

Bài 1. Vectơ và các phép toán trong không gian

A. Kiến thức cần nhớ

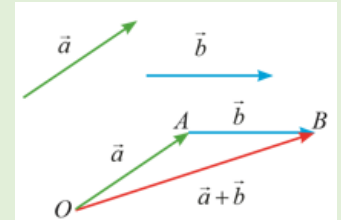
1. Vectơ trong không gian

- Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.
- Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A , điểm cuối B .
- **Độ dài của vectơ** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của nó. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.
- **Giá** của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
- Hai vectơ được gọi là **cùng phương** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng có thể **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.
- Hai vectơ được gọi là **bằng nhau** nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Nếu hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau thì ta viết là $\vec{a} = \vec{b}$.
- Hai vectơ được gọi là **đối nhau** nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.
- Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$
- Trong không gian, cho điểm O và vectơ $\vec{a}$, tồn tại duy nhất điểm M để $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

2. Tổng và hiệu của hai vectơ

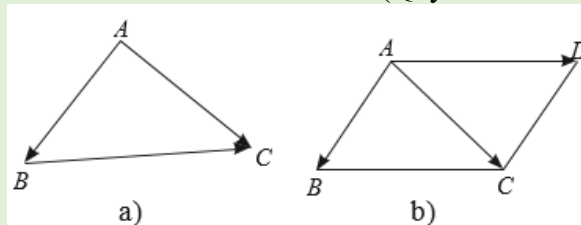
a) Tổng của hai vectơ

- Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy ba điểm O, A, B sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Ta gọi $\overrightarrow{OB}$ là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$.

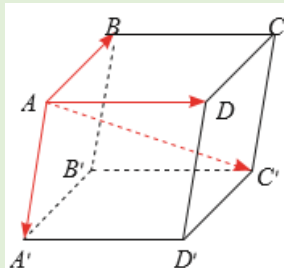


Nhận xét: Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng.

- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.
- Với ba điểm A, B, C ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc ba điểm)
- Nếu ABCD là hình bình hành ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (Quy tắc hình bình hành)

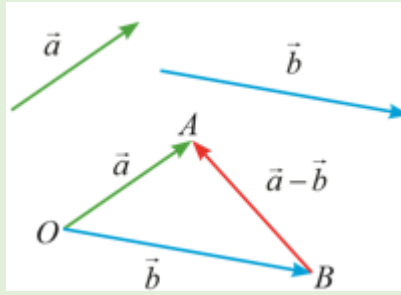


- Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ (Quy tắc hình hộp)



b) Hiệu của hai vector

- Trong không gian, cho hai vec tơ $\vec{a}, \vec{b}$. Ta gọi $\vec{a} + (-\vec{b})$ là hiệu của hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.



- Quy tắc hiệu: Trong không gian, với ba điểm A, B, C ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

3. Tích của một số với một vector

- Trong không gian, cho số $k \neq 0$ và vec tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của số k với vec tơ $\vec{a}$ là một vec tơ, kí hiệu $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$. Phép lấy tích của một số với một vec tơ được gọi là phép nhân một số với một vec tơ.
- Quy ước $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ và $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

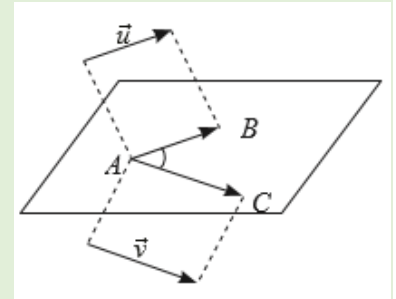
Nhận xét: Với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số h và k, ta có:

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$
- $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$
- $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$
- $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.
- Hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$
- Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

4. Tích vô hướng của hai vector

a) Góc giữa hai vector trong không gian

- Trong không gian, cho hai vec tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vec tơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ là góc giữa hai vec tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.



- $0^\circ \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^\circ$;
- Nếu $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ thì ta nói $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{u} \perp \vec{v}$.

b) Tích vô hướng của hai vector

Ta gọi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ là tích vô hướng của hai vec tơ $\vec{u}, \vec{v}$, ta có:

- Trong không gian, cho hai vec tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vec tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
- Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
 - b) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2$; $\vec{u}^2 \geq 0$, $\vec{u}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.
 - Với hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.
 - Với hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

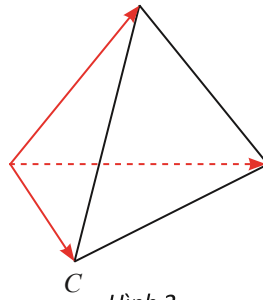
Nhận xét: Với ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và số k, ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$

B. Các dạng bài tập & phương pháp giải

Dạng 1. Vector trong không gian

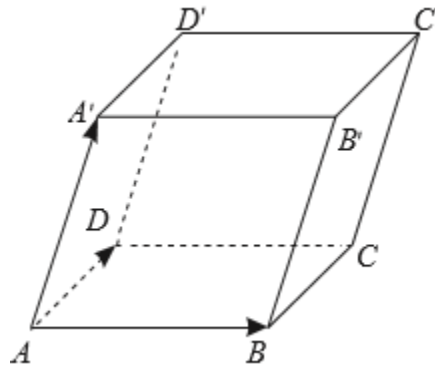
Ví dụ 1. Cho hình tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vector có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.



Hình 2

Giải: Ta có ba vector $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình vẽ).



- Giá của ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ có cùng nằm trong một mặt phẳng không?
- Tìm các vector bằng vector $\overrightarrow{AB}$.
- Tìm các vector đối của vector $\overrightarrow{AD}$.

Giải

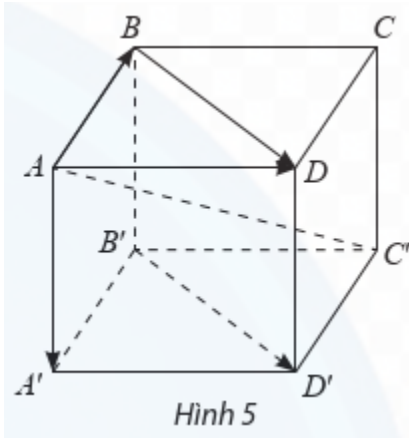
- Giá của ba vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ lần lượt là ba đường thẳng AB, AD, AA' . Chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng vì bốn điểm A, B, D, A' không đồng phẳng.
- Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $AA'B'B$ là hình bình hành, suy ra $AB \parallel A'B'$ và $AB = A'B'$. Ta có hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng và có độ dài bằng nhau, suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'C'}$.
- Hai vector $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DA}$ có độ dài bằng nhau và ngược hướng, suy ra $\overrightarrow{DA}$ là vector đối của $\overrightarrow{AD}$. Ta có $ABCD$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AD}$ có cùng độ dài và ngược hướng với $\overrightarrow{CB}$, suy ra $\overrightarrow{CB}$ là vector đối của $\overrightarrow{AD}$. Tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{D'A'}, \overrightarrow{C'B'}$ là vector đối của $\overrightarrow{AD}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

- Chỉ ra các vector có điểm đầu là S và điểm cuối là các đỉnh của đa giác đáy.
- Tìm các vector có độ dài bằng độ dài của vector SA .
- Tìm các vector đối của vector CB .

Dạng 2. Tổng và hiệu của hai vector

Ví dụ 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (Hình vẽ).

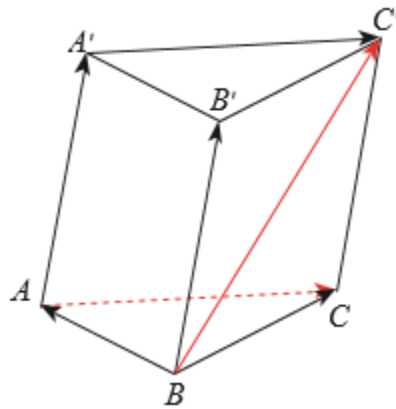


a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, tìm vector tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

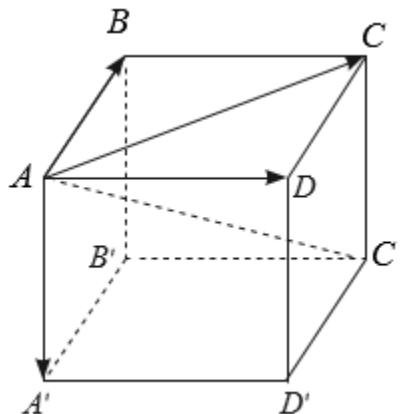
b) So sánh hai vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'D'}$.

c) Giải thích tại sao $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{AD}$.

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tìm các vector tổng $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'}$; $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'}$.



Ví dụ 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



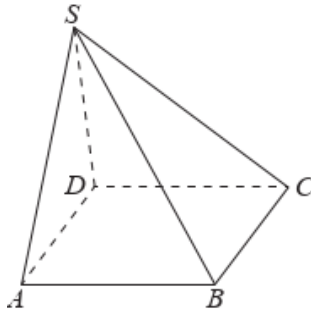
a) Tìm các vector tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$.

b) Dùng kết quả của câu a và tính chất kết hợp của phép cộng vector để chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Ví dụ 7. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Thực hiện các phép toán sau đây:

- a) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$ b) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$ c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$ d) $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AB}$

Ví dụ 8. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành. Tìm các vec tơ hiệu $\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{AD}$.



Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Tìm các vector hiệu $\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CS} - \overrightarrow{DA}$.

Ví dụ 10. Cho tứ diện $ABCD$ có M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy thực hiện các phép toán sau đây:

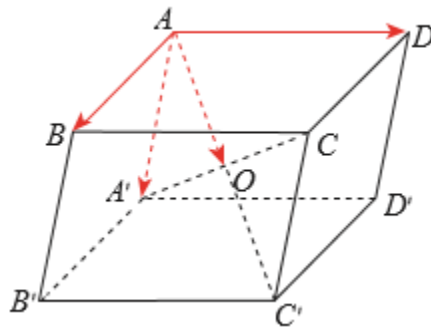
- a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ND}$ b) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NC}$

Ví dụ 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng đơn vị. Tìm độ dài các vector sau đây:

- a) $\vec{a} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}$ b) $\vec{b} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C'A}$

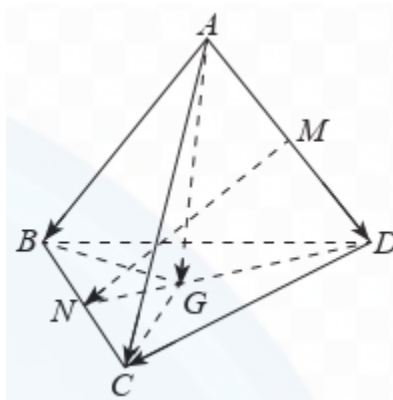
Dạng 3. Tích của một số với một vector

Ví dụ 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có AC' và $A'C$ cắt nhau tại O (Hình vẽ)



- a) Tìm vec tơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$. b) Cho biết mối quan hệ giữa vec tơ tìm được ở câu a) và vec tơ $\overrightarrow{AO}$.

Ví dụ 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC ; G là trọng tâm của tam giác BCD . Chứng minh rằng:



- a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$

Ví dụ 14. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có M là trung điểm của BB' (Hình 19). Đặt

$\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{CC'} = \vec{c}$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

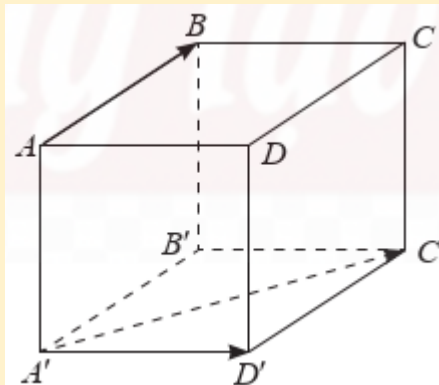
Dạng 4. Góc giữa hai vectơ trong không gian – Tích vô hướng

Ví dụ 15. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'})$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'})$.

Giải

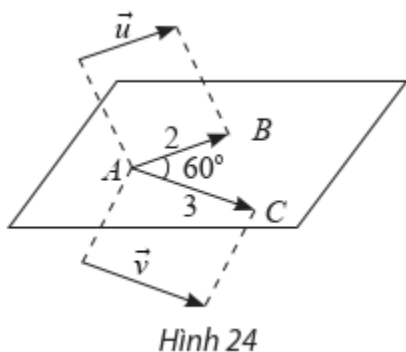
Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$, suy ra
 $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{DAB} = 90^\circ$.

Ta có $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$, suy ra
 $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{CAB} = 45^\circ$



Ví dụ 16. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'D'})$, $(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{CB'})$.

Ví dụ 17. Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thỏa mãn $|\vec{u}| = 2$ và $|\vec{v}| = 3$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ (Hình 24). Giả sử $\widehat{BAC} = 60^\circ$.



a) Tính góc $(\vec{u}, \vec{v})$.

b) Trong mặt phẳng (ABC) , tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 18. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD .

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$.

$$\text{ĐS: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{a^2}{2}$$

b) Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

$$\text{ĐS: } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ$$

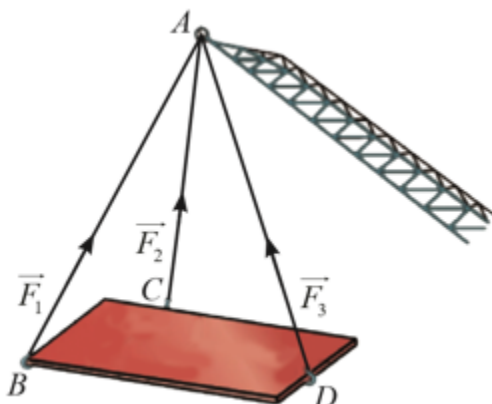
Ví dụ 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1.

a) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'C'}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'}$.

b) Tính góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'})$ (kết quả làm tròn đến phút).

Dạng 5. Một số dạng toán thực tế liên quan

Ví dụ 20. Trong Hình vẽ bên dưới, cho biết ba vectơ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ biểu diễn lực căng của các sợi dây cáp AB, AC, AD tác dụng lên vật nặng. Giá của ba vectơ này có cùng nằm trên một mặt phẳng không?



Ví dụ 21. Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.

Giải

Gọi F_1, F_2, F_3 là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là 25 N, 12 N, 4 N.

Vẽ $\vec{OA} = \vec{F}_1, \vec{OB} = \vec{F}_2, \vec{OC} = \vec{F}_3$.

Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là

$$\vec{F} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD} + \vec{OC} = \vec{OE}.$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác OBD , ta có

$$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2 \cdot BD \cdot OB \cdot \cos \widehat{OBD} = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ.$$

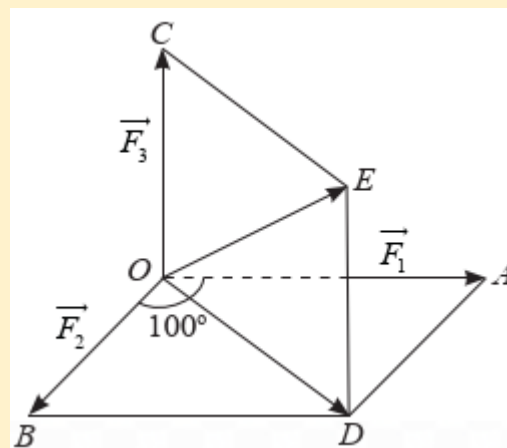
Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó tam giác ODE vuông tại D .

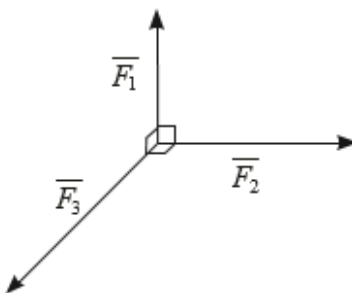
$$\text{Ta có } OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ.$$

$$\text{Suy ra } OE = \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos 100^\circ} = \sqrt{4^2 + 25^2 + 12^2 + 2 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \cos 100^\circ} \approx 26,092$$

Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 26$ N.



Ví dụ 22. Ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào một vật có phương đôi một vuông góc và có độ lớn lần lượt là 2 N; 3 N; 4 N (Hình vẽ). Tính độ lớn hợp lực của ba lực đã cho.



Ví dụ 23. Theo định luật II Newton (Vật lí 10 – Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 60): Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật: $\vec{F} = m\vec{a}$, trong đó $\vec{a}$ là vector gia tốc (m/s^2), $\vec{F}$ là vector lực (N) tác dụng lên vật, m (kg) là khối lượng của vật. Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng 0,5 kg một gia tốc 50 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

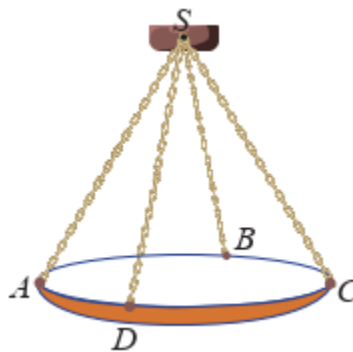


Giải

Ta có: $\vec{F} = m\vec{a}$ suy ra $|\vec{F}| = m|\vec{a}| = 0,5.50 = 25 \text{ (N)}$

Vậy muốn truyền cho quả bóng khối lượng 0,5 kg một gia tốc 50 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là 25 N.

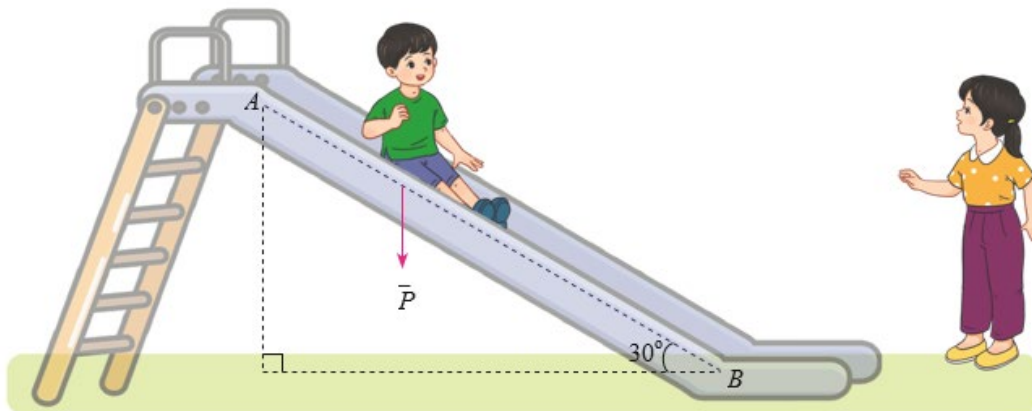
Ví dụ 24. Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5 \text{ kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $SABCD$ là hình chóp tứ giác đều có góc $ASC = 60^\circ$ (Hình 21).



a) Sử dụng công thức $\vec{P} = m\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vector gia tốc rơi tự do có độ lớn 10 m/s^2 , tìm độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm.

b) Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích.

Ví dụ 25. Một em nhỏ cân nặng $m = 25 \text{ kg}$ trượt trên cầu trượt dài 3,5 m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° (Hình 26).



a) Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vector gia tốc rơi tự do có độ lớn là $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

b) Cho biết công A (J) sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$. . Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.

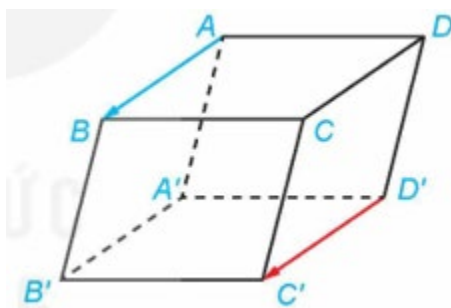
C. Bài tập tự luận rèn luyện

Dạng 1. Vectơ trong không gian

Bài 1. Trong không gian, cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ phân biệt và đều khác $\vec{0}$. Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

- a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
- b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.
- c) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.
- d) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

Bài 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$, $AD = 3$ và $AA' = 4$. Hãy chỉ ra ba vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho ba vectơ đó:

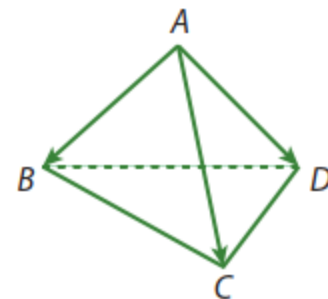


- a) Bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$;
- b) Là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$.
- c) Bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$;
- d) Là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AA'}$.
- e) Trong các vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AD'}$, hai vectơ nào có giá cùng nằm trong mặt phẳng (ABCD).
- f) Trong các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AD'}$, hai vectơ nào có cùng độ dài.
- g) So sánh độ dài của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.
- h) Nhận xét gì về giá của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.
- i) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$ có cùng phương không? Có cùng hướng không?
- j) Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BD'}$.

Bài 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

- a) Trong các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp, hãy chỉ ra những vectơ:
 - Cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$.
 - Bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$;
 - Ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{AA'}$.
- b) Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC'}$ trong trường hợp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp đứng, có $AA' = a$, $AB = b$, $BC = c$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$

Bài 4. Cho hình tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 1. (Hình 2.5).



Hình 2.5

a) Có bao nhiêu vector có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tứ diện? Liệt kê tất cả những vector đó.

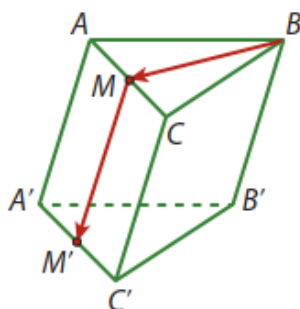
b) Có bao nhiêu vector có điểm đầu là A và điểm cuối là đỉnh của tứ diện? Liệt kê tất cả những vector đó.

Trong các vector tìm được ở câu b), những vector nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC) .

c) Tính độ dài của các vector tìm được ở câu b).

d) Bạn Lan nói: " $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ vì các vector này có cùng độ dài và cùng hướng (từ trên xuống dưới)". Khẳng định của bạn Lan có đúng không? Vì sao?

Bài 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm các cạnh $AC, A'C'$ (Hình 2.4).



Hình 2.4

a) Trong tất cả những vector có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của lăng trụ, hãy chỉ ra các vector:

- Khác $\vec{0}$ và cùng phương với $\overrightarrow{AM}$;
- Khác $\vec{0}$ và cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$;
- Là vector đối của $\overrightarrow{AC}$
- Bằng $\overrightarrow{MM'}$.

b) Trong các vector $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{B'B}$ vector nào bằng vector $\overrightarrow{AA'}$. Giải thích vì sao?

c) Gọi E là trung điểm của cạnh BC . Xác định điểm F sao cho $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AA'}$

d) Tìm độ dài của $\overrightarrow{BM}$ trong trường hợp ABC là tam giác cân tại B , có cạnh bên bằng 5 cm và góc ở đỉnh bằng 30° (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Giải

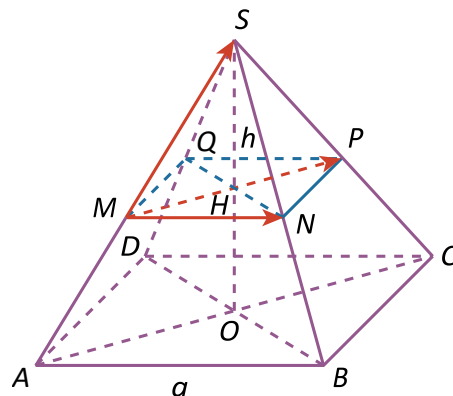
a) Do $AC \parallel A'C'$ và $M \in AC$ nên:

- Vector khác $\vec{0}$ và cùng phương với $\overrightarrow{AM}$ là vector có giá AC hoặc $A'C'$. Đó là các vector $\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CA}; \overrightarrow{A'C'}; \overrightarrow{C'A'}$
- Trong những vector khác $\vec{0}$ và cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$, có hai vector $\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{A'C'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$;
- Các vector đối của $\overrightarrow{AC}$ là $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C'A'}$;
- Các vector bằng $\overrightarrow{MM'}$ là $\overrightarrow{AA'}; \overrightarrow{BB'}; \overrightarrow{CC'}$ (các vector này cùng hướng và cùng độ dài với $\overrightarrow{MM'}$).

d) Từ giả thiết, ta suy ra tam giác AMB vuông tại M .

- Từ đó ta có: $BM = BA \cdot \cos \widehat{ABM} = 5 \cdot \cos 15^\circ \approx 4,83$ (cm)
- Vậy độ dài của $\overrightarrow{BM}$ là $|\overrightarrow{BM}| \approx 4,83$ (cm)

Bài 6. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy a và đường cao h . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD và O, H lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD, MNPQ$ (Hình 2.6).



Hình 2.6

a) Hãy chỉ ra tất cả những vectơ có điểm đầu và điểm cuối là hai điểm phân biệt lấy trong các điểm S, A, B, C, D .

b) Trong những vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối là những điểm cho trên hình, hãy liệt kê các vectơ:

- Cùng hướng với $\vec{MN}$;

- Bằng $\vec{MN}$.

c) Trong các vectơ $\vec{SC}, \vec{AD}, \vec{DC}$, vectơ nào bằng vectơ $\vec{AB}$.

d) Gọi E là điểm thuộc cạnh AD . Xác định điểm F sao cho $\vec{EF} = \vec{AB}$.

e) Tìm độ dài các vectơ $\vec{MP}, \vec{MS}$ theo a và h .

Dạng 2. Các phép toán vectơ trong không gian

Bài 7. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

a) $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$

b) $\vec{AC} + \vec{DB} = \vec{AB} + \vec{DC}$

c) $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}$

d) $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{DB}$

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng:

a) $\vec{AM}$ và $\vec{CN}$ là hai vectơ đối nhau

b) $\vec{BN}$ và $\vec{DM}$ là hai vectơ đối nhau

c) $\vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SB} + \vec{SD}$

d) $\vec{SC} - \vec{AM} - \vec{AN} = \vec{SA}$

e) $\vec{SD} - \vec{BN} - \vec{CM} = \vec{SC}$

Bài 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Tìm hệ thức liên hệ giữa: $\vec{AB} + \vec{AD}$ với $\vec{AC}$; $\vec{AC} + \vec{AA'}$ với $\vec{AC'}$

b) Từ câu a, hãy chứng minh: $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$

c) Tính $\vec{u} = \vec{A'A} + \vec{A'B'} + \vec{A'D'}$

d) Tính $\vec{v} = \vec{CC'} + \vec{BA} + \vec{D'A'}$

e) Tính $\vec{w} = \vec{BA} + \vec{B'C'} + \vec{DD'}$

f) Tính $\vec{t} = \vec{AD} - \vec{C'C}$

g) Chứng minh rằng: $\vec{AB} + \vec{B'C'} + \vec{DD'} = \vec{AC'}$

h) Chứng minh rằng: $\vec{DB'} + \vec{DD'} + \vec{BD'} = \vec{BB'}$

i) Chứng minh rằng: $\vec{AC} + \vec{BA'} + \vec{DB} + \vec{C'D} = \vec{0}$

j) Chứng minh rằng: $\vec{B'B} + \vec{AD} + \vec{CD} = \vec{B'D}$

k) Chứng minh rằng: $\vec{BB'} + \vec{AD} + \vec{CD} = \vec{BD'}$

l) Chứng minh rằng: $\vec{BC} + \vec{DC} + \vec{AA'} = \vec{AC'}$

m) Chứng minh rằng: $\vec{B'B} - \vec{DB} = \vec{B'D}$

n) Chứng minh rằng: $\vec{BB'} - \vec{C'B'} - \vec{D'C'} = \vec{BD'}$

Bài 10. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1.

a) Chứng minh rằng: $\vec{AB} + \vec{DD'} + \vec{C'D'} = \vec{CC'}$

b) Chứng minh rằng: $\vec{AB} + \vec{CD'} - \vec{CC'} = \vec{0}$

c) Chứng minh rằng: $\vec{BC} - \vec{CC'} + \vec{DC} = \vec{A'C}$

d) Tính độ dài của vectơ: $\vec{BC} + \vec{DD'}$

e) Tính độ dài của vectơ: $\vec{AC} + \vec{C'D'}$

Bài 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'D'$. Chứng minh rằng:

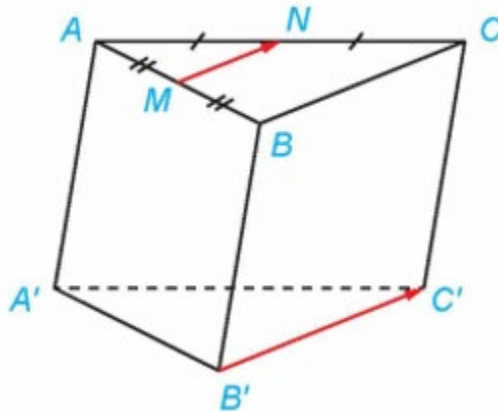
$$\overrightarrow{A'C} = 3\overrightarrow{A'G}.$$

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA , lấy điểm M sao cho $SM = 2AM$. Trên cạnh BC , lấy điểm N sao cho $CN = 2BN$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AB}$

Bài 13. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $A'B'C'$. O là giao điểm của hai đường thẳng AB' và $A'B$.

- Chứng minh rằng các đường thẳng GO và CG' song song với nhau.
- Tính độ dài của $\overrightarrow{GO}$ trong trường hợp $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng, cạnh bên $AA' = 3$ và đáy là tam giác đều có cạnh bằng 2.

Bài 14. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC .



- Hai vector $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ có cùng phương không? Có cùng hướng không?
- Giải thích vì sao $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{B'C'}|$
- Gọi O là giao điểm của AB' và $A'B$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.

Bài 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB sao cho $SE = \frac{1}{3}SA, SF = \frac{1}{3}SB$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

Bài 16. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn các vector sau qua các vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- $\overrightarrow{AB'}$
- $\overrightarrow{B'C}$
- $\overrightarrow{BC'}$

Bài 17. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AE} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BG . Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Bài 18. Cho tứ diện $ABCD$, lấy hai điểm M, N thỏa $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{DN}$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Bài 19. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'C} = \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$ và $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Bài 20. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BDA' .

- Biểu diễn $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AA'}$.
- Từ câu a, hãy chứng tỏ ba điểm A, G và C' thẳng hàng.

Bài 21. Cho tứ diện ABCD có G là trọng tâm của tam giác BCD. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HK}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Giải

a) Do HK là đường trung bình của tam giác ABC nên

BC $\parallel$ HK và BC = 2HK. Suy ra $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với

$\overrightarrow{HK}$ và $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{HK}|$. Vậy $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HK}$.

b) Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}, \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}.$$

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Do đó, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Bài 22. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC, I là trung điểm MN. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \qquad \text{b) } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}.$$

Bài 23. Cho hình chóp $S.ABC$. Điểm M thuộc cạnh SA và $SM = \frac{2}{3}SA$.

a) Viết hệ thức liên hệ giữa các cặp vector $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{AS}$.

b) Tìm điểm N sao cho $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$

Bài 24. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I là trọng tâm của tam giác ABC và J là trọng tâm tam giác ADC . Chứng minh rằng: $2\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 3(\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{SJ})$.

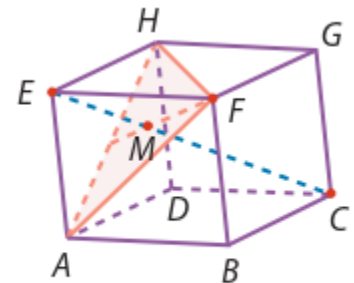
Bài 25. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Điểm M là trọng tâm của tam giác AFH (Hình 2.16).

a) Tím $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EH}$

b) Tím $\vec{v} = \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{BD}$

c) Chứng minh rằng ba điểm E, M, C thẳng hàng.

d) Tính độ dài của $\overline{EM}$ trong trường hợp $ABCD.EFGH$ là hình hộp đứng có các cạnh $AB = 5, AD = 6,$

 $AE = 10$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$.

Hình 2.16

Giải

c) Để chứng minh E, M, C thẳng hàng, ta sẽ chứng minh $\overrightarrow{EC} = k\overrightarrow{EM}$ với k là một số thực nào đó.

Do M là trọng tâm của tam giác AFH nên ta có: $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = 3\overrightarrow{EM}$

Mặt khác, theo quy tắc hình hộp thì: $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EC}$

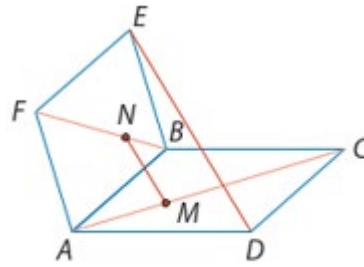
Suy ra $\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{EM}$. Vậy ba điểm E, M, C thẳng hàng.

d) Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC , ta có: $AC^2 = 5^2 + 6^2 - 2.5.6.\cos 120^\circ = 91$.

Khi $ABCD.EFGH$ là hình hộp đứng thì EAC là tam giác vuông tại A , do đó:

$$EC^2 = EA^2 + AC^2 = 100 + 91 = 191. \text{ Suy ra } EM = \frac{1}{3}\sqrt{191}.$$

Bài 26. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên các đường chéo AC và BF lấy các điểm M, N sao cho $MC = 2MA, NF = 2NB$ (Hình 2.17).



Hình 2.17

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{DE}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}$.

b) Từ đó suy ra $MN \parallel DE$.

Dạng 3. Góc giữa hai vectơ trong không gian – Tích vô hướng

Bài 27. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy điểm O và vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Lấy điểm O' khác O và vẽ các vectơ $\overrightarrow{O'A'} = \vec{a}, \overrightarrow{O'B'} = \vec{b}$

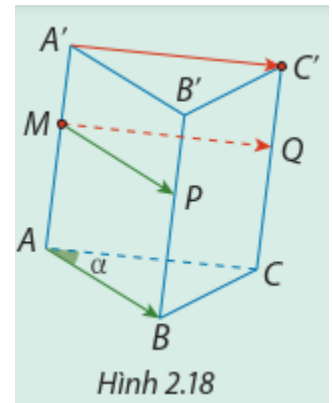
a) Giải thích vì sao $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

b) Áp dụng định lý cosin cho hai tam giác OAB và $O'A'B'$ để giải thích vì sao $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$.

Bài 28. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $\widehat{BAC} = \alpha$. Gọi M là một điểm bất kì thuộc cạnh bên AA' (Hình 2.18).

a) Vẽ hai vectơ $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{MQ}$ lần lượt bằng $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$. $ABC.MPQ$ có phải là hình lăng trụ không? Vì sao?

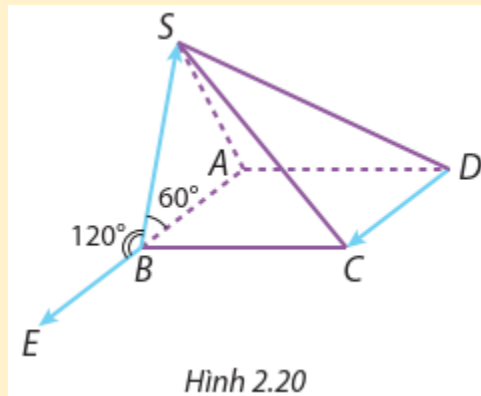
b) Trong mặt phẳng (MPQ) , hãy xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$ và so sánh góc đó với α .



Hình 2.18

Bài 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BS}$.

Giải



Hình 2.20

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB \parallel DC$.

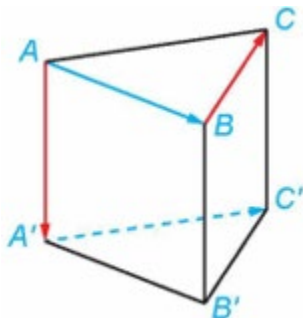
Trên tia AB lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$ (Hình 2.20). Ta có:

$$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BS}) = \widehat{EBS} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Bài 30. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm góc giữa:

- a) $\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{AD}$; c) $\overrightarrow{A'C'}$ và $\overrightarrow{B'B}$.
d) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$. e) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'D'}$. f) $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{B'C}$.

Bài 31. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Tính các góc giữa:



- a) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$. b) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$.

Bài 32. Cho tứ diện đều ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC.

- a) Hãy tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{MN}$
b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}$
c) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Bài 33. Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 3. (Bài toán chuyển tiếp qua tích vô hướng)

- a) Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'C'}$
b) Tính $|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{A'D'}| \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'})$
c) Tính $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{D'C'}$; $\overrightarrow{D'A} \cdot \overrightarrow{BC}$
d) Tính các góc $(\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{B'C'})$; $(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{BD})$

Bài 34. Cho tứ diện OABC có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Hãy tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Bài 35. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có độ dài tất cả các cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng sau:

- a) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BD}$ d) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{CD}$

Bài 36. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh đáy bằng 1 và độ dài mỗi cạnh bên bằng 2. Tính các góc giữa các cặp vector sau đây và tính tích vô hướng của mỗi cặp vector đó:

- a) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$ b) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'A'}$

Bài 37. Trong không gian, cho hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết góc giữa hai vec tơ đó là 45° , hãy tính:

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ b) $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$ c) $(\vec{a} + \vec{b})^2$

Bài 38. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Gọi M là trung điểm của AB. Hãy tính:

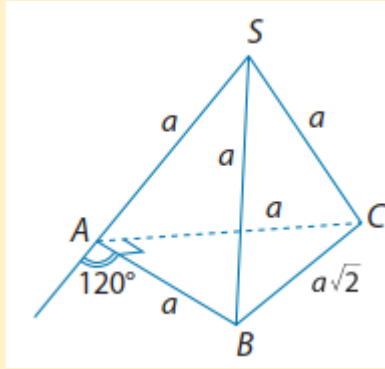
- a) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS}$ b) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS}$ c) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MS}$

Bài 39. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Hãy tính:

- a) $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{A'C'}$ b) $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BB'}$

Bài 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa các vector $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$.

Giải



$$\text{Ta có: } \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2} = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2}$$

Từ giả thiết suy ra SAB là tam giác đều và ABC là tam giác vuông cân tại A .

$$\text{Từ đó ta tính được: } \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy } (\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$$

Bài 41. Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = a$, $BC = \frac{a}{2}$, $AB \perp BC$, $\widehat{CDB} = 45^\circ$. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Bài 42. Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD . Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \quad \text{b) } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Bài 43. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Tính:

$$\text{a) } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} \quad \text{b) } \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EG} \quad \text{c) } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FE}$$

Bài 44. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$.

$$\text{a) Chứng minh rằng: } \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{B'D'} = 0 \quad \text{b) Tính độ dài đường chéo } AC'.$$

Bài 45. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M và N theo thứ tự là trung điểm của BC và AD . Cho biết $AB = 10$, $CD = 6$, $MN = 7$.

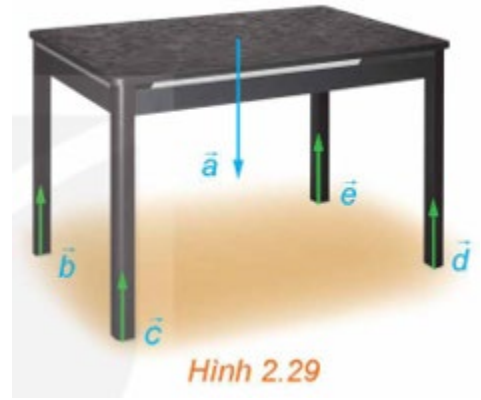
$$\text{a) Chứng minh rằng } \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

$$\text{b) Từ kết quả câu a, hãy tính } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}. \quad \text{c) Tính } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}).$$

Bài 46. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2a$, $CD = 2a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Biết rằng $MN = a\sqrt{7}$, hãy tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

Dạng 4. Một số dạng toán thực tế liên quan

Bài 47. Một chiếc bàn cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như Hình 2.29. Trọng lực tác dụng lên bàn (biểu thị bởi vector $\vec{a}$) phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn (biểu thị bởi các vector $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ và $\vec{e}$).



Hình 2.29

- a) Hãy chỉ ra mối quan hệ về phương và hướng của các vector $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ và $\vec{e}$.
- b) Giải thích vì sao các vector $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ và $\vec{e}$ đôi một bằng nhau.

Bài 48. Một toà nhà có chiều cao của các tầng là như nhau. Một chiếc thang máy di chuyển từ tầng 15 lên tầng 22 của toà nhà, sau đó di chuyển từ tầng 22 lên tầng 29. Các vector biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển đó có bằng nhau không? Giải thích vì sao.



Bài 49. Thang cuốn tại các trung tâm thương mại, siêu thị lớn hay nhà ga, sân bay thường có hai làn, trong đó có một làn lên và một làn xuống. Khi thang cuốn chuyển động, vector biểu diễn vận tốc của mỗi làn có là hai vector đối nhau hay không? Giải thích vì sao.

Bài 50. Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học (H.2.20). Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h, trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt được biểu diễn bởi hai vector $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Hãy giải thích vì sao

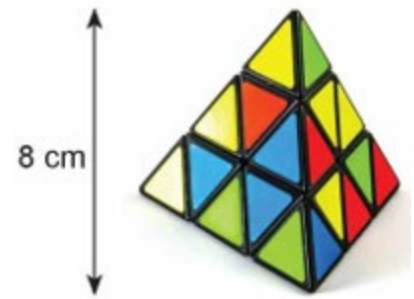


Hình 2.20

$\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$, với k là một số thực dương nào đó.

Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài 51. Trọng tâm của tứ diện ABCD là một điểm I thỏa mãn $\overline{AI} = 3\overline{IG}$, ở đó G là trọng tâm của tam giác BCD. Hãy tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là 8 cm (H.2.30).



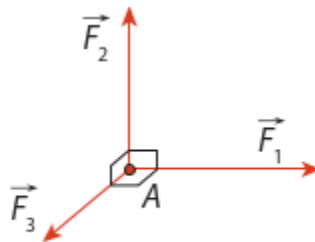
Hình 2.30

Bài 52. Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau (H.2.31). Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao.



Hình 2.31

Bài 53. Một chất điểm chịu tác động bởi 3 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có chung điểm đặt A và có giá vuông góc với nhau từng đôi một. Biết cường độ của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt là 10 N, 8 N và 5 N, xác định hợp lực của 3 lực và tính cường độ của hợp lực (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Hình 2.13

Bài 54. Ba lực có điểm đặt tại một đỉnh của hình lập phương, cùng phương với ba cạnh và cùng có cường độ là 5 N. Tính cường độ của hợp lực.

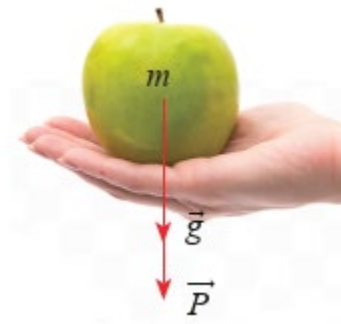
Bài 55. Trọng lực $\vec{P}$ là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật, được tính theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), còn $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do, có hướng đi xuống và có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Xác định hướng và độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả bưởi có khối lượng 2,5 kg.



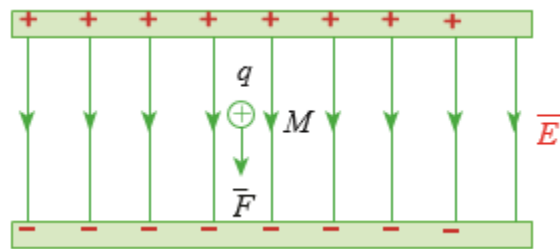
Bài 56. Trọng lực $\vec{P}$ là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật được tính bởi công thức $\vec{P} = m \vec{g}$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do, có hướng đi xuống và có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Xác định hướng và độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả bóng có khối lượng 450 gam.



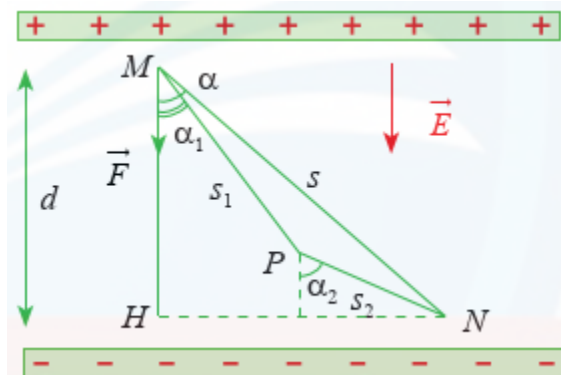
Bài 57. Nếu một vật có khối lượng m (kg) thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m \vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 102 gam (Hình vẽ)



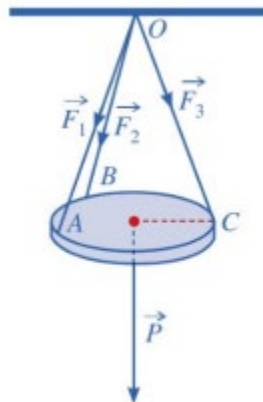
Bài 58. Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q \vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9} \text{ C}$ và độ lớn điện trường $E = 10^5 \text{ N/C}$ (Hình vẽ)



Bài 59. Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MNP (Hình vẽ). Biết $q = 2 \cdot 10^{-12} \text{ C}$, vector điện trường có độ lớn $E = 1,8 \cdot 10^5 \text{ N/C}$ và $d = MH = 5 \text{ mm}$. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.



Bài 60. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15 \text{ (N)}$. (Hình 14). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



Hình 14

Giải

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\vec{OA_1} = \vec{F_1}; \vec{OB_1} = \vec{F_2}; \vec{OC_1} = \vec{F_3}$. Lấy các điểm D_1, A'_1, B'_1, D'_1 sao cho $OA_1D_1B_1C_1A'_1D'_1B'_1$ là hình hộp (Hình 15).

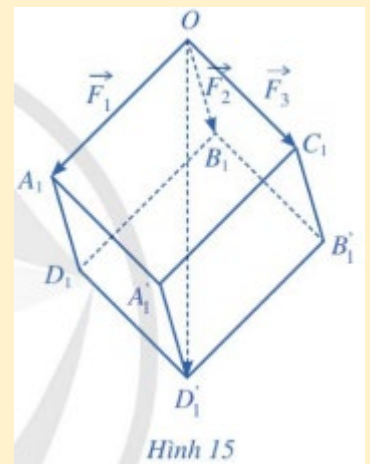
Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp, ta có: $\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1} = \vec{OD_1}$

Mặt khác, do các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ đôi một vuông góc và

$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15 \text{ (N)}$ nên hình hộp

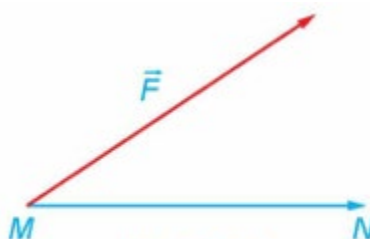
$OA_1D_1B_1C_1A'_1D'_1B'_1$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 , đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 15. Suy ra độ dài đường chéo OD_1 của hình lập phương đó bằng $15\sqrt{3}$.

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{P}$, ở đó $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn. Suy ra trọng lượng của chiếc đèn là: $|\vec{P}| = |\vec{OD_1}| = 15\sqrt{3} \text{ (N)}$.



Hình 15

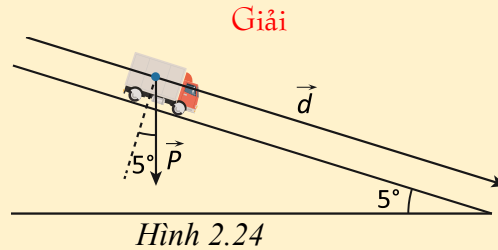
Bài 61. Như đã biết, nếu có một lực $\vec{F}$ tác động vào một vật tại điểm M và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường MN thì công A sinh ra được tính theo công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{MN}$, trong đó lực F có độ lớn tính bằng Newton, quãng đường MN tính bằng mét và công A tính bằng Jun (H.2.28). Do đó, nếu dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn không đổi để làm một vật di chuyển một quãng đường không đổi thì công sinh ra sẽ lớn nhất khi lực tác động cùng hướng với chuyển động của vật. Hãy giải thích vì sao? Kết quả trên có thể được áp dụng như thế nào khi kéo (hoặc đẩy) các vật nặng?



Hình 2.28

Bài 62. Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$, trong đó $\vec{d}$ là vector biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của d là m) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$.

Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức $\vec{P} = m \vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.



Hình 2.24

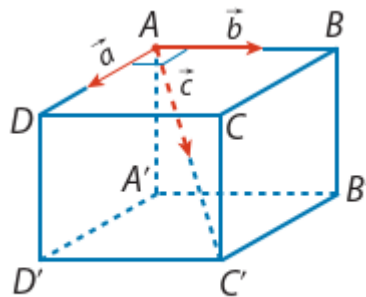
Ta có $1,5 \text{ tấn} = 1\,500 \text{ kg}$.

Độ lớn của trọng lực tác dụng lên chiếc xe là: $|\vec{P}| = m |\vec{g}| = 1\,500 \cdot 9,8 = 14\,700 \text{ (N)}$. Vector $\vec{d}$ biểu thị độ dịch chuyển của xe có độ dài là $|\vec{d}| = 30 \text{ (m)}$ và $(\vec{P}, \vec{d}) = 90^\circ - 5^\circ = 85^\circ$

Công sinh ra bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m là:

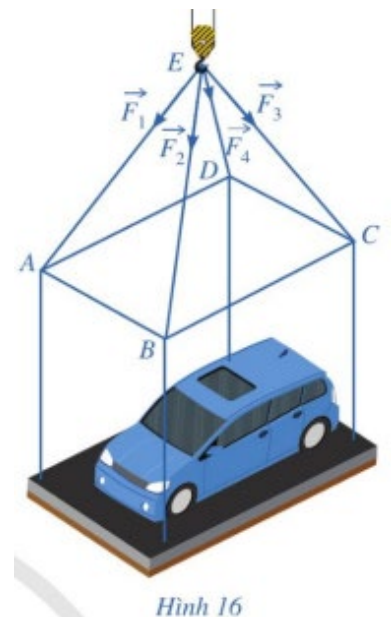
$$A = \vec{P} \cdot \vec{d} = |\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{P}, \vec{d}) = 14700 \cdot 30 \cdot \cos 85^\circ \approx 38436 \text{ (J)}$$

Bài 63. Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như Hình 2.25. Cường độ của các lực $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tương ứng là 10 N, 10 N và 20 N. Tính cường độ hợp lực của $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



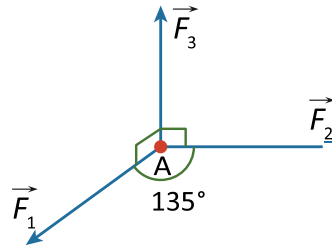
Hình 2.25

Bài 64. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật ABCD, mặt phẳng (ABCD) song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc bằng 60° (Hình 16). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là 4 700 N và trọng lượng của khung sắt là 3 000 N.



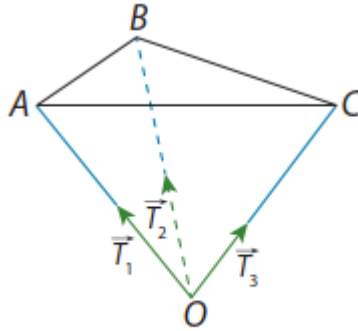
Hình 16

Bài 65. Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α), chịu tác động bởi ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có giá nằm trong (α) và $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 135^\circ$, còn lực $\vec{F}_3$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định hợp lực của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N.



Hình 2.26

Bài 66. Người ta treo một vật trang trí O có khối lượng $m = 2$ kg trên trần nhà bằng các sợi dây nhẹ, không co giãn tại các điểm A, B và C. Để bảo đảm lực phân phối đều trên các dây và tính thẩm mỹ, người ta chọn độ dài các dây sao cho OABC là tứ diện đều. Gọi $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ và $\vec{T}_3$ lần lượt là các lực căng dây của ba dây treo tại A, B và C. Lấy giá trị gần đúng của gia tốc trọng trường g là 10 m/s^2 .



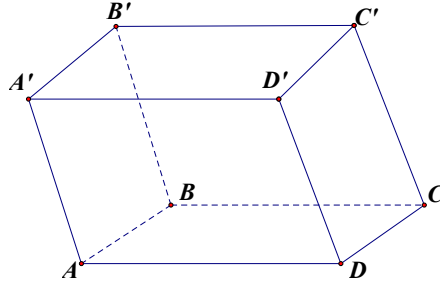
Hình 2.27

- Tính cường độ của hợp lực.
- Tính cường độ của lực căng trên mỗi dây.

D. Câu hỏi trắc nghiệm

Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình dưới), tổng của $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'}$ là vector nào dưới đây?



- A.** $\overrightarrow{DB'}$. **B.** $\overrightarrow{DB}$. **C.** $\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{BD'}$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vector khác vector $\vec{0}$ mà mỗi vector có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$?

- A.** 4. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các véc tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véc tơ $\overrightarrow{AB}$ là

- A.** $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{D'C'}$; $\overrightarrow{A'B'}$. **B.** $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{A'B'}$; $\overrightarrow{C'D'}$.
C. $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{C'D'}$; $\overrightarrow{B'A'}$. **D.** $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{A'B'}$; $\overrightarrow{D'C'}$.

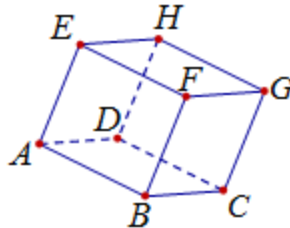
Câu 4: Mệnh đề nào sau đây là sai ?

- A.** Nếu giá của ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vec tơ đó đồng phẳng.
B. Nếu giá của ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cắt nhau từng đôi một thì ba vec tơ đó đồng phẳng.
C. Nếu trong ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vec tơ bằng vec tơ $\vec{0}$ thì ba vec tơ đó đồng phẳng.
D. Nếu trong ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có hai vec tơ cùng phương thì ba vec tơ đó đồng phẳng.

Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, vector bằng vector $\overrightarrow{AB}$ là vector nào dưới đây?

- A.** $\overrightarrow{CD}$. **B.** $\overrightarrow{B'A'}$. **C.** $\overrightarrow{D'C'}$. **D.** $\overrightarrow{BA}$.

Câu 6: Cho hình hộp $ABCDEFGH$ (tham khảo hình vẽ). Tính tổng ba véc tơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ ta được



- A.** $\overrightarrow{AH}$. **B.** $\overrightarrow{AG}$. **C.** $\overrightarrow{AF}$. **D.** $\overrightarrow{AC}$.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vector khác vector $\vec{0}$ mà mỗi vector có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$?

- A.** 4. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 10.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vector khác vector $\vec{0}$ mà mỗi vector có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$?

- A. 4. B. 8. C. 12. D. 10.

Câu 9: Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

- A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$.
B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\vec{AB} = \vec{CD}$.
 C. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\vec{SB} + \vec{SD} = \vec{SA} + \vec{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
 D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$.

Dạng 2. Đẳng thức véc-tơ (tổng, hiệu, tích 1 số với vector)

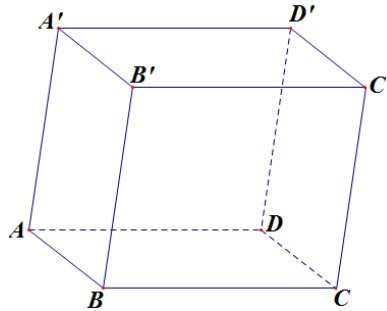
Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Khi đó

- A. $\vec{CA} + \vec{CB} + \vec{CD} = 3\vec{CG}$. B. $\vec{CA} + \vec{CB} + \vec{CD} = 3\vec{GC}$.
 C. $\vec{CA} + \vec{CB} + \vec{CD} = 2\vec{CG}$. D. $\vec{CA} + \vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CG}$.

Câu 11: Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 4\vec{AG}$. B. $\vec{GD} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.
 C. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$. D. $\frac{1}{4}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD}) = \vec{PG}$ (P là tùy ý).

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng?



- A. $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BC'}$. B. $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD'}$.
 C. $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD}$. D. $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BA'}$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \vec{AA'}$, $\vec{b} = \vec{AB}$, $\vec{c} = \vec{AC}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vector $\vec{AG'}$ bằng

- A. $\vec{AG'} = \frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$. B. $\vec{AG'} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.
 C. $\vec{AG'} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$. D. $\vec{AG'} = \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề đúng là

- A. $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD'}$. B. $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BD}$.
 C. $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BC'}$. D. $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BB'} = \vec{BA'}$.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Thực hiện phép toán $\vec{u} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'A}$.

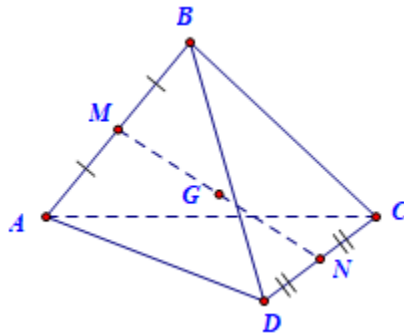
A. $\vec{u} = \overrightarrow{A'C}$.

B. $\vec{u} = \overrightarrow{BC'}$.

C. $\vec{u} = \overrightarrow{BA'}$.

D. $\vec{u} = \overrightarrow{BD}$.

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm, hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD (tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào dưới đây là sai?



A. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

B. $GM = GN$.

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GN}$.

Câu 17: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

C. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

D. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Câu 18: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn mệnh đề đúng?

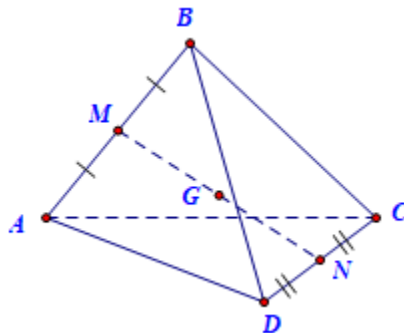
A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C'A'}$

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{C'D'} = \vec{0}$.

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm, hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD (tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào dưới đây là sai?



A. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

B. $GM = GN$.

C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GN}$.

Câu 20: Trong không gian gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG} = \vec{0}$.

C. $GA = GB = GC = GD$.

D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Câu 21: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD . Khi đó:

A. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CG}$.

B. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{GC}$.

C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CG}$.

D. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CG}$.

Câu 22: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB' và CD' . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CJ}$. B. $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{IJ}$. C. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{D'J}$. **D. $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{JC}$.**

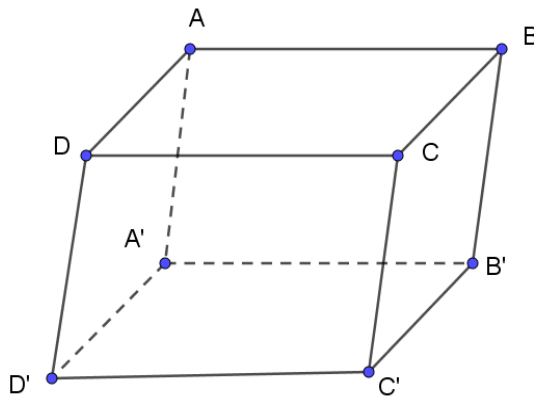
Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.** B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$.
C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

Câu 24: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính độ dài vectơ $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$ theo a

- A. $a\sqrt{2}$. B. $(1+\sqrt{3})a$. C. $a\sqrt{6}$. **D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.**

Câu 25: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?



- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.
C. $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{D'A}$. D. $\overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{A'A} - \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{AB'}$.

Câu 26: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biểu thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C}$. B. $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$.
C. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$. D. $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC'}$.

Câu 27: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AD . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \vec{0}$. **B. $2\overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'D}$.**
C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$. D. $\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{AD}$.

Câu 28: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$. Độ dài của $\vec{x}$ bằng

- A. $(1+\sqrt{3})a$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C. $a\sqrt{6}$.** D. $a\sqrt{2}$.

Câu 29: Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.
C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$. D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Câu 30: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AG}$.
 B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AG}$.
 D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AG}$.

Câu 31: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây.

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD'}$.
 B. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA'}$.
 C. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB'}$.
 D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD'}$.

Câu 32: Cho tứ diện $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Biết luôn tồn tại số thực k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AG}$. Hỏi số thực đó bằng bao nhiêu?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 33: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trung điểm của MN . Mệnh đề nào sau đây đúng

- A. $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.
 B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
 D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MN}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$.
 B. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SO}$.
 C. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.
 D. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$.

Câu 35: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC và BD . Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN . Hãy chọn khẳng định sai

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$.
 B. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{MN}$.
 C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
 D. $2\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

Câu 36: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm CD . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
 B. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$.
 C. $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
 D. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

Câu 37: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm S thỏa mãn $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$. Tính độ dài đoạn OS theo a .

- A. $OS = 6a$. B. $OS = 4a$. C. $OS = a$. D. $OS = 2a$.

Câu 38: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn mệnh đề sai.

- A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.
 B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'}$.
 C. $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{AA'}$.
 D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

Câu 39: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC và BD . Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN . Hãy chọn khẳng định sai

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$.
 B. G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.
 C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
 D. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{MN}$.

Câu 40: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng ?

- A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$. B. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AA'}$.
 C. $\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$. D. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

Câu 41: Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

- A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$. B. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$.
 C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$. D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Chọn mệnh đề đúng.

- A. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$. B. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 8\overrightarrow{SO}$.
 C. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$. D. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{OS}$.

Câu 43: Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Hãy chỉ ra mệnh đề **sai**?

- A. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$. B. $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$.
 C. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$. D. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$.

Câu 44: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB' và CD' . Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **đúng**?

- A. $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{IJ}$. B. $\overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{JC}$. C. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CJ}$. D. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{D'J}$.

Câu 45: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của GA và mp (BCD) . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_0G}$. B. $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_0G}$. C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_0G}$. D. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_0G}$.

Dạng 3. Phân tích véc-tơ theo các véc-tơ cho trước

Câu 46: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khi đó

- A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{\vec{b}}{2}$. B. $\overrightarrow{AM} = -\frac{\vec{a}}{2} + \vec{b} + \vec{c}$.
 C. $\overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}$. D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \frac{\vec{b}}{2} + \vec{c}$.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi G là điểm thỏa mãn:

$\overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng:

- A. G, S, O không thẳng hàng. B. $\overrightarrow{GS} = 4\overrightarrow{OG}$.
 C. $\overrightarrow{GS} = 5\overrightarrow{OG}$. D. $\overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}$.

Câu 48: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khi đó

- A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{\vec{b}}{2}$. B. $\overrightarrow{AM} = -\frac{\vec{a}}{2} + \vec{b} + \vec{c}$.
 C. $\overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}$. D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \frac{\vec{b}}{2} + \vec{c}$.

Câu 49: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu diễn) véc tơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

- A. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. B. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. C. $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. **D. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.**

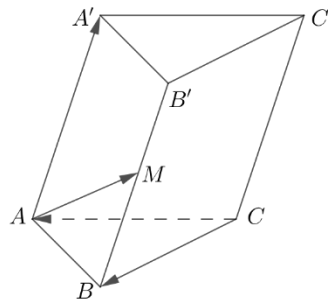
Câu 50: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P , Q lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chọn khẳng định đúng?

- A. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$. **B. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.**
- C. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD})$. D. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

Câu 51: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

- A. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$. **B. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.**
- C. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$. D. $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1})$.

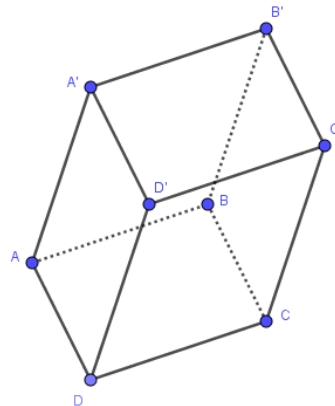
Câu 52: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$ (Tham khảo hình vẽ).



Khẳng định nào sau đây đúng?

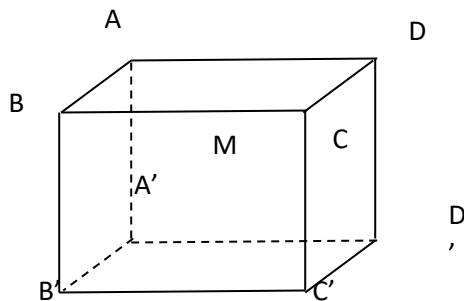
- A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$. B. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.
- C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$. **D. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.**

Câu 53: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn đẳng thức **đúng**:



- A. $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}$.** B. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- C. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC}$. D. $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$.

Câu 54: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với M là trung điểm cạnh BC (tham khảo hình vẽ bên).



Biết $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'} + k\overrightarrow{BC}$. Tìm k ?

- A.** $k = \frac{1}{2}$ **B.** $k = 2$ **C.** $k = -\frac{1}{2}$ **D.** $k = \frac{3}{2}$

Câu 55: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{AC_1}$$

- A.** $k = 4$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = 0$. **D.** $k = 2$.

Câu 56: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A.** $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. **C.** $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. **D.** $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Câu 57: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A.** $\overrightarrow{AM} = -\vec{b} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$. **B.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$. **C.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Câu 58: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A.** $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c})$. **B.** $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$.

- C.** $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. **D.** $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c})$.

Câu 59: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$ có $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{c}$. Gọi I là điểm thuộc đoạn thẳng BG sao cho $4BI = BG$. Biểu thị $\overrightarrow{AI}$ qua $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ta được

- A.** $\overrightarrow{AI} = \vec{a} + \frac{7}{4}\vec{b} + \frac{7}{4}\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{AI} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$. **C.** $\overrightarrow{AI} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AI} = \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.

Câu 60: Cho tứ diện $OABC$, M là trung điểm của BC . Biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo ba véc tơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$?

- A.** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. **B.** $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

- C.** $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

Dạng 4. Điều kiện đồng phẳng của ba véc-tơ

- Câu 61:** Cho hình hộp $ABCD.EFGH$, gọi I là tâm hình bình hành $ABFE$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.
 C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.
- Câu 62:** Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm hình bình hành $ABEF$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?
- A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.
 C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.
- Câu 63:** Cho hình hộp $ABCD.EFGH$, gọi I là tâm hình bình hành $ABFE$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.
 C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.
- Câu 64:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm 3 vector đồng phẳng.
- A. $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{B'C}$. B. $\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}$. C. $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{BC'}$. D. $\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B'C}$.
- Câu 65:** Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng?
- A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng. B. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.
 C. $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.
- Câu 66:** Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm hình bình hành $ABEF$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?
- A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.
 C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.
- Câu 67:** Cho tứ diện $ABCD$, M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD . Bộ ba vector nào dưới đây đồng phẳng?
- A. $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$. B. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$. C. $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}$. D. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MA}$.
- Câu 68:** Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm của hình bình hành $ABFE$ và K là tâm của hình bình hành $BCGF$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?
- A. Các vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. B. Các vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.
 C. Các vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. D. Các vector $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.
- Câu 69:** Trong không gian cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó 4 vector nào sau đây đồng phẳng?
- A. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC'}$. B. $\overrightarrow{A'D}, \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{DD'}$.
 C. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$. D. $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$.

Câu 70: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định dưới đây.

- A. Ba vectơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ không đồng phẳng. B. G là trung điểm MN .
- C. Ba vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng. D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{OG}$.

Câu 71: Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Bộ ba vectơ nào sau đây đồng phẳng?

- A. $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$. B. $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$. C. $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Câu 72: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm của AC, BD, BC, CD, SA, SD . Bốn điểm nào sau đây đồng phẳng?

- A. P, Q, R, T . B. M, P, R, T . C. M, Q, T, R . D. M, N, R, T .

Dạng 5. Tích vô hướng

Câu 73: Cho $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$, góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 120° . Khi đó tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{15}{2}$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{15}{2}$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$.

Câu 74: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a ?

- A. $\frac{1}{2}a^2$. B. a^2 . C. $-a^2$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

Câu 75: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng

- A. $-\frac{a^2}{2}$. B. $\frac{a^2}{2}$. C. a^2 . D. 0 .

Câu 76: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $2a$. Tính $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}a^2$. B. $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}a^2$. C. $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$. D. $\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$.

Câu 77: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ bằng?

- A. $a^2\sqrt{2}$. B. a^2 . C. $a^2\sqrt{3}$. D. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 78: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a . Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF}$

- A. $2a^2$. B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. D. a^2 .

Câu 79: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng

- A. 0 . B. $\frac{a^2}{2}$. C. a^2 . D. $-\frac{a^2}{2}$.

Dạng 6. Xác định góc giữa hai véc-tơ

- Câu 80:** Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Tính góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$.
A. 45° . **B.** 90° . **C.** 120° . **D.** 60° .
- Câu 81:** Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$ bằng
A. 0° . **B.** 60° . **C.** 90° . **D.** 30° .
- Câu 82:** Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA , OB , OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Góc tạo bởi hai vector $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng
A. 135° . **B.** 150° . **C.** 120° . **D.** 60° .
- Câu 83:** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và CI với I là trung điểm của AD .
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.
- Câu 84:** Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm cạnh AB . Khi đó góc giữa 2 vector $\overrightarrow{CH}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng
A. 135° . **B.** 150° . **C.** 120° . **D.** 30° .
- Câu 85:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a . Góc giữa hai vector $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng
A. 60° . **B.** 120° . **C.** 30° . **D.** 90° .
- Câu 86:** Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$
A. 45° . **B.** 90° . **C.** 120° . **D.** 60° .
- Câu 87:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai vector $\overrightarrow{AD'}$ và $\overrightarrow{A'C'}$ bằng
A. 120° . **B.** 60° . **C.** 30° . **D.** 150° .
- Câu 88:** Cho tứ diện $ABCD$. Tính góc giữa hai vector $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{BD}$.
A. 60° . **B.** 90° . **C.** 30° . **D.** 120° .
- Câu 89:** Trong không gian cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O' . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{OO'}$?
A. 60° **B.** 120° **C.** 90° **D.** 45°
- Câu 90:** Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$, góc giữa hai vector $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BG}$ là
A. 45° . **B.** 30° . **C.** 60° . **D.** 120° .
- Câu 91:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai vector $\overrightarrow{BC'}$ và $\overrightarrow{AB'}$ bằng:
A. 60° . **B.** 45° . **C.** 120° . **D.** 90° .
- Câu 92:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chọn mệnh đề **sai**?
A. $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CD}) = 120^\circ$. **B.** $(\overrightarrow{SO}, \overrightarrow{AD}) = 90^\circ$. **C.** $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BD}) = 90^\circ$. **D.** $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ$.
- Câu 93:** Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Số đo góc giữa vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng:
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Câu 94: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'})$.

- A.** $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = 0$. **B.** $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = 1$. **C.** $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{1}{2}$. **D.** $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 95: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $SA = SB = a\sqrt{6}$, $CD = 2a\sqrt{2}$. Gọi φ là góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AS}$. Tính $\cos\varphi$.

- A.** $\cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{6}}$. **C.** $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Câu 96: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $SA = SB = 2a$, $AB = a$. Gọi φ là góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AS}$. Tính $\cos\varphi$.

- A.** $\cos\varphi = -\frac{7}{8}$. **B.** $\cos\varphi = -\frac{1}{4}$. **C.** $\cos\varphi = \frac{7}{8}$. **D.** $\cos\varphi = \frac{1}{4}$.

Câu 97: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O ; $AD = a\sqrt{2}$; $AB = a$; các cạnh bên bằng nhau và bằng a . Gọi E là trung điểm của cạnh SD . Số đo góc giữa hai vector $\overrightarrow{SA}$; $\overrightarrow{OE}$ bằng:

- A.** 120° . **B.** 0° . **C.** 180° . **D.** 60° .

Câu 98: Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm AB . Góc hợp bởi hai véc-tơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OM}$ bằng

- A.** 120° . **B.** 150° . **C.** 135° . **D.** 60° .

Câu 99: Cho tứ diện đều $ABCD$ có M là trung điểm của BC . Đặt $\alpha = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BD})$. Chọn mệnh đề đúng

- A.** $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. **B.** $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** Đáp số khác.

Câu 100: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{CAD} = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{CD}$.

- A.** 45° . **B.** 90° . **C.** 60° . **D.** 120° .

Câu 101: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vector $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$?

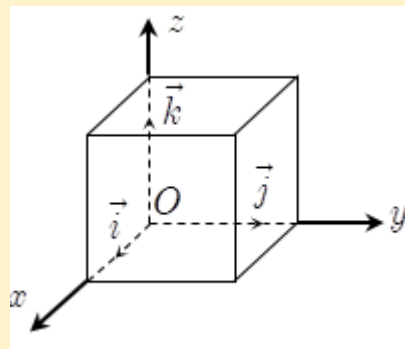
- A.** 120° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Bài 2. Tọa độ của vectơ trong không gian

A. Kiến thức cần nhớ

1. Hệ tọa độ trong không gian

- Hệ gồm 3 trục Ox , Oy , Oz vuông góc với nhau từng đôi một và chung điểm gốc O . Gọi $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$ và $\vec{k} = (0;0;1)$ là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox , Oy , Oz . Hệ ba trục như vậy gọi là hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian hay gọi là hệ trục $Oxyz$.



Nhận xét:

- Điểm O được gọi là gốc tọa độ.
- Các trục Ox , Oy , Oz được gọi là các **trục tọa độ**.
- Các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) đôi một vuông góc với nhau được gọi là các **mặt phẳng tọa độ**.
- Không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ còn được gọi là **không gian $Oxyz$** .
- $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$.

2. Tọa độ của điểm và vectơ

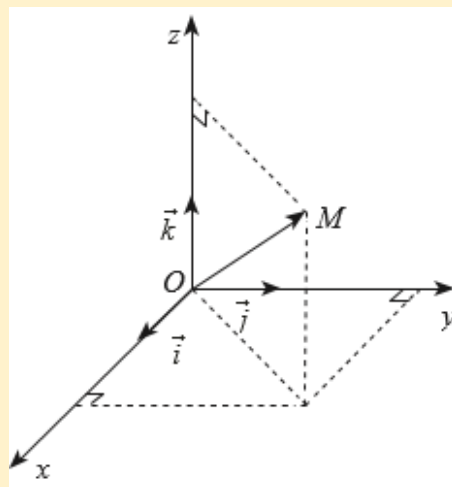
a) **Tọa độ của điểm:** $M(a;b;c) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = (a;b;c)$.

b) **Tọa độ của vectơ:** $\vec{a} = (x;y;z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Nhận xét:

- $M = (a;b;c) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (a;b;c)$.
- Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$. Hai vectơ bằng

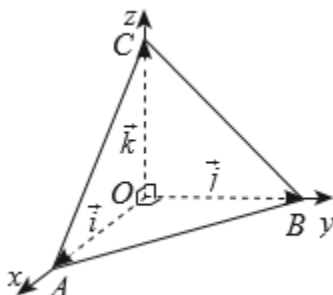
$$\text{nhau } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$



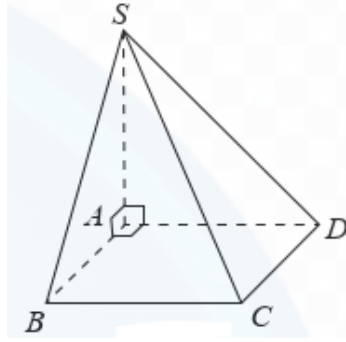
B. Các dạng bài tập & phương pháp giải

Dạng 1. Hệ trục tọa độ và thiết kế hệ trục tọa độ.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc và có độ dài bằng 1. Vẽ hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc là O , các điểm A , B , C lần lượt nằm trên các tia Ox , Oy , Oz và chỉ ra các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.

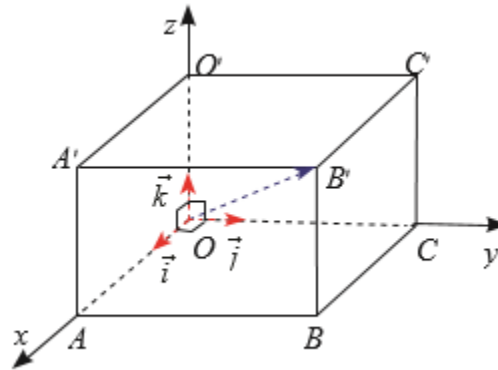


Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 1, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và có độ dài bằng 1 (Hình vẽ). Vẽ hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với điểm A , các điểm B, D, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz và chỉ ra các vector đơn vị trên các trục tọa độ.



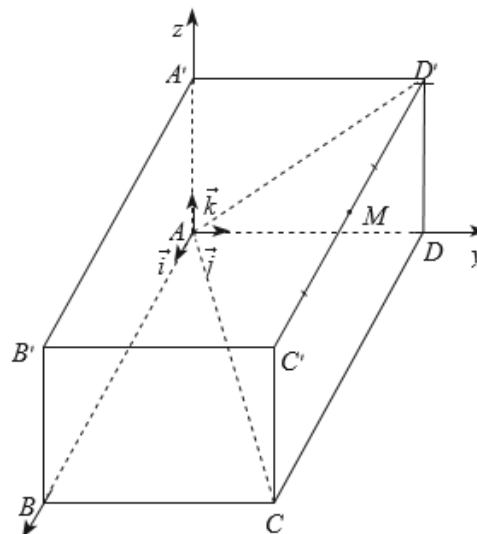
Dạng 2. Tọa độ của điểm, vector.

Ví dụ 3. Cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ có cạnh $OA = 4, OC = 6, OO' = 3$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O ; các điểm A, C, O' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz . Xác định tọa độ các điểm A, B, B' .

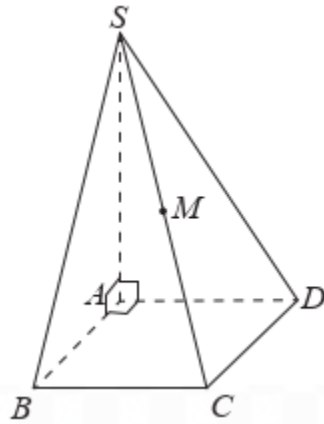


Ví dụ 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 5. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O trùng với A ; các điểm B, D, A' lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz . Xác định tọa độ các điểm B, C, C' .

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O , các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và có $AB = 8, AD = 6, AA' = 4$. Tìm tọa độ các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.



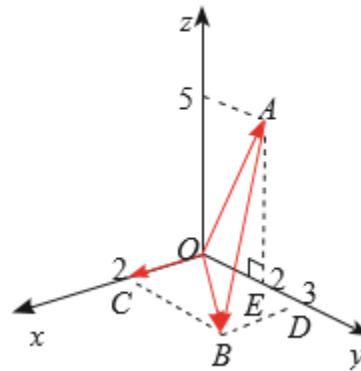
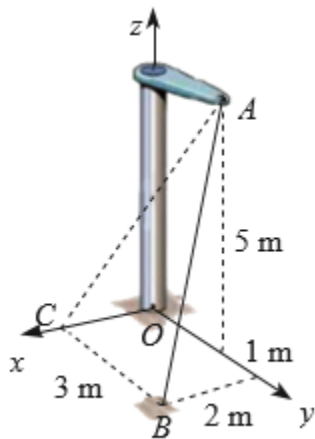
Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và có độ dài bằng 3 (Hình vẽ).



- a) Vẽ hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với điểm A , các điểm B, D, S lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz và chỉ ra các vector đơn vị trên các trục tọa độ.
- b) Trong hệ tọa độ nói trên, tìm tọa độ các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh SC .

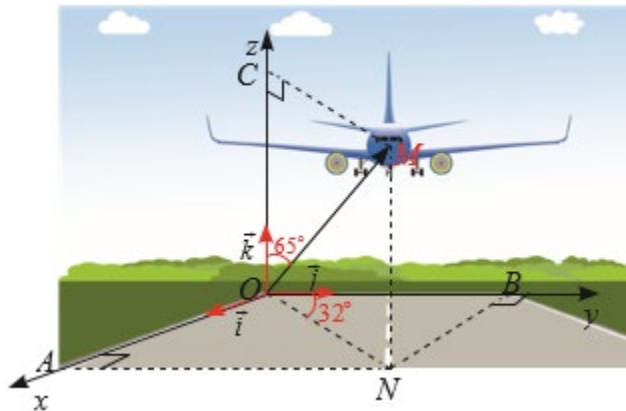
Dạng 3. Một số bài toán thực tế liên quan.

Ví dụ 7. Một thiết kế cơ khí trong Hình thứ nhất và được biểu diễn trong không gian $Oxyz$ như Hình thứ hai bên phải.



- a) Hãy vẽ ba vector đơn vị $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz (vector đơn vị có độ dài bằng 1 m).
- b) Biểu diễn các vector $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ theo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Ví dụ 8. Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như Hình vẽ, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM = 14$, góc $NOB = 32^\circ$, góc $MOC = 65^\circ$. Tìm tọa độ điểm M .



C. Bài tập tự luận rèn luyện

Dạng 1. Hệ trục tọa độ, thiết kế hệ trục tọa độ và tìm tọa độ điểm, vector trên hệ trục đó

Bài 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; 2; -3)$ và vector $\vec{u} = (3; -4; 2)$. Hãy biểu diễn theo các vector $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ mỗi vector sau:

a) $\overrightarrow{OA}$

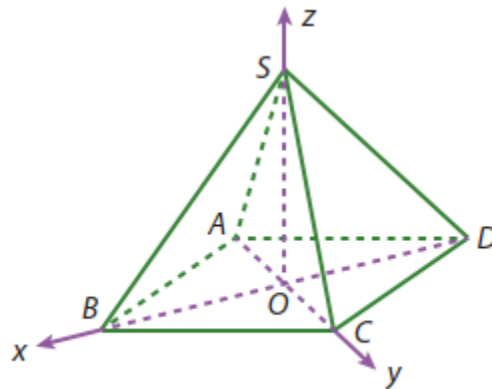
b) $\vec{u}$

Bài 2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho vector $\overrightarrow{OB} = -\vec{i} + 2\vec{k}$ và vector $\vec{u} = -7\vec{j} + \vec{k}$. Hãy tọa độ của:

a) Điểm B

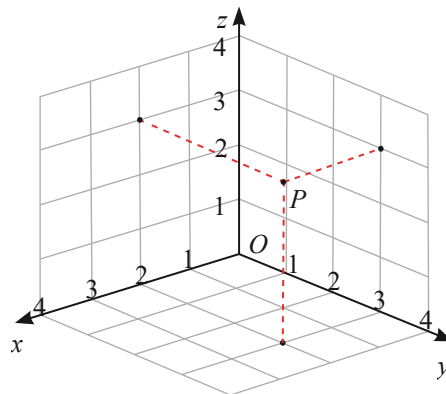
b) Vector $\vec{v}$

Bài 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD . Biết $SA = a$, $SO = h$. Xét hệ tọa độ Oxyz với các tia Ox, Oy, Oz tương ứng trùng với các tia OB, OC, OS như ở Hình 2.40. Hãy xác định tọa độ các điểm S, A, B, C, D .



Hình 2.40

Bài 4. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm P được biểu diễn trong Hình vẽ dưới đây.



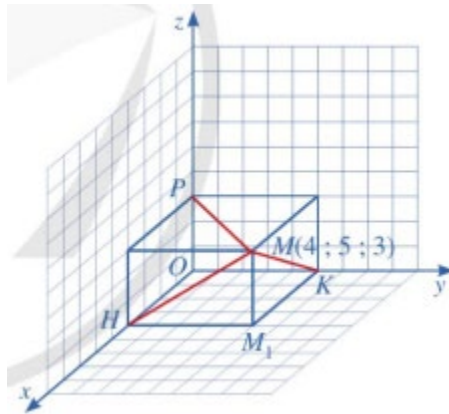
a) Tìm tọa độ điểm P.

b) Tìm tọa độ hình chiếu của điểm P trên các mặt phẳng (Oxy), (Oxz) và (Oyz).

c) Tìm tọa độ hình chiếu của điểm P trên các trục Ox, Oy và Oz.

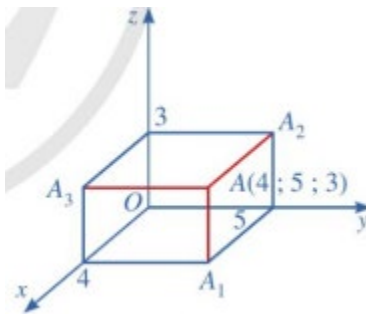
d) Tính khoảng cách OP.

Bài 5. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M được biểu diễn như hình vẽ dưới đây:



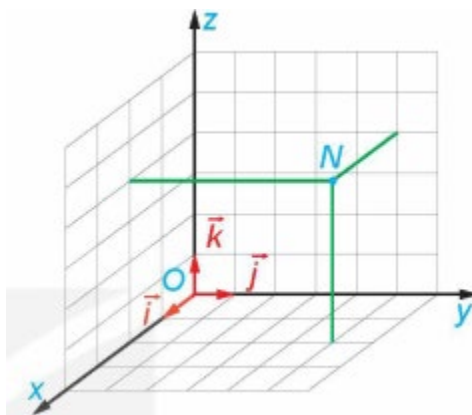
- Tìm tọa độ hình chiếu của điểm M trên các mặt phẳng (Oxy), (Oxz) và (Oyz).
- Tìm tọa độ hình chiếu của điểm M trên các trục Ox, Oy và Oz.
- Tính khoảng cách OM .
- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp trong hình vẽ trên

Bài 6. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(4; 5; 3) được biểu diễn như hình vẽ dưới đây:



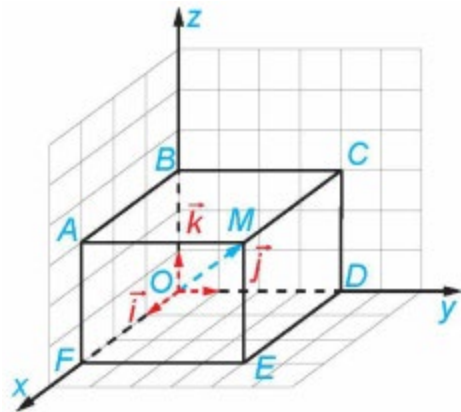
- Tìm tọa độ các điểm A_1 ; A_2 ; A_3 trên hình vẽ
- Tính độ dài OA .

Bài 7. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz được cho như hình vẽ dưới đây:



- Tìm tọa độ các điểm là hình chiếu của điểm N trên các mặt phẳng tọa độ.
- Tính độ dài ON .

Bài 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ được cho như hình vẽ dưới đây:



- Tìm tọa độ điểm M
- Tính độ dài OM
- Tìm hình chiếu của điểm M trên các mặt phẳng tọa độ
- Tìm hình chiếu của điểm M lên các trục tọa độ
- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp $ABCM.FODE$.

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$, biết:

- $\vec{a} = 5\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{k}$. Tìm tọa độ các vector $\vec{a}, \vec{b}$.
- $\vec{OM} = 4\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{ON} = 8\vec{i} + 5\vec{j}$. Tìm tọa độ các điểm M, N .

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$, biết:

- $\vec{a} = (-2; 5; -7)$, $\vec{b} = (4; 0; 1)$. Tính $\vec{a}, \vec{b}$ theo các vector $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.
- $A(7; -2; 1)$, $B(0; 5; 0)$. Tính $\vec{OA}, \vec{OB}$ theo các vector $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

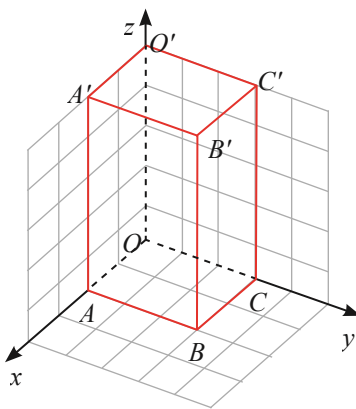
Bài 11. Cho điểm $M(1; 2; 3)$. Hãy tìm tọa độ của các điểm:

- M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) .
- M', M'', M''' lần lượt là điểm đối xứng của M qua các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) và trục Oy .
- N', N'', N''' lần lượt là điểm đối xứng của M qua các trục Ox , Oy , Oz .

Bài 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(3; -2; -1)$. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) . Tìm tọa độ của các điểm A_1, A_2, A_3 .

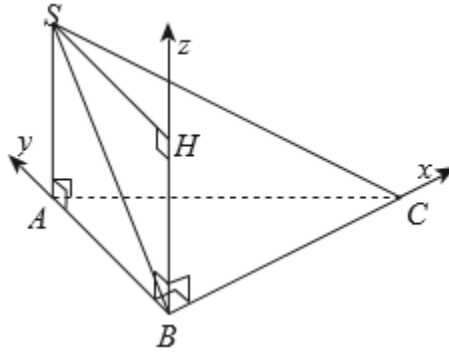
Bài 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-2; 3; 4)$. Gọi H, K, P lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các trục Ox , Oy , Oz . Tìm tọa độ của các điểm H, K, P .

Bài 14. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ như Hình vẽ, biết $B'(2; 3; 5)$.



- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
- Tính độ dài đường chéo OB' của hình hộp chữ nhật đó.

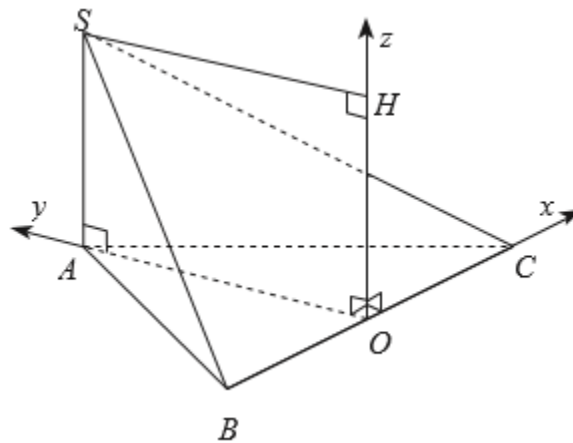
Bài 15. Bài 3. Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $BC = 3$, $BA = 2$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2 (Hình vẽ).



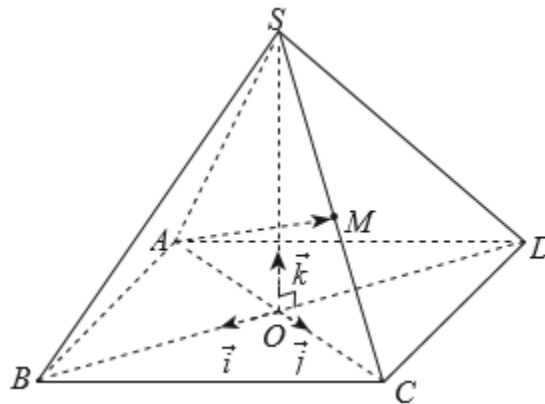
a) Xác định một hệ tọa độ dựa trên gợi ý của hình vẽ và chỉ ra các vector đơn vị trên các trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ các điểm A, B, C, S .

Bài 16. Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2, SA vuông góc với đáy và SA bằng 1 (Hình vẽ). Thiết lập hệ tọa độ như hình vẽ, hãy vẽ các vector đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và tìm tọa độ các điểm A, B, C, S .



Bài 17. Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng 5, giao điểm hai đường chéo AC và BD trùng với gốc O . Các vector $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ và $OA = OS = 4$ (Hình vẽ).



Tìm tọa độ các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh SC .

Dạng 2. Một số bài toán thực tế liên quan.

Bài 18. Một sân tennis với hệ tọa độ Oxyz được chọn như ở Hình 20.

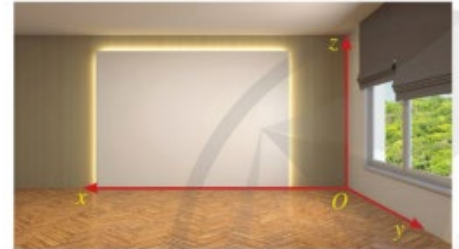
- Hỏi mặt sân nằm trong mặt phẳng tọa độ nào?
- Trục Oz có vuông góc với mặt sân hay không?



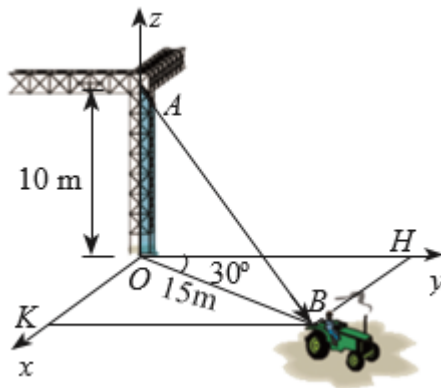
Hình 20

Bài 19. Một căn phòng với hệ tọa độ Oxyz được chọn như ở Hình 21. Cho biết bức tường phía sau của căn phòng nằm trong mặt phẳng tọa độ nào.

Bài 20. Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ Oxyz như Hình vẽ với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng 1 m. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

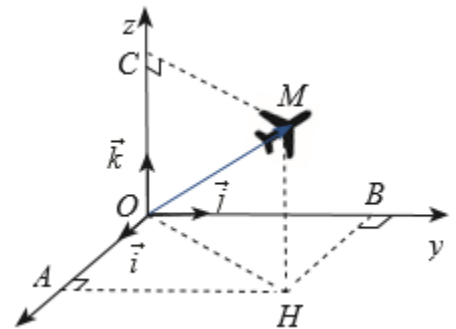


Hình 21

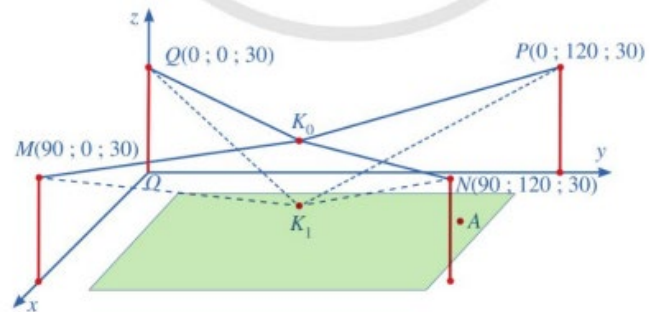


Bài 21. Ở một sân bay, vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M trong không gian Oxyz như Hình vẽ bên dưới. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M xuống mặt phẳng (Oxy) .

Cho biết $OM = 50$, $(\vec{i}, \overrightarrow{OH}) = 64^\circ$, $(\overrightarrow{OH}, \overrightarrow{OM}) = 48^\circ$. Tìm tọa độ của điểm M .



Bài 22. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ Oxyz (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90; 0; 30)$, $N(90; 120; 30)$, $P(0; 120; 30)$, $Q(0; 0; 30)$ (Hình 34). Giả sử K , là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 cao độ bằng 19 (Nguồn:



Hình 34

<https://www.abiturloesung.de>; Abitur Bayern 2016

Geometrie VI). Tìm tọa độ của các điểm K_0 , K_1 và của vectơ $\overrightarrow{K_0K_1}$.

Bài 3. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

A. Kiến thức cần nhớ

1. Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $k \in \mathbb{R}$.

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$.
- $k \cdot \vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.
- $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k \cdot \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k, \vec{b} \neq \vec{0}$

2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Nhận xét:

- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$
- Độ dài của vectơ $\vec{a}$ là $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$

3. Vận dụng tích vô hướng

- Vectơ $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- Độ dài của vectơ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$
- Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow M \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right).$
- Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right).$

4. Biểu thức tọa độ của tích có hướng:

Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{u} = (x_1; y_1; z_1)$; $\vec{v} = (x_2; y_2; z_2)$. Khi đó, vectơ $\vec{w}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ được gọi là tích có hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ và được kí hiệu là:

$$\vec{w} = [\vec{u}; \vec{v}] = (y_1 z_2 - y_2 z_1; z_1 x_2 - z_2 x_1; x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

B. Các dạng bài tập & phương pháp giải

Dạng 1. Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ

Ví dụ 9. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{p} = (3; -2; 1)$, $\vec{q} = (6; -4; 2)$, $\vec{r} = (2; 1; -3)$.

- a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$. b) Tìm hai vectơ cùng phương trong các vectơ đã cho.

Ví dụ 10. Cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.

- a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$. b) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.
- c) Chứng minh $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{m} = (-6; 15; -9)$.

Dạng 2. Biểu thức tọa độ tích vô hướng

Vấn đề 11. Cho ba vector $\vec{a} = (3; 0; 1), \vec{b} = (1; -1; -2), \vec{c} = (2; 1; -1)$.

- a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}; \vec{b} \cdot \vec{c}$. b) Tính $|\vec{a}|, |\vec{b}|, \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
- c) Cho $\vec{d} = (1; 7; -3)$. Chứng minh $\vec{d} \perp \vec{a}$.

Ví dụ 12. Cho ba vector $\vec{m} = (-5; 4; 9)$, $\vec{n} = (2; -7; 0)$, $\vec{p} = (6; 3; -4)$.

- a) Tính $\vec{m} \cdot \vec{n}; \vec{m} \cdot \vec{p}$.
b) Tính $|\vec{m}|, |\vec{n}|, \cos(\vec{m}; \vec{n})$.
c) Cho $\vec{q} = (1; -2; 0)$. Vector $\vec{q}$ có vuông góc với $\vec{p}$ không?

Dạng 3. Tọa độ vectơ (khi biết điểm đầu và điểm cuối) – Trung điểm – Trọng tâm

Ví dụ 13. Chứng minh:

- a) Ba điểm $A(2; 0; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(2; 1; 2)$ không thẳng hàng.
- b) Ba điểm MNP có $M(2; 1; 3)$, $N(1; 2; 3)$, $P(-3; -1; 0)$ tạo thành một tam giác.

Ví dụ 14. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC với $A(2; -1; 1)$, $B(1; -1; 2)$, $C(3; 0; 2)$.

- Tính chu vi của tam giác ABC
- Tính góc ABC của tam giác
- Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A.

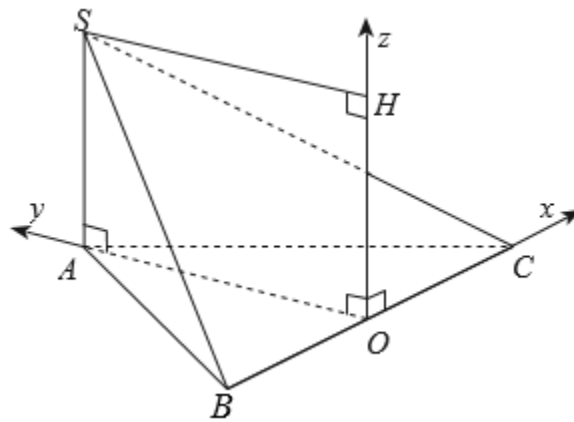
Ví dụ 15. Cho ba điểm $A(2; 0; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(2; 1; 2)$.

- Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Tính các độ dài AB, BC, CA .
- Trung điểm M của AB ;
- Chứng minh ba điểm ABC tạo thành một tam giác. Tính chu vi của tam giác ABC .
- Trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.
- Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .
- Tính góc A .
- Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Oz sao cho đường thẳng BM vuông góc với đường thẳng AC .
- Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho A, B, N thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm E sao cho $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = \vec{0}$.

Ví dụ 16. Cho ba điểm $M(7; -2; 0)$, $N(-9; 0; 4)$, $P(0; -6; 5)$.

- Tìm tọa độ của các vector $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{MP}$. Tích vô hướng $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP}$.
- Tính các độ dài MN , NP , MP .
- Trung điểm P' của MN ;
- Chứng minh ba điểm MNP tạo thành một tam giác. Tính chu vi của tam giác MNP .
- Trọng tâm I của tam giác MNP .
- Các điểm M' , N' lần lượt là trung điểm của các cạnh NP , MP .
- Trọng tâm G của tam giác $M'N'P'$.
- Tìm tọa độ điểm Q để $MNPQ$ là hình bình hành.
- Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ M của tam giác MNP .
- Tính góc N .
- Tìm tọa độ điểm K thuộc trục Oy sao cho đường thẳng BK vuông góc với đường thẳng AC .
- Tìm tọa độ điểm S thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho N, P, S thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm E sao cho $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{EP} = \vec{0}$.

Ví dụ 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$ và đáy ABC là tam giác đều cạnh a , O là trung điểm của BC . Bằng cách thiết lập hệ tọa độ như hình vẽ, hãy tìm tọa độ:



- Các điểm A, S, B, C ;
- Trung điểm M của SB và trung điểm N của SC ;
- Trọng tâm G của tam giác SBC .

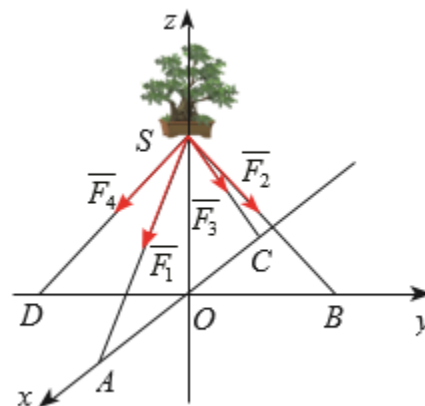
Dạng 4. Tích có hướng

Ví dụ 18. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vector $\vec{m} = (-5; 4; 9)$, $\vec{n} = (2; -7; 0)$. Hãy tìm vector $\vec{p}$ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vector $\vec{m}$ và $\vec{n}$.

Ví dụ 19. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vector $\vec{m} = (1; 0; -3)$, $\vec{n} = (0; 0; 3)$. Hãy tìm vector $\vec{p}$ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vector $\vec{m}$ và $\vec{n}$.

Dạng 5. Một số bài toán thực tế liên quan

Ví dụ 20. Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0; 0; 20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20; 0; 0)$, $B(0; 20; 0)$, $C(-20; 0; 0)$, $D(0; -20; 0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 40 N và được phân bố thành bốn lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có độ lớn bằng nhau như Hình 4. Tìm tọa độ của các lực nói trên (mỗi centimét biểu diễn 1 N).



Giải

Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình vuông.

Ta có $\vec{SA} = (20; 0; -20)$, $\vec{SB} = (0; 20; -20)$, $\vec{SC} = (-20; 0; -20)$, $\vec{SD} = (0; -20; -20)$, suy ra $SA = SB = SC = SD = 20\sqrt{2}$. Do đó $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều.

Các vector $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có điểm đầu tại S và điểm cuối lần lượt là A', B', C', D' . Ta có $SA' = SB' = SC' = SD'$ nên $S.A'B'C'D'$ cũng là hình chóp tứ giác đều.

Gọi F là trọng lực tác dụng lên chậu cây và O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$. Ta có:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{SA'} + \vec{SB'} + \vec{SC'} + \vec{SD'} = 4\vec{SO'}$$

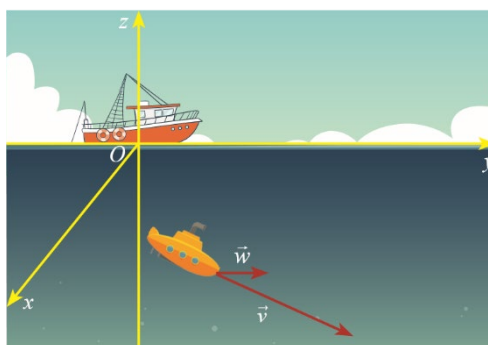
Ta có $|\vec{F}| = 40$, suy ra $|\vec{SO'}| = SO' = 10$.

Do tam giác $SO'A'$ vuông cân nên $SA' = SO' \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2} = \frac{1}{2}SA$, suy ra $\vec{F}_1 = \vec{SA'} = \frac{1}{2}\vec{SA} = (10; 0; -10)$

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{2}\vec{SB} = (0; 10; -10); \vec{F}_3 = \frac{1}{2}\vec{SC} = (-10; 0; -10); \vec{F}_4 = \frac{1}{2}\vec{SD} = (0; -10; -10).$$

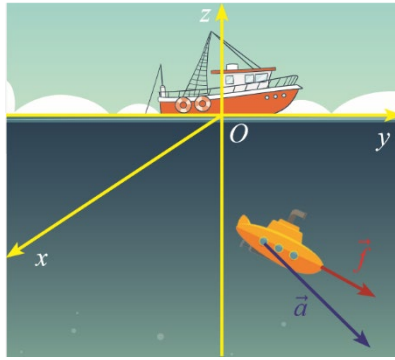
Ví dụ 21. Một thiết bị thăm dò đáy biển đang lặn với vận tốc $\vec{v} = (10; 8; -3)$ (Hình vẽ). Cho biết vận tốc của dòng hải lưu của vùng biển là $\vec{w} = (3; 5; 1; 0)$.



a) Tìm tọa độ của vector tổng hai vận tốc $\vec{v}$ và $\vec{w}$.

b) Giả sử thiết bị thăm dò lặn với vận tốc $\vec{u} = (7; 2; 0)$, hãy nêu nhận xét về vector vận tốc của nó so với vector vận tốc của dòng hải lưu.

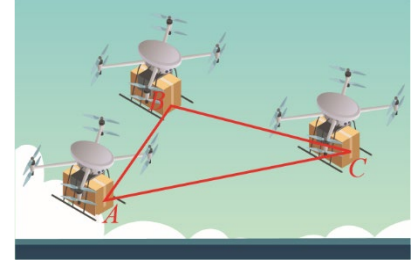
Ví dụ 22. Một thiết bị thăm dò đáy biển (Hình vẽ bên dưới) được đẩy bởi một lực $\vec{f} = (5; 4; -2)$ (đơn vị: N) giúp thiết bị thực hiện độ dời $\vec{a} = (70; 20; -40)$ (đơn vị: m). Tính công sinh bởi lực $\vec{f}$.



Ví dụ 23. Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$, một đội gồm ba drone giao hàng A, B, C đang có tọa độ là $A(1; 1; 1), B(5; 7; 9), C(9; 11; 4)$. Tính:

a) Các khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng.

b) Góc BAC .



C. Bài tập tự luận rèn luyện

Dạng 1. Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vector và tích của một số với một vector – Tích vô hướng

Bài 1. Cho hai vector $\vec{a} = (0; 1; 3)$, $\vec{b} = (-2; 3; 1)$; $\vec{c} = (2; -3; 4)$ và $\vec{d} = (3; -1; m)$

- | | |
|---|--|
| a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\vec{a} \cdot \vec{c}$; $\vec{b} \cdot \vec{c}$; | b) Tính $\vec{a} \cdot (-\vec{b})$; $(2\vec{a}) \cdot \vec{c}$ |
| c) Tính $2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$ | d) Tính $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c}$ |
| e) Tính $\vec{v} - 3\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$ | f) Tính $\vec{a} \cdot (2\vec{b} + \vec{c})$ |
| g) Tính độ dài của $ \vec{a} $; $ \vec{b} $ và $ \vec{c} $. | h) Tính $ \vec{a} + \vec{b} $ |
| i) Tính $ 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} $ | j) Tính $\cos(\vec{a}; \vec{b})$; $\cos(\vec{a}; \vec{c})$; $\cos(\vec{b}; \vec{c})$ |
| k) Tìm m để $\vec{f} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ vuông góc với $\vec{d}$. | l) Tìm m để $\vec{g} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ vuông góc với $\vec{d}$. |

Bài 2. Cho $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$.

- | | |
|--|--|
| a) Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $\vec{a} \cdot \vec{c}$; $\vec{b} \cdot \vec{c}$; | b) Tính $\vec{a} \cdot (-2\vec{b})$; $(3\vec{a}) \cdot \vec{c}$ |
| c) Tính $5\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}$ | d) Tính $\vec{t} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$ |
| e) Tính $\vec{u} = \vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c}$ | f) Tính $\vec{v} - 5\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$ |
| g) Tính $\vec{a} \cdot (2\vec{b} + \vec{c})$ | h) Tính độ dài của $ \vec{a} $; $ \vec{b} $ và $ \vec{c} $. |
| i) Tính $ \vec{a} + \vec{b} $ | j) Tính $ 2\vec{a} + \vec{b} $ |
| k) Tính $ 3\vec{a} - 2\vec{b} $ | l) Tính $ 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} $ |
| m) Tính $\cos(\vec{a}; \vec{b})$; $\cos(\vec{a}; \vec{c})$; $\cos(\vec{b}; \vec{c})$ | |

Bài 3. Cho hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$ tạo với nhau góc 60° . Biết rằng $|\vec{u}| = 2$ và $|\vec{v}| = 4$. Tính $|\vec{u} + \vec{v}|$.

Bài 10. Cho tam giác MNP có $M(2; 1; 3)$, $N(1; 2; 3)$, $P(-3; -1; 0)$.

- Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{MP}$.
- Tính các độ dài MN , NP , MP . Tính chu vi của tam giác MNP .
- Trọng tâm I của tam giác MNP .
- Các điểm M' , N' , P' lần lượt là trung điểm của các cạnh NP , MP và MN .
- Trọng tâm G của tam giác $M'N'P'$.
- Tìm tọa độ điểm Q để $MNPQ$ là hình bình hành. Tính chu vi của hình bình hành $MNPQ$.
- Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ M của tam giác MNP .
- Tính góc N .
- Tìm tọa độ điểm K thuộc trục Oy sao cho đường thẳng BK vuông góc với đường thẳng AC .
- Tìm tọa độ điểm S thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho N, P, S thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm E sao cho $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{EP} = \vec{0}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC có $A(7; 3; 3)$, $B(1; 2; 4)$, $C(2; 3; 5)$.

- Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Tính các độ dài AB , BC , CA . Từ đó tính chu vi của tam giác ABC .
- Trung điểm M của AB ;
- Trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành. Tính chu vi của hình bình hành $ABCD$.
- Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .
- Tính góc C .
- Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Oz sao cho đường thẳng AM vuông góc với đường thẳng BC .
- Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho A, C, N thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm E sao cho $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CE} = \vec{0}$.

Bài 12. Cho tam giác MNP có $M(0; 1; 2)$, $N(5; 9; 3)$, $P(7; 8; 2)$.

- Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{MP}$.
- Tính các độ dài MN , NP , MP . Tính chu vi của tam giác MNP .
- Trọng tâm I của tam giác MNP .
- Các điểm M' , N' , P' lần lượt là trung điểm của các cạnh NP , MP và MN .
- Trọng tâm G của tam giác $M'N'P'$.
- Tìm tọa độ điểm Q để $MNPQ$ là hình bình hành. Tính chu vi của hình bình hành $MNPQ$.
- Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ M của tam giác MNP .
- Tính góc M .
- Tìm tọa độ điểm K thuộc trục Oy sao cho đường thẳng BK vuông góc với đường thẳng AC .
- Tìm tọa độ điểm S thuộc mặt phẳng (Oxz) sao cho N, P, S thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm E sao cho $\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{EP} = \vec{0}$.

Bài 13. Cho ba điểm $A(2; 1; -1)$, $B(3; 2; 0)$ và $C(2; -1; 3)$.

- Tìm tọa độ của các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- Tính các độ dài AB, BC, CA .
- Trung điểm M của AB ; trung điểm N của AC ; Trung điểm P của BC ;
- Chứng minh ba điểm ABC tạo thành một tam giác. Tính chu vi của tam giác ABC .
- Trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành. Tính chu vi của hình bình hành $ABCD$.
- Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .
- Tính góc A .
- Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Oz sao cho đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng AB .
- Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho B, C, N thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm E sao cho $2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CE} = \vec{0}$.

Bài 14. Cho điểm $M(1; 2; 3)$. Hãy tìm tọa độ của các điểm:

- M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$.
- M', M'', M''' lần lượt là điểm đối xứng của M qua O , mặt phẳng (Oxy) và trục Oy .

Bài 15. Cho ba điểm $A(3; 3; 3)$, $B(1; 1; 2)$ và $C(5; 3; 1)$.

- Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tính chu vi tam giác ABC .
- Tìm tọa độ trung điểm của các cạnh của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành. Tính chu vi của hình bình hành $ABCD$.
- Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .
- Tính góc A .
- Tìm điểm F trên trục Oy cách đều hai điểm B, C .
- Tìm điểm R trên mặt phẳng (Oxy) cách đều ba điểm A, B, C .
- Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Oz sao cho đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng AB .
- Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho B, C, N thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm E sao cho $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CE} = \vec{0}$.

Bài 16. Cho ba điểm $A(1; 3; 5)$, $B(2; 0; 1)$, $C(0; 9; 0)$.

- Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tính chu vi tam giác ABC .
- Tìm tọa độ trung điểm của các cạnh của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành. Tính chu vi của hình bình hành $ABCD$.
- Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .
- Tính góc A .
- Tìm điểm R trên trục Oy cách đều hai điểm B, C .
- Tìm điểm S trên mặt phẳng (Oxy) cách đều ba điểm A, B, C .
- Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Ox sao cho đường thẳng AM vuông góc với đường thẳng BC .
- Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho B, C, N thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm E sao cho $3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CE} = \vec{0}$.

Bài 17. Cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; 1; -3)$, $C(-3; 5; 1)$.

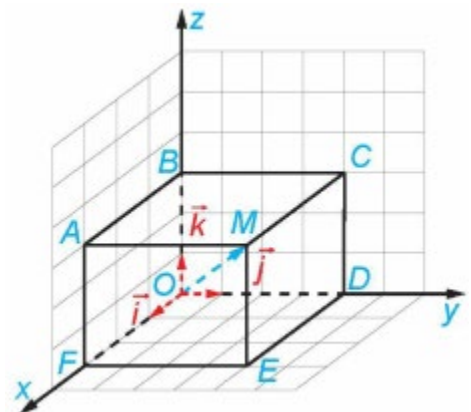
- Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tính chu vi tam giác ABC .
- Tìm tọa độ trung điểm của các cạnh của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành. Tính chu vi của hình bình hành $ABCD$.
- Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .
- Tính góc A .
- Tìm điểm R trên trục Oy cách đều hai điểm A, C .
- Tìm điểm S trên mặt phẳng (Oxy) cách đều ba điểm A, B, C .
- Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Ox sao cho đường thẳng AM vuông góc với đường thẳng BC .
- Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho B, C, N thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm E sao cho $-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = \vec{0}$.

Bài 18. Cho ba điểm $A(2; -1; 1)$, $B(-1; 3; -1)$, $C(5; -3; 4)$.

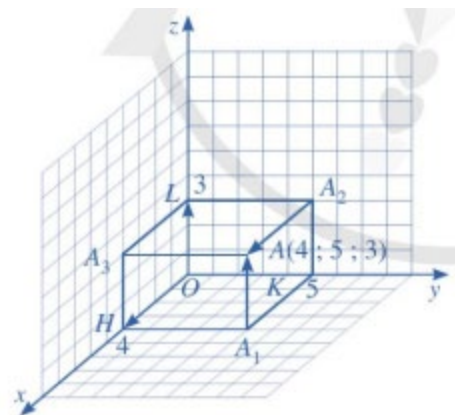
- Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tính chu vi tam giác ABC .
- Tìm tọa độ trung điểm của các cạnh của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành. Tính chu vi của hình bình hành $ABCD$.
- Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC .
- Tính góc A .
- Tìm điểm R trên trục Oz cách đều hai điểm A, C .
- Tìm điểm S trên mặt phẳng (Oxz) cách đều ba điểm A, B, C .
- Tìm tọa độ điểm M thuộc trục Ox sao cho đường thẳng AM vuông góc với đường thẳng BC .
- Tìm tọa độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho A, B, N thẳng hàng.
- Tìm tọa độ điểm E sao cho $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = \vec{0}$.

Bài 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ được cho như hình vẽ dưới đây:

- Tìm tọa độ điểm M
- Tính độ dài OM
- Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật $ABCM.FODE$.
- Tính diện tích của hình chữ nhật $OBME$
- Tính thể tích của khối hộp chữ nhật $ABCM.FODE$.
- Tính số đo các góc $\widehat{OMD}$; $\widehat{ADF}$
- Tính vector $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{OE}$
- Tính vector $\vec{v} = -3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{FC}$



Bài 20. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hình vẽ dưới đây:



Hình 30

- Tìm toạ độ điểm A
- Tính độ dài OA
- Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật $AA_2LA_3.A_1KOH$.
- Tính diện tích của hình chữ nhật $ALOA_1$
- Tính thể tích của khối hộp chữ nhật $AA_2LA_3.A_1KOH$.
- Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{A_1A}; \overrightarrow{A_2A}; \overrightarrow{A_3A}; \overrightarrow{KA}$
- Tính số đo các góc $\widehat{LOA}; \widehat{HLK}$

Bài 21. Cho các điểm $A(-1; -1; 0)$, $B(0; 3; -1)$, $C(-1; 14; 0)$, $D(-3; 6; 2)$. Chứng minh rằng ABCD là hình thang.

Bài 22. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 0; 1)$, $B(2; 1; 2)$, $D(1; -1; 1)$, $C'(4; 5; -5)$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

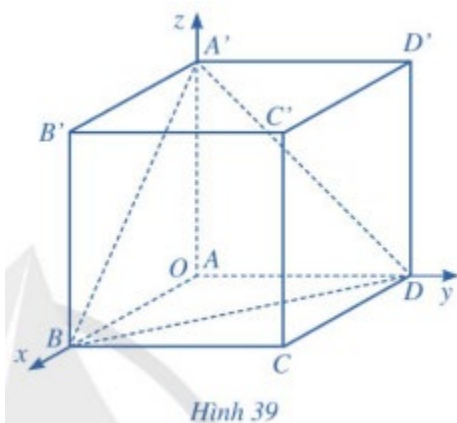
Bài 23. Cho ba điểm $A(0; 1; 2)$, $B(1; 2; 3)$, $C(1; -2; -5)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn thẳng BC sao cho $MB = 3MC$. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

Bài 24. Cho hai điểm $A(1; 2; -1)$, $B(0; -2; 3)$.

- Tính độ dài đường cao AH hạ từ đỉnh A của tam giác OAB với O là gốc toạ độ.
- Tính diện tích tam giác OAB.

Bài 25. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AA' và CC'. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AD'}$.

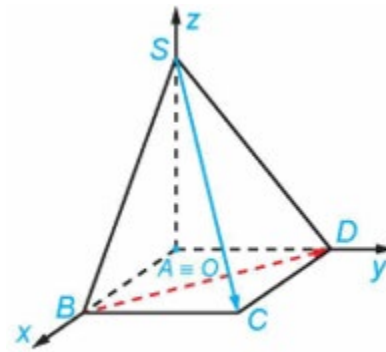
Bài 26. Xét hệ toạ độ Oxyz gắn với hình lập phương ABCD.A'B'C'D' như Hình 39, đơn vị của mỗi trục bằng độ dài cạnh hình lập phương. Biết $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1)$.



Hình 39

- Xác định toạ độ các đỉnh còn lại của hình lập phương ABCD.A'B'C'D'.
- Xác định toạ độ trọng tâm G của tam giác A'BD.
- Xác định toạ độ các vectơ $\overrightarrow{OG}$ và $\overrightarrow{OC'}$.
- Chứng minh rằng ba điểm O, G, C thẳng hàng và $OG = \frac{1}{3}OC'$.

Bài 27. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Giả sử SA=2, AB=3, AD = 4. Xét hệ toạ độ Oxyz với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS (H.2.48).



Hình 2.48

- Xác định toạ độ của các điểm S, A, B, C, D.
- Tính BD và SC.
- Tính $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC})$.

Bài 28. Trong không gian Oxyz, cho tứ diện ABCD với A(1; 3; -2), B(3; 2; -4), C(2; 1; 0), D(3; 5; -1).

- Chứng minh rằng $AB = CD$.
- Chứng minh rằng BCD là tam giác đều.
- Tính số đo của $\widehat{AMD}$ với M là trung điểm của BC (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
- Tìm toạ độ điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

Dạng 3. Tích có hướng

Bài 29. Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho $\vec{a} = (2; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; 1; 3)$. Hãy chỉ ra toạ độ của một vector $\vec{c}$ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bài 30. Cho hai vector $\vec{u} = (1; -2; 3)$ và $\vec{v} = (3; 4; -5)$. Hãy chỉ ra toạ độ của một vector $\vec{w}$ khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vector $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Bài 31. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D', biết A(1;0;1), B(2;1;2), D(1;-1;1), C'(4;5;-5). Hãy chỉ ra toạ độ của một vector khác $\vec{0}$ vuông góc với cả hai vector trong mỗi trường hợp sau:

- $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'D'}$;
- $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BD}$.

Dạng 4 Một số bài toán thực tế liên quan

Bài 32. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu lực $\vec{F}$ tác động vào một vật và làm vật dịch chuyển theo đoạn thẳng từ M đến N, thì công A sinh bởi lực $\vec{F}$ được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$. Một người tác động một lực không đổi $\vec{F} = (2; 3; -1)$ vào một vật đang ở gốc tọa độ O và làm cho vật dịch chuyển thẳng từ O đến M(1; 2; 1). Biết lực tính bằng newton (N) và đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét, hãy tính công A (đơn vị: J) sinh ra bởi lực $\vec{F}$ trong tình huống nêu trên.

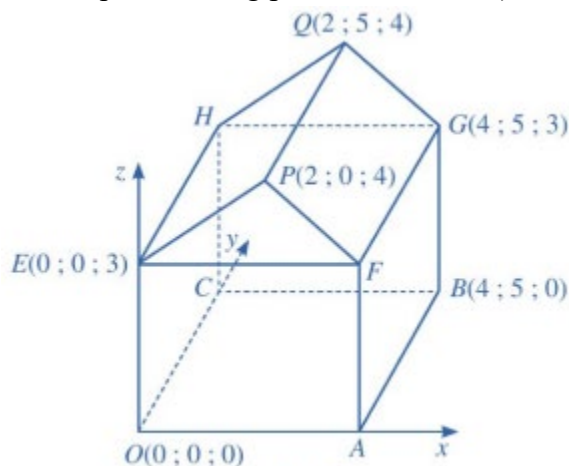
Giải

Theo bài toán nêu ở phần Khởi động thì trong không gian Oxyz, một người đã tác động một lực không đổi $\vec{F} = (2; 3; -1)$ vào một vật đang ở gốc tọa độ O và làm cho vật dịch chuyển thẳng từ O đến điểm M(1; 2; 1). Ta có $\overrightarrow{OM} = (1; 2; 1)$. Từ đó ta tính được công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ là:

$$A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN} = 2.1 + 3.2 + (-1).1 = 7.$$

Như vậy công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ trong tình huống này là $A = 7$ (J).

Bài 33. Hình 37 minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ Oxyz, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.
a) Tìm tọa độ của các điểm A, H và F.
b) Tính góc dốc của mái nhà, tức là tìm số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là (FGQP) và (FGHE) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).



Giải

a) Vì nền nhà là hình chữ nhật nên tứ giác OABC là hình chữ nhật, suy ra $x_A = x_B = 4; y_C = y_B = 5$. Do A nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm A là $(4; 0; 0)$. Tường nhà là hình chữ nhật nên tứ giác OCHE là hình chữ nhật, suy ra $y_H = y_C = 5; z_H = z_E = 3$.

Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm H là $(0; 5; 3)$.

Tứ giác OAFE là hình chữ nhật nên $x_F = x_A = 4; z_F = z_E = 3$.

Do F nằm mặt phẳng (Oxz) nên tọa độ điểm $(4; 0; 3)$.

b) Để tính góc dốc của mái nhà, ta đi tính số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là (FGQP) và (FGHE). Do mặt phẳng (Oxz) vuông góc với hai mặt phẳng (FGQP) và (FGHE) nên góc PFE là góc phẳng nhị diện ứng với góc nhị diện đó. Ta có: $\vec{FP} = (-2; 0; 1)$, $\vec{FE} = (-4; 0; 0)$.

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{PFE} = \cos(\vec{FP}, \vec{FE}) = \frac{\vec{FP} \cdot \vec{FE}}{|\vec{FP}| \cdot |\vec{FE}|} = \frac{-2 \cdot (-4) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Do đó, $\widehat{PFE} \approx 26,6^\circ$. Vậy góc dốc của mái nhà khoảng $26,6^\circ$.

Bài 34. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm A(800; 500; 7) đến điểm B (940; 550; 8) trong 10 phút.

- a) Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?
b) Xác định tọa độ của chiếc máy bay sau 10 phút tiếp theo (tính từ thời điểm máy bay đang ở điểm B)



Hình 2.49

Giải

a) Gọi C(x; y, z) là vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB = 2BC$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \left(\frac{940-800}{2}; \frac{550-500}{2}; \frac{8-7}{2} \right) = (70; 25; 0,5)$$

$$\text{Mặt khác, } \overrightarrow{BC} = (x-940; y-550; z-8) \text{ nên } \begin{cases} x-940=70 \\ y-550=25 \\ z-8=0,5 \end{cases} \text{ Từ đó } \begin{cases} x=1010 \\ y=575 \\ z=8,5 \end{cases} \text{ và vì vậy } C(1010; 575; 8,5).$$

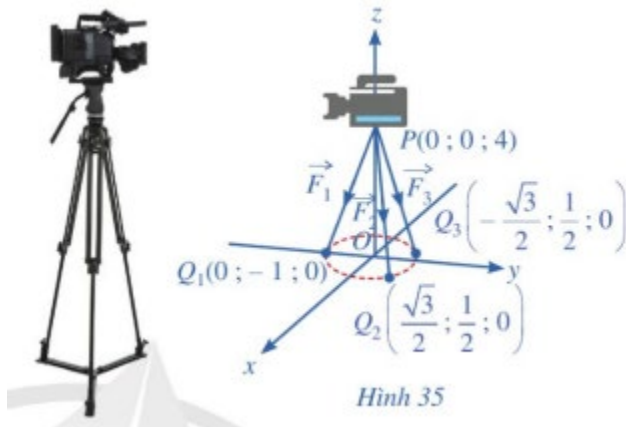
Vậy tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là (1010; 575; 8,5).

Bài 35. Một chiếc máy quay phim ở đài truyền hình được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt P(0 ; 0 ; 4) và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt

là $Q_1(0; -1; 0); Q_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right); Q_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ (Hình

35). Biết rằng trọng lượng của máy quay là 360 N.

Em hãy tìm tọa độ của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ tác dụng lên giá đỡ?



Hình 35

Giải

$$\text{Theo giả thiết, ta có } \overrightarrow{PQ_1} = (0; -1; -4); \overrightarrow{PQ_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -4 \right); \overrightarrow{PQ_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; -4 \right)$$

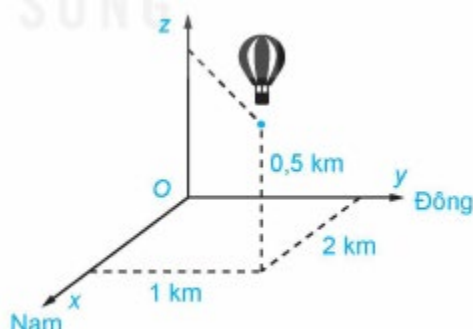
Suy ra: $|\overrightarrow{PQ_1}| = |\overrightarrow{PQ_2}| = |\overrightarrow{PQ_3}| = 17$. Do đó $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$. Vì vậy, tồn tại hằng số $c \neq 0$ sao cho:

$$\vec{F}_1 = c\overrightarrow{PQ_1} = (0; -c; -4c); \vec{F}_2 = c\overrightarrow{PQ_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c; \frac{1}{2}c; -4c \right); \vec{F}_3 = c\overrightarrow{PQ_3} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c; \frac{1}{2}c; -4c \right)$$

$\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (0; 0; -12c)$. Mặt khác, ta có $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}$, trong đó $\vec{F} = (0; 0; -360)$ là trọng lực tác dụng lên máy quay. Suy ra $-12c = -360$, tức là $c = 30$.

$$\text{Vậy: } \vec{F}_1 = (0; -30; -120); \vec{F}_2 = (15\sqrt{3}; 15; -120); \vec{F}_3 = (-15\sqrt{3}; 15; -120)$$

Bài 36. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H.2.50), đơn vị đo lấy theo kilômét.



Hình 2.50

- Tìm tọa độ của mỗi chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.
- Xác định khoảng cách giữa hai khinh khí cầu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).
- Khinh khí cầu thứ nhất hay thứ hai xa điểm xuất phát hơn? Vì sao?

Giải

a) Chiếc khinh khí cầu thứ nhất và thứ hai có tọa độ lần lượt là: $(2; 1; 0,5)$ và $(-1; -1,5; 0,8)$

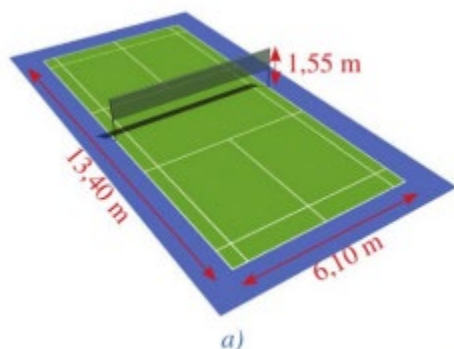
b) Khoảng cách giữa hai chiếc khinh khí cầu là:

$$\sqrt{(-1-2)^2 + (-1,5-1)^2 + (0,8-0,5)^2} = \sqrt{15,34} \approx 3,92 \text{ (km)}$$

Bài 37. Trong không gian Oxyz, một vật đi từ điểm $A(2; 3; 0)$ đến điểm $B(-1; 1; 2)$ rồi tiếp tục đi đến điểm $C(3; -2; -1)$. Tìm vector biểu thị độ dịch chuyển của vật khi:

- Vật đi từ điểm A đến điểm B;
- Vật đi từ điểm A đến điểm C.

Bài 38. Hình 33a mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục Oxyz cho sân đó như ở Hình 33b (đơn vị trên mỗi trục là mét). Giả sử AB là một trụ cầu lông để căng lưới. Hãy xác định tọa độ của vector AB.



Hình 33

Bài 39. Để theo dõi hành trình của một chiếc máy bay, ta có thể lập hệ tọa độ Oxyz có gốc O trùng với vị trí của trung tâm kiểm soát không lưu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H.2.43). Sau khi cất cánh và đạt độ cao nhất định, chiếc máy bay duy trì hướng bay về phía nam với tốc độ không đổi là 890 km/h trong nửa giờ. Xác định tọa độ của vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của chiếc máy bay trong nửa giờ đó đối với hệ tọa độ đã chọn, biết rằng đơn vị đo trong không gian Oxyz được lấy theo kilômét.

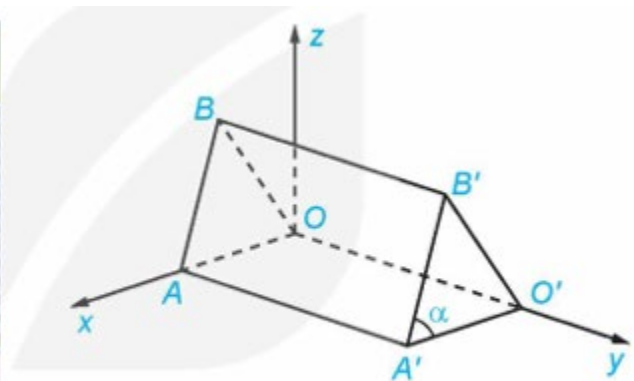


Hình 2.43

Bài 40. Những căn nhà gỗ trong Hình 2.47a được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác OAB.O'A'B' như trong Hình 2.47b. Với hệ trục tọa độ Oxyz thể hiện như Hình 2.47b (đơn vị đo lấy theo centimét), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là (240; 450; 0) và (120; 450; 300). Từ những thông tin trên, hãy tính kích thước chiều dài, chiều rộng và cạnh bên mặt tiền và góc α của những căn nhà gỗ đó?



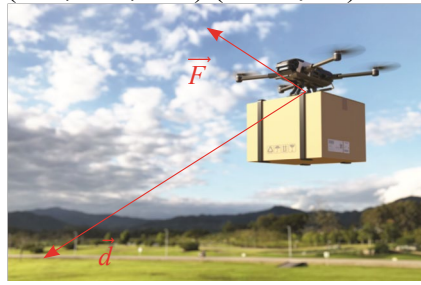
a)



b)

Hình 2.47

Bài 41. Tính công sinh bởi lực $\vec{F} = (20; 30; -10)$ (đơn vị: N) tạo bởi một drone giao hàng (Hình 7) khi thực hiện một độ dịch chuyển $\vec{d} = (150; 200; 100)$ (đơn vị: m).



Bài 42. Một vật ở trạng thái cân bằng khi hợp của tất cả các lực tác dụng lên vật được biểu diễn bằng vector-không. Trong không gian Oxyz, biết rằng đang có ba lực biểu thị bởi ba vector $\vec{F}_1 = (9; 7; 2)$, $\vec{F}_2 = (1; 5; 10)$ và $\vec{F}_3 = (9; -2; -7)$ tác dụng lên một vật. Hãy tìm toạ độ của vector biểu thị lực F_4 để khi tác dụng thêm lực này vào vật thì vật ở trạng thái cân bằng.

Bài 43. Cho ba lực $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3$ lần lượt có cường độ 2 N, 4 N, 5 N được đặt vào chất điểm M. Biết rằng góc tạo bởi hai lực bất kì trong ba lực đều bằng 60. Tính cường độ của hợp lực tác dụng lên M.

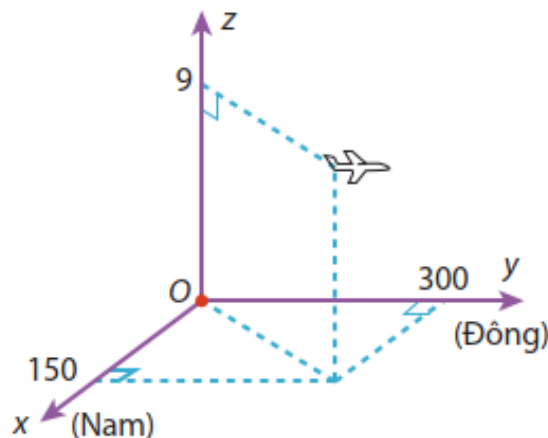
Bài 44. Cho biết máy bay A đang bay với vector vận tốc $\vec{a} = (300\ 200\ 400; ;)$ (đơn vị: km/h). Máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ gấp ba lần tốc độ của máy bay A.

a) Tìm toạ độ vector vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B.

b) Tính tốc độ của máy bay B.



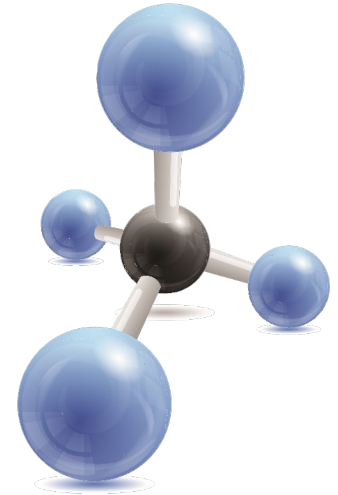
Bài 45. Trong Hình 2.41, gốc toạ độ O là nơi máy bay xuất phát, trục Ox theo hướng Nam, trục Oy theo hướng Đông, trục Oz theo hướng thẳng đứng. Đơn vị trên các trục là km. Vào thời điểm 9h30 sáng, máy bay ở độ cao 9 km, cách điểm xuất phát theo hướng Nam 150 km và theo hướng Đông 300 km. Phi công để chế độ bay tự động, với vận tốc theo hướng Đông 750 km/h, độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng Bắc với vận tốc 10 m/s. Tìm toạ độ của máy bay lúc 10h30, với giả định là trong khoảng thời gian 9h30 đến 10h30, vận tốc và hướng của gió không thay đổi.



Hình 2.41

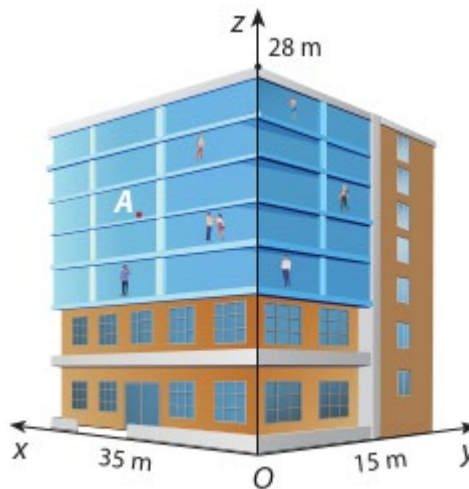
Bài 46. Trong không gian Oxyz, một máy bay đang bay ở vị trí A(250; 465; 15) với tốc độ $\vec{v} = (455; 620; 220)$ thì vào một vùng có gió với tốc độ $\vec{u} = (37; -12; 4)$ (đơn vị tốc độ là km/giờ). Máy bay bay trong vùng gió này mất 30 phút. Tìm vị trí của máy bay sau 30 phút đó.

Bài 47. Cho biết bốn đoạn thẳng nối từ một đỉnh của tứ diện đến trọng tâm mặt đối diện luôn cắt nhau tại một điểm gọi là trọng tâm của tứ diện đó. Một phân tử metan CH_4 được cấu tạo bởi bốn nguyên tử hydrogen ở các đỉnh của một tứ diện đều và một nguyên tử carbon ở trọng tâm của tứ diện. Góc liên kết là góc tạo bởi liên kết H–C–H là góc giữa các đường nối nguyên tử carbon với hai trong số các nguyên tử hydrogen. Chứng minh rằng góc liên kết này gần bằng $109,5^\circ$.



Bài 48. Trong không gian Oxyz, lực không đổi $\vec{F} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 10\vec{k}$ làm di chuyển một vật dọc theo đoạn thẳng từ M(1; 0; 2) đến N(5; 3; 8). Tìm công sinh ra nếu khoảng cách được tính bằng mét và lực được tính bằng newton.

Bài 49. Một toà nhà có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước chiều dài 35 m, chiều rộng 15 m, chiều cao 28 m. Người ta định vị các vị trí trong toà nhà dựa vào một hệ trục tọa độ Oxyz như Hình 2.42.

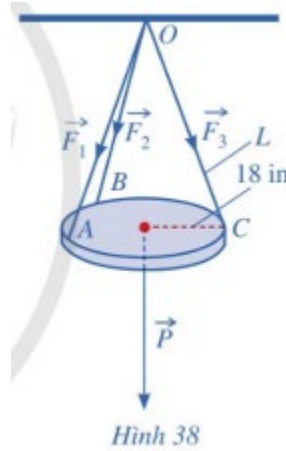


Hình 2.42

a) Chị Hương đang đứng ở vị trí A(20; 5; 20) và di chuyển đến thang máy để xuống sảnh chờ đón khách. Biết vị trí vào thang máy có hoành độ $x = 15$ và tung độ $y = 3$. Hỏi chị Hương mất bao nhiêu giây để di chuyển, nếu từ vị trí A có thể đi thẳng đến cửa thang máy và chị ấy đi bộ với tốc độ 1,5 m/s?

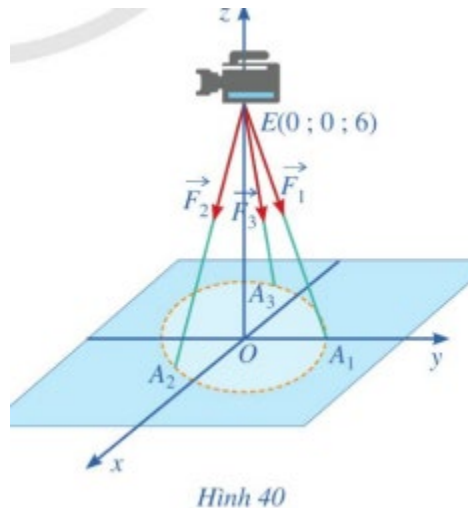
b) Chị Hương vừa đặt một bộ phát sóng wifi trong phòng làm việc của mình tại vị trí có tọa độ (20; 5; 20). Do yêu cầu của công việc, sáng nay chị Hương phải đứng ở bàn lễ tân có tọa độ (5; 0; 0) để đón khách. Hỏi trong lúc đứng ở bàn lễ tân chờ khách thì điện thoại của chị có bắt được sóng wifi phát ra từ phòng làm việc của mình hay không? Biết rằng vùng phủ sóng bộ phát wifi nói trên có bán kính 30 mét.

Bài 50. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều (Hình 38). Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L . Trọng lượng của chiếc đèn là 24 N và bán kính của chiếc đèn là 18 in ($1\text{ inch} = 2,54\text{ cm}$). Gọi F là độ lớn của các lực căng $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3$ trên mỗi sợi dây. Khi đó, $F = F(L)$ là một hàm số với biến số là L .

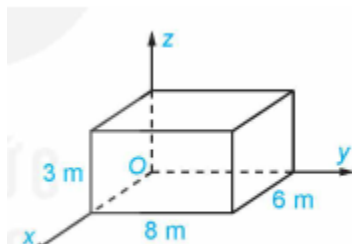


- Xác định công thức tính hàm số $F = F(L)$.
- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $F = F(L)$.
- Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 10 N .

Bài 51. Một chiếc máy được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0; 0; 6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0; 1; 0); A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right); A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$ (Hình 40). Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là 300 N . Tìm tọa độ của các lực tác dụng lên giá đỡ $\vec{F}_1; \vec{F}_2; \vec{F}_3$.



Bài 52. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét (H.2.51). Hãy tìm tọa độ của điểm treo đèn.



Hình 2.51

Bài 53. Trong không gian, xét hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (H.2.52). Đơn vị đo trong không gian Oxyz lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là 30 km. Hỏi ra đa có thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có tọa độ là (25; 15; -10) đối với hệ trục tọa độ nói trên hay không? Hãy giải thích vì sao.



Hình 2.52

Bài 54. Hình 2.53 minh họa một chiếc đèn được treo cách trần nhà là 0,5 m, cách hai tường lần lượt là 1,2 m và 1,6 m. Hai bức tường vuông góc với nhau và cùng vuông góc với trần nhà. Người ta di chuyển chiếc đèn đó đến vị trí mới cách trần nhà là 0,4 m, cách hai tường đều là 1,5 m.



Hình 2.53

- Lập một hệ trục tọa độ Oxyz phù hợp và xác định tọa độ của bóng đèn lúc đầu và sau khi di chuyển.
- Vị trí mới của bóng đèn cách vị trí ban đầu là bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

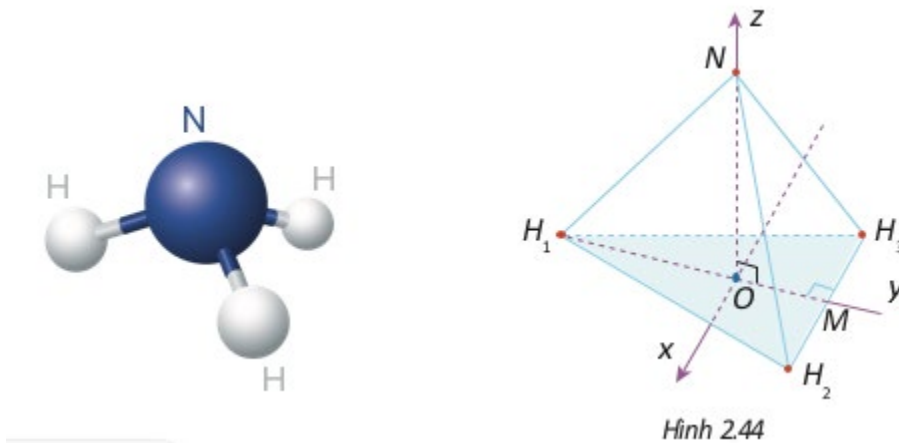
Bài 55. Trong không gian Oxyz (đơn vị trên các trục là km), một máy bay đang bay ở độ cao 10 km, tại vị trí A(500; 200; 10). Theo hành trình dự định, máy bay sẽ phải bay qua vị trí B(700; 200; 10). Tuy nhiên do thời tiết xấu, máy bay phải chuyển hướng bay đến vị trí C(600; 300; 8).

a) Tính khoảng cách từ A đến C.

b) Hỏi trong quãng thời gian tránh vùng thời tiết xấu, máy bay đã phải bay chệch hướng dự định một góc bao nhiêu độ?

Bài 56. Trong Hoá học, cấu tạo của phân tử ammoniac (NH_3) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác $\text{H}_1\text{H}_2\text{H}_3$ với $\text{H}_1, \text{H}_2, \text{H}_3$ là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết $\text{H}-\text{N}-\text{H}$, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm $\text{H}_1, \text{H}_2, \text{H}_3$ (chẳng hạn như H_1NH_2), được gọi là góc liên kết của phân tử NH_3 . Góc này xấp xỉ 107° .

(Nguồn: <https://en.wikipedia.org/wiki/Ammonia>)



Trong không gian Oxyz, cho một phân tử NH_3 được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều $\text{N.H}_1\text{H}_2\text{H}_3$ với O là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm N thuộc trục Oz, ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí $\text{H}_1, \text{H}_2, \text{H}_3$, trong đó $\text{H}_1(0; -2; 0)$ và H_2H_3 song song với trục Ox (Hình 2.44).

a) Tính khoảng cách giữa hai nguyên tử hydrogen.

b) Tính khoảng cách giữa nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen (làm tròn các kết quả tính toán đến hàng phần trăm).

D. Câu hỏi trắc nghiệm (Bài 2 & 3)

Dạng 1. Tọa độ điểm, véc-tơ trong hệ trục Oxyz

- Câu 1:** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(-3;5;1)$ trên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là
- A.** $M(-3;5;1)$. **B.** $N(-3;0;1)$. **C.** $P(0;5;1)$. **D.** $Q(-3;5;0)$.
- Câu 2:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;1;0)$ và $B(3;5;-2)$. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB là
- A.** $(2; 2; -1)$. **B.** $(2; 6; -2)$. **C.** $(4; 4; -2)$. **D.** $(1; 3; -1)$.
- Câu 3:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;2;-1)$, $B(1;0;5)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là
- A.** $I(-2;1;-3)$. **B.** $I(-1;1;2)$. **C.** $I(2;-1;3)$. **D.** $I(4;-2;6)$.
- Câu 4:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;2;3)$ trên trục Oy là điểm
- A.** $R(1;0;0)$. **B.** $P(1;0;3)$. **C.** $Q(0;2;0)$. **D.** $S(0;0;3)$.
- Câu 5:** Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB với $A(1;0;-4)$; $B(3;4;4)$ là
- A.** $M(2;2;0)$. **B.** $M(4;4;0)$. **C.** $M(2;-2;0)$. **D.** $O(0;0;0)$.
- Câu 6:** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc mặt phẳng (Oxy) ?
- A.** $A(0;1;2)$. **B.** $B(1;0;2)$. **C.** $C(-1;3;0)$. **D.** $D(0;0;1)$.
- Câu 7:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$, $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là
- A.** $(2;6;4)$. **B.** $(1;3;2)$. **C.** $(4;-2;10)$. **D.** $(2;-1;5)$.
- Câu 8:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A = (-1;0;3)$, $B = (-3;2;-1)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là
- A.** $(-4;2;2)$. **B.** $(-2;2;-4)$. **C.** $(-1;1;-2)$. **D.** $(-2;1;1)$.
- Câu 9:** Hình chiếu vuông góc của điểm $A(5;-4;3)$ trên trục Ox là điểm
- A.** $A'(5;4;-3)$. **B.** $A'(-5;4;0)$. **C.** $A'(-5;4;-3)$. **D.** $A'(5;0;0)$.
- Câu 10:** Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a}$.
- A.** $(2;-1;3)$. **B.** $(2;-3;1)$. **C.** $(1;2;-3)$. **D.** $(2;3;1)$.
- Câu 11:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A.** $\vec{a} = (2;3;-5)$, $\vec{b} = (-3;4;0)$, $\vec{c} = (-1;-2;0)$. **B.** $\vec{a} = (2;3;-5)$, $\vec{b} = (-3;4;0)$, $\vec{c} = (0;-2;0)$.
C. $\vec{a} = (2;3;-5)$, $\vec{b} = (0;-3;4)$, $\vec{c} = (-1;-2;0)$. **D.** $\vec{a} = (2;3;-5)$, $\vec{b} = (1;-3;4)$, $\vec{c} = (-1;-2;1)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;0;2)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $M \in (Oxz)$. **B.** $M \in (Oyz)$. **C.** $M \in Oy$. **D.** $M \in (Oxy)$.

Câu 13: Trong không gian $d : Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;-3)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (Oyz) là

- A.** $Q(0;-2;-3)$. **B.** $P(1;0;-3)$. **C.** $N(1;-2;0)$. **D.** $K(1;0;3)$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;1)$, tìm tọa độ M' là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (Oxy) .

- A.** $M'(-2;1;0)$. **B.** $M'(2;1;-1)$. **C.** $M'(0;0;1)$. **D.** $M'(2;-1;0)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-5;2)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A.** $A(3;-5;0)$. **B.** $B(0;-5;2)$. **C.** $C(3;0;2)$. **D.** $D(0;0;2)$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ của vector $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ là

- A.** $(2;0;-3)$. **B.** $(2;1;-3)$. **C.** $(2;1;3)$. **D.** $(-3;1;2)$.

Câu 17: Trên không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(2;5;-3)$ trên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là:

- A.** $(2;5;0)$. **B.** $(0;5;-3)$. **C.** $(2;0;-3)$. **D.** $(2;5;-3)$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của $M(2;1;-1)$ trên trục Ox có tọa độ là

- A.** $(2;0;0)$. **B.** $(0;1;-1)$. **C.** $(0;1;0)$. **D.** $(0;0;-1)$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;-2;3), I(1;0;4)$. Tìm tọa độ điểm N sao cho I là trung điểm của đoạn MN .

- A.** $N(5;-4;2)$. **B.** $N(0;1;2)$. **C.** $N\left(2;-1;\frac{7}{2}\right)$ **D.** $N(-1;2;5)$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-4;3;1)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- A.** $(-4;3;0)$. **B.** $(-4;0;1)$. **C.** $(0;3;1)$. **D.** $(-4;0;0)$.

Câu 21: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;-2;5)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A.** $(0;-2;5)$ **B.** $(1;0;5)$ **C.** $(0;-2;0)$ **D.** $(1;-2;0)$

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;2;-5)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A.** $(1;0;0)$. **B.** $(0;2;-5)$. **C.** $(0;0;-5)$. **D.** $(1;2;0)$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1;2;-3)$ và $B(-3;-1;1)$. Tọa độ của $\overrightarrow{AB}$ là

- A.** $\overrightarrow{AB} = (-2;-3;4)$. **B.** $\overrightarrow{AB} = (4;-3;4)$. **C.** $\overrightarrow{AB} = (-4;1;-2)$. **D.** $\overrightarrow{AB} = (2;3;-4)$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$ với hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ cho $\overrightarrow{OA} = -\vec{i} + 5\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A .

- A. $(-1; 5)$. B. $(5; -1; 0)$. **C.** $(-1; 0; 5)$. D. $(-1; 5; 0)$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; 2)$ trên trục Oy là điểm

- A. $E(3; 0; 2)$. **B.** $F(0; 1; 0)$. C. $L(0; -1; 0)$. D. $S(-3; 0; -2)$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(2; 3; -2)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A. $(0; 0; -2)$. B. $(2; 0; -2)$. **C.** $(0; 3; 0)$. D. $(2; 0; 0)$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, cho hai điểm A, B thỏa mãn $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn AB .

- A. $M\left(-\frac{1}{2}; 1; -2\right)$. **B.** $M\left(\frac{3}{2}; 0; -1\right)$. C. $M(3; 0; -2)$. D. $M\left(\frac{1}{2}; -1; 2\right)$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -4; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A. $I(2; -3; -1)$. B. $I(2; -2; 8)$. **C.** $I(1; -1; 4)$. D. $I(-2; 3; 1)$.

Câu 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của véc tơ $\vec{a}$ là

- A. $\vec{a} = (-3; 2; -1)$. B. $\vec{a} = (2; -3; -1)$. **C.** $\vec{a} = (-1; 2; -3)$. D. $\vec{a} = (2; -1; -3)$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -1)$ và $B(-2; 3; 2)$. Véc tơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(3; 2; 3)$ **B.** $(-3; 2; 3)$ C. $(3; -2; 3)$ D. $(-3; 2; -3)$

Câu 31: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $M(1; 2; 3); N(3; 4; 7)$. Tọa độ của véc-tơ $\overrightarrow{MN}$ là

- A. $(4; 6; 10)$. B. $(2; 3; 5)$. **C.** $(2; 2; 4)$. D. $(-2; -2; -4)$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Hình chiếu của M lên trục Oy là điểm

- A. $P(1; 0; 3)$ **B.** $Q(0; 2; 0)$ C. $R(1; 0; 0)$ D. $S(0; 0; 3)$

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; 4; 3)$. Tổng khoảng cách từ A đến ba trục tọa độ bằng

- A. $\sqrt{34}$. B. 10. C. $\frac{\sqrt{34}}{2}$. **D.** $10 + 3\sqrt{2}$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 3; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là:

- A. $(2; 0; -1)$. B. $(0; 3; -1)$. C. $(3; 0; 0)$. **D.** $(0; 3; 0)$.

Câu 35: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là:

- A. $(2; -1; -3)$. B. $(-3; 2; -1)$. C. $(2; -3; -1)$. **D.** $(-1; 2; -3)$.

Câu 36: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- A.** $(0; 2; 3)$. B. $(1; 0; 3)$. C. $(1; 0; 0)$. D. $(0; 2; 0)$.

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;2;1)$ trên Ox có tọa độ là:

- A.** $(0;0;1)$. **B.** $(3;0;0)$. **C.** $(-3;0;0)$. **D.** $(0;2;0)$.

Câu 38: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}(3;0;1)$, $\vec{b}(1;-1;-2)$, $\vec{c}(2;1;-1)$. Tính $T = \vec{a}(\vec{b} - \vec{c})$.

- A.** $T = 3$. **B.** $T = 6$. **C.** $T = 4$. **D.** $T = -4$.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho biết $A(-2;3;1)$; $B(2;1;3)$. Điểm nào dưới đây là trung điểm của đoạn AB ?

- A.** $M(0;2;2)$. **B.** $N(2;2;2)$. **C.** $P(0;2;0)$. **D.** $Q(2;2;0)$.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tọa độ trung điểm của MN là

- A.** $I(1;-1;2)$. **B.** $I(1;1;0)$. **C.** $I(1;1;1)$. **D.** $I\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 41: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Tọa độ điểm M là

- A.** $M(1;2;0)$. **B.** $M(2;1;0)$. **C.** $M(2;0;1)$. **D.** $M(0;2;1)$.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-2;1;3)$. Hình chiếu vuông góc của A lên trục Ox có tọa độ là:

- A.** $(0;1;0)$. **B.** $(-2;0;0)$. **C.** $(0;0;3)$. **D.** $(0;1;3)$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1)$, $B(2;1;3)$, $C(0;3;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A.** $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. **B.** $G(3;6;6)$. **C.** $G(1;2;2)$. **D.** $G(0;6;6)$.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;4)$ và điểm $B(3;0;-6)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là:

- A.** $(1;1;-1)$. **B.** $(2;2;-2)$. **C.** $(4;-2;-10)$. **D.** $(-4;2;10)$.

Câu 45: Trong không gian $Oxyz$ cho 2 điểm $A(1;2;3)$, $B(x;y;z)$. Biết rằng $\overrightarrow{AB} = (6;3;2)$, khi đó $(x;y;z)$ bằng

- A.** $(11;4;1)$. **B.** $(-7;-5;-5)$. **C.** $(7;5;5)$. **D.** $(5;1;-1)$.

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A .

- A.** $A(4;-2;3)$. **B.** $A(-2;3;4)$. **C.** $A(-2;4;3)$. **D.** $A(4;2;-3)$.

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $P(0;0;-3)$ và $Q(1;1;-3)$. Vectơ $\overrightarrow{PQ} + 3\vec{j}$ có tọa độ là

- A.** $(2;1;0)$. **B.** $(-1;-1;0)$. **C.** $(1;4;0)$. **D.** $(1;1;1)$.

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;-4;2)$, $B(1;0;2)$. Trung điểm M của đoạn AB có tọa độ là

- A.** $M(1;2;0)$. **B.** $M(0;-2;2)$. **C.** $M(0;-1;1)$. **D.** $M(2;4;0)$.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{x} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ có tọa độ là:

- A.** $(1;3;2)$. **B.** $(1;-3;2)$. **C.** $(1;2;3)$. **D.** $(0;-3;2)$.

- Câu 50:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;0;-2)$ và $B(1;4;2)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là
- A.** $(-1;2;2)$. **B.** $(-2;4;4)$. **C.** $(2;2;0)$. **D.** $(4;4;0)$.
- Câu 51:** Trong không gian $Oxyz$, vectơ $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$ có tọa độ là
- A.** $(2;0;-3)$. **B.** $(-2;0;3)$. **C.** $(2;-3;0)$. **D.** $(2;1;-3)$.
- Câu 52:** Trong không gian $Oxyz$. Cho điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$ và $D(2;2;2)$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tọa độ trung điểm của đoạn MN là
- A.** $(1;-1;2)$. **B.** $(1;1;0)$. **C.** $(1;1;1)$. **D.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$.
- Câu 53:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(0;-3;2)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A.** $\overrightarrow{OM} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$. **B.** $\overrightarrow{OM} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.
C. $\overrightarrow{OM} = -3\vec{j} + 2\vec{k}$. **D.** $\overrightarrow{OM} = -3\vec{i} + 2\vec{k}$.
- Câu 54:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\overrightarrow{MO} = 5(3\vec{i} - \vec{j}) + 2(3\vec{j} - 2\vec{k}) - 3(\vec{k} - 2\vec{i})$. Tìm tọa độ điểm M là
- A.** $M(21;1;-7)$. **B.** $M(-21;-1;7)$. **C.** $M(21;-1;7)$. **D.** $M(21;-1;-7)$.
- Câu 55:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;3;5)$, $B(2;0;1)$, $C(0;9;0)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là
- A.** $G(1;5;2)$. **B.** $G(1;0;5)$. **C.** $G(3;12;6)$. **D.** $G(1;4;2)$.
- Câu 56:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1;0;-3)$ và $\vec{b} = (3;1;2)$. Tính tọa độ vectơ $\vec{a} + \vec{b}$.
- A.** $(4;1;5)$. **B.** $(4;1;-1)$. **C.** $(2;1;5)$. **D.** $(-2;1;-5)$.
- Câu 57:** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-3;1;2)$, tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua trục Oy là
- A.** $(3;-1;-2)$. **B.** $(3;-1;2)$. **C.** $(3;1;-2)$. **D.** $(-3;-1;2)$.
- Câu 58:** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là
- A.** $(2;0;1)$. **B.** $(2;-2;0)$. **C.** $(0;-2;1)$. **D.** $(0;0;1)$.
- Câu 59:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-2;-4;9)$. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là
- A.** $(-3;-6;6)$. **B.** $(-1;-2;12)$. **C.** $(3;6;-6)$. **D.** $(3;4;-6)$.
- Câu 60:** Trong không gian $Oxyz$, cho 3 vectơ $\vec{a} = (2;-1;0)$, $\vec{b} = (-1;-3;2)$, $\vec{c} = (-2;-4;-3)$. Tọa độ của $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.
- A.** $(5;3;-9)$. **B.** $(-5;-3;9)$. **C.** $(-3;-7;-9)$. **D.** $(3;7;9)$.
- Câu 61:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;2)$ và $B(-2;1;1)$. Đoạn AB có độ dài là
- A.** $3\sqrt{3}$. **B.** 3 . **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 62: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2), B(3;-4;1)$. Tọa độ của vector $\overrightarrow{AB}$ là

- A.** $(-2;5;-3)$. **B.** $(2;5;3)$. **C.** $(2;-5;3)$. **D.** $(2;5;-3)$.

Câu 63: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-2;3)$. Tọa độ điểm A là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oyz) là:

- A.** $A(1;-2;3)$. **B.** $A(1;-2;0)$. **C.** $A(1;0;3)$. **D.** $A(0;-2;3)$.

Câu 64: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(-2;1;2)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa $\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MA}$.

- A.** $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$. **B.** $M(4;3;1)$.
C. $M(4;3;4)$. **D.** $M(-1;3;5)$.

Câu 65: Trong không gian $Oxyz$ với hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ cho $\overrightarrow{OA} = \vec{j} - 2\vec{i} + 5\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A .

- A.** $(5;-2;1)$. **B.** $(-2;1;5)$. **C.** $(1;-2;5)$. **D.** $(-2;5;1)$.

Câu 66: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên trục Oz là điểm

- A.** $M(0;0;2)$. **B.** $N(-1;0;0)$. **C.** $P(0;3;0)$. **D.** $Q(0;0;-2)$.

Câu 67: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;5)$ và $B(1;-1;1)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

- A.** $(2;2;6)$. **B.** $(0;-4;-4)$. **C.** $(0;-2;-2)$. **D.** $(1;1;3)$.

Câu 68: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-1)$ và $B(2;3;2)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A.** $(1;2;3)$. **B.** $(-1;-2;3)$. **C.** $(3;5;1)$. **D.** $(3;4;1)$.

Câu 69: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(1;-3;4)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- A.** $(1;-3;0)$. **B.** $(0;-3;4)$. **C.** $(1;0;0)$. **D.** $(0;0;1)$.

Câu 70: Trong không gian $(Oxyz)$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;3;-3)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- A.** $(0;0;-3)$. **B.** $(2;3;0)$. **C.** $(2;0;-3)$. **D.** $(0;3;-3)$.

Câu 71: Trong không gian, với hệ trục tọa độ $Oxyz$ có $\vec{u} = (1;2;5)$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.** $\vec{u} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}$. **B.** $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$.
C. $\vec{u} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$. **D.** $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Câu 72: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm A thỏa mãn $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j}$ với $\vec{i}, \vec{j}$ là hai vectơ đơn vị trên hai trục Ox, Oy . Tọa độ điểm A là

- A.** $A(2;1;0)$. **B.** $A(0;2;1)$. **C.** $A(0;1;1)$. **D.** $A(1;1;1)$.

Câu 73: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của $M(1;-2;3)$ lên mặt phẳng (Oyz) là

- A. $A(1;-2;3)$. B. $A(0;-2;3)$. C. $A(1;-2;0)$. D. $A(1;0;3)$.

Câu 74: Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng với điểm $M(2020;-2021;2020)$ qua trục Ox có tọa độ là

- A. $N(2020;2021;2020)$. B. $N(2020;2021;-2020)$.
C. $N(-2020;2021;-2020)$. D. $N(2020;0;0)$.

Câu 75: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(2;1;1)$, $B(-1;2;1)$. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua điểm B .

- A. $A'(3;4;-3)$. B. $A'(-4;3;1)$. C. $A'(4;-3;3)$. D. $A'(4;3;3)$.

Câu 76: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$, $B(3;-4;1)$. Tọa độ của vector $\overrightarrow{AB}$ là

- A. $(-2;5;-3)$. B. $(2;5;3)$. C. $(2;-5;3)$. D. $(2;5;-3)$.

Câu 77: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-1;3)$ và $B(4;-3;-1)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là

- A. $(2;-2;-4)$. B. $(3;-2;1)$. C. $(1;-1;-2)$. D. $(6;-4;-2)$.

Câu 78: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;-1;2)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là:

- A. $(0;0;2)$. B. $(3;0;2)$. C. $(0;-1;2)$. D. $(3;-1;0)$.

Câu 79: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là:

- A. $(2;-1;-3)$. B. $(-3;2;-1)$. C. $(2;-3;-1)$. D. $(-1;2;-3)$.

Câu 80: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (0;1;3)$, $\vec{b} = (-2;3;1)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{x}$ biết $\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

- A. $\vec{x} = (-2;4;4)$. B. $\vec{x} = (4;-3;7)$. C. $\vec{x} = (-4;9;11)$. D. $\vec{x} = (-1;9;11)$.

Câu 81: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3;-4;-3)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A. $(0;-4;0)$. B. $(0;0;-3)$. C. $(3;-4;0)$. D. $(3;0;0)$.

Câu 82: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{x} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Tìm tọa độ của $\vec{x}$

- A. $\vec{x} = (-1;3;-2)$. B. $\vec{x} = (1;-3;0)$. C. $\vec{x} = (1;-3;2)$. D. $\vec{x} = (-1;-3;2)$.

Câu 83: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;3;1)$, $\vec{b} = (-1;5;2)$, $\vec{c} = (4;-1;3)$ và $\vec{x} = (-3;22;5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau ?

- A. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$. B. $\vec{x} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$. C. $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$. D. $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Câu 84: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (-4;5;-3)$, $\vec{b} = (2;-2;1)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

- A. $\vec{x} = (2;3;-2)$. B. $\vec{x} = (0;1;-1)$. C. $\vec{x} = (0;-1;1)$. D. $\vec{x} = (-8;9;1)$.

Câu 85: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3;2;-1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm M lên trục Oz là điểm

- A. $M_3(3;0;0)$. B. $M_4(0;2;0)$. C. $M_1(0;0;-1)$. D. $M_2(3;2;0)$.

Câu 86: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $N(2;-2;-5)$ trên trục Ox có tọa độ là

- A. $(2;0;0)$. B. $(2;-2;0)$. C. $(0;-2;0)$. D. $(0;0;-5)$.

Câu 87: Cho hai điểm $M(1;-2;3)$ và $N(3;0;-1)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN .

- A. $I(4;-2;2)$. B. $I(2;-1;2)$. C. $I(4;-2;1)$. D. $I(2;-1;1)$.

Câu 88: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2018;2019;2020)$. Hình chiếu vuông góc của M trên trục Oz có tọa độ là

- A. $(2018;0;0)$. B. $(0;0;2020)$. C. $(0;2019;0)$. D. $(0;0;0)$.

Câu 89: Trong không gian $Oxyz$, điểm N đối xứng với $M(3;-1;2)$ qua trục Oy là

- A. $N(-3;1;-2)$. B. $N(3;1;2)$. C. $N(-3;-1;-2)$. D. $N(3;-1;-2)$.

Câu 90: Trong không gian $Oxyz$ với hệ tọa độ $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ cho $\vec{OA} = -2\vec{i} + 5\vec{k}$. Tìm tọa độ điểm A .

- A. $(-2;5)$. B. $(5;-2;0)$. C. $(-2;0;5)$. D. $(-2;5;0)$.

Câu 91: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{OM} = (-1;3;4)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên trục Oz là

- A. $(0;3;4)$. B. $(0;0;-4)$. C. $(-1;3;0)$. D. $(0;0;4)$.

Câu 92: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;-1;2)$. Điểm N đối xứng với M qua mặt phẳng (Oyz) là

- A. $N(0;-1;2)$. B. $N(3;1;-2)$. C. $N(-3;-1;2)$. D. $N(0;1;-2)$.

Câu 93: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;-4)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) .

- A. $(1;2;0)$. B. $(1;2;-4)$. C. $(0;2;-4)$. D. $(1;0;-4)$.

Câu 94: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3;1;-4)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- A. $(-3;1;-4)$. B. $(3;0;0)$. C. $(0;1;-4)$. D. $(3;-1;4)$.

Câu 95: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (-2;0;1)$, $\vec{c} = (-1;0;1)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} - 3\vec{i}$.

- A. $\vec{n} = (6;2;6)$. B. $\vec{n} = (6;2;-6)$. C. $\vec{n} = (0;2;6)$. D. $\vec{n} = (-6;2;6)$.

Câu 96: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(1;2;3)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- A. $(0;2;3)$. B. $(1;0;3)$. C. $(1;0;0)$. D. $(0;2;0)$.

Câu 97: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

- A. $P(0; -1; 0)$. B. $M(3; 0; 0)$. C. $N(0; -1; 1)$. D. $Q(0; 0; 1)$.

Câu 98: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 4; -2)$ lên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

- A. $Q(3; 0; 0)$. B. $G(3; 4; 0)$. C. $E(0; 4; -2)$. D. $F(3; 0; -2)$.

Câu 99: Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng với điểm $M(2; 3; -1)$ qua trục Oy có tọa độ là:

- A. $(0; 3; 0)$. B. $(2; -3; -1)$. C. $(-2; 3; 1)$. D. $(0; -3; 0)$.

Câu 100: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -5; 1)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là:

- A. $(3; 0; 1)$. B. $(0; -5; 1)$. C. $(0; -5; 0)$. D. $(0; 0; 1)$.

Câu 101: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; 4)$, $B(6; 2; 2)$. Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$.

- A. $\overrightarrow{AB} = (4; 3; 4)$. B. $\overrightarrow{AB} = (4; -1; -2)$. C. $\overrightarrow{AB} = (-2; 3; 4)$. D. $\overrightarrow{AB} = (4; -1; 4)$.

Câu 102: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $E(-1; 3; 2)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

- A. $(-1; 3; 0)$. B. $(-1; 0; 0)$. C. $(0; 3; 2)$. D. $(-1; 0; 2)$.

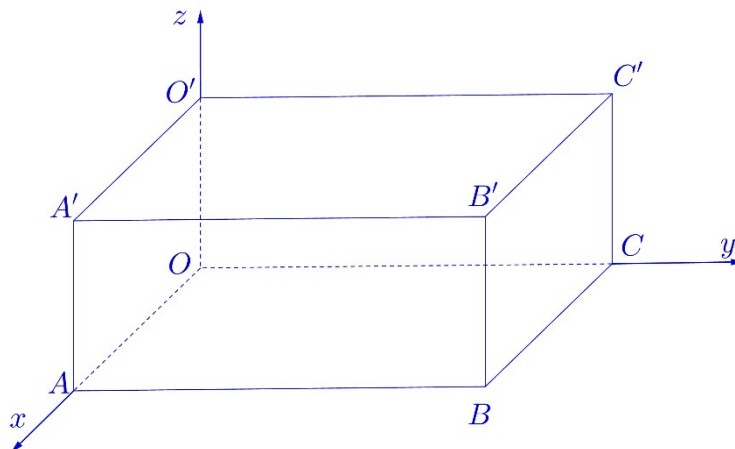
Câu 103: Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(-1; 0; 2)$, $B(1; 3; -3)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:

- A. $\overrightarrow{AB} = (2; 3; -5)$. B. $\overrightarrow{AB} = (-2; -3; 5)$. C. $\overrightarrow{AB} = (0; 3; -1)$. D. $\overrightarrow{AB} = (0; 3; -5)$.

Câu 104: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

- A. $(1; -3; 2)$. B. $(1; 2; -3)$. C. $(2; 1; -3)$. D. $(2; -3; 1)$.

Câu 105: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ có ba đỉnh A, C, O' lần lượt nằm trên ba tia Ox, Oy, Oz và có ba cạnh $OA = 6, OC = 8, OO' = 5$ (tham khảo hình vẽ minh họa). Điểm B' có tọa độ là



- A. $(8; 6; 5)$. B. $(5; 6; 8)$. C. $(6; 5; 8)$. D. $(6; 8; 5)$.

Câu 106: Trong không gian với hệ toạ độ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Nhận xét nào dưới đây **sai**?

- A.** $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$. **B.** $\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$. **C.** $|\vec{j}| = 1$. **D.** $\vec{i} \cdot \vec{k} = -1$.

Câu 107: Trong không gian $Oxyz$, véc tơ đơn vị trên trục Oy là

- A.** $\vec{j} = (0; 1; 0)$. **B.** $\vec{i} = (1; 0; 0)$. **C.** $\vec{k} = (0; 0; 1)$. **D.** $\vec{n} = (1; 1; 1)$.

Câu 108: Trong không gian $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{a} = (-3; 2; 1)$ và điểm $A(4; 6; -3)$. Tọa độ điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ là

- A.** $(7; 4; -4)$. **B.** $(1; 8; -2)$. **C.** $(-7; -4; 4)$. **D.** $(-1; -8; 2)$.

Câu 109: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 5; -1)$, $B(7; x; 1)$ và $C(9; 2; y)$. Để A, B, C thẳng hàng thì giá trị $x + y$ bằng

- A.** 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 110: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; 2; 1)$, $\vec{b} = (-2; 3; 4)$, $\vec{c} = (0; 1; 2)$ và $\vec{d} = (4; 2; 0)$. Biết rằng $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Giá trị $x + y + z$ là

- A.** 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5.

Câu 111: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết tọa độ $A(-3; 2; 1)$, $C(4; 2; 0)$, $B'(-2; 1; 1)$, $D'(3; 5; 4)$. Tìm tọa độ A' .

- A.** $A'(-3; 3; 1)$. **B.** $A'(-3; 3; 3)$. **C.** $A'(-3; -3; -3)$. **D.** $A'(-3; -3; 3)$.

Câu 112: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (10 - m; m + 2; m^2 - 10)$ và $\vec{b} = (7; -1; 3)$.

Giá trị của m để $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$ là

- A.** $m = 4$. **B.** $m = -4$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 2$.

Câu 113: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 1; 3)$, $B(1; -2; 2)$, $C(x; y; 5)$ thẳng hàng. Khi đó $x + y$ bằng

- A.** $x + y = 11$. **B.** $x + y = 12$. **C.** $x + y = 9$. **D.** $x + y = 3$.

Câu 114: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 5; 3)$, $B(3; 7; 4)$ và $C(x; y; 6)$ thẳng hàng. Giá trị của biểu thức $x + y$ là

- A.** 16. **B.** 14. **C.** 18. **D.** 20.

Câu 115: Trong hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm là $A(1; 3; -1)$, $B(3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$.

- A.** $M\left(\frac{5}{3}; \frac{13}{3}; 1\right)$. **B.** $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. **C.** $M\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}; 3\right)$. **D.** $M(4; -3; 8)$.

Câu 116: Tìm tọa độ điểm M' là điểm đối xứng của điểm $M(1; 2; 3)$ qua gốc tọa độ O .

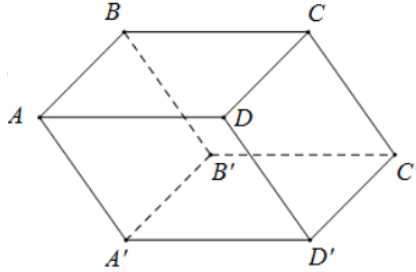
- A.** $M'(-1; 2; 3)$. **B.** $M'(-1; -2; 3)$.
C. $M'(-1; -2; -3)$. **D.** $M'(1; 2; -3)$.

- Câu 117:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm nằm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính độ dài đoạn AM .
- A. $AM = 3\sqrt{3}$ B. $AM = 2\sqrt{7}$. C. $AM = \sqrt{29}$. D. $AM = \sqrt{30}$.
- Câu 118:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-2;-4;9)$. Điểm M thuộc đoạn thẳng AB sao cho $MA = 2MB$. Độ dài đoạn thẳng OM là:
- A. 5. B. 3. C. $\sqrt{17}$. D. $\sqrt{54}$.
- Câu 119:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $\overrightarrow{AB} = (-3;0;4)$, $\overrightarrow{AC} = (5;-2;4)$. Độ dài đường trung tuyến AM là
- A. $4\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $5\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{3}$.
- Câu 120:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;-1)$, $B(0;3;-2)$, $C(-4;-5;0)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
- A. $M\left(\frac{5}{3}; -\frac{3}{2}; \frac{5}{6}\right)$. B. $M\left(-\frac{5}{3}; -\frac{3}{2}; -\frac{5}{6}\right)$. C. $M\left(-\frac{5}{3}; -\frac{3}{2}; \frac{5}{6}\right)$. D. $M\left(\frac{5}{3}; -\frac{3}{2}; -\frac{5}{6}\right)$.
- Câu 121:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là
- A. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. B. $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. C. $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. D. $(-2; 11; 1)$.
- Câu 122:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, để hai vec tơ $\vec{a} = (m; 2; 3)$ và $\vec{b} = (1; n; 2)$ cùng phương thì $2m + 3n$ bằng
- A. 7. B. 8. C. 6. D. 9.
- Câu 123:** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;4;1)$ và $B(4;5;2)$. Điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA}$ có tọa độ là
- A. $(-6; -1; -1)$. B. $(-2; -9; -3)$. C. $(6; 1; 1)$. D. $(2; 9; 3)$.
- Câu 124:** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;2;0)$, $B(-1;0;1)$, $C(0;2;-1)$. Tính độ dài của vector $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$.
- A. $\sqrt{21}$. B. 21. C. $\sqrt{13}$. D. 13.
- Câu 125:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-1;1)$, $B(3;2;-2)$, $C(-3;1;5)$. Tìm tọa độ điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{CM}$. Khi đó tổng $S = \frac{9}{x} + \frac{3}{y} - \frac{27}{z}$ bằng
- A. 6. B. -15. C. 16. D. -13.
- Câu 126:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(2;-1;2)$, $B'(1;2;1)$, $C(-2;3;2)$, $D'(3;0;1)$. Tọa độ điểm B là
- A. $B(-1;2;2)$. B. $B(2;-2;1)$. C. $B(1;-2;-2)$. D. $B(2;-1;2)$.
- Câu 127:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm thuộc trục Ox và cách đều hai điểm $A(4;2;-1)$ và $B(2;1;0)$ là
- A. $M(-4;0;0)$. B. $M(5;0;0)$. C. $M(4;0;0)$. D. $M(-5;0;0)$.

Câu 128: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 4)$. Khoảng cách từ điểm M đến trục Ox bằng:

- A. 1. B. $\sqrt{21}$. C. $2\sqrt{5}$. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 129: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;1)$, $B'(1;0;0)$, $C'(1;1;0)$.
Tìm tọa độ điểm D .



- A. $D(0;1;1)$ B. $D(0;-1;1)$ C. $D(0;1;0)$ D. $D(1;1;1)$

Câu 130: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc tọa độ O , điểm $B = (1;0;0)$, $D = (0;1;0)$, $D' = (0;1;-1)$. Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{CA'}$ tương ứng là

- A. $(1;1;1)$. B. $(1;-1;-1)$. C. $(-1;-1;-1)$. D. $(1;0;-1)$.

Câu 131: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$. Điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) thỏa mãn độ dài AM nhỏ nhất. Tọa độ của điểm M là

- A. $(0;3;0)$. B. $(2;3;5)$. C. $(3;5;0)$. D. $(2;3;0)$.

Dạng 2. Tọa độ liên quan tính chất đa giác

Câu 132: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;3;4)$; $B(1;0;-2)$ và $C(4;0;1)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- A. $G(3;0;2)$. B. $G(2;1;1)$. C. $G(1;1;3)$. D. $G(3;0;-1)$.

Câu 133: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;4)$, $B(2;4;-1)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB là

- A. $G(2;1;1)$. B. $G(6;3;3)$. C. $G(1;1;2)$. D. $G(1;2;1)$.

Câu 134: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-5)$, $B(-3;1;-1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB .

- A. $G\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -2\right)$. B. $G\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; -2\right)$. C. $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -2\right)$. D. $G\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}; 2\right)$.

Câu 135: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có 3 đỉnh $A(1;-2;3)$, $B(2;3;5)$, $C(4;1;-2)$. Tính tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G(6;4;3)$. B. $G(7;2;6)$. C. $G\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}; 2\right)$. D. $G(8;6;-30)$.

Câu 136: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(-2;4;1)$, $B(1;1;-6)$, $C(0;-2;3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$. B. $G(-1;3;-2)$. C. $G\left(\frac{1}{3};-1;\frac{2}{3}\right)$. **D.** $G\left(-\frac{1}{3};1;-\frac{2}{3}\right)$.

Câu 137: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;2;-1)$, $B(3;1;-2)$, $C(2;3;-3)$ và G là trọng tâm tam giác ABC . Xác định vector chỉ phương của đường thẳng OG .

- A. $\vec{u} = (1;2;-2)$. B. $\vec{u} = (1;2;-1)$. C. $\vec{u} = (2;1;-2)$. **D.** $\vec{u} = (2;2;-2)$.

Câu 138: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;1;3)$, $B(5;0;2)$ và $C(0;2;4)$. Trọng tâm của tam giác ABC có tọa độ là

- A. $(-7;-1;1)$. B. $(7;1;-1)$. C. $(3;3;9)$. **D.** $(1;1;3)$.

Câu 139: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-3;2)$, $B(0;1;-1)$, $G(2;-1;1)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC nhận G là trọng tâm?

- A.** $C(5;-1;2)$. B. $C(3;-3;2)$. C. $C\left(1;-1;\frac{2}{3}\right)$. **D.** $C(1;1;0)$.

Câu 140: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;4)$ và $B(2;4;-1)$ Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB .

- A. $G(2;1;1)$. B. $G(6;3;3)$. C. $G(2;1;1)$. **D.** $G(1;2;1)$.

Câu 141: Cho hai điểm $M(1;-2;3)$ và $N(3;0;-1)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN .

- A. $I(4;-2;2)$. B. $I(2;-1;2)$. C. $I(4;-2;1)$ **D.** $I(2;-1;1)$

Câu 142: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm tọa độ đỉnh A' biết tọa độ các điểm $A(0;0;0)$; $B(1;0;0)$; $C(1;2;0)$; $D'(-1;3;5)$.

- A. $A'(1;-1;5)$. B. $A'(1;1;5)$. C. $A'(-1;-1;5)$. **D.** $A'(-1;1;5)$.

Câu 143: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1;2;4)$, $B(2;4;-1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB .

- A. $G(6;3;3)$. B. $G(2;1;1)$. C. $G(2;1;1)$. **D.** $G(1;2;1)$.

Câu 144: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(2;1;-4)$, $B(5;-3;3)$, $C(-1;-1;10)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G(2;1;-3)$. **B.** $G(2;-1;3)$. C. $G(2;-1;-3)$. **D.** $G(-2;-1;3)$.

Câu 145: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;2)$, $B(-2;1;3)$, $C(3;2;4)$, $D(6;9;-5)$. Hãy tìm tọa độ trọng tâm của tứ diện $ABCD$?

- A. $(2;3;-1)$. B. $(2;-3;1)$. **C.** $(2;3;1)$. **D.** $(-2;3;1)$.

Câu 146: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

- A. $D(-2;4;-5)$. B. $D(4;2;9)$. C. $D(6;2;-3)$. **D.** $D(-4;-2;9)$.

- Câu 147:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;1;4)$ và $N(0;2;-1)$. Tọa độ trọng tâm của tam giác OMN là
- A.** $(-3;1;-5)$. **B.** $(-1;-1;-1)$. **C.** $(3;3;3)$. **D.** $(1;1;1)$.
- Câu 148:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(-3;4;3)$, $C(3;1;-3)$, số điểm D sao cho 4 điểm A, B, C, D là 4 đỉnh của một hình bình hành là
- A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.
- Câu 149:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-4;1;-5)$; $B(2;-4;7)$; $C(3;-2;9)$. Tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành là
- A.** $(2;3;-3)$. **B.** $(-3;-3;3)$. **C.** $(-6;5;-12)$. **D.** $(-3;3;-3)$.
- Câu 150:** Cho 3 điểm $A(1;-2;0)$, $B(-1;0;1)$, $C(0;2;0)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.
- A.** $D(8;4;3)$. **B.** $D(2;0;-1)$. **C.** $D(-2;0;2)$. **D.** $D(2;0;1)$.
- Câu 151:** Cho 3 điểm $A(1;-2;0)$, $B(-1;n;1)$, $C(0;5;m)$. Xác định n, m để $G(0;1;-1)$ là trọng tâm của tam giác ABC .
- A.** $n = 1, m = 4$. **B.** $n = 0, m = -4$. **C.** $n = 0, m = -2$. **D.** $n = -1, m = -4$.
- Câu 152:** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với các đỉnh $A(-1;1;2)$, $B(-3;2;1)$, $D(0;-1;2)$ và $A'(2;1;2)$. Tìm tọa độ đỉnh C' .
- A.** $C'(1;0;1)$. **B.** $C'(-3;0;3)$. **C.** $C'(0;1;0)$. **D.** $C'(-1;3;1)$.
- Câu 153:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;-1;1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(-1;3;2)$. Biết rằng $ABCD$ là hình bình hành, khi đó tọa độ điểm D là
- A.** $D(1;1;4)$. **B.** $D\left(-1;1;\frac{2}{3}\right)$. **C.** $D(1;3;4)$. **D.** $D(-1;-3;-2)$
- Câu 154:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1;2;4)$, $B(3;0;-2)$ và $C(1;3;7)$. Gọi D chân đường phân giác trong hạ từ A . Tính OD
- A.** $\frac{\sqrt{207}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{205}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{201}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{203}}{3}$.
- Câu 155:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $D'(0;3;-3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là
- A.** $(1;1;-2)$. **B.** $(2;1;-2)$. **C.** $(1;2;-1)$. **D.** $(2;1;-1)$.
- Câu 156:** Cho tam giác ABC biết $A(2;-1;3)$ và trọng tâm G của tam giác có tọa độ là $G(2;1;0)$. Khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ có tọa độ là
- A.** $(0;6;9)$. **B.** $(0;9;-9)$. **C.** $(0;-9;9)$. **D.** $(0;6;-9)$.
- Câu 157:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .
- A.** $m = -6$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -4$. **D.** $m = 2$.

Câu 158: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;-1;1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(-1;3;2)$. Biết rằng $ABCD$ là hình bình hành, khi đó tọa độ điểm D là

- A.** $D\left(-1;1;\frac{2}{3}\right)$. **B.** $D(1;3;4)$. **C.** $D(1;1;4)$. **D.** $D(-1;-3;-2)$.

Câu 159: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;1;2)$, $B(2;-1;1)$ và $C(3;2;-3)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

- A.** $(2;4;-2)$. **B.** $(0;-2;6)$. **C.** $(4;2;-4)$. **D.** $(4;0;-4)$.

Câu 160: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(1;2;3)$, $B(5;0;-1)$, $C(4;3;6)$ và $D(a;b;c)$. Giá trị của $a+b+c$ bằng:

- A.** 3. **B.** 11. **C.** 15. **D.** 5.

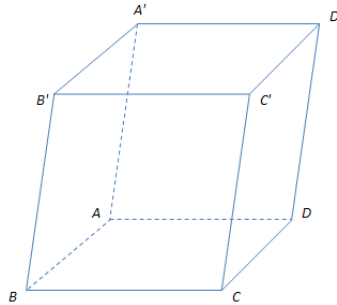
Câu 161: Cho ba điểm $A(1;0;-2)$, $B(2;1;-1)$, $C(1;-2;2)$ và điểm E là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCE$ thì tọa độ của E là

- A.** $(2;-1-3)$. **B.** $(0;-1;3)$. **C.** $(0;-3;1)$. **D.** $(2;-3;1)$.

Câu 162: Cho 3 điểm $M(2;0;0)$, $N(0;-3;0)$, $P(0;0;4)$. Nếu $MNPQ$ là hình bình hành thì tọa độ của điểm Q là

- A.** $(3;4;2)$. **B.** $(2;3;4)$. **C.** $(-2;-3;-4)$. **D.** $(2;3;-4)$.

Câu 163: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;1)$, $B'(1;0;0)$, $C'(1;1;0)$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Tìm tọa độ của điểm D .



- A.** $D(0;1;1)$. **B.** $D(0;-1;1)$. **C.** $D(0;1;0)$. **D.** $D(1;1;1)$.

Câu 164: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là

- A.** $B'(8;4;10)$. **B.** $B'(6;12;0)$. **C.** $B'(10;8;6)$. **D.** $B'(13;0;17)$.

Câu 165: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $D(0;3;0)$, $D'(0;3;-3)$. Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C'$ là

- A.** $(1;1;-2)$. **B.** $(2;1;-2)$. **C.** $(1;2;-1)$. **D.** $(2;1;-1)$.

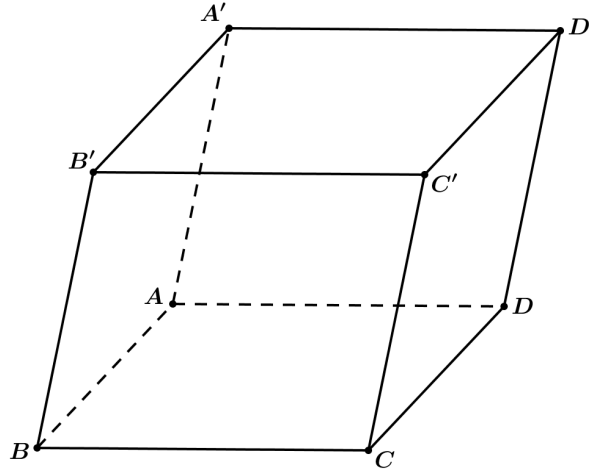
Câu 166: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;1;1)$, $B(2;3;0)$. Biết rằng tam giác ABC có trực tâm $H(0;3;2)$ tìm tọa độ của điểm C .

- A.** $C(3;2;3)$. **B.** $C(4;2;4)$. **C.** $C(1;2;1)$. **D.** $C(2;2;2)$.

Câu 167: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tọa độ của đỉnh A' là

- A.** $A' = (4;5;-6)$. **B.** $A' = (3;4;-1)$. **C.** $A' = (3;5;-6)$. **D.** $A' = (3;5;6)$.

Câu 168: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;1)$, $B'(1;0;0)$, $C'(1;1;0)$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Tìm tọa độ của điểm D .



- A.** $D(0;1;1)$. **B.** $D(0;-1;1)$. **C.** $D(0;1;0)$. **D.** $D(1;1;1)$.

Câu 169: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(2;3;1)$, $B(3;2;1)$, $C(1;3;2)$. Gọi $H(a;b;c)$ là trực tâm tam giác. Giá trị của $2a+b+c$ là

- A.** 10. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 170: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;4;-5)$, $B(2;3;-6)$, $C(4;4;-5)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

- A.** $H\left(\frac{5}{2};4;-5\right)$. **B.** $H(1;4;-5)$. **C.** $H(2;3;-6)$. **D.** $H\left(\frac{7}{3};\frac{11}{3};-\frac{16}{3}\right)$.

Câu 171: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

- A.** $\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3};-2;1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2;11;1)$.

Câu 172: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;2;1)$, $B(4;4;2)$, $C(-2;4;-3)$. Đường phân giác trong AD của tam giác ABC có một vector chỉ phương là:

- A.** $(-2;4;-3)$. **B.** $(6;0;5)$. **C.** $\left(0;1;-\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-\frac{4}{3};-\frac{1}{3};-1\right)$.

Câu 173: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB . Tính $S = a+b+c$.

- A.** $S = 1$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = -1$. **D.** $S = 2$.

Câu 174: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$, $C(2;6;6)$ và $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a+b+c$.

- A. $\frac{31}{3}$. B. $\frac{46}{5}$. C. 10. D. $\frac{63}{5}$.

Câu 175: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(3;1;0)$, B nằm trên mặt phẳng (Oxy) và có hoành độ dương, C nằm trên trục Oz và $H(2;1;1)$ là trực tâm của tam giác ABC . Tọa độ các điểm B , C thỏa mãn yêu cầu bài toán là

- A. $B(3;1;0)$, $C(0;0;-3)$. B. $B(1;3;0)$, $C(0;0;-3)$.
C. $B(3;-3;0)$, $C(0;0;1)$. D. $B(1;-3;0)$, $C(0;0;1)$.

Câu 176: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong của góc B của tam giác ABC . Giá trị $a+b+2c$ bằng

- A. 4. B. 5. C. 14. D. 15.

Câu 177: Trong không gian với tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;2)$, $B(-1;3;-9)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Oy sao cho $\triangle ABM$ vuông tại M .

- A. $\begin{bmatrix} M(0;1+2\sqrt{5};0) \\ M(0;1-2\sqrt{5};0) \end{bmatrix}$. B. $\begin{bmatrix} M(0;2+2\sqrt{5};0) \\ M(0;2-2\sqrt{5};0) \end{bmatrix}$. C. $\begin{bmatrix} M(0;1+\sqrt{5};0) \\ M(0;1-\sqrt{5};0) \end{bmatrix}$. D. $\begin{bmatrix} M(0;2+\sqrt{5};0) \\ M(0;2-\sqrt{5};0) \end{bmatrix}$.

Câu 178: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;2)$, $B(-5;6;4)$ và $C(0;1;-2)$. Độ dài đường phân giác trong của góc A của $\triangle ABC$ là:

- A. $\frac{3\sqrt{74}}{2}$. B. $\frac{3}{2\sqrt{74}}$. C. $\frac{2}{3\sqrt{74}}$. D. $\frac{2\sqrt{74}}{3}$.

Câu 179: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5)$, $B(4;3;2)$, $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $a+2b+c$?

- A. 1. B. 3. C. 6. D. -9.

Dạng 3. Tích vô hướng và ứng dụng

- Câu 180:** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; -2; 3)$ và $\vec{b} = (3; 0; 4)$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
- A.** 15. **B.** 36. **C.** 9. **D.** 5.
- Câu 181:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (x; 2; 1)$, $\vec{v} = (1; -1; 2x)$. Tích vô hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$.
- A.** $x + 2$. **B.** $3x + 2$. **C.** $-2 - x$. **D.** $3x - 2$.
- Câu 182:** Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (1; 3; 3)$, $\vec{b} = (-2; 2; 1)$ và $\vec{c} = (-1; 2; 3)$. Tích vô hướng $\vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ bằng
- A.** 7. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 3.
- Câu 183:** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; -2; 3)$, $B(2; -4; 1)$, $C(2; 0; 2)$, khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng
- A.** 7. **B.** -5. **C.** 4. **D.** -1.
- Câu 184:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2; 1; 1)$, $B(3; 2; -1)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng
- A.** $\sqrt{30}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{22}$. **D.** 2.
- Câu 185:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(2; 1; 1)$. Độ dài đoạn AB bằng
- A.** 2. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 6.
- Câu 186:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{u} = (2; 3; -1)$ và $\vec{v} = (5; -4; x)$. Tìm x để $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- A.** $x = 2$. **B.** $x = 22$. **C.** $x = \frac{-3}{10}$. **D.** $x = -2$.
- Câu 187:** Cho hai véc tơ $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 1; 2)$. Khi đó tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng
- A.** 12. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 10.
- Câu 188:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; 4)$ và $B(3; 0; 1)$. Độ dài vector $\overrightarrow{AB}$ là
- A.** $\sqrt{19}$. **B.** 19. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** 13.
- Câu 189:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 3; 1)$, $B(2; 0; -5)$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB}$.
- A.** -12. **B.** -36. **C.** 36. **D.** 12.
- Câu 190:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; -3; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 4; -2)$. Giá trị của biểu thức $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng
- A.** -16. **B.** -4. **C.** 4. **D.** 16.
- Câu 191:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 2)$, $B(4; 1; 2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng
- A.** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. **B.** 5. **C.** -5. **D.** 25.
- Câu 192:** Trong không gian $Oxyz$ cho hai vector $\vec{a} = (1; -1; 2)$ và $\vec{b} = (2; 1; -1)$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
- A.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = (2; -1; -2)$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1; 5; 3)$. **C.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$.

- Câu 193:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-2;3;-4)$, $B(4;-3;3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB .
- A.** $AB=11$. **B.** $AB=(6;-6;7)$. **C.** $AB=7$. **D.** $AB=9$.
- Câu 194:** Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;m;-1)$ và $\vec{b}=(2;1;3)$. Tìm giá trị của m để $\vec{a} \perp \vec{b}$.
- A.** $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.
- Câu 195:** Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vector $\vec{i}$ và $\vec{u}=(-\sqrt{3};0;1)$ là
- A.** 120° . **B.** 60° . **C.** 150° . **D.** 30° .
- Câu 196:** Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vector $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{v}=(0;1;-2)$ bằng
- A.** 4. **B.** 0. **C.** -4. **D.** -2.
- Câu 197:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a}(1;3;3)$, $\vec{b}(-1;1;2)$. Khi đó $\vec{a} \cdot \vec{b}$ có giá trị bằng
- A.** -1. **B.** 18. **C.** 8. **D.** -8.
- Câu 198:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$, $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .
- A.** $m=2$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=-6$. **D.** $m=0$.
- Câu 199:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;1)$ và $B(4;2;-2)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng
- A.** 2. **B.** 4. **C.** $\sqrt{22}$. **D.** 22.
- Câu 200:** Trong không gian $Oxyz$, cho các vector $\vec{a}=(-1;0;3)$ và $\vec{b}=(2;2;5)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ bằng
- A.** 25. **B.** 23. **C.** 27. **D.** 29.
- Câu 201:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-1)$ và $B(1;4;3)$. Độ dài đoạn AB là
- A.** $2\sqrt{13}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 3.
- Câu 202:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .
- A.** $OA=3$. **B.** $OA=9$. **C.** $OA=\sqrt{5}$. **D.** $OA=5$.
- Câu 203:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u}_1(1;1;-4)$, $\vec{u}_2(0;1;1)$. Góc giữa hai vector đã cho bằng
- A.** 30° . **B.** 150° . **C.** 60° . **D.** 120° .
- Câu 204:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$. Độ dài đoạn thẳng AB được tính theo công thức nào sau đây?
- A.** $AB = \sqrt{|x_B - x_A| + |y_B - y_A| + |z_B - z_A|}$. **B.** $AB = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2$.
- C.** $AB = |x_B - x_A| + |y_B - y_A| + |z_B - z_A|$. **D.** $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

- Câu 205:** Cho hai vec tơ $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 1; 2)$ Khi đó tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng
A. 12. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 10.
- Câu 206:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 1)$, $B(3; 0; -2)$. Tính độ dài đoạn AB .
A. 22. **B.** $\sqrt{22}$. **C.** 26. **D.** $\sqrt{26}$.
- Câu 207:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; -3)$ và $B(-2; 1; -1)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng
A. $\sqrt{17}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** 3.
- Câu 208:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai vec tơ $\vec{u} = i\sqrt{3} + \vec{k}$, $\vec{v} = j\sqrt{3} + \vec{k}$. Khi đó tích vô hướng của $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng
A. 2. **B.** 1. **C.** -3. **D.** 3.
- Câu 209:** Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}(-2; 2; 5)$, $\vec{b}(0; 1; 2)$ trong không gian bằng
A. 14. **B.** 13. **C.** 10. **D.** 12.
- Câu 210:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (2; 3; -1)$ và $\vec{v} = (5; -4; m)$. Tìm m để $\vec{u} \perp \vec{v}$.
A. $m = -2$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 0$.
- Câu 211:** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; -3; 2)$, $\vec{b} = (-2; 4; m)$. Định m để hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau.
A. $m = -7$. **B.** $m = 7$. **C.** $m = 14$. **D.** $m = 2$.
- Câu 212:** Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (1; 2; -2)$. Tính độ dài vectơ $\vec{a}$.
A. $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$. **B.** $|\vec{a}| = 8$. **C.** $|\vec{a}| = 3$. **D.** $|\vec{a}| = 9$.
- Câu 213:** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-4; 3; 12)$. Độ dài đoạn thẳng OA bằng
A. 13. **B.** 11. **C.** 17. **D.** 6.
- Câu 214:** Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón đỉnh $S\left(\frac{17}{18}; -\frac{11}{9}; \frac{17}{18}\right)$ có đường tròn đáy đi qua ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; 1)$. Tính độ dài đường sinh l của hình nón đã cho.
A. $l = \frac{\sqrt{86}}{6}$. **B.** $l = \frac{\sqrt{194}}{6}$. **C.** $l = \frac{\sqrt{94}}{6}$. **D.** $l = \frac{5\sqrt{2}}{6}$.
- Câu 215:** Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (-2; -3; 1)$ và $\vec{b} = (1; 0; 1)$. Côsin góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng
A. $-\frac{1}{2\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{1}{2\sqrt{7}}$. **C.** $-\frac{3}{2\sqrt{7}}$. **D.** $\frac{3}{2\sqrt{7}}$.
- Câu 216:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3; 2; 8)$, $N(0; 1; 3)$ và $P(2; m; 4)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .
A. $m = 25$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = -10$.

Câu 217: Cho các vec tơ $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = (-2; 4; 1)$, $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ bằng

- A.** $\frac{3\sqrt{4}}{14}$. **B.** $-\frac{3\sqrt{6}}{14}$. **C.** $\frac{3\sqrt{6}}{14}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{14}$.

Câu 218: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (2; 1; 3)$ và $\vec{b} = (3; -2; 1)$. Góc giữa các vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A.** 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 120° .

Câu 219: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vec tơ $\vec{u}(2; 3; -1)$ và $\vec{v}(5; -4; m)$. Tìm m để $\vec{u} \perp \vec{v}$.

- A.** $m = 2$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = 0$.

Câu 220: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 2; 0)$ và $A'(0; 0; 2)$. Góc giữa BC' và $A'C$ là

- A.** 45° . **B.** 60° . **C.** 30° . **D.** 90° .

Câu 221: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Tính cosin của góc $\widehat{BAC}$.

- A.** $\frac{9}{2\sqrt{35}}$. **B.** $\frac{9}{\sqrt{35}}$. **C.** $\frac{-9}{2\sqrt{35}}$. **D.** $\frac{-9}{\sqrt{35}}$.

Câu 222: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; 2; 4)$, $B(-1; 1; 4)$, $C(0; 0; 4)$. Số đo của góc $\widehat{ABC}$ là

- A.** 135° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 120° .

Câu 223: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1; 2; \log_2 3)$, $\vec{v} = (2; -2; \log_3 2)$, tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$ bằng

- A.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. **B.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. **C.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$. **D.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.

Câu 224: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$ và $C(2; 1; 1)$. Diện tích của tam giác ABC là.

- A.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Câu 225: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm thuộc trục Ox và cách đều hai điểm $A(4; 2; -1)$ và $B(2; 1; 0)$ là

- A.** $M(-4; 0; 0)$. **B.** $M(5; 0; 0)$. **C.** $M(4; 0; 0)$. **D.** $M(-5; 0; 0)$.

Câu 226: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0; 0; 3)$, $B(0; 0; -1)$, $C(1; 0; -1)$, $D(0; 1; -1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A.** $AB \perp BD$. **B.** $AB \perp BC$. **C.** $AB \perp AC$. **D.** $AB \perp CD$.

Câu 227: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;3;2)$, $B(-2;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm E thuộc trục Oz sao cho E cách đều hai điểm A, B .

- A. $\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$. B. $\left(0;0;\frac{1}{3}\right)$. C. $(0;0;-1)$. **D.** $(0;0;1)$.

Câu 228: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0)$; $B(2;-1;3)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy để tam giác ABC vuông tại A .

- A. $\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$. B. $(0;2;0)$. C. $\left(\frac{1}{2};0;0\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{2};0\right)$.

Câu 229: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;2;0)$ và $A'(0;0;2)$. Góc giữa hai đường thẳng CC' và $A'B$ có số đo bằng

- A.** 45° . B. 60° . C. 90° . **D.** 30° .

Câu 230: Trong không gian $Oxyz$ cho vec-tơ $\vec{u}(1;1;2)$ và $\vec{v}(2;0;m)$. Tìm giá trị của tham số m biết

$$\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{4}{\sqrt{30}}$$

- A.** $m=1$. B. $m=1; m=-11$. C. $m=-11$. **D.** $m=0$.

Câu 231: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$ và $A'(1;1;-1)$. Giá trị của $\cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'D'})$ bằng

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $-\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 232: Cho 3 điểm $A(1;2;0)$, $B(1;0;-1)$, $C(0;-1;2)$. Tam giác ABC là

- A. tam giác vuông đỉnh A . B. tam giác đều.
C. tam giác cân đỉnh A . **D.** tam giác có ba góc nhọn.

Dạng 4. Tích có hướng

Câu 233: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là

- A. $2\sqrt{87}$. B. $\frac{\sqrt{349}}{2}$. **C.** $\sqrt{349}$. **D.** $\sqrt{87}$.

Câu 234: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ một vector $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vector $\vec{a}=(1;1;-2)$, $\vec{b}=(1;0;3)$ là

- A. $(2;3;-1)$. B. $(2;-3;-1)$. C. $(3;5;-2)$. **D.** $(3;-5;-1)$.

Câu 235: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a}(2;3;1)$, $\vec{b}(-2;1;2)$. Khi đó $[\vec{a}, \vec{b}]$ có tọa độ

- A. $(0;4;3)$. **B.** $(5;-6;8)$. C. $(2;0;1)$. **D.** $(2;1;0)$.

- Câu 236:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; -2; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Vectơ nào dưới đây vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$?
- A. $\vec{w}_2 = (-1; 3; 5)$. B. $\vec{w}_4 = (1; 4; 7)$.
C. $\vec{w}_3 = (1; -4; 7)$. D. $\vec{w}_1 = (-2; -6; -10)$.
- Câu 237:** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (1; 2; -1)$ và $\vec{v} = (2; 3; 0)$. Tính $[\vec{u}, \vec{v}]$.
- A. $[\vec{u}, \vec{v}] = (3; 2; -1)$. B. $[\vec{u}, \vec{v}] = (3; -2; 1)$. C. $[\vec{u}, \vec{v}] = (3; -2; -1)$. D. $[\vec{u}, \vec{v}] = (-3; 2; 1)$.
- Câu 238:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{u} = (1; -2; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; -1)$. Vectơ nào dưới đây vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$?
- A. $\vec{w}_1 = (1; -3; 5)$. B. $\vec{w}_4 = (1; 4; 7)$. C. $\vec{w}_3 = (1; -4; 7)$. D. $\vec{w}_2 = (1; 3; 5)$.
- Câu 239:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (1; 0; -2)$ và $\vec{b} = (2; -1; 3)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vectơ có tọa độ là:
- A. $(2; 7; 1)$. B. $(-2; 7; -1)$. C. $(2; -7; 1)$. D. $(-2; -7; -1)$.
- Câu 240:** Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (-5; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; 2; 1)$, $\vec{c} = (m; 3; -1)$. Tìm tất cả giá trị của m sao cho $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}]$ là
- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = -1$. D. $m = -2$.
- Câu 241:** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; -2)$, $B(3; 1; 0)$, $C(2; 2; 1)$. Tam giác ABC có diện tích bằng
- A. $\sqrt{6}$. B. $2\sqrt{6}$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.
- Câu 242:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, vectơ nào dưới đây vuông góc với cả hai vectơ $\vec{u} = (-1; 0; 2)$, $\vec{v} = (4; 0; -1)$?
- A. $\vec{w} = (1; 7; 1)$. B. $\vec{w} = (-1; 7; -1)$. C. $\vec{w} = (0; 7; 1)$. D. $\vec{w} = (0; -1; 0)$.
- Câu 243:** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; -1)$, $B(0; -2; 3)$. Tính diện tích tam giác OAB .
- A. $\frac{\sqrt{29}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{29}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{78}}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.
- Câu 244:** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho $\vec{a}(3; 2; 1)$, $\vec{b}(3; 2; 5)$. Tọa độ vectơ tích có hướng $[\vec{a}, \vec{b}]$ là
- A. $(0; 8; -12)$. B. $(8; -12; 5)$. C. $(0; 8; 12)$. D. $(8; -12; 0)$.
- Câu 245:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $C(2; 1; 1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng
- A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{11}}{2}$.

Câu 246: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(-4;6;2)$. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của A trên các trục Ox, Oy, Oz . Tính diện tích S của tam giác MNP .

- A. $S = 28$. B. $S = \frac{49}{2}$. C. $S = 7$. **D. $S = 14$.**

Câu 247: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;1)$, $B(5;3;6)$, $C(-1;2;3)$. Tính diện tích tam giác ABC .

- A. $S_{\triangle ABC} = \sqrt{523}$. **B. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{523}$.**
- C. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{532}$. D. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{352}$.

Câu 248: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$. Diện tích tam giác ABC bằng

- A. $\frac{\sqrt{11}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.** D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 249: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là

- A. $2\sqrt{87}$. B. $\frac{\sqrt{349}}{2}$. **C. $\sqrt{349}$.** D. $\sqrt{87}$.