2008

| Giải phương trình: 2sinx(1 + cos2x) + sin2x = 1 + 2cosx. |
|---|

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương:

$4\sin x.\cos^2 x + \sin 2x - 1 - 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\sin x\cos x - 1) + (\sin 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin 2x - 1)(2\cos x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \text{ hay } \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hay } x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ hay } x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 16:** CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2008

| Giải phương trình: $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x$. |
|---|

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{1}{2}\sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\sin 3x - \sin\frac{\pi}{3}\cos 3x = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - \frac{\pi}{3} = 2x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = \pi - 2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 17:** ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007

| |
|---|
| Giải phương trình: $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$ |

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương:

$(\sin x + \cos x)(1 + \sin x\cos x) = (\sin x + \cos x)^2$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

**Bài 18:** ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007

| |
|---|
| Giải phương trình: $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$. |

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$\sin 7x - \sin x + 2\sin^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x(2\sin 3x - 1) = 0$

- $\cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\ (k \in \mathbb{Z})$
- $\sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$.

**Bài 19:** ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2007

| |
|---|
| Giải phương trình: $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$ |

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$1 + \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

**Bài 20:** ĐẠI HỌC SÀI GÒN KHỐI A NĂM 2007

| |
|---|
| Giải phương trình: $3\tan^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{1 - \sin x}{\sin x}\right)$ |

***Giải***

Điều kiện: $\sin x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$3\cot^2 x = \frac{2}{\sin x} - 2 \Leftrightarrow \frac{3}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sin x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{\sin x} = 1 \\ \dfrac{1}{\sin x} = -\dfrac{1}{3} (\text{vô nghiệm}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 21:** ĐẠI HỌC SÀI GÒN KHỐI B NĂM 2007

Giải phương trình: $1 + \sin x + \cos x + \tan x = 0$

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$$1 + \sin x + \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \text{ (điều kiện: } \cos x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 22:** CAO ĐẲNG XÂY DỰNG SỐ 2 NĂM 2007

Giải phương trình: $\cos^4 x - \sin^4 x + \cos 4x = 0$.

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2\cos^2 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -1 \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 23:** CAO ĐẲNG KỸ THUẬT CAO THẮNG NĂM 2007

Giải phương trình: $2\sin^3 x + 4\cos^3 x = 3\sin x$.

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$$2\sin^3 x + 4\cos^3 x - 3\sin x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + 3\sin x\cos^2 x - 4\cos^3 x = 0 \quad (1)$$

Dễ thấy $\cos x = 0$ không phải là nghiệm của (1)

Do đó $\cos x \neq 0$, ta chia hai vế của (1) cho $\cos^3 x$, ta được:

(1) $\Leftrightarrow \tan^3 x + 3\tan x - 4 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan^2 x + \tan x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow \tan x = 1$ (do $\tan^2 x + \tan x + 4 > 0$ với $\forall x$)

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 24:** ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

| |
|---|
| Giải phương trình: $\dfrac{2\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0$ |

***Giải***

Điều kiện: $\sin x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (1).

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$\Leftrightarrow$ 2(cos$^6$x + sin$^6$x) – sinxcosx = 0

$\Leftrightarrow\ 2\left(1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x\right)-\dfrac{1}{2}\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow\ 3\sin^2 2x+\sin 2x-4=0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}).$

Do điều kiện (1) nên: $x=\dfrac{5\pi}{4}+2m\pi.\quad (m\in\mathbb{Z}).$

**Bài 25:** ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2006

| |
|---|
| Giải phương trình: $\cot x+\sin x\left(1+\tan x\tan\dfrac{x}{2}\right)=4$ |

***Giải***

Điều kiện: sinx ≠ 0, cosx ≠ 0, (1)

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{\cos x}{\sin x}+\sin x\,\frac{\cos x\cos\frac{x}{2}+\sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=4 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x\cos x}=4 \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi \text{ hay } x=\frac{5\pi}{12}+k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z}), \text{ thỏa mãn (1)}$$

**Bài 26:** ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

| |
|---|
| Giải phương trình: cos3x + cos2x – cosx – 1 = 0. |

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$-2\sin 2x.\sin x-2\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow \sin x$ hay $\sin 2x+\sin x=0$

$\Leftrightarrow\ \sin x=0$ hay $2\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow x = k\pi \quad$ hay $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

**Bài 27:** ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

Giải phương trình: $\cos3x.\cos^3x - \sin3x.\sin^3x = \frac{2+3\sqrt{2}}{8}$

***Giải***

Ta có công thức: $\sin3x = 3\sin x - 4\sin^3x \Rightarrow \sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$

và $\cos3x = 4\cos^3x - 3\cos x \Rightarrow \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}$

Từ đó phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\cos 3x\left(\frac{3\cos x + \cos 3x}{4}\right) - \sin 3x\left(\frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\right) = \frac{2+3\sqrt{2}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 3x + \sin^2 3x + 3(\cos 3x\cos x - \sin 3x\sin x) = \frac{2+3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 3\cos 4x = \frac{2+3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 28:** ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2006

Giải phương trình: $(2\sin^2x - 1)\tan^22x + 3(2\cos^2x - 1) = 0$

***Giải***

Điều kiện $\cos2x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$-\cos2x\tan^22x + 3\cos2x = 0 \Leftrightarrow \cos2x(\tan^22x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\ (\text{loại})\\ \tan^2 2x - 3 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \tan 2x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 29:** ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

Giải phương trình: $\cos^3x + \sin^3x + 2\sin^2x = 1$

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(\sin x + \cos x)(1 - \cos x\sin x) - \cos2x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x.\cos x - (\cos x - \sin x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \cos x)(1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 30:** ĐỀ DỰ BỊ 1

| |
|---|
| Tìm nghiệm trên khoảng (0; π) của phương trình: $$4\sin^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$$ |

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\Leftrightarrow\ 2(1-\cos x)-\sqrt{3}\cos 2x=1+1+\cos\left(2x-\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2-2\cos x-\sqrt{3}\cos 2x=2-\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=-2\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x=-\cos x \Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos(\pi-x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3} \\ x=-\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

Do $x\in(0;\pi)$ nên ta có nghiệm: $x_1=\frac{5\pi}{18}, x_2=\frac{17\pi}{18}, x_3=\frac{5\pi}{6}$.

**Bài 31:** ĐỀ DỰ BỊ 1

| |
|---|
| Giải phương trình: $\sin x\cos 2x+\cos^2 x\left(\tan^2 x-1\right)+2\sin^3 x=0$. |

***Giải***

Điều kiện: $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow \sin x\neq \pm 1$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\sin x.\cos 2x+\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-1\right)+2\sin^3 x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\cos 2x+2\sin^2 x\right)-\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(\cos 2x+1-\cos 2x)-\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sin x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=-1\ \text{(loại)} \\ \sin x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. k\in\mathbb{Z}$$

**Bài 32:** ĐỀ DỰ BỊ 2

| |
|---|
| Giải phương trình: $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-3\tan^2 x=\frac{\cos 2x-1}{\cos^2 x}$ |

***Giải***

Điều kiện: $\cos x \neq 0$ và $\sin x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$-\cot x - 3\tan^2 x = \frac{-2\sin^2 x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow -\frac{1}{\tan x} - \tan^2 x = 0 \Leftrightarrow \tan^3 x = -1$$

$\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{-\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ thỏa điều kiện.

**Bài 33:**

| Giải phương trình: $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$ |
|---|

***Giải***

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x).\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 3(1 - \sin x)\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$$

$\Leftrightarrow (5\sin x - 2)(1 + \sin x) = 3\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 5\sin x + 5\sin^2 x - 2 - 2\sin x = 3\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \quad \text{(thỏa mãn đk)} \\ \sin x = -2 \quad \text{(loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 34:**

| Giải phương trình $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$. |
|---|

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = 2\sin x\cos x - \sin x$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x(2\cos x - 1)$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \tan x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 35:** ĐỀ DỰ BỊ 1

| Giải phương trình: $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3\sin x$. |
|---|

***Giải***

$\cos x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình nên ta chia 2 vế cho $\cos^3 x$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$4\tan^3 x + 4 = 1 + \tan^2 x + 3\tan x(1 + \tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow (\tan x - 1)(\tan^2 x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \text{ hay } \tan^2 x = 3 \Leftrightarrow \tan x = 1 \text{ hay } \tan x = \pm\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ hay } x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 36:** ĐỀ DỰ BỊ 1

Giải phương trình: $\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

***Giải***

Điều kiện $\cos x\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\sin x - \cos x = 2\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos x\sin x$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{ hay } \sin 2x = -1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 37:**

Giải phương trình $\cot x - 1 = \dfrac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

***Giải***

Điều kiện $\begin{cases} \tan x \neq -1 \\ \sin x, \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq k\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\cos x}{\cos x + \sin x} + \sin^2 x - \cos x\sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = (\cos x - \sin x)\cos x + \sin x(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \text{ hay } 1 = \sin x\cos x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \tan x = 1 \text{ hay } 1 + \tan^2 x = \tan x - \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ 2\tan^2 x - \tan x + 1 = 0 \ \ (\text{vô nghiệm}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 38:**

Giải phương trình: $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \dfrac{2}{\sin 2x}$

***Giải***

Điều kiện $\sin 2x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow 2\cos 2x + 4\sin^2 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \ \ (\text{loại}) \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 39:**

Giải phương trình $\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\dfrac{x}{2} = 0.$

***Giải***

Điều kiện: $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{2}\tan^2 x - \frac{1 + \cos x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 + \sin x} = 1 + \cos x$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos x = 0 \text{ hay } 1 - \cos x = 1 + \sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \text{ hay } \tan x = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \ \ (\text{nhận}) \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ \ (\text{nhận}) \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 40:** ĐỀ DỰ BỊ 1

Giải phương trình: $3 - \tan x(\tan x + 2\sin x) + 6\cos x = 0$.

***Giải***

Điều kiện: $\cos x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$3 - \frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{\sin x}{\cos x} + 2\sin x\right) + 6\cos x = 0$$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x - \sin x(\sin x + 2\sin x.\cos x) + 6\cos^3 x = 0$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x(1 + 2\cos x) - \sin^2 x(1 + 2\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow 1 + 2\cos x = 0$ hay $3\cos^2 x - \sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2}$ hay $\tan^2 x = 3 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ hay $\tan x = \pm\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

**Bài 41:** ĐỀ DỰ BỊ 1

Giải phương trình: $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$3(1 + \cos 4x) - 2\cos^2 x(4\cos^4 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 6\cos^2 2x - 2\cos^2 x(2\cos^2 x - 1)(2\cos^2 x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 6\cos^2 2x - 2\cos^2 x(\cos 2x)(2\cos^2 x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x = 0$ hay $3\cos 2x - \cos^2 x(2\cos^2 x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ 2\cos^4 x - 5\cos^2 x + 3 = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cos^2 x = 1\\ \cos^2 x = \dfrac{3}{2}\ (\text{loại})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x = k\pi\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

**Bài 42:** ĐỀ DỰ BỊ 2

Giải phương trình: $\dfrac{\left(2 - \sqrt{3}\right)\cos x - 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)}{2\cos x - 1} = 1$.

***Giải***

Điều kiện: $\cos x \neq \dfrac{1}{2}$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$(2-\sqrt{3})\cos x-\left[1-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]=2\cos x-1 \Leftrightarrow -\sqrt{3}\cos x+\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \tan x=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi;\ (k\in\mathbb{Z})$$

Kết hợp lại điều kiện $\cos x \neq \frac{1}{2}$. Ta chọn $x=\frac{4\pi}{3}+m2\pi,\ m\in\mathbb{Z}$

**Bài 43:** ĐỀ DỰ BỊ 1

Giải phương trình: cotx = tanx + $\frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$

***Giải***

Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \pm 1$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{2\cos 4x}{2\sin x.\cos x} \Leftrightarrow \cos^2x = \sin^2x + \cos 4x.$$

$$\Leftrightarrow \cos^2x - \sin^2x - (2\cos^2 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 1(\text{loại}) \text{ hay } \cos 2x = -\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

**Bài 44:**

Giải phương trình $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$.

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}-\frac{1+\cos 12x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 6x = \cos 12x + \cos 10x$$

$$\Leftrightarrow \cos 7x\cos x = \cos 11x\cos x \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ hay } \cos 11x = \cos 7x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x=k\frac{\pi}{2} \\ x=k\frac{\pi}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\frac{\pi}{2} \\ x=k\frac{\pi}{9} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

**Bài 45:** ĐỀ DỰ BỊ 2

Giải phương trình: $\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{5\sin 2x}=\frac{1}{2}\cot 2x-\frac{1}{8\sin 2x}$.

***Giải***

Điều kiện $\sin 2x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$$\frac{1-2\sin^2 x.\cos^2 x}{5\sin 2x}=\frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{1}{8\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x-5\cos 2x+\frac{9}{4}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=\frac{9}{2}(\text{loại})\\ \cos 2x=\frac{1}{2}(\text{nhận})\end{array}\right.$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$$

**Bài 46:** ĐỀ DỰ BỊ 1

| |
|---|
| Giải phương trình $\tan^4 x+1=\dfrac{\left(2-\sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$. |

***Giải***

Điều kiện $\cos x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

$\sin^4 x + \cos^4 x = (2 - \sin^2 2x).\sin 3x$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x = (2 - \sin^2 2x).\sin 3x$

$\Leftrightarrow (2 - \sin^2 2x) = 2(2 - \sin^2 2x).\sin 3x$

$\Leftrightarrow 2 - \sin^2 2x = 0$( loại) hay $1 = 2\sin 3x$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\\ x=\frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}\end{cases} (k\in\mathbb{Z})$$

**Bài 47:** CAO ĐẲNG KINH TẾ - KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP I

| |
|---|
| Giải phương trình: $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3-\sin x}{2}$ |

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{3-\sin x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)}{2}=\frac{3-\sin x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\sin x+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 1-\sin x+2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos 2x-\sin x=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 48:** CAO ĐẲNG KINH TẾ - KỸ THUẬT CÔNG NGHIỆP TP. HCM

| Giải phương trình: cos3x.tan5x = sin7x |
|---|

***Giải***

Điều kiện: $\cos 5x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

sin5x. cos3x = sin7x. cos5x

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 8x) = \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 12x)$$

$$\Leftrightarrow \sin 12x = \sin 8x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 49**: CAO ĐẲNG CÔNG NGHIỆP THỰC PHẨM

| Giải phương trình: $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ |
|---|

***Giải***

Điều kiện: $\cos x \neq 0$; $\sin x \neq 0$

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương:

2(sinx + cosx) = sin2x(cosx + sinx)

⇔ sinx + cosx = 0 hay 2 = sin2x ( vô nghiệm)

$$\Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 50:** CĐSP TW TP. HCM

| Giải phương trình: sin2x + cos2x + 3sinx – cosx – 2 = 0 |
|---|

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$2\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) - (2\sin^2 x - 3\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) - (\sin x - 1)(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0$ hay $\cos x - \sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ hay } \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \text{ hay } \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 51:** CAO ĐẲNG KINH TẾ ĐỐI NGOẠI

| |
|---|
| Giải phương trình: $\sin^6 x + \cos^6 x = 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ |

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$$1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = (\sin x + \cos x)^2 \Leftrightarrow 3\sin^2 2x + 4\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \text{ hay } \sin 2x = -\frac{4}{3} \text{ (loại)} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2} \ (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 52:** CAO ĐẲNG KINH TẾ TP. HCM

| |
|---|
| Giải phương trình: $\sin 2x \sin x + \cos 5x \cos 2x = \frac{1 + \cos 8x}{2}$ |

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{1}{2}[\cos x - \cos 3x] + \frac{1}{2}[\cos 7x + \cos 3x] = \frac{1 + \cos 8x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \cos 7x = 1 + \cos 8x \Leftrightarrow 2\cos 4x\cos 3x = 2\cos^2 4x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 0 \\ \cos 4x = \cos 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{k2\pi}{7} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

**Bài 53:** CAO ĐẲNG TÀI CHÍNH – HẢI QUAN

| |
|---|
| Giải phương trình: $\cos x.\cos 2x.\sin 3x = \frac{1}{4}\sin 2x$ |

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với: $2\cos x\cos 2x\sin 3x = \sin x\cos x$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ hay } 2\cos 2x\sin 3x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ hay } \sin 5x + \sin x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ hay } x = \frac{k\pi}{5} \ (k \in \mathbb{Z})$$

✓ ***Vấn đề 2:***

## GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC TRÊN MỘT MIỀN

### ĐỀ THI

**Bài 1:**

Tìm nghiệm thuộc khoảng (0; 2π) của phương trình:

$$5\left(\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)=\cos 2x+3.$$

***Giải***

Điều kiện $1 + 2\sin 2x \neq 0$ (1)

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với:

$5(\sin x + 2\sin 2x\sin x + \cos 3x + \sin 3x) = (\cos 2x + 3)(1 + 2\sin 2x)$

$\Leftrightarrow$ $5(\sin x + \cos x - \cos 3x + \cos 3x + \sin 3x) = (\cos 2x + 3)(1 + 2\sin 2x)$

$\Leftrightarrow$ $5(2\sin 2x\cos x + \cos x) = (\cos 2x + 3)(1 + 2\sin 2x)$

$\Leftrightarrow$ $5\cos x(1 + 2\sin 2x) = (\cos 2x + 3)(1 + 2\sin 2x)$

$\Leftrightarrow$ $5\cos x = \cos 2x + 3$ (Vì $1 + 2\sin 2x \neq 0$)

$\Leftrightarrow$ $5\cos x = 2\cos^2 x + 2 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ (thỏa điều kiện (1))

$\Leftrightarrow$ $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Vì nghiệm x thuộc khoảng (0; 2π) nên $x=\frac{\pi}{3} \vee x=\frac{5\pi}{3}$

**Bài 2:**

Tìm x thuộc đoạn [0; 14] nghiệm đúng phương trình:

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0.$$

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$4\cos^3 x - 3\cos x - 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow$ $4(\cos^3 x - 2\cos^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\cos x = 0 \vee \cos x = 2$ (loại) $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Vì $x \in [0; 14]$ nên $x = \frac{\pi}{2},\ x = \frac{3\pi}{2},\ x = \frac{5\pi}{2},\ x = \frac{7\pi}{2}$.

## ✓ *Vấn đề 3:*

## ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

### A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Phương trình Asinx + Bcosx = C có nghiệm $\Leftrightarrow A^2 + B^2 \geq C^2$.
- Sử dụng các phương pháp thường gặp như trong đại số.

## B. ĐỀ THI

**Bài 1:** ĐỀ DỰ BỊ 1

Xác định m để phương trình $2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + 2\sin 2x - m = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

***Giải***

Phương trình đã cho tương đương với:

$$2(1 - 2\sin^2 x.\cos^2 x) + 1 - 2\sin^2 2x + 2\sin 2x - m = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) + 1 - 2\sin^2 2x + 2\sin 2x = m$$

$$\Leftrightarrow -3\sin^2 2x + 2\sin 2x + 3 = m \qquad (1)$$

Đặt $t = \sin 2x$. Vì $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 \le 2x \le \pi \Rightarrow 0 \le \sin 2x \le 1 \Rightarrow 0 \le t \le 1$

(1) thành $\Leftrightarrow -3t^2 + 2t + 3 = m \qquad (2); \ 0 \le t \le 1$

Đặt $f(t) = -3t^2 + 2t + 3$

- $f'(t) = -6t + 2$ • $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$
- Bảng biến thiên

| t | $-\infty$ | 0 | | $\frac{1}{3}$ | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(t) | | | + | 0 | − | | |
| f(t) | | 3 | ↗ | $\frac{10}{3}$ | ↘ | 2 | |

- Nhận xét: (2) là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $\Delta$: y = m và đường cong (C). Từ đó (1) có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow \Delta \text{ và (C) có điểm chung trên } [0;1] \Leftrightarrow 2 \le m \le \frac{10}{3}.$$

**Bài 2:** ĐỀ DỰ BỊ 1

Cho phương trình $\frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3} = a \qquad (1) \qquad$ (a là tham số)

**a/** Giải phương trình (1) khi $a = \frac{1}{3}$.

**b/** Tìm a để phương trình (1) có nghiệm.

***Giải***

Tập xác định của phương trình (1): D = $\mathbb{R}$. Do đó:

(1) $\Leftrightarrow$ 2sinx + cosx + 1 = a(sinx – 2cosx + 3)

$\Leftrightarrow$ (2 – a)sinx + (2a + 1).cosx = 3a – 1

**a/** Khi a = $\frac{1}{3}$: (1) $\Leftrightarrow \frac{5}{3}\sin x + \frac{5}{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{R})$

**b/** Do $(2 - a)^2 + (2a + 1) \neq 0$ nên điều kiện cần và đủ để (1) có nghiệm là

$(2 - a)^2 + (2a + 1)^2 \geq (3a - 1)^2 \Leftrightarrow 2a^2 - 3a - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq a \leq 2$

## ✓ *Vấn đề 4:* BÀI TOÁN VỀ TAM GIÁC

### A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- Sử dụng công thức trong tam giác tương ứng
- Nhận dạng tam giác bằng cách rút gọn hệ thức đã cho hay chứng tỏ hệ thức đó là điều kiện dấu bằng của bất đẳng thức

**Hệ thức trong tam giác cần chú ý**

**a.** Định lí hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

**b.** Định lí hàm số cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

**c.** Định lí đường trung tuyến: $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$

**d.** Định lí đường phân giác: $l_a = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b + c}$

**e.** Diện tích tam giác:

$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R} = pr = (p - a).r_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

**f.** Bán kính đường tròn nội tiếp: $r = (p - a)\tan\frac{A}{2} = (p - b)\tan\frac{B}{2} = (p - c)\tan\frac{C}{2}$

**g.** Bán kính đường tròn bàng tiếp: $r_a = p.\tan\frac{A}{2}$

### B.ĐỀ THI

**Bài 1:** ĐỀ DỰ BỊ 1

Tìm các góc A, B, C của tam giác ABC để biểu thức:

$Q = \sin^2A + \sin^2B - \sin^2C$ đạt giá trị nhỏ nhất.

***Giải***

Ta có: $Q = \frac{1}{2}(1-\cos 2A) + \frac{1}{2}(1-\cos 2B) - \sin^2C$

$= 1 - \cos(A+B).\cos(A-B) - \sin^2 C = 1 + \cos C\cos(A-B) - 1 + \cos^2C$

$= \cos^2C + \cos C.\cos(A-B)$

$= \left[\cos C + \frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2 - \frac{1}{4}\cos^2(A-B) \geq -\frac{1}{4}$

Vậy $Q_{min} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \cos C = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 120^0 \\ A = B = 30^0 \end{cases}$

**Bài 2:** ĐỀ DỰ BỊ 2

Xác định hình dạng của tam giác ABC, biết rằng:

$$(p-a)\sin^2 A + (p-b)\sin^2 B = c.\sin A.\sin B$$

Trong đó BC = a, CA = b, AB = c, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

***Giải***

$(p-a)\sin^2A + (p-b)\sin^2B = c.\sin A.\sin B$

$\Leftrightarrow (p-a)a^2 + (p-b)b^2 = abc$ (định lý hàm sin)

$\Leftrightarrow \frac{(p-a)a}{bc} + \frac{(p-b)b}{ac} = \frac{p(p-a)a}{bc} + \frac{p(p-b)b}{ac} = p$

$\Leftrightarrow a(1+\cos A) + b(1+\cos B) = a + b + c$

$\left( \frac{p.(p-a)}{bc} = \frac{p.r}{b.c.\tan\frac{A}{2}} = \frac{abc}{4R}.\frac{1}{b.c.\tan\frac{A}{2}} = \frac{a}{4.R.\tan\frac{A}{2}} = \frac{\sin A}{2.\tan\frac{A}{2}} = \frac{1+\cos A}{2} \right)$

$\Leftrightarrow a\cos A + b\cos B = c$

$\Leftrightarrow \sin 2A + \sin 2B = 2\sin C$

$\Leftrightarrow 2\sin(A+B).\cos(A-B) = 2\sin C$

$\Leftrightarrow \cos(A-B) = 1 \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \Delta$ ABC cân tại C.

**Bài 3:** ĐỀ DỰ BỊ 2

Xét tam giác ABC có độ dài cạnh AB = c, BC = a, CA = b.

Tính diện tích tam giác ABC biết rằng: $b\sin C\,(b\cos C + c.\cos B) = 20$.

***Giải***

Tính diện tích tam giác

Từ b.sinC(b.cosC + c.cosB) = 20

$\Leftrightarrow 4R^2\sin B.\sin C(\sin B\cos C + \sin C.\cos B) = 20$

$\Leftrightarrow 4R^2.\sin B.\sin C.\sin A = 20$ (1)

Ta có: $S = \dfrac{abc}{4R} = \dfrac{8R^3.\sin A.\sin B.\sin C}{4R} = 2R^2.\sin A.\sin B.\sin C$ (2)

Thế (1) vào (2) $\Rightarrow$ S = 10 (đvdt)

**Bài 4:**

Gọi x, y, z là khoảng cách từ các điểm M thuộc miền trong của ΔABC có 3 góc nhọn đến các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2R}}$$. Dấu "=" xảy ra khi nào?

(a, b, c là các cạnh của ΔABC, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp).

***Giải***

Ta có: $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2R} = a\dfrac{a}{2R} + b.\dfrac{b}{2R} + c.\dfrac{c}{2R}$

$$\Rightarrow VP = a\sin A + b\sin B + c\sin C = a\frac{2S}{bc} + b\frac{2S}{ac} + c\frac{2S}{ab} = 2S\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right)$$

Mặt khác ta có: 2S = ax + by + cz, do đó:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2R} = (ax+by+cz)\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{c} + \frac{c}{ab}\right) \qquad (1)$$

Ta có: $\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ac} + \dfrac{c}{ab} = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b}\right) + \dfrac{1}{2b}\left(\dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c}\right) + \dfrac{1}{2c}\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right)$

Vậy $\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ac} + \dfrac{c}{ab} \ge \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ $\left(\text{Vì } \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} \ge 2\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2R} \ge (ax+by+cz)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\ge \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{ax} + \frac{1}{\sqrt{b}}\sqrt{by} + \frac{1}{\sqrt{c}}\sqrt{cz}\right)^2 = \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)^2$$

Suy ra: $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2R}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}=2 \\ a\sqrt{x}=b\sqrt{y}=c\sqrt{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ x=y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta ABC \text{ đều} \\ M: \text{trọng tâm} \end{cases}$

**Bài 5:**

Gọi A, B, C là 3 góc của tam giác ABC, chứng minh rằng để tam giác ABC đều thì điều kiện cần và đủ là:

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-2=\frac{1}{4}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$$

***Giải***

Ta có: $\cos^2\dfrac{A}{2}+\cos^2\dfrac{B}{2}+\cos^2\dfrac{C}{2}-2=\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{A-B}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}\cos\dfrac{C-A}{2}$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{A}{2}+4\cos^2\frac{B}{2}+4\cos^2\frac{C}{2}-8=\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2+2\cos A+2+2\cos B+2+2\cos C-8=\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos A+\cos B+\cos C-1)=\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$$

$\left(\text{Ta biết } \cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$$

Nhân hai vế cho $8\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$\Leftrightarrow$ 8sinAsinBsinC = (sinA + sinB)(sinB + sinC)(sinC + sinA)

$\Leftrightarrow$ sinA = sinB = sinC (Cauchy có VP $\geq$ VT)

$\Leftrightarrow$ A = B = C $\Leftrightarrow$ $\Delta$ABC đều.