

CHƯƠNG

IV

# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

## BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ $0^\circ$ ĐẾN $180^\circ$ .

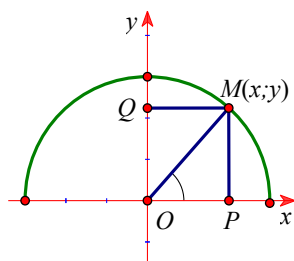
### I LÝ THUYẾT.

#### 1. ĐỊNH NGHĨA GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC.

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ . Với góc  $\alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$ , ta xác định được duy nhất điểm  $M$  trên trên đường nửa đường tròn đơn vị tâm  $O$ , sao cho  $\alpha = \widehat{xOM}$ , biết  $M(x; y)$ .

Khi đó:  $\sin \alpha = y$ ;  $\cos \alpha = x$ ;  $\tan \alpha = \frac{y}{x} (\alpha \neq 90^\circ)$ ;  $\cot \alpha = \frac{x}{y} (\alpha \neq 0^\circ, 180^\circ)$

Các số  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$  được gọi là *giá trị lượng giác* của góc  $\alpha$ .



Hình 2.1

**Chú ý:**  Với  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  ta có  $0 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1$

Góc $\alpha$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
$\sin \alpha$	+		+
$\cos \alpha$	+		-
$\tan \alpha$	+		-
$\cot \alpha$	+		-

**2. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC BÙ NHAU**

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

**3. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU (BỔ SUNG)**

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

**4. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC ĐẶC BIỆT**

Góc $\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

**5. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN (BỔ SUNG – KẾT QUẢ CỦA BÀI TẬP 5 SGK)**

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ) ;$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

## II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

### DẠNG 1: TÍNH CÁC GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

#### 1 PHƯƠNG PHÁP.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

#### 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Tính giá trị các biểu thức sau:

- a)  $A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$   
 b)  $B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$   
 c)  $C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

**Câu 2.** Tính giá trị các biểu thức sau:

- a)  $A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$   
 b)  $B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$   
 c)  $C = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$

#### 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Giá trị của  $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       D. 1.

**Câu 2:** Giá trị của  $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{4}{\sqrt{3}}$                       B.  $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$                       C.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$                       D. 2

**Câu 3:** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

- A.  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$                       B.  $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$   
 C.  $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$                       D.  $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$

**Câu 4:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$ .      B.  $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$ .      C.  $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$ .      D.  $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$ .

**Câu 5:** Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A.  $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$ .                      B.  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$ .  
 C.  $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$ .                      D.  $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$ .

**Câu 6:** Giá trị  $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A. 1.                      B.  $\sqrt{2}$ .                      C.  $\sqrt{3}$ .                      D. 0.

**Câu 7:** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A.  $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ .                      B.  $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ .  
 C.  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ .                      D.  $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ .

**Câu 8:** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

A.  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$ .

B.  $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$ .

C.  $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ .

D.  $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ .

**Câu 9:** Cho  $\alpha$  là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $\sin \alpha < 0$ .

B.  $\cos \alpha > 0$ .

C.  $\tan \alpha < 0$ .

D.  $\cot \alpha > 0$ .

**Câu 10:** Giá trị của  $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$  là

A.  $\frac{1}{2}$ .

B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

C. 1.

D. -1.

**Câu 11:** Giá trị của biểu thức  $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$  là

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

**Câu 12:** Giá trị của biểu thức  $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$  là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

**Câu 13:** Tổng  $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$  bằng

A. 21.

B. 23.

C. 22.

D. 24.

**Câu 14:** Giá trị của  $A = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$  là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. -1.

**Câu 15:** Giá trị của  $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$  là

A.  $\sqrt{2}$ .

B. 2.

C. -2.

D. 1.

**DẠNG 2: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC, KHI BIẾT TRƯỚC MỘT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC.**



### 1 PHƯƠNG PHÁP.

- Dựa vào các hệ thức lượng giác cơ bản
- Dựa vào dấu của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ



### 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$  và  $\tan \alpha$

**Câu 2.** Cho  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$  và  $\sin \alpha > 0$ . Tính  $\sin \alpha$  và  $\cot \alpha$

**Câu 3.** Cho  $\tan \gamma = -2\sqrt{2}$  tính giá trị lượng giác còn lại.

**Câu 4.** Cho  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính  $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ .

**Câu 5.** Cho  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ . Tính  $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

**Câu 6.** Biết  $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm  $|\sin^4 x - \cos^4 x|$ .

b) Chứng minh rằng  $|m| \leq \sqrt{2}$ .



### 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

- Câu 1:** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính biểu thức  $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$
- A.  $\frac{13}{4}$ .                      B.  $\frac{7}{4}$ .                      C.  $\frac{11}{4}$ .                      D.  $\frac{15}{4}$ .
- Câu 2:** Biết  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị đúng của biểu thức  $P = \sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha$  là:
- A.  $\frac{1}{3}$ .                      B.  $\frac{10}{9}$ .                      C.  $\frac{11}{9}$ .                      D.  $\frac{4}{3}$ .
- Câu 3:** Cho biết  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ . Tính  $\cot \alpha$ .
- A.  $\cot \alpha = 2$ .                      B.  $\cot \alpha = \sqrt{2}$ .                      C.  $\cot \alpha = \frac{1}{4}$ .                      D.  $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ .
- Câu 4:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$  và  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Tính  $\tan \alpha$ ?
- A.  $\frac{5}{4}$ .                      B.  $-\frac{5}{2}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .                      D.  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ .
- Câu 5:** Cho  $\alpha$  là góc tù và  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ . Giá trị của biểu thức  $3\sin \alpha + 2\cos \alpha$  là
- A. 3.                      B.  $-\frac{9}{13}$ .                      C. -3.                      D.  $\frac{9}{13}$ .
- Câu 6:** Cho biết  $\sin \alpha + \cos \alpha = a$ . Giá trị của  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  bằng bao nhiêu?
- A.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = a^2$ .                      B.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2a$ .  
 C.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1-a^2}{2}$ .                      D.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{a^2-1}{2}$ .
- Câu 7:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$ ?
- A.  $-\frac{19}{13}$ .                      B.  $\frac{19}{13}$ .                      C.  $\frac{25}{13}$ .                      D.  $-\frac{25}{13}$ .
- Câu 8:** Cho biết  $\cot \alpha = 5$ . Tính giá trị của  $E = 2\cos^2 \alpha + 5\sin \alpha \cos \alpha + 1$ ?
- A.  $\frac{10}{26}$ .                      B.  $\frac{100}{26}$ .                      C.  $\frac{50}{26}$ .                      D.  $\frac{101}{26}$ .
- Câu 9:** Cho  $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{3\sin \alpha + 4\cos \alpha}{2\sin \alpha - 5\cos \alpha}$  là:
- A.  $-\frac{15}{13}$ .                      B. -13.                      C.  $\frac{15}{13}$ .                      D. 13.
- Câu 10:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha}$  bằng bao nhiêu?
- A.  $-\frac{25}{3}$ .                      B.  $-\frac{11}{13}$ .                      C.  $-\frac{11}{3}$ .                      D.  $-\frac{25}{13}$ .
- Câu 11:** Biết  $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ . Hỏi giá trị của  $\sin^4 a + \cos^4 a$  bằng bao nhiêu?
- A.  $\frac{3}{2}$ .                      B.  $\frac{1}{2}$ .                      C. -1.                      D. 0.
- Câu 12:** Cho  $\tan \alpha + \cot \alpha = m$ . Tìm  $m$  để  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$ .

A.  $m = 9$ .                      B.  $m = 3$ .                      C.  $m = -3$ .                      D.  $m = \pm 3$ .

**Câu 13:** Cho biết  $3 \cos \alpha - \sin \alpha = 1$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Giá trị của  $\tan \alpha$  bằng

A.  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$                       B.  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$                       C.  $\tan \alpha = \frac{4}{5}$                       D.  $\tan \alpha = \frac{5}{4}$

**Câu 14:** Cho biết  $2 \cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha = 2$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính giá trị của  $\cot \alpha$ .

A.  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$                       B.  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$                       C.  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$                       D.  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**Câu 15:** Cho biết  $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị của  $P = \sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}$  bằng bao nhiêu?

A.  $P = \frac{5}{4}$ .                      B.  $P = \frac{7}{4}$ .                      C.  $P = \frac{9}{4}$ .                      D.  $P = \frac{11}{4}$ .

**Câu 16:** Cho biết  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Giá trị của  $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}$  bằng bao nhiêu?

A.  $P = \frac{\sqrt{15}}{5}$                       B.  $P = \frac{\sqrt{17}}{5}$                       C.  $P = \frac{\sqrt{19}}{5}$                       D.  $P = \frac{\sqrt{21}}{5}$

**DẠNG 3: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC, RÚT GỌN CÁC BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC**

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản
- Sử dụng tính chất của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ.

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

- a)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$   
 b)  $\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$   
 c)  $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh  $\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)} - \frac{\cos(A+C)}{\sin B} \cdot \tan B = 2$

**Câu 3.** Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

- a)  $A = \sin(90^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \sin^2 x(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$   
 b)  $B = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \sqrt{2}$

**Câu 4.** Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x$ .

$$P = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$$

**3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.**

**Câu 1:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào đúng?



**Câu 13:** Rút gọn biểu thức sau  $A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x}$ .

- A.  $A = 1$ .                      B.  $A = 2$ .                      C.  $A = 3$ .                      D.  $A = 4$ .

**Câu 14:** Biểu thức  $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$  có giá trị bằng:

- A. 1.                                  B. 2.                                  C. -3.                                  D. 0.

**Câu 15:** Biểu thức:  $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

- A. 1.                                  B. 2.                                  C. -2.                                  D. -1.

**Câu 16:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A.  $(\sin x \cos x)^2 = 12 \sin x \cos x$ .                      B.  $\sin^4 x + \cos^4 x = 12 \sin^2 x \cos^2 x$ .  
 C.  $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ .                      D.  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 \sin^2 x \cos^2 x$ .



CHƯƠNG

IV

# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

## BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ $0^\circ$ ĐẾN $180^\circ$ .

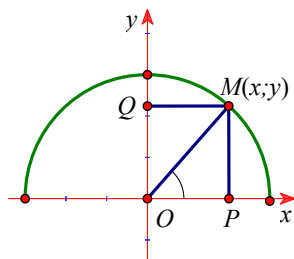
### I LÝ THUYẾT.

#### 1. ĐỊNH NGHĨA GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC.

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ . Với góc  $\alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$ , ta xác định được duy nhất điểm  $M$  trên trên đường nửa đường tròn đơn vị tâm  $O$ , sao cho  $\alpha = \widehat{xOM}$ , biết  $M(x; y)$ .

Khi đó:  $\sin \alpha = y$ ;  $\cos \alpha = x$ ;  $\tan \alpha = \frac{y}{x} (\alpha \neq 90^\circ)$ ;  $\cot \alpha = \frac{x}{y} (\alpha \neq 0^\circ, 180^\circ)$

Các số  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$  được gọi là *giá trị lượng giác* của góc  $\alpha$ .



Hình 2.1

**Chú ý:**  Với  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  ta có  $0 \leq \sin \alpha \leq 1; -1 \leq \cos \alpha \leq 1$

Góc $\alpha$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
$\sin \alpha$	+		+
$\cos \alpha$	+		-
$\tan \alpha$	+		-
$\cot \alpha$	+		-

**2. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC BÙ NHAU**

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

**3. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC PHỤ NHAU (BỔ SUNG)**

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

**4. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC ĐẶC BIỆT**

Góc $\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

**5. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN (BỔ SUNG – KẾT QUẢ CỦA BÀI TẬP 5 SGK)**

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ) ;$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

## II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

### DẠNG 1: TÍNH CÁC GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

#### 1 PHƯƠNG PHÁP.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

#### 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Tính giá trị các biểu thức sau:

a)  $A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$

b)  $B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$

c)  $C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

**Lời giải**

a)  $A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot (-1) = a^2 - c^2.$

b)  $B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ = 3 - (1)^2 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$

c)  $C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

$$C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(\sin^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4.$$

**Câu 2.** Tính giá trị các biểu thức sau:

a)  $A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$

b)  $B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

c)  $C = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$

**Lời giải:**

a)  $A = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ)$

$$= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) = 1 + 1 = 2$$

b)  $B = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ)$

$$= (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= (\tan 5^\circ \tan 85^\circ)(\tan 15^\circ \tan 75^\circ) \dots (\tan 45^\circ \tan 45^\circ) \\ &= (\tan 5^\circ \cot 5^\circ)(\tan 15^\circ \cot 15^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cot 45^\circ) = 1 \end{aligned}$$

### 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Giá trị của  $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       B.  $\sqrt{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       **D. 1.**

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \cos 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

**Câu 2:** Giá trị của  $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{4}{\sqrt{3}}$**                       B.  $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$                       C.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$                       D. 2

Lời giải

**Chọn A**

$$\tan 30^\circ + \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

**Câu 3:** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

- A.  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$       B.  $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$   
 C.  $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$                       **D.  $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$**

Lời giải

**Chọn D**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 4:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.  $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$ .      **B.  $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$ .**      C.  $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$ .      D.  $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$

Lời giải

**Chọn B**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 5:** Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$ .                      B.  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$ .  
 C.  $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$ .                      **D.  $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$ .**

Lời giải

**Chọn D**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 6:** Giá trị  $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A. 1.                                      B.  $\sqrt{2}$ .                                      C.  $\sqrt{3}$ .                                      D. 0.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có  $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$ .

**Câu 7:** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A.  $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ .                                      B.  $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ .  
 C.  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ .                                      D.  $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ .

Lời giải

**Chọn C**

**Câu 8:** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

- A.  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$ .                                      B.  $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$ .  
 C.  $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ .                                      D.  $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ .

Lời giải

**Chọn A**

Ta có  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$ .

**Câu 9:** Cho  $\alpha$  là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\sin \alpha < 0$ .                                      B.  $\cos \alpha > 0$ .                                      C.  $\tan \alpha < 0$ .                                      D.  $\cot \alpha > 0$ .

Lời giải

**Chọn C**

Góc tù có điểm biểu diễn thuộc góc phần tư thứ II, có giá trị  $\sin \alpha > 0$ , còn  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  và  $\cot \alpha$  đều nhỏ hơn 0.

**Câu 10:** Giá trị của  $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$  là

- A.  $\frac{1}{2}$ .                                      B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .                                      C. 1.                                      D. -1.

Lời giải

**Chọn A**

$E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin(90^\circ + 36^\circ) \cos(90^\circ - 6^\circ) = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \cos 36^\circ \sin 6^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

**Câu 11:** Giá trị của biểu thức  $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$  là

- A. 3.                                      B. 4.                                      C. 1.                                      **D. 2.**

**Lời giải**

**Chọn D**

$$A = (\sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \sin^2 35^\circ) = (\sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ) = 2.$$

**Câu 12:** Giá trị của biểu thức  $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$  là

- A. 0.                                      B. 2.                                      C. 3.                                      **D. 1.**

**Lời giải**

**Chọn D**

$$A = (\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ) \dots (\tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1.$$

**Câu 13:** Tổng  $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$  bằng

- A. 21.                                      B. 23.                                      **C. 22.**                                      D. 24.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\begin{aligned} S &= \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ \\ &= (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \sin^2 86^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) \\ &= (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \cos^2 4^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) = 22. \end{aligned}$$

**Câu 14:** Giá trị của  $A = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$  là

- A. 2.                                      **B. 1.**                                      C. 0.                                      D. -1.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$A = (\tan 5^\circ \cdot \tan 85^\circ) \cdot (\tan 10^\circ \cdot \tan 80^\circ) \dots (\tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1.$$

**Câu 15:** Giá trị của  $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$  là

- A.  $\sqrt{2}$ .                                      **B. 2.**                                      C. -2.                                      D. 1.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$B = (\cos^2 73^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ) = (\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \sin^2 87^\circ) = 2$$

**DẠNG 2: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC, KHI BIẾT TRƯỚC MỘT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC.**



**1 PHƯƠNG PHÁP.**

- Dựa vào các hệ thức lượng giác cơ bản
- Dựa vào dấu của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ



**BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$  và  $\tan \alpha$

**Câu 2.** Cho  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$  và  $\sin \alpha > 0$ . Tính  $\sin \alpha$  và  $\cot \alpha$

**Câu 3.** Cho  $\tan \gamma = -2\sqrt{2}$  tính giá trị lượng giác còn lại.

**Lời giải:**

**Câu 1.** Vì  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  nên  $\cos \alpha < 0$  mặt khác  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

**Câu 2.** Vì  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  và  $\sin \alpha > 0$ , nên  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$  và

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

**Câu 3.** Vì  $\tan \alpha = -2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$  mặt khác  $\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$$\text{Nên } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}} = -\sqrt{\frac{1}{8+1}} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

**Câu 4.** Cho  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính  $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ .

**Câu 5.** Cho  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ . Tính  $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

**Lời giải:**

**Câu 4.** Ta có  $A = \frac{\tan \alpha + 3 \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2 \cos^2 \alpha$

Suy ra  $A = 1 + 2 \cdot \frac{9}{16} = \frac{17}{8}$

**Câu 5.**  $B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$

Suy ra  $B = \frac{\sqrt{2}(2+1) - (2+1)}{2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2}(2+1)} = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{3+8\sqrt{2}}$ .

**Câu 6.** Biết  $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm  $|\sin^4 x - \cos^4 x|$ .

b) Chứng minh rằng  $|m| \leq \sqrt{2}$ .

**Lời giải:**

a) Ta có  $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x$  (\*)

Mặt khác  $\sin x + \cos x = m$  nên  $m^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$  hay  $\sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$

Đặt  $A = |\sin^4 x - \cos^4 x|$ . Ta có

$$A = |(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)| = |(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)|$$

$$\Rightarrow A^2 = (\sin x + \cos x)^2 (\sin x - \cos x)^2 = (1 + 2 \sin x \cos x)(1 - 2 \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow A^2 = \left(1 + \frac{m^2 - 1}{2}\right) \left(1 - \frac{m^2 - 1}{2}\right) = \frac{3 + 2m^2 - m^4}{4}. \text{ Vậy } A = \frac{\sqrt{3 + 2m^2 - m^4}}{2}$$

b) Ta có  $2 \sin x \cos x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Kết hợp với (\*) suy ra  $(\sin x + \cos x)^2 \leq 2 \Rightarrow |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$



### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính biểu thức  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$

**A.**  $\frac{13}{4}$ .

**B.**  $\frac{7}{4}$ .

**C.**  $\frac{11}{4}$ .

**D.**  $\frac{15}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$ .

**Câu 2:** Biết  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị đúng của biểu thức  $P = \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$  là:



- A.  $\frac{1}{3}$ .                      B.  $\frac{10}{9}$ .                      **C.  $\frac{11}{9}$ .**                      D.  $\frac{4}{3}$ .

Lời giải

**Chọn C**

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow P = \sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2\cos^2 \alpha = 1 + 2\cos^2 \alpha = \frac{11}{9}.$$

**Câu 3:** Cho biết  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ . Tính  $\cot \alpha$ .

- A.  $\cot \alpha = 2$ .**                      B.  $\cot \alpha = \sqrt{2}$ .                      C.  $\cot \alpha = \frac{1}{4}$ .                      D.  $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = 2.$$

**Câu 4:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$  và  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Tính  $\tan \alpha$ ?

- A.  $\frac{5}{4}$ .                      B.  $-\frac{5}{2}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .                      **D.  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ .**

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Do } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \alpha < 0. \text{ Ta có: } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{5}{4} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

**Câu 5:** Cho  $\alpha$  là góc tù và  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ . Giá trị của biểu thức  $3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$  là

- A. 3.                      **B.  $-\frac{9}{13}$ .**                      C. -3.                      D.  $\frac{9}{13}$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{12}{13}$$

$$\text{Do } \alpha \text{ là góc tù nên } \cos \alpha < 0, \text{ từ đó } \cos \alpha = -\frac{12}{13}$$

$$\text{Nhu vậy } 3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha = 3 \cdot \frac{5}{13} + 2 \left( -\frac{12}{13} \right) = -\frac{9}{13}.$$

**Câu 6:** Cho biết  $\sin \alpha + \cos \alpha = a$ . Giá trị của  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = a^2$ .                      B.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2a$ .  
C.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1-a^2}{2}$ .                      **D.  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{a^2-1}{2}$ .**

Lời giải

**Chọn D**

$$a^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{a^2 - 1}{2}.$$

**Câu 7:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$ ?

- A.  $-\frac{19}{13}$ .      B.  $\frac{19}{13}$ .      C.  $\frac{25}{13}$ .      D.  $-\frac{25}{13}$ .

Lời giải

Chọn B

$$E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha} = \frac{1 + 3 \tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} = \frac{3(\tan^2 \alpha + 1) - 2}{1 + (\tan^2 \alpha)} = \frac{\frac{3}{\cos^2 \alpha} - 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1} = \frac{3 - 2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \frac{19}{13}.$$

**Câu 8:** Cho biết  $\cot \alpha = 5$ . Tính giá trị của  $E = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$ ?

- A.  $\frac{10}{26}$ .      B.  $\frac{100}{26}$ .      C.  $\frac{50}{26}$ .      D.  $\frac{101}{26}$ .

Lời giải

Chọn D

$$E = \sin^2 \alpha \left( 2 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (3 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1) = \frac{101}{26}.$$

**Câu 9:** Cho  $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$  là:

- A.  $-\frac{15}{13}$ .      B.  $-13$ .      C.  $\frac{15}{13}$ .      D.  $13$ .

Lời giải

Chọn D

$$A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \sin \alpha \cdot \cot \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \sin \alpha \cdot \cot \alpha} = \frac{3 + 4 \cot \alpha}{2 - 5 \cot \alpha} = 13.$$

**Câu 10:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha}$  bằng bao nhiêu?

- A.  $-\frac{25}{3}$ .      B.  $-\frac{11}{13}$ .      C.  $-\frac{11}{3}$ .      D.  $-\frac{25}{13}$ .

Lời giải

Chọn C

$$E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha} = \frac{1 - 3 \tan^2 \alpha}{2 - \tan^2 \alpha} = \frac{4 - 3(\tan^2 \alpha + 1)}{3 - (\tan^2 \alpha + 1)} = \frac{4 - \frac{3}{\cos^2 \alpha}}{3 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{4 \cos^2 \alpha - 3}{3 \cos^2 \alpha - 1} = -\frac{11}{3}.$$

**Câu 11:** Biết  $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ . Hỏi giá trị của  $\sin^4 a + \cos^4 a$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{3}{2}$ .      B.  $\frac{1}{2}$ .      C.  $-1$ .      D.  $0$ .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \sin a + \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow 2 = (\sin a + \cos a)^2 \Rightarrow \sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2}.$$

$$\sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a) - 2\sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

**Câu 12:** Cho  $\tan \alpha + \cot \alpha = m$ . Tìm  $m$  để  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$ .

- A.  $m = 9$ .                      B.  $m = 3$ .                      C.  $m = -3$ .                      **D.  $m = \pm 3$ .**

Lời giải

**Chọn D**

$$7 = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \Rightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3.$$

**Câu 13:** Cho biết  $3\cos \alpha - \sin \alpha = 1$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  Giá trị của  $\tan \alpha$  bằng

- A.  $\tan \alpha = \frac{4}{3}$**                       B.  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$                       C.  $\tan \alpha = \frac{4}{5}$                       D.  $\tan \alpha = \frac{5}{4}$

Lời giải

**Chọn A**

$$\text{Ta có } 3\cos \alpha - \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow 3\cos \alpha = \sin \alpha + 1 \rightarrow 9\cos^2 \alpha = (\sin \alpha + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 9\cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha + 1 \Leftrightarrow 9(1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha + 1$$

$$\Leftrightarrow 10\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -1 \\ \sin \alpha = \frac{4}{5} \end{cases} \cdot \sin \alpha = -1: \text{ không thỏa mãn vì } 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

$$\bullet \sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}.$$

**Câu 14:** Cho biết  $2\cos \alpha + \sqrt{2}\sin \alpha = 2$ ,  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính giá trị của  $\cot \alpha$ .

- A.  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$                       B.  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$                       **C.  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$**                       D.  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

**Chọn C**

$$\text{Ta có } 2\cos \alpha + \sqrt{2}\sin \alpha = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin \alpha = 2 - 2\cos \alpha \rightarrow 2\sin^2 \alpha = (2 - 2\cos \alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 \alpha = 4 - 8\cos \alpha + 4\cos^2 \alpha \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 \alpha) = 4 - 8\cos \alpha + 4\cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2 \alpha - 8\cos \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \cos \alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$$

•  $\cos \alpha = 1$ : không thỏa mãn vì  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$$\bullet \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

**Câu 15:** Cho biết  $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị của  $P = \sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha}$  bằng bao nhiêu?

- A.  $P = \frac{5}{4}$ .                      **B.  $P = \frac{7}{4}$ .**                      C.  $P = \frac{9}{4}$ .                      D.  $P = \frac{11}{4}$ .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{3} \rightarrow (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{4}{9}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \sqrt{\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha} = \sqrt{(\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \tan \alpha \cot \alpha} = \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right)^2 - 2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}\right)^2 - 2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}\right)^2 - 2} = \sqrt{\left(-\frac{9}{4}\right)^2 - 2} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

**Câu 16:** Cho biết  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Giá trị của  $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}$  bằng bao nhiêu?

A.  $P = \frac{\sqrt{15}}{5}$

**B.**  $P = \frac{\sqrt{17}}{5}$

C.  $P = \frac{\sqrt{19}}{5}$

D.  $P = \frac{\sqrt{21}}{5}$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{5}.$$

$$P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha} = \sqrt{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = \frac{\sqrt{17}}{5}.$$

**DẠNG 3: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC, RÚT GỌN CÁC BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC**

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản
- Sử dụng tính chất của giá trị lượng giác
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ .

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1.** Chứng minh các đẳng thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

- a)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$
- b)  $\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$
- c)  $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

**Lời giải**

a)  $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x$   
 $= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$   
 $= 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

b)  $\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} = \frac{\frac{\tan x + 1}{\tan x}}{\frac{\tan x - 1}{\tan x}} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

c)  $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^3 x} = \tan^2 x + 1 + \tan x (\tan^2 x + 1)$   
 $= \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh  $\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)} - \frac{\cos(A+C)}{\sin B} \cdot \tan B = 2$

**Lời giải:**

Vì  $A + B + C = 180^\circ$  nên

$$VT = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{180^\circ - B}{2}\right)} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{180^\circ - B}{2}\right)} - \frac{\cos(180^\circ - B)}{\sin B} \cdot \tan B$$

$$= \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} - \frac{-\cos B}{\sin B} \cdot \tan B = \sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + 1 = 2 = VP$$

Suy ra điều phải chứng minh.

**Câu 3.** Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a)  $A = \sin(90^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \sin^2 x(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$

b)  $B = \frac{1}{\sin x} \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \sqrt{2}$

**Lời giải:**

a)  $A = \cos x - \cos x + \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 0$

b)  $B = \frac{1}{\sin x} \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}} - \sqrt{2}$   
 $= \frac{1}{\sin x} \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sin x} \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} - \sqrt{2}$   
 $= \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \sqrt{2} \cot^2 x$

**Câu 4.** Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x$ .

$$P = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$$

**Lời giải**

$$P = \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$$

$$= \sqrt{4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 1} + \sqrt{4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 1} = \sqrt{(2 \cos^2 x + 1)^2} + \sqrt{(2 \sin^2 x + 1)^2}$$

$$= 2 \cos^2 x + 1 + 2 \sin^2 x + 1 = 3$$

Vậy P không phụ thuộc vào  $x$ .

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

**A.**  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1$ . **B.**  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ .

**C.**  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$ . **D.**  $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Công thức lượng giác cơ bản.

**Câu 2:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

- A.  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1$ . B.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ . C.  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$ . **D.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .**

Lời giải

**Chọn D**

Công thức lượng giác cơ bản.

**Câu 3:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

- A.  $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 1$ . B.  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$ . C.  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1$ . **D.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .**

Lời giải

**Chọn D**

Công thức lượng giác cơ bản.

**Câu 4:** Rút gọn biểu thức sau  $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$

- A.  $A = 4$ .** B.  $A = 1$ . C.  $A = 2$ . D.  $A = 3$

Lời giải

**Chọn A**

$$A = (\tan^2 x + 2 \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) - (\tan^2 x - 2 \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) = 4.$$

**Câu 5:** Đơn giản biểu thức  $G = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$ .

- A.  $\sin^2 x$ .** B.  $\cos^2 x$ . C.  $\frac{1}{\cos x}$ . D.  $\cos x$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$G = [(1 - \sin^2 x) - 1] \cot^2 x + 1 = -\sin^2 x \cdot \cot^2 x + 1 = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x.$$

**Câu 6:** Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . B.  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  ( $\sin \alpha \neq 0$ ).  
**C.  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = -1$  ( $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \neq 0$ ).** D.  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  ( $\cos \alpha \neq 0$ ).

Lời giải

**Chọn C**

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

**Câu 7:** Rút gọn biểu thức  $P = \frac{1 - \sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x}$  ta được

- A.  $P = \frac{1}{2} \tan x$ . **B.  $P = \frac{1}{2} \cot x$ .** C.  $P = 2 \cot x$ . D.  $P = 2 \tan x$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$P = \frac{1 - \sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{\cos^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{\cos x}{2 \sin x} = \frac{1}{2} \cot x.$$

**Câu 8:** Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

- A.  $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x$ . B.  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x, \forall x \neq 90^\circ$   
 C.  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x, \forall x$ . **D.  $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x, \forall x$**

Lời giải

**Chọn D**

$$\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(1 - \sin^2 x \cos^2 x).$$

**Câu 9:** Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A.  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \quad (x \neq 0^\circ, x \neq 180^\circ).$

B.  $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} \quad (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$

C.  $\tan^2 x + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2 \quad (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$

**D.  $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 2.$**

Lời giải

**Chọn D**

$$\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1.$$

**Câu 10:** Biểu thức  $\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

A. -1.

**B. 0.**

C. 2.

D. 1.

Lời giải

**Chọn B**

$$\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x = \tan^2 x (\sin^2 x - 1) + \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (-\cos^2 x) + \sin^2 x = 0.$$

**Câu 11:** Biểu thức  $(\cot a + \tan a)^2$  bằng

A.  $\frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{\cos^2 a}.$

B.  $\cot^2 a + \tan^2 a.$

**C.  $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}.$**

D.  $\cot^2 a \tan^2 a + 2.$

Lời giải

**Chọn C**

$$(\cot a + \tan a)^2 = \cot^2 a + 2 \cot a \tan a + \tan^2 a = (\cot^2 a + 1) + (\tan^2 a + 1) = \frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}.$$

**Câu 12:** Đơn giản biểu thức  $E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  ta được

A.  $\sin x.$

B.  $\frac{1}{\cos x}.$

**C.  $\frac{1}{\sin x}.$**

D.  $\cos x.$

Lời giải

**Chọn C**

$$\begin{aligned} E &= \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin x \cdot \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} \\ &= \frac{\cos x(1 + \cos x) + (1 - \cos^2 x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\cos x(1 + \cos x) + (1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

**Câu 13:** Rút gọn biểu thức sau  $A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x}.$

**A.  $A = 1.$**

B.  $A = 2.$

C.  $A = 3.$

D.  $A = 4.$

Lời giải



**Chọn A**

$$A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = 1 - \frac{\cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1.$$

**Câu 14:** Biểu thức  $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$  có giá trị bằng:

- A.** 1.    **B.** 2.    **C.** -3.    **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x.$

$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x.$

$$f(x) = 3(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) - 2(1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x) = 1.$$

**Câu 15:** Biểu thức:  $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

- A.** 1.    **B.** 2.    **C.** -2.    **D.** -1.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$f(x) = \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

**Câu 16:** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A.**  $(\sin x \cos x)^2 = 12 \sin x \cos x.$     **B.**  $\sin^4 x + \cos^4 x = 12 \sin^2 x \cos^2 x.$   
**C.**  $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x.$     **D.**  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 \sin^2 x \cos^2 x.$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3(\sin^2 x + \cos^2 x) \cdot \sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ &= 1 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x. \end{aligned}$$

CHƯƠNG

IV

HỆ THỨC LƯỢNG  
TRONG TAM GIÁC

BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ  $0^\circ$   
ĐẾN  $180^\circ$ .



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. DẤU CỦA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

- Câu 1:** Cho góc  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?  
**A.**  $\sin \alpha$  và  $\cot \alpha$  cùng dấu.                                      **B.** Tích  $\sin \alpha \cdot \cot \alpha$  mang dấu âm.  
**C.** Tích  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  mang dấu dương.                                **D.**  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$  cùng dấu.
- Câu 2:** Cho  $\alpha$  là góc tù. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?  
**A.**  $\tan \alpha < 0$ .    **B.**  $\cot \alpha > 0$ .    **C.**  $\sin \alpha < 0$ .    **D.**  $\cos \alpha > 0$ .
- Câu 3:** Cho  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Khẳng định nào sau đây đúng?  
**A.**  $\cot(90^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ .    **B.**  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ .  
**C.**  $\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ .    **D.**  $\tan(90^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$ .
- Câu 4:** Đẳng thức nào sau đây đúng?  
**A.**  $\tan(180^\circ + a) = -\tan a$ .    **B.**  $\cos(180^\circ + a) = -\cos a$ .  
**C.**  $\sin(180^\circ + a) = \sin a$ .    **D.**  $\cot(180^\circ + a) = -\cot a$ .
- Câu 5:** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào đúng?  
**A.**  $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ .    **B.**  $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$   
**C.**  $\tan(180^\circ - \alpha) = \tan \alpha$ .    **D.**  $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$
- Câu 6:** Cho  $\alpha$  và  $\beta$  là hai góc khác nhau và bù nhau, trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào sai?  
**A.**  $\sin \alpha = \sin \beta$ .    **B.**  $\cos \alpha = -\cos \beta$ .    **C.**  $\tan \alpha = -\tan \beta$ .    **D.**  $\cot \alpha = \cot \beta$ .
- Câu 7:** Cho góc  $\alpha$  tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?  
**A.**  $\sin \alpha < 0$ .    **B.**  $\cos \alpha > 0$ .    **C.**  $\tan \alpha > 0$ .    **D.**  $\cot \alpha < 0$ .
- Câu 8:** Hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  phụ nhau, hệ thức nào sau đây là sai?  
**A.**  $\sin \alpha = \cos \beta$ .    **B.**  $\tan \alpha = \cot \beta$ .    **C.**  $\cot \beta = \frac{1}{\cot \alpha}$ .    **D.**  $\cos \alpha = -\sin \beta$ .
- Câu 9:** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào đúng?  
**A.**  $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .    **B.**  $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .    **C.**  $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ .    **D.**  $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$

**Câu 10:** Bất đẳng thức nào dưới đây là **đúng**?

- A.  $\sin 90^\circ < \sin 100^\circ$ .    B.  $\cos 95^\circ > \cos 100^\circ$ .    C.  $\tan 85^\circ < \tan 125^\circ$ .    D.  $\cos 145^\circ > \cos 125^\circ$ .

**Câu 11:** Giá trị của  $\tan 45^\circ + \cot 135^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A. 2.    B. 0.    C.  $\sqrt{3}$ .    D. 1.

**Câu 12:** Giá trị của  $\cos 30^\circ + \sin 60^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .    B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .    C.  $\sqrt{3}$ .    D. 1.

**Câu 13:** Giá trị của  $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .    B.  $\sqrt{3}$ .    C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .    D. 1

**Câu 14:** Giá trị của  $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{4}{\sqrt{3}}$ .    B.  $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ .    C.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .    D. 2.

**Câu 15:** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

- A.  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$ .    B.  $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$ .  
C.  $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ .    D.  $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$ .

**Câu 16:** Tính giá trị của biểu thức  $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$ .

- A.  $P = 1$ .    B.  $P = 0$ .    C.  $P = \sqrt{3}$ .    D.  $P = -\sqrt{3}$ .

**Câu 17:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$ .    B.  $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$ .    C.  $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$ .    D.  $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$ .

**Câu 18:** Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A.  $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$ .    B.  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$ .  
C.  $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$ .    D.  $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$ .

**Câu 19:** Cho hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ). Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.  $\cos \alpha < \cos \beta$ .    B.  $\sin \alpha < \sin \beta$ .    C.  $\tan \alpha + \tan \beta > 0$ .    D.  $\cot \alpha > \cot \beta$ .

**Câu 20:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , góc  $B$  bằng  $30^\circ$ . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.  $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .    B.  $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .    C.  $\cos C = \frac{1}{2}$ .    D.  $\sin B = \frac{1}{2}$

**Câu 21:** Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A.  $\cos 75^\circ > \cos 50^\circ$ .    B.  $\sin 80^\circ > \sin 50^\circ$ .    C.  $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$ .    D.  $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$ .

**DẠNG 2. CHO BIẾT MỘT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC, TÍNH CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CÒN LẠI**

**Câu 22:** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ , với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$ .

- A.  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ .    B.  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ .    C.  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .    D.  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

**Câu 23:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính  $\tan \alpha$ ?

- A.  $\frac{5}{4}$ .    B.  $-\frac{5}{2}$ .    C.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .    D.  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**Câu 24:** Cho biết  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ . Tính  $\cot \alpha$ .

- A.  $\cot \alpha = 2$ .      B.  $\cot \alpha = \sqrt{2}$ .      C.  $\cot \alpha = \frac{1}{4}$ .      D.  $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ .

**Câu 25:**  $\cos \alpha$  bằng bao nhiêu nếu  $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$ ?

- A.  $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ .      B.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .      C.  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ .      D.  $-\frac{1}{3}$ .

**Câu 26:** Nếu  $\tan \alpha = 3$  thì  $\cos \alpha$  bằng bao nhiêu?

- A.  $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ .      B.  $\frac{1}{3}$ .      C.  $\pm \frac{\sqrt{10}}{10}$ .      D.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ .

**Câu 27:** Cho  $\alpha$  là góc tù và  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ . Giá trị của biểu thức  $3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$  là

- A.  $\frac{9}{13}$ .      B. 3.      C.  $-\frac{9}{13}$ .      D. -3.

**Câu 28:** Biết  $\cot \alpha = -a$ ,  $a > 0$ . Tính  $\cos \alpha$

- A.  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .      B.  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ .      C.  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ .      D.  $\cos \alpha = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .

**Câu 29:** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính biểu thức  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$

- A.  $\frac{13}{4}$ .      B.  $\frac{7}{4}$ .      C.  $\frac{11}{4}$ .      D.  $\frac{15}{4}$ .

**Câu 30:** Cho  $\alpha$  là góc tù và  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ . Giá trị của biểu thức  $A = 2 \sin \alpha - \cos \alpha$  bằng

- A.  $-\frac{7}{5}$ .      B.  $\frac{7}{5}$ .      C. 1.      D.  $\frac{11}{5}$ .

**Câu 31:** Cho  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , với  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Tính giá trị của  $M = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha}$

- A.  $M = \frac{25}{27}$       B.  $M = \frac{175}{27}$ .      C.  $M = \frac{35}{27}$ .      D.  $M = -\frac{25}{27}$ .

**Câu 32:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$ ?

- A.  $-\frac{19}{13}$ .      B.  $\frac{19}{13}$ .      C.  $\frac{25}{13}$ .      D.  $-\frac{25}{13}$ .

**Câu 33:** Cho biết  $\cot \alpha = 5$ . Tính giá trị của  $E = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$ ?

- A.  $\frac{10}{26}$ .      B.  $\frac{100}{26}$ .      C.  $\frac{50}{26}$ .      D.  $\frac{101}{26}$ .

**Câu 34:** Cho  $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$  là:

- A.  $-\frac{15}{13}$ .      B. -13.      C.  $\frac{15}{13}$ .      D. 13.

**Câu 35:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha}$  bằng bao nhiêu?

A.  $-\frac{25}{3}$ .                      B.  $-\frac{11}{13}$ .                      C.  $-\frac{11}{3}$ .                      D.  $-\frac{25}{13}$ .

**Câu 36:** Biết  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị đúng của biểu thức  $P = \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$  là:

A.  $\frac{11}{9}$ .                      B.  $\frac{4}{3}$ .                      C.  $\frac{1}{3}$ .                      D.  $\frac{10}{9}$ .

**DẠNG 3. CHỨNG MINH, RÚT GỌN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Câu 37:** Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A.  $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x$ .                      B.  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x, \forall x \neq 90^\circ$

C.  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x, \forall x$ .                      D.  $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x, \forall x$

**Câu 38:** Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A.  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} (x \neq 0^\circ, x \neq 180^\circ)$ .

B.  $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$

C.  $\tan^2 x + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2 (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$

D.  $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 2$ .

**Câu 39:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

A.  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1$ .                      B.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ .

C.  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$ .                      D.  $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ .

**Câu 40:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

A.  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1$ .                      B.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ .                      C.  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1$ .                      D.  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

**Câu 41:** Rút gọn biểu thức sau  $A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x}$

A.  $A = 4$ .                      B.  $A = 2$ .                      C.  $A = 1$ .                      D.  $A = 3$ .

**Câu 42:** Biểu thức  $(\cot a + \tan a)^2$  bằng

A.  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ .                      B.  $\cot^2 a + \tan^2 a \cdot 2$ .                      C.  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ .                      D.  $\cot^2 a \tan^2 a + 2$ .

**Câu 43:** Rút gọn biểu thức sau  $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$

A.  $A = 4$ .                      B.  $A = 1$ .                      C.  $A = 2$ .                      D.  $A = 3$

**Câu 44:** Đơn giản biểu thức  $G = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$ .

A.  $\sin^2 x$ .                      B.  $\cos^2 x$ .                      C.  $\frac{1}{\cos x}$ .                      D.  $\cos x$ .

**Câu 45:** Đơn giản biểu thức  $E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  ta được

A.  $\sin x$ .                      B.  $\frac{1}{\cos x}$ .                      C.  $\frac{1}{\sin x}$ .                      D.  $\cos x$ .

**Câu 46:** Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.**  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$  **B.**  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\sin \alpha \neq 0).$   
**C.**  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = -1 (\sin \alpha \cdot \cos \alpha \neq 0).$  **D.**  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\cos \alpha \neq 0).$

**Câu 47:** Rút gọn biểu thức  $P = \frac{1 - \sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x}$  ta được

- A.**  $P = \frac{1}{2} \tan x.$  **B.**  $P = \frac{1}{2} \cot x.$  **C.**  $P = 2 \cot x.$  **D.**  $P = 2 \tan x.$

**DẠNG 4. TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Câu 48:** Biểu thức  $A = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$  có giá trị bằng

- A.** 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

**Câu 49:** Cho  $\tan \alpha - \cot \alpha = 3.$  Tính giá trị của biểu thức sau:  $A = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha.$

- A.**  $A = 12.$  **B.**  $A = 11.$  **C.**  $A = 13.$  **D.**  $A = 5.$

**Câu 50:** Giá trị của biểu thức  $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$  là

- A.** 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

**Câu 51:** Tổng  $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$  bằng

- A.** 21. **B.** 23. **C.** 22. **D.** 24.

**Câu 52:** Biết  $\sin a + \cos a = \sqrt{2}.$  Hỏi giá trị của  $\sin^4 a + \cos^4 a$  bằng bao nhiêu?

- A.**  $\frac{3}{2}.$  **B.**  $\frac{1}{2}.$  **C.** -1. **D.** 0.

**Câu 53:** Biểu thức  $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$  có giá trị bằng:

- A.** 1. **B.** 2. **C.** -3. **D.** 0.

**Câu 54:** Biểu thức:  $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

- A.** 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -1.

**Câu 55:** Biểu thức  $\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

- A.** -1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

**Câu 56:** Giá trị của  $A = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$  là

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -1.

**Câu 57:** Giá trị của  $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$  là

- A.**  $\sqrt{2}.$  **B.** 2. **C.** -2. **D.** 1.

**Câu 58:** Cho  $\tan \alpha + \cot \alpha = m.$  Tìm  $m$  để  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7.$

- A.**  $m = 9.$  **B.**  $m = 3.$  **C.**  $m = -3.$  **D.**  $m = \pm 3.$

**Câu 59:** Giá trị của  $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$  là

- A.**  $\frac{1}{2}.$  **B.**  $\frac{\sqrt{3}}{2}.$  **C.** 1. **D.** -1.

**Câu 60:** Giá trị của biểu thức  $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$  là

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

**Câu 61:** Cho  $\sin x + \cos x = m.$  Tính theo  $m$  giá trị của  $M = \sin x \cdot \cos x.$

**A.**  $m^2 - 1$ .

**B.**  $\frac{m^2 - 1}{2}$ .

**C.**  $\frac{m^2 + 1}{2}$ .

**D.**  $m^2 + 1$ .

## CHƯƠNG

## IV

HỆ THỨC LƯỢNG  
TRONG TAM GIÁCBÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ  $0^\circ$   
ĐẾN  $180^\circ$ . HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

## DẠNG 1. DẤU CỦA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

**Câu 1:** Cho góc  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\sin \alpha$  và  $\cot \alpha$  cùng dấu.                      B. Tích  $\sin \alpha \cdot \cot \alpha$  mang dấu âm.
- C. Tích  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  mang dấu dương.            D.  $\sin \alpha$  và  $\tan \alpha$  cùng dấu.

**Lời giải****Chọn B**Với  $\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$ , ta có  $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$  suy ra:  $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$ Vậy  $\sin \alpha \cdot \cot \alpha < 0$ **Câu 2:** Cho  $\alpha$  là góc tù. Mệnh đề nào đúng trong các mệnh đề sau?

- A.  $\tan \alpha < 0$ .                      B.  $\cot \alpha > 0$ .                      C.  $\sin \alpha < 0$ .                      D.  $\cos \alpha > 0$ .

**Lời giải****Chọn C** $\tan \alpha < 0$ .**Câu 3:** Cho  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\cot(90^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$ .                      B.  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ .
- C.  $\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ .                      D.  $\tan(90^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$ .

**Lời giải****Chọn B**Vì  $\alpha$  và  $(90^\circ - \alpha)$  là hai cung phụ nhau nên theo tính chất giá trị lượng giác của hai cung phụ nhau ta có đáp án B đúng.**Câu 4:** Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\tan(180^\circ + a) = -\tan a$ .                      B.  $\cos(180^\circ + a) = -\cos a$ .



C.  $\sin(180^\circ + a) = \sin a$ .

D.  $\cot(180^\circ + a) = -\cot a$ .

Lời giải

**Chọn B**

Lý thuyết “cung hơn kém  $180^\circ$ ”

**Câu 5:** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **đúng**?

A.  $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$ .

B.  $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

C.  $\tan(180^\circ - \alpha) = \tan \alpha$ .

D.  $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$

Lời giải

**Chọn D**

Mối liên hệ hai cung bù nhau.

**Câu 6:** Cho  $\alpha$  và  $\beta$  là hai góc khác nhau và bù nhau, trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào **sai**?

A.  $\sin \alpha = \sin \beta$ .

B.  $\cos \alpha = -\cos \beta$ .

C.  $\tan \alpha = -\tan \beta$ .

D.  $\cot \alpha = \cot \beta$ .

Lời giải

**Chọn D**

Mối liên hệ hai cung bù nhau.

**Câu 7:** Cho góc  $\alpha$  tù. Điều khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A.  $\sin \alpha < 0$ .

B.  $\cos \alpha > 0$ .

C.  $\tan \alpha > 0$ .

D.  $\cot \alpha < 0$ .

Lời giải

**Chọn D**

**Câu 8:** Hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  phụ nhau, hệ thức nào sau đây là **sai**?

A.  $\sin \alpha = \cos \beta$ .

B.  $\tan \alpha = \cot \beta$ .

C.  $\cot \beta = \frac{1}{\cot \alpha}$ .

D.  $\cos \alpha = -\sin \beta$ .

Lời giải

**Chọn D**

$\cos \alpha = \cos(90^\circ - \beta) = \sin \beta$ .

**Câu 9:** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **đúng**?

A.  $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

B.  $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

C.  $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

D.  $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$

Lời giải

**Chọn C**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 10:** Bất đẳng thức nào dưới đây là **đúng**?

A.  $\sin 90^\circ < \sin 100^\circ$ .

B.  $\cos 95^\circ > \cos 100^\circ$ .

C.  $\tan 85^\circ < \tan 125^\circ$ .

D.  $\cos 145^\circ > \cos 125^\circ$ .

Lời giải

**Chọn B**

**Câu 11:** Giá trị của  $\tan 45^\circ + \cot 135^\circ$  bằng bao nhiêu?

A. 2.

B. 0.

C.  $\sqrt{3}$ .

D. 1.

Lời giải

**Chọn B**

$\tan 45^\circ + \cot 135^\circ = 1 - 1 = 0$

**Câu 12:** Giá trị của  $\cos 30^\circ + \sin 60^\circ$  bằng bao nhiêu?

A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

C.  $\sqrt{3}$ .

D. 1.

Lời giải

**Chọn C**

$$\cos 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

**Câu 13:** Giá trị của  $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .                      B.  $\sqrt{3}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .                      **D. 1**

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \cos 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

**Câu 14:** Giá trị của  $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{4}{\sqrt{3}}$ .**                      B.  $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ .                      C.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .                      D. 2.

Lời giải

**Chọn A**

$$\tan 30^\circ + \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

**Câu 15:** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

- A.  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$ .      B.  $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$ .  
C.  $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ .                      **D.  $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$ .**

Lời giải

**Chọn D**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 16:** Tính giá trị của biểu thức  $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$ .

- A.  $P = 1$ .**                      B.  $P = 0$ .                      C.  $P = \sqrt{3}$ .                      D.  $P = -\sqrt{3}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.$$

**Câu 17:** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$ .      **B.  $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$ .**      C.  $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$ .      D.  $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$ .

Lời giải

**Chọn B**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 18:** Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A.  $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$ .                      B.  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$ .  
C.  $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$ .                      **D.  $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$ .**

Lời giải

**Chọn D**

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

**Câu 19:** Cho hai góc nhọn  $\alpha$  và  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ). Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.**  $\cos \alpha < \cos \beta$ .      **B.**  $\sin \alpha < \sin \beta$ .      **C.**  $\tan \alpha + \tan \beta > 0$ .      **D.**  $\cot \alpha > \cot \beta$ .

Lời giải

**Chọn B**

Biểu diễn lên đường tròn.

**Câu 20:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ , góc  $B$  bằng  $30^\circ$ . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.**  $\cos B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .      **B.**  $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .      **C.**  $\cos C = \frac{1}{2}$ .      **D.**  $\sin B = \frac{1}{2}$

Lời giải

**Chọn A**

$$\cos B = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Câu 21:** Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A.**  $\cos 75^\circ > \cos 50^\circ$ .      **B.**  $\sin 80^\circ > \sin 50^\circ$ .      **C.**  $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$ .      **D.**  $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$ .

Lời giải

**Chọn A**

Lý thuyết.

**DẠNG 2. CHO BIẾT MỘT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC, TÍNH CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CÒN LẠI**

**Câu 22:** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ , với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$ .

- A.**  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ .      **B.**  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ .      **C.**  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .      **D.**  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}.$$

$$\text{Mặt khác } 90^\circ < \alpha < 180^\circ \text{ nên } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

**Câu 23:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính  $\tan \alpha$ ?

- A.**  $\frac{5}{4}$ .      **B.**  $-\frac{5}{2}$ .      **C.**  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .      **D.**  $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

Lời giải

**Chọn D**

Do  $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \tan \alpha < 0$ .

$$\text{Ta có: } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{5}{4} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

**Câu 24:** Cho biết  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ . Tính  $\cot \alpha$ .

- A.**  $\cot \alpha = 2$ .      **B.**  $\cot \alpha = \sqrt{2}$ .      **C.**  $\cot \alpha = \frac{1}{4}$ .      **D.**  $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = 2.$$

**Câu 25:**  $\cos \alpha$  bằng bao nhiêu nếu  $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$ ?

**A.**  $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**B.**  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**C.**  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**D.**  $-\frac{1}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $\cot \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = -2$ .

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5}.$$

Suy ra  $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**Câu 26:** Nếu  $\tan \alpha = 3$  thì  $\cos \alpha$  bằng bao nhiêu?

**A.**  $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ .

**B.**  $\frac{1}{3}$ .

**C.**  $\pm \frac{\sqrt{10}}{10}$ .

**D.**  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 3^2} = \frac{1}{10}$ .

Suy ra  $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$ .

**Câu 27:** Cho  $\alpha$  là góc tù và  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ . Giá trị của biểu thức  $3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha$  là

**A.**  $\frac{9}{13}$ .

**B.** 3.

**C.**  $-\frac{9}{13}$ .

**D.** -3.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{12}{13}$

Do  $\alpha$  là góc tù nên  $\cos \alpha < 0$ , từ đó  $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$

Như vậy  $3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha = 3 \cdot \frac{5}{13} + 2 \left( -\frac{12}{13} \right) = -\frac{9}{13}$ .

**Câu 28:** Biết  $\cot \alpha = -a$ ,  $a > 0$ . Tính  $\cos \alpha$

A.  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .    B.  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ .    C.  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ .    **D.  $\cos \alpha = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .**

Lời giải

**Chọn D**

Do  $\cot \alpha = -a$ ,  $a > 0$  nên  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  suy ra  $\cos \alpha < 0$ .

Mặt khác,  $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{-1}{a}$ .

Mà ta lại có  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{1 + a^2}$ .

Khi đó  $\cos \alpha = -\frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}$  và do  $a > 0$  nên  $\cos \alpha = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ .

**Câu 29:** Cho  $\cos x = \frac{1}{2}$ . Tính biểu thức  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x$

**A.**  $\frac{13}{4}$ .    **B.**  $\frac{7}{4}$ .    **C.**  $\frac{11}{4}$ .    **D.**  $\frac{15}{4}$ .

Lời giải

**Chọn A**

Ta có  $P = 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$ .

**Câu 30:** Cho  $\alpha$  là góc tù và  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ . Giá trị của biểu thức  $A = 2 \sin \alpha - \cos \alpha$  bằng

**A.**  $\frac{-7}{5}$ .    **B.**  $\frac{7}{5}$ .    **C.** 1.    **D.**  $\frac{11}{5}$ .

Lời giải

**Chọn D**

Ta có:  $\sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ .

Do  $\alpha$  là góc tù nên  $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{-3}{5}$ .

$A = 2 \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{2 \cdot 4}{5} - \frac{-3}{5} = \frac{11}{5}$ .

**Câu 31:** Cho  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , với  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Tính giá trị của  $M = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha}$

**A.**  $M = \frac{25}{27}$     **B.**  $M = \frac{175}{27}$ .    **C.**  $M = \frac{35}{27}$ .    **D.**  $M = -\frac{25}{27}$ .

**Chọn D**

Ta có  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ .

Mà  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha \leq 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$ .

Từ đó  $M = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha} = \frac{-25}{27}$ .

**Câu 32:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha}$  ?

- A.  $-\frac{19}{13}$ .                      B.  $\frac{19}{13}$ .                      C.  $\frac{25}{13}$ .                      D.  $-\frac{25}{13}$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$E = \frac{\cot \alpha + 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha + \tan \alpha} = \frac{1 + 3 \tan^2 \alpha}{2 + \tan^2 \alpha} = \frac{3(\tan^2 \alpha + 1) - 2}{1 + (1 + \tan^2 \alpha)} = \frac{\frac{3}{\cos^2 \alpha} - 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 1} = \frac{3 - 2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} = \frac{19}{13}.$$

**Câu 33:** Cho biết  $\cot \alpha = 5$ . Tính giá trị của  $E = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$  ?

- A.  $\frac{10}{26}$ .                      B.  $\frac{100}{26}$ .                      C.  $\frac{50}{26}$ .                      D.  $\frac{101}{26}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$E = \sin^2 \alpha \left( 2 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (3 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1) = \frac{101}{26}.$$

**Câu 34:** Cho  $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$  là:

- A.  $-\frac{15}{13}$ .                      B.  $-13$ .                      C.  $\frac{15}{13}$ .                      D.  $13$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$A = \frac{3 \sin \alpha + 4 \sin \alpha \cdot \cot \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \sin \alpha \cdot \cot \alpha} = \frac{3 + 4 \cot \alpha}{2 - 5 \cot \alpha} = 13.$$

**Câu 35:** Cho biết  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha}$  bằng bao nhiêu?

- A.  $-\frac{25}{3}$ .                      B.  $-\frac{11}{13}$ .                      C.  $-\frac{11}{3}$ .                      D.  $-\frac{25}{13}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$E = \frac{\cot \alpha - 3 \tan \alpha}{2 \cot \alpha - \tan \alpha} = \frac{1 - 3 \tan^2 \alpha}{2 - \tan^2 \alpha} = \frac{4 - 3(\tan^2 \alpha + 1)}{3 - (1 + \tan^2 \alpha)} = \frac{4 - \frac{3}{\cos^2 \alpha}}{3 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{4 \cos^2 \alpha - 3}{3 \cos^2 \alpha - 1} = -\frac{11}{3}.$$

**Câu 36:** Biết  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ . Giá trị đúng của biểu thức  $P = \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$  là:

**A.**  $\frac{11}{9}$ .

**B.**  $\frac{4}{3}$ .

**C.**  $\frac{1}{3}$ .

**D.**  $\frac{10}{9}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow P = \sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2\cos^2 \alpha = 1 + 2\cos^2 \alpha = \frac{11}{9}.$$

**DẠNG 3. CHỨNG MINH, RÚT GỌN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Câu 37:** Đẳng thức nào sau đây là sai?

**A.**  $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x.$       **B.**  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x, \forall x \neq 90^\circ$

**C.**  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x, \forall x.$       **D.**  $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x, \forall x$

Lời giải

**Chọn D**

$$\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(1 - \sin^2 x \cos^2 x).$$

**Câu 38:** Đẳng thức nào sau đây là sai?

**A.**  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} (x \neq 0^\circ, x \neq 180^\circ).$

**B.**  $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cos x} (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$

**C.**  $\tan^2 x + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2 (x \neq 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ)$

**D.**  $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 2.$

Lời giải

**Chọn D**

$$\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1.$$

**Câu 39:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào đúng?

**A.**  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1.$       **B.**  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1.$

**C.**  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1.$       **D.**  $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1.$

Lời giải

**Chọn D**

Công thức lượng giác cơ bản.

**Câu 40:** Trong các hệ thức sau hệ thức nào đúng?

**A.**  $\sin^2 \alpha + \cos \alpha^2 = 1.$       **B.**  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1.$       **C.**  $\sin \alpha^2 + \cos \alpha^2 = 1.$       **D.**  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

Lời giải

**Chọn D**

Công thức lượng giác cơ bản.

**Câu 41:** Rút gọn biểu thức sau  $A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x}$

**A.**  $A = 4.$

**B.**  $A = 2.$

**C.**  $A = 1.$

**D.**  $A = 3.$

Lời giải

**Chọn C**

$$A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$= \frac{\cos^2 x(1 - \sin^2 x)}{\cos^2 x} + \sin^2 x = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1.$$

**Câu 42:** Biểu thức  $(\cot a + \tan a)^2$  bằng

**A.**  $\frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{\cos^2 a}$ .      **B.**  $\cot^2 a + \tan^2 a$ .      **C.**  $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}$ .      **D.**  $\cot^2 a \tan^2 a + 2$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$(\cot a + \tan a)^2 = \cot^2 a + 2 \cot a \cdot \tan a + \tan^2 a = (\cot^2 a + 1) + (\tan^2 a + 1) = \frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}.$$

**Câu 43:** Rút gọn biểu thức sau  $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$

**A.**  $A = 4$ .      **B.**  $A = 1$ .      **C.**  $A = 2$ .      **D.**  $A = 3$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$A = (\tan^2 x + 2 \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) - (\tan^2 x - 2 \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) = 4.$$

**Câu 44:** Đơn giản biểu thức  $G = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$ .

**A.**  $\sin^2 x$ .      **B.**  $\cos^2 x$ .      **C.**  $\frac{1}{\cos x}$ .      **D.**  $\cos x$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$G = [(1 - \sin^2 x) - 1] \cot^2 x + 1 = -\sin^2 x \cdot \cot^2 x + 1 = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x.$$

**Câu 45:** Đơn giản biểu thức  $E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  ta được

**A.**  $\sin x$ .      **B.**  $\frac{1}{\cos x}$ .      **C.**  $\frac{1}{\sin x}$ .      **D.**  $\cos x$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin x \cdot \sin x}{\sin x(1 + \cos x)}$$

$$= \frac{\cos x(1 + \cos x) + (1 - \cos^2 x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\cos x(1 + \cos x) + (1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin x}.$$

**Câu 46:** Khẳng định nào sau đây là sai?

**A.**  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .      **B.**  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$  ( $\sin \alpha \neq 0$ ).

**C.**  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = -1$  ( $\sin \alpha \cdot \cos \alpha \neq 0$ ).      **D.**  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  ( $\cos \alpha \neq 0$ ).

**Lời giải**

**Chọn C**



$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1.$$

**Câu 47:** Rút gọn biểu thức  $P = \frac{1 - \sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x}$  ta được

- A.  $P = \frac{1}{2} \tan x$ .      B.  $P = \frac{1}{2} \cot x$ .      C.  $P = 2 \cot x$ .      D.  $P = 2 \tan x$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$P = \frac{1 - \sin^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{\cos^2 x}{2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{\cos x}{2 \sin x} = \frac{1}{2} \cot x.$$

#### DẠNG 4. TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

**Câu 48:** Biểu thức  $A = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$  có giá trị bằng

- A. 1.      B. -1.      C. 2.      D. -2.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có  $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) nên suy ra  $\cos \alpha + \cos(180^\circ - \alpha) = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } A &= (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 140^\circ) + (\cos 60^\circ + \cos 120^\circ) \\ &+ (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) + \cos 180^\circ = \cos 180^\circ = -1. \end{aligned}$$

**Câu 49:** Cho  $\tan \alpha - \cot \alpha = 3$ . Tính giá trị của biểu thức sau:  $A = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ .

- A.  $A = 12$ .      B.  $A = 11$ .      C.  $A = 13$ .      D.  $A = 5$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$\tan \alpha - \cot \alpha = 3 \Leftrightarrow (\tan \alpha - \cot \alpha)^2 = 9 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha - 2 \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 9$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha - 2 = 9 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 11.$$

**Câu 50:** Giá trị của biểu thức  $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$  là

- A. 0.      B. 2.      C. 3.      D. 1.

Lời giải

**Chọn D**

$$A = (\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ) \dots (\tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1.$$

**Câu 51:** Tổng  $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$  bằng

- A. 21.      B. 23.      C. 22.      D. 24.

Lời giải

**Chọn C**

$$\begin{aligned} S &= \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ \\ &= (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \sin^2 86^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) \\ &= (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \cos^2 4^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) = 22. \end{aligned}$$

**Câu 52:** Biết  $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ . Hỏi giá trị của  $\sin^4 a + \cos^4 a$  bằng bao nhiêu?

A.  $\frac{3}{2}$ .

B.  $\frac{1}{2}$ .

C. -1.

D. 0.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:  $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow 2 = (\sin a + \cos a)^2 \Rightarrow \sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2}$ .

$\sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a) - 2\sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ .

**Câu 53:** Biểu thức  $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$  có giá trị bằng:

A. 1.

B. 2.

C. -3.

D. 0.

Lời giải

**Chọn A**

$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$ .

$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$ .

$f(x) = 3(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) - 2(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x) = 1$ .

**Câu 54:** Biểu thức:  $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

A. 1.

B. 2.

C. -2.

D. -1.

Lời giải

**Chọn A**

$f(x) = \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

**Câu 55:** Biểu thức  $\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

A. -1.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

**Chọn B**

$\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x = \tan^2 x (\sin^2 x - 1) + \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (-\cos^2 x) + \sin^2 x = 0$ .

**Câu 56:** Giá trị của  $A = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$  là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. -1.

Lời giải

**Chọn B**

$A = (\tan 5^\circ \cdot \tan 85^\circ) \cdot (\tan 10^\circ \cdot \tan 80^\circ) \dots (\tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1$ .

**Câu 57:** Giá trị của  $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$  là

A.  $\sqrt{2}$ .

B. 2.

C. -2.

D. 1.

Lời giải

**Chọn B**

$B = (\cos^2 73^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ) = (\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \sin^2 87^\circ) = 2$ .

**Câu 58:** Cho  $\tan \alpha + \cot \alpha = m$ . Tìm  $m$  để  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$ .

A.  $m = 9$ .

B.  $m = 3$ .

C.  $m = -3$ .

D.  $m = \pm 3$ .

Lời giải

**Chọn D**

$7 = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \Rightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3$ .

**Câu 59:** Giá trị của  $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$  là

- A.  $\frac{1}{2}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .                      C. 1.                      D. -1.

Lời giải

**Chọn A**

$$E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin(90^\circ + 36^\circ) \cos(90^\circ - 6^\circ) = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \cos 36^\circ \sin 6^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

**Câu 60:** Giá trị của biểu thức  $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$  là

- A. 3.                      B. 4.                      C. 1.                      D. 2.

Lời giải

**Chọn D**

$$A = (\sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \sin^2 35^\circ) = (\sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ) = 2.$$

**Câu 61:** Cho  $\sin x + \cos x = m$ . Tính theo  $m$  giá trị của  $M = \sin x \cdot \cos x$ .

- A.  $m^2 - 1$ .                      B.  $\frac{m^2 - 1}{2}$ .                      C.  $\frac{m^2 + 1}{2}$ .                      D.  $m^2 + 1$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$\sin x + \cos x = m \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = m^2 \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x \cdot \cos x = m^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin x \cdot \cos x = m^2 \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

Vậy  $M = \frac{m^2 - 1}{2}$ .

# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

## BÀI 2. ĐỊNH LÝ COSIN VÀ ĐỊNH LÝ SIN BÀI 3. GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ

### I LÝ THUYẾT.

Cho tam giác  $ABC$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ,  $S$  là diện tích tam giác. Giả sử  $h_a, h_b, h_c$  lần lượt là độ dài các đường cao đi qua ba đỉnh  $A, B, C$ ;  $m_a, m_b, m_c$  lần lượt là các đường trung tuyến đi qua ba đỉnh  $A, B, C$ .  $R$  và  $r$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác  $ABC$ . Ta có kết quả sau đây:

#### 1. Định lý côsin trong tam giác

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

##### \*Hệ quả của định lý côsin

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}.$$

#### 2. Định lý sin trong tam giác: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

##### \*Hệ quả của định lý sin

$$a = 2R \cdot \sin A$$

$$b = 2R \cdot \sin B$$

$$c = 2R \cdot \sin C$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\sin B = \frac{b}{2R}$$

$$\sin C = \frac{c}{2R}$$

#### 3. Các công thức tính diện tích tam giác:

$$1) S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c.$$

$$2) S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$3) S = \frac{abc}{4R}$$

$$4) S = pr \text{ với } p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$5) \text{ Công thức Hê- Rông } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

#### 4. Giải tam giác.

Giải tam giác là tìm số đo các cạnh còn lại và các góc còn lại của tam giác khi biết một số yếu tố cho trước.

Để giải tam giác ta sử dụng một cách hợp lý các công cụ là: Định lý cosin, định lý sin và công thức về diện tích tam giác.

#### 5. Áp dụng giải tam giác vào thực tế.

Vận dụng giải tam giác giúp chúng ta giải quyết rất nhiều bài toán trong thực tế, đặc biệt là trong thiết kế và xây dựng.

**Ví dụ 1.** Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten

cao 5 m. Từ một vị trí quan sát  $A$  cao 7 m so

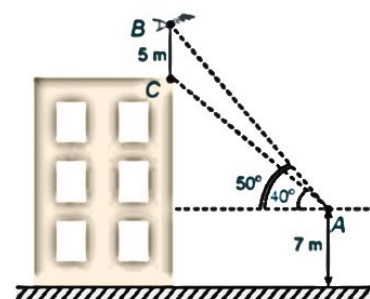
với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh  $B$  và chân  $C$  của cột ăng-ten, với các góc tương ứng

là  $50^\circ$  và  $40^\circ$  so với phương nằm ngang

(H.3.18).

a) Tính các góc của tam giác  $ABC$ .

b) Tính chiều cao của tòa nhà.



Hình 3.18

**Ví dụ 2.** Từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình, ta có thể ngắm được Đảo Yến. Hãy đề xuất một cách xác định bề rộng của hòn đảo (theo chiều ta ngắm được). *Đảo Yến nhìn từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình*



**Ví dụ 3.** Để tránh núi, đường giao thông hiện tại

phải đi vòng như mô hình trong Hình 3.19.

Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi,

người ta dự định làm đường hầm xuyên núi,

nối thẳng từ  $A$  tới  $D$ . Hỏi độ dài đường mới

sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ?



Hình 3.19

## II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

### DẠNG 1: GIẢI TAM GIÁC

{Tìm một số yếu tố của tam giác khi cho biết các yếu tố khác.}

#### 1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lí cosin, hệ quả của định lí cosin, định lí sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.

#### 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 6$ ,  $\widehat{A} = 120^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $BC$

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 7$ ;  $b = 8$ ;  $c = 5$ . Tính  $\widehat{A}, S, h_a, R$ .

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$  có độ dài ba cạnh là  $AB = 2$ ,  $BC = 5$ ,  $CA = 6$ . Tính độ dài đường trung tuyến  $MA$ , với  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

**Câu 4.** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AC = 6$  cm,  $BC = 10$  cm. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$  có  $b = 7$ ,  $c = 5$ ,  $\cos A = \frac{3}{5}$ . Tính độ dài đường cao  $h_a$  của tam giác  $ABC$ .

#### 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho  $\triangle ABC$  có  $BC = a$ ,  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$  là

- A.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      B.  $R = \frac{a}{2}$ .      C.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .      D.  $R = a$ .

**Câu 2:** Tam giác  $ABC$  có  $a = 8$ ,  $c = 3$ ,  $\widehat{B} = 60^\circ$ . Độ dài cạnh  $b$  bằng bao nhiêu?

- A. 49.      B.  $\sqrt{97}$ .      C. 7.      D.  $\sqrt{61}$ .

**Câu 3:** Cho  $\triangle ABC$  có  $a = 4$ ,  $c = 5$ ,  $\widehat{B} = 150^\circ$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

- A.  $S = 10$ .      B.  $S = 10\sqrt{3}$ .      C.  $S = 5$ .      D.  $S = 5\sqrt{3}$ .

**Câu 4:** Một tam giác có ba cạnh là 52, 56, 60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là

- A.  $\frac{65}{4}$ .      B. 40.      C. 32,5.      D. 65,8.

**Câu 5:** Khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm  $C$  mà từ đó có thể nhìn được  $A$  và  $B$  dưới một góc  $60^\circ$ . Biết  $CA = 200$ (m),  $CB = 180$ (m). Khoảng cách  $AB$  bằng bao nhiêu?

- A. 228(m).      B.  $20\sqrt{91}$ (m).      C. 112(m).      D. 168(m).

**Câu 6:** Tam giác  $ABC$  có góc  $A$  nhọn,  $AB = 5$ ,  $AC = 8$ , diện tích bằng 12. Tính độ dài cạnh  $BC$ .

- A.  $2\sqrt{3}$ .      B. 4.      C. 5.      D.  $3\sqrt{2}$ .

**Câu 7:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 6$  và trung tuyến  $BM = 3$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .

- A.  $\sqrt{17}$ .      B.  $2\sqrt{5}$ .      C. 4.      D. 8.

**Câu 8:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 10$  và đường trung tuyến  $AM = 6$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .

- A.  $2\sqrt{6}$ .      B. 5.      C.  $\sqrt{22}$ .      D.  $2\sqrt{22}$ .

**Câu 9:** Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A} = 75^\circ$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ ,  $AC = 2$ . Tính cạnh  $AB$ .

A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      B.  $\sqrt{6}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 10:** Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{B} = 60^\circ$ ,  $\widehat{C} = 45^\circ$ ,  $AB = 3$ . Tính cạnh  $AC$ .

A.  $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ .                      B.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .                      C.  $\sqrt{6}$ .                      D.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 11:** Tam giác  $ABC$  có các góc  $\widehat{A} = 75^\circ$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ . Tính tỉ số  $\frac{AB}{AC}$ .

A.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .                      B.  $\sqrt{6}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .                      D. 1,2.

**Câu 12:** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  biết  $AB = c$  và  $\cos(A+B) = \frac{1}{3}$ .

A.  $\frac{c\sqrt{2}}{2}$ .                      B.  $\frac{3c\sqrt{2}}{8}$ .                      C.  $\frac{9c\sqrt{2}}{8}$ .                      D.  $\frac{3c}{2}$ .

**Câu 13:** Tam giác  $ABC$  có các góc  $\widehat{A} = 105^\circ$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ . Tính tỉ số  $\frac{AB}{AC}$ .

A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      B.  $\sqrt{2}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 14:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 5$ ,  $BC = 6$ . Tính  $\cos(B+C)$ .

A.  $\frac{1}{8}$ .                      B.  $-\frac{1}{4}$ .                      C.  $-0,125$ .                      D. 0,75.

**Câu 15:** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 2,3,4. Góc bé nhất của tam giác có sin bằng bao nhiêu?

A.  $\frac{\sqrt{15}}{8}$ .                      B.  $\frac{7}{8}$ .                      C.  $\frac{1}{2}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{14}}{8}$ .

**Câu 16:** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 3, 8, 9. Góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng bao nhiêu?

A.  $\frac{1}{6}$ .                      B.  $-\frac{1}{6}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{17}}{4}$ .                      D.  $-\frac{4}{25}$ .

**Câu 17:** Hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $E$  là trung điểm cạnh  $BC$ ,  $F$  là trung điểm cạnh  $AE$ . Tìm độ dài đoạn thẳng  $DF$ .

A.  $\frac{a\sqrt{13}}{4}$ .                      B.  $\frac{a\sqrt{5}}{4}$ .                      C.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .                      D.  $\frac{3a}{4}$ .

**Câu 18:** Tam giác  $ABC$  có  $BC = 12$ ,  $CA = 9$ ,  $AB = 6$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $BM = 4$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AM$

A.  $2\sqrt{5}$ .                      B.  $3\sqrt{2}$ .                      C.  $\sqrt{20}$ .                      D.  $\sqrt{19}$ .

**Câu 19:** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = AC = a$ . Điểm  $M$  nằm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = \frac{BC}{3}$ .

Độ dài  $AM$  bằng bao nhiêu?

A.  $\frac{a\sqrt{17}}{3}$ .                      B.  $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ .                      C.  $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ .                      D.  $\frac{2a}{3}$ .

**Câu 20:** Tam giác  $ABC$  có  $\cos(A+B) = -\frac{1}{8}$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 5$ . Tính cạnh  $AB$

A.  $\sqrt{46}$ .                      B. 11.                      C.  $5\sqrt{2}$ .                      D. 6.

- Câu 21:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 7$ ,  $AC = 5$  và  $\cos(B + C) = -\frac{1}{5}$ . Tính  $BC$
- A.  $2\sqrt{15}$ .                      B.  $4\sqrt{22}$ .                      C.  $4\sqrt{15}$ .                      D.  $2\sqrt{22}$ .
- Câu 22:** Tam giác  $ABC$  có  $BC = \sqrt{5}$ ,  $AC = 3$  và  $\cot C = 2$ . Tính cạnh  $AB$
- A. 6.                                  B.  $\sqrt{2}$ .                              C.  $\frac{9}{5}$ .                                  D.  $2\sqrt{10}$ .
- Câu 23:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$  và  $\tan A = -2\sqrt{2}$ . Tính cạnh  $BC$
- A.  $3\sqrt{2}$ .                              B.  $4\sqrt{3}$ .                              C.  $\sqrt{33}$ .                              D. 7.
- Câu 24:** Cho tam giác  $ABC$  có cạnh  $BC = a$ , cạnh  $CA = b$ . Tam giác  $ABC$  có diện tích lớn nhất khi góc  $C$  bằng:
- A.  $60^\circ$ .                              B.  $90^\circ$ .                              C.  $150^\circ$ .                              D.  $120^\circ$ .
- Câu 25:** Cho tam giác  $MPQ$  vuông tại  $P$ . Trên cạnh  $MQ$  lấy hai điểm  $E, F$  sao cho các góc  $\widehat{MPE}$ ,  $\widehat{EPF}$ ,  $\widehat{FPQ}$  bằng nhau. Đặt  $MP = q$ ,  $PQ = m$ ,  $PE = x$ ,  $PF = y$ . Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?
- A.  $ME = EF = FQ$ .                      B.  $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$ .  
C.  $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$ .                      D.  $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$ .
- Câu 26:** Tính góc  $C$  của tam giác  $ABC$  biết  $a \neq b$  và  $a(a^2 - c^2) = b(b^2 - c^2)$ .
- A.  $C = 150^\circ$ .                      B.  $C = 120^\circ$ .                      C.  $C = 60^\circ$ .                      D.  $C = 30^\circ$ .
- Câu 27:** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  biết  $AB = 12$  và  $\cot(A + B) = \frac{1}{3}$ .
- A.  $2\sqrt{10}$ .                              B.  $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ .                              C.  $5\sqrt{10}$ .                              D.  $3\sqrt{2}$ .
- Câu 28:** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  biết  $AB = 10$  và  $\tan(A + B) = \frac{1}{3}$ .
- A.  $\frac{5\sqrt{10}}{9}$ .                              B.  $\frac{10}{3}$ .                              C.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .                              D.  $5\sqrt{10}$ .
- Câu 29:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 6$ ,  $\cos B = \frac{1}{8}$ ,  $\cos C = \frac{3}{4}$ . Tính cạnh  $BC$ .
- A. 7.                                      B. 5.                                      C.  $3\sqrt{3}$ .                              D. 2.
- Câu 30:** Cho tam giác cân  $ABC$  có  $\widehat{A} = 120^\circ$  và  $AB = AC = a$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = \frac{2BC}{5}$ . Tính độ dài  $AM$
- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .                              B.  $\frac{11a}{5}$ .                              C.  $\frac{a\sqrt{7}}{5}$ .                              D.  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ .

**DẠNG 2: HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC, NHẬN DẠNG TAM GIÁC**



**1 PHƯƠNG PHÁP.**

Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lí cosin, hệ quả của định lí cosin, định lí sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.



## 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa  $\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C$ . Tam giác  $ABC$  là tam giác gì?

**Câu 2.** Chứng minh trong tam giác  $ABC$  ta có:  $h_a = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C$

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh  $S = R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$ .

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa  $\begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \\ a = 2b \cdot \cos C \end{cases}$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  là tam giác đều.

**Câu 5.** Chứng minh trong tam giác  $ABC$  ta có:  $\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = \sin A$

## 3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$ , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

**A.**  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$ .

**B.**  $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ .

**C.**  $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$ .

**D.**  $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ .

**Câu 2:** Trong tam giác  $ABC$ , câu nào sau đây **đúng**?

**A.**  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$ .

**B.**  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ .

**C.**  $a^2 = b^2 + c^2 + bc \cdot \cos A$ .

**D.**  $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A$ .

**Câu 3:** Nếu tam giác  $ABC$  có  $a^2 < b^2 + c^2$  thì:

**A.**  $\widehat{A}$  là góc tù.

**B.**  $\widehat{A}$  là góc vuông.

**C.**  $\widehat{A}$  là góc nhọn.

**D.**  $\widehat{A}$  là góc nhỏ nhất.

**Câu 4:** Tam giác  $ABC$  có ba cạnh thỏa mãn điều kiện  $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$ . Khi đó số đo của  $\widehat{C}$  là

**A.**  $120^\circ$ .

**B.**  $30^\circ$ .

**C.**  $45^\circ$ .

**D.**  $60^\circ$ .

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.**  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

**B.**  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

**C.**  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

**D.**  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $c = a \cdot \cos B$ . Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

**A.** Tam giác  $ABC$  là tam giác cân.

**B.** Tam giác  $ABC$  là tam giác nhọn.

**C.** Tam giác  $ABC$  là tam giác vuông.

**D.** Tam giác  $ABC$  là tam giác tù.

**Câu 7:** Diện tích  $S$  của tam giác sẽ thỏa mãn hệ thức nào trong hai hệ thức sau đây?

**I.**  $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ .

**II.**  $16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ .

**A.** Chỉ I.

**B.** Chỉ II.

**C.** Cả I và II.

**D.** Không có.

- Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$ , các đường cao  $h_a, h_b, h_c$  thỏa mãn hệ thức  $3h_a = 2h_b + h_c$ . Tìm hệ thức giữa  $a, b, c$ .
- A.  $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} - \frac{1}{c}$ .      B.  $3a = 2b + c$ .      C.  $3a = 2b - c$ .      D.  $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$ .
- Câu 9:** Trong tam giác  $ABC$ , hệ thức nào sau đây sai?
- A.  $a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B}$ .      B.  $\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$ .      C.  $a = 2R \cdot \sin A$ .      D.  $b = R \cdot \tan B$ .
- Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn hệ thức  $b + c = 2a$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
- A.  $\cos B + \cos C = 2 \cos A$ .      B.  $\sin B + \sin C = 2 \sin A$ .  
C.  $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$ .      D.  $\sin B + \cos C = 2 \sin A$ .
- Câu 11:** Tam giác  $ABC$  có  $A = 120^\circ$  thì câu nào sau đây đúng?
- A.  $a^2 = b^2 + c^2 - 3bc$ .      B.  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ .      C.  $a^2 = b^2 + c^2 + 3bc$ .      D.  $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ .
- Câu 12:** Trong tam giác  $ABC$ , điều kiện để hai trung tuyến vẽ từ  $A$  và  $B$  vuông góc với nhau là:
- A.  $2a^2 + 2b^2 = 5c^2$ .      B.  $3a^2 + 3b^2 = 5c^2$ .      C.  $2a^2 + 2b^2 = 3c^2$ .      D.  $a^2 + b^2 = 5c^2$ .
- Câu 13:** Trong tam giác  $ABC$ , nếu có  $a^2 = b \cdot c$  thì:
- A.  $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$ .      B.  $h_a^2 = h_b \cdot h_c$ .      C.  $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ .      D.  $\frac{1}{h_a^2} = \frac{2}{h_b} + \frac{2}{h_c}$ .
- Câu 14:** Trong tam giác  $ABC$ , nếu có  $2h_a = h_b + h_c$  thì:
- A.  $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$ .      B.  $2 \sin A = \sin B + \sin C$ .  
C.  $\sin A = 2 \sin B + 2 \sin C$ .      D.  $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin C}$ .
- Câu 15:** Trong tam giác  $ABC$ , câu nào sau đây đúng?
- A.  $m_a = \frac{b+c}{2}$ .      B.  $m_a > \frac{b+c}{2}$ .      C.  $m_a < \frac{b+c}{2}$ .      D.  $m_a = b+c$ .
- Câu 16:** Tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$ . Tính số đo của góc  $C$ .
- A.  $45^\circ$ .      B.  $60^\circ$ .      C.  $120^\circ$ .      D.  $30^\circ$ .
- Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$ , xét các bất đẳng thức sau:
- I.  $|a-b| < c$ .  
II.  $a < b+c$ .  
III.  $m_a + m_b + m_c < a+b+c$ .
- Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?
- A. Chỉ I, II.      B. Chỉ II, III.      C. Chỉ I, III.      D. Cả I, II, III.
- Câu 18:** Tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$ . Tính số đo của góc  $A$ .
- A.  $45^\circ$ .      B.  $60^\circ$ .      C.  $120^\circ$ .      D.  $30^\circ$ .
- Câu 19:** Tam giác  $ABC$   $a \cdot \cos B = b \cdot \cos A$ . Tam giác  $ABC$  là tam giác gì?
- A. Tam giác vuông.      B. Tam giác đều.      C. Tam giác vuông cân.      D. Tam giác cân.
- Câu 20:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AC = b, AB = c$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho góc  $\widehat{BAM} = 30^\circ$  Tính tỉ số  $\frac{MB}{MC}$ .

- A.  $\frac{b\sqrt{3}}{3c}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{3}c}{3b}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{3}c}{b}$ .                      D.  $\frac{b-c}{b+c}$ .

**Câu 21:** Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu  $a^2 > b^2 + c^2$  thì  $A$  là góc tù.  
 B. Nếu tam giác  $ABC$  có một góc tù thì  $a^2 > b^2 + c^2$ .  
 C. Nếu  $a^2 < b^2 + c^2$  thì  $A$  là góc nhọn.  
 D. Nếu  $a^2 = b^2 + c^2$  thì  $A$  là góc vuông.

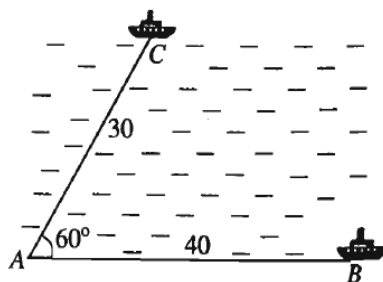
**DẠNG 3: ỨNG DỤNG THỰC TẾ**

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lí cosin, hệ quả của định lí cosin, định lí sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1:** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc  $60^\circ$ . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ  $30\text{km/h}$ , tàu thứ hai chạy với tốc độ  $40\text{km/h}$ . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu  $\text{km}$ ?



**Câu 2:** Từ một đỉnh tháp chiều cao  $CD = 80\text{m}$ , người ta nhìn hai điểm  $A$  và  $B$  trên mặt đất dưới các góc nhìn là  $72^\circ 12'$  và  $34^\circ 26'$  so với phương nằm ngang. Ba điểm  $A, B, D$  thẳng hàng. Tính khoảng cách  $AB$  (chính xác đến hàng đơn vị)?

**BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.**

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 13, b = 8, c = 7$ . Tính góc  $A$ , suy ra  $S, h_a, R, r, m_a$ .

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4, AC = 5$  và  $\cos A = \frac{3}{5}$ . Tính cạnh  $BC$ , và độ dài đường cao kẻ từ  $A$ .

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 10, AC = 4$  và  $\hat{A} = 60^\circ$ .

- a) Tính chu vi của tam giác  
 b) Tính  $\tan C$

**Câu 6:** Giải tam giác  $ABC$  biết  $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 40^\circ$  và  $c = 14$ .

**Câu 7:** Giải tam giác  $ABC$ , biết:

$b = 4, 5; \quad \hat{A} = 30^\circ; \quad \hat{C} = 75^\circ$

**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  biết  $a = \sqrt{3}; \hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$ . Tính  $R, r$ , cạnh  $c, b$ , suy ra  $S$

- Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết  $\widehat{A} = 30^\circ$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ . Tính độ dài trung tuyến kẻ từ  $A$  và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.
- Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$ . Chứng minh rằng
- $a^2 = bc$
  - $\cos A \geq \frac{1}{2}$
- Câu 11:** Tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  và trung tuyến  $AM = AB = c$  chứng minh rằng:
- $a^2 = 2(b^2 - c^2)$
  - $\sin^2 A = 2(\sin^2 B - \sin^2 C)$
- Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ  $B$  và  $C$  vuông góc với nhau là  $b^2 + c^2 = 5a^2$ .
- Câu 13:** Chứng minh rằng trong mọi tam giác  $ABC$  ta có;
- $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$
  - $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$
- Câu 14:** Chứng minh rằng trong mọi tam giác  $ABC$  ta có:  $h_a = 2R \sin B \sin C$
- Câu 15:** Tìm tính chất đặc biệt của tam giác  $ABC$  biết:  $2a \cos A = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$
- Nhận dạng tam giác  $ABC$  biết: 
$$\begin{cases} a = 2b \cos C & (1) \\ a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} & (2) \end{cases}$$
- Câu 16:**
- Câu 17:** Nhận dạng tam giác  $ABC$  biết:  $a \cdot \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$
- Câu 18:** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  cân nếu  $h_a = c \cdot \sin A$

# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

## BÀI 2. ĐỊNH LÝ COSIN VÀ ĐỊNH LÝ SIN BÀI 3. GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ



### I LÝ THUYẾT.

Cho tam giác  $ABC$ ,  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ,  $S$  là diện tích tam giác. Giả sử  $h_a, h_b, h_c$  lần lượt là độ dài các đường cao đi qua ba đỉnh  $A, B, C$ ;  $m_a, m_b, m_c$  lần lượt là các đường trung tuyến đi qua ba đỉnh  $A, B, C$ .  $R$  và  $r$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác  $ABC$ . Ta có kết quả sau đây:

#### 1. Định lý côsin trong tam giác

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

\*Hệ quả của định lý côsin

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}.$$

#### 2. Định lý sin trong tam giác: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

\*Hệ quả của định lý sin

$$a = 2R \cdot \sin A$$

$$b = 2R \cdot \sin B$$

$$c = 2R \cdot \sin C$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$

$$\sin B = \frac{b}{2R}$$

$$\sin C = \frac{c}{2R}$$

#### 3. Các công thức tính diện tích tam giác:

$$1) S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c.$$

$$2) S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$3) S = \frac{abc}{4R}$$

$$4) S = pr \text{ với } p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$5) \text{ Công thức Hê- Rông } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

#### 4. Giải tam giác.

Giải tam giác là tìm số đo các cạnh còn lại và các góc còn lại của tam giác khi biết một số yếu tố cho trước.

Để giải tam giác ta sử dụng một cách hợp lý các công cụ là: Định lý cosin, định lý sin và công thức về diện tích tam giác.

#### 5. Áp dụng giải tam giác vào thực tế.

Vận dụng giải tam giác giúp chúng ta giải quyết rất nhiều bài toán trong thực tế, đặc biệt là trong thiết kế và xây dựng.

**Ví dụ 1.** Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten

cao 5 m. Từ một vị trí quan sát  $A$  cao 7 m so

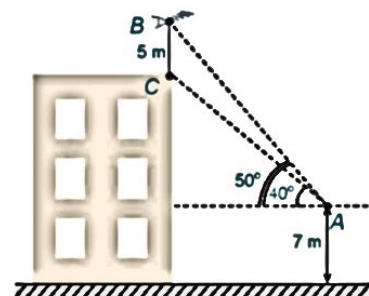
với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh  $B$  và chân  $C$  của cột ăng-ten, với các góc tương ứng

là  $50^\circ$  và  $40^\circ$  so với phương nằm ngang

(H.3.18).

a) Tính các góc của tam giác  $ABC$ .

b) Tính chiều cao của tòa nhà.



Hình 3.18

#### Lời giải

a) Ta có  $\widehat{BAC} = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ$ ,

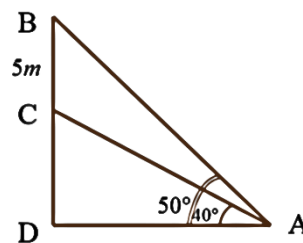
$$\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{BAD} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{BAC} = 130^\circ$$

b) Áp dụng định lý sin trong tam giác  $ABC$  ta có

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18,51.$$

Xét tam giác  $ACD$  vuông tại  $D$  có  $CD = AC \cdot \sin 40^\circ \approx 11,9$

Vậy chiều cao của tòa nhà là:  $11,9 + 7 = 18,9m$ .



**Ví dụ 2.** Từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình, ta có thể ngắm được Đảo Yến. Hãy đề xuất một cách xác định bề rộng của hòn đảo (theo chiều ta ngắm được). Đảo Yến nhìn từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình

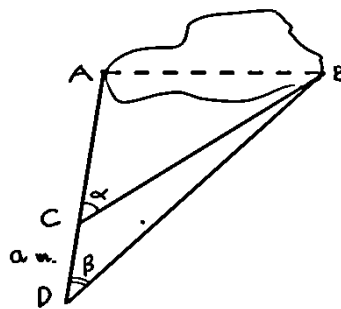


#### Lời giải

Gọi  $A, B$  là hai vị trí ngoài cùng mà ta quan sát khi nhìn từ bãi biển

Từ một điểm  $C$  trên bãi biển dùng giác kế ta xác định được góc  $\widehat{ACB} = \alpha$ .

Lấy điểm  $D$  trên bãi biển sao cho  $A, C, D$  thẳng hàng và có độ dài đoạn  $CD = a$  mét. Ta xác định được  $\widehat{ADB} = \beta$ .

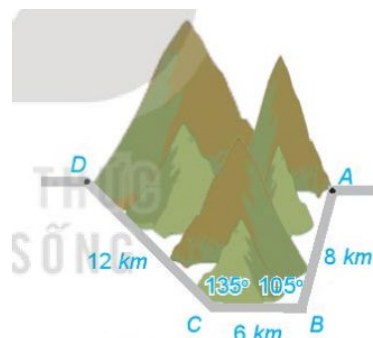


Từ đó áp dụng định lí sin cho hai tam giác  $BCD$  và  $ABC$  ta xác định được bề rộng  $AB$  của hòn đảo.

**Ví dụ 3.** Để tránh núi, đường giao thông hiện tại

phải đi vòng như mô hình trong Hình 3.19.

Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ  $A$  tới  $D$ . Hỏi độ dài đường mới sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ?



Hình 3.19

**Lời giải**

Dựng  $CE, BF$  vuông góc với  $AD$ .

Xét tam giác  $CDE$  vuông tại  $E$  có  $\widehat{D} = \widehat{C} = 45^\circ$

$$\Rightarrow DE = CD \cdot \sin 45^\circ = 6\sqrt{2} \text{ km.}$$

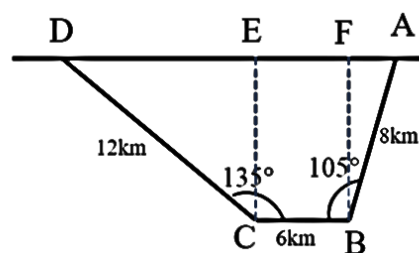
Xét tam giác  $ABF$  vuông tại  $F$  có  $\widehat{B} = 15^\circ$

$$\Rightarrow AF = AB \cdot \sin 15^\circ = (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) \text{ km.}$$

Mặt khác  $EF = BC = 6 \text{ km}$

$$\Rightarrow AD = DE + EF + FA = 6 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6} \approx 16,56 \text{ km.}$$

Vậy độ dài đường mới sẽ giảm  $9,44 \text{ km}$  so với đường cũ.



**II HỆ THỐNG BÀI TẬP.**

**DẠNG 1: GIẢI TAM GIÁC**

{Tìm một số yếu tố của tam giác khi cho biết các yếu tố khác.}

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

+ Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lí cosin, hệ quả của định lí cosin, định lí sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.



## BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4, AC = 6, \hat{A} = 120^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $BC$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 6^2 + 4^2 - 2.6.4.\cos 120^\circ \\ &= 6^2 + 4^2 - 2.6.4.\frac{-1}{2} = 76 \Rightarrow BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}. \end{aligned}$$

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 7; b = 8; c = 5$ . Tính  $\hat{A}, S, h_a, R$ .

**Lời giải**

$$+ \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2.8.5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ.$$

$$+ S = \frac{1}{2}b.c.\sin A = \frac{1}{2}.8.5.\sin 60^\circ = 10\sqrt{3}.$$

$$+ \text{Ta có: } S = \frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2.10\sqrt{3}}{7} = \frac{20\sqrt{3}}{7}.$$

$$+ \text{Ta có: } S = \frac{a.b.c}{4R} \Rightarrow R = \frac{a.b.c}{4S} = \frac{7.8.5}{4.10\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$  có độ dài ba cạnh là  $AB = 2, BC = 5, CA = 6$ . Tính độ dài đường trung tuyến  $MA$ , với  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

**Lời giải**

Áp dụng công thức tính độ dài trung tuyến ta có:

$$MA = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{2^2 + 6^2}{2} - \frac{5^2}{4}} = \frac{\sqrt{55}}{2}.$$

**Câu 4.** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AC = 6$  cm,  $BC = 10$  cm. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**Lời giải**

Do tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AC = 6$  cm,  $BC = 10$  cm nên

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

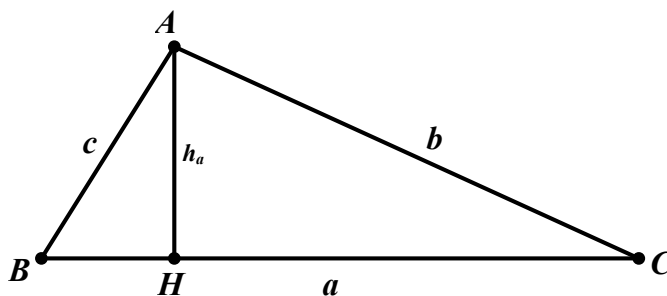
Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 24$ .

Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  là  $r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB + BC + CA} = \frac{2.24}{6 + 8 + 10} = 2$ .

**Câu 5.** Cho tam giác  $ABC$  có  $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$ . Tính độ dài đường cao  $h_a$  của tam giác  $ABC$ .



Lời giải



Theo định lí hàm cos ta có  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 49 + 25 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$ .

Ta lại có:  $\cos A = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$ .

Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14$ .

Vì  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a$  nên  $h_a = \frac{2S_{\Delta ABC}}{a} = \frac{28}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$

Vậy  $h_a = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ .

**3** BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho  $\Delta ABC$  có  $BC = a$ ,  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$  là

- A.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      B.  $R = \frac{a}{2}$ .      C.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .      **D.  $R = a$ .**

Lời giải

**Chọn D**

Theo định lý sin trong tam giác ta có  $2R = \frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} \Rightarrow R = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sin 120^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 2:** Tam giác  $ABC$  có  $a = 8$ ,  $c = 3$ ,  $\widehat{B} = 60^\circ$ . Độ dài cạnh  $b$  bằng bao nhiêu?

- A. 49.      B.  $\sqrt{97}$ .      **C. 7.**      D.  $\sqrt{61}$ .

Lời giải

**Chọn C**

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cos 60^\circ = 49 \Rightarrow b = 7$ .

**Câu 3:** Cho  $\Delta ABC$  có  $a = 4$ ,  $c = 5$ ,  $\widehat{B} = 150^\circ$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

- A.  $S = 10$ .      B.  $S = 10\sqrt{3}$ .      **C.  $S = 5$ .**      D.  $S = 5\sqrt{3}$ .

Lời giải

**Chọn C**

Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \cdot 4.5 \sin 150^\circ = 5$ .

**Câu 4:** Một tam giác có ba cạnh là 52, 56, 60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là

- A.  $\frac{65}{4}$ .                      B. 40.                      **C. 32,5.**                      D. 65,8.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $p = \frac{52+56+60}{2} = 84$ .

Áp dụng hệ thức Hê – rông ta có:  $S = \sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)} = 1344$ .

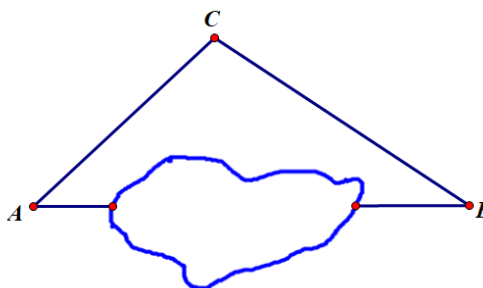
Mặt khác  $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{52 \cdot 56 \cdot 60}{4 \cdot 1344} = 32,5$ .

**Câu 5:** Khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm  $C$  mà từ đó có thể nhìn được  $A$  và  $B$  dưới một góc  $60^\circ$ . Biết  $CA = 200(\text{m})$ ,  $CB = 180(\text{m})$ . Khoảng cách  $AB$  bằng bao nhiêu?

- A. 228(m).                      **B.  $20\sqrt{91}$ (m).**                      C. 112(m).                      D. 168(m).

**Lời giải**

**Chọn B**



$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos 60^\circ = 36400 \Rightarrow AB = 20\sqrt{91}(\text{m})$ .

**Câu 6:** Tam giác  $ABC$  có góc  $A$  nhọn,  $AB = 5$ ,  $AC = 8$ , diện tích bằng 12. Tính độ dài cạnh  $BC$ .

- A.  $2\sqrt{3}$ .                      B. 4.                      **C. 5.**                      D.  $3\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{AB \cdot AC} = \frac{2 \cdot 12}{5 \cdot 8} = \frac{3}{5} \Rightarrow \hat{A} = 36^\circ 52' 12''$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 36^\circ 52' 12'' \approx 25 \Rightarrow BC \approx 5$ .

**Câu 7:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 6$  và trung tuyến  $BM = 3$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .

A.  $\sqrt{17}$ .

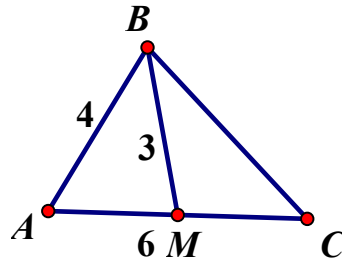
**B.  $2\sqrt{5}$ .**

C. 4.

D. 8.

Lời giải

**Chọn B**



$$\text{Ta có: } BM^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}$$

$$\Rightarrow BC^2 = 2\left(BM^2 + \frac{AC^2}{4}\right) - AB^2$$

$$= 2\left(3^2 + \frac{6^2}{4}\right) - 4^2 = 20 \Rightarrow BC = 2\sqrt{5}.$$

**Câu 8:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 10$  và đường trung tuyến  $AM = 6$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .

A.  $2\sqrt{6}$ .

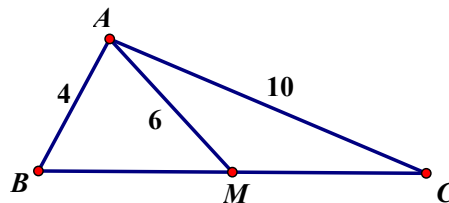
B. 5.

C.  $\sqrt{22}$ .

**D.  $2\sqrt{22}$ .**

Lời giải

**Chọn D**



$$\text{Ta có: } AM^2 = \frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$

$$\Rightarrow BC^2 = 4\left(\frac{AC^2 + AB^2}{2} - AM^2\right) = 4\left(\frac{10^2 + 4^2}{2} - 6^2\right) = 88 \Rightarrow BC = 2\sqrt{22}.$$

**Câu 9:** Tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} = 75^\circ$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ ,  $AC = 2$ . Tính cạnh  $AB$ .

A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**B.  $\sqrt{6}$ .**

C.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow AB = c = \frac{b \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{2 \cdot \sin(180^\circ - 75^\circ - 45^\circ)}{\sin 45^\circ} = \sqrt{6}.$$

**Câu 10:** Tam giác  $ABC$  có  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $\hat{C} = 45^\circ$ ,  $AB = 3$ . Tính cạnh  $AC$ .

- A.  $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ .                      B.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .                      C.  $\sqrt{6}$ .                      D.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow AC = b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{3 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{2}.$$

**Câu 11:** Tam giác  $ABC$  có các góc  $\hat{A} = 75^\circ$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ . Tính tỉ số  $\frac{AB}{AC}$ .

- A.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .                      B.  $\sqrt{6}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .                      D. 1,2.

Lời giải

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin(180^\circ - 75^\circ - 45^\circ)}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

**Câu 12:** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  biết  $AB = c$  và  $\cos(A+B) = \frac{1}{3}$ .

- A.  $\frac{c\sqrt{2}}{2}$ .                      B.  $\frac{3c\sqrt{2}}{8}$ .                      C.  $\frac{9c\sqrt{2}}{8}$ .                      D.  $\frac{3c}{2}$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \cos C = -\cos(A+B) = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó } \sin C = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin C} = \frac{3\sqrt{2}c}{8}.$$

**Câu 13:** Tam giác  $ABC$  có các góc  $\hat{A} = 105^\circ$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ . Tính tỉ số  $\frac{AB}{AC}$ .

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      B.  $\sqrt{2}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

Lời giải.

**Chọn A**

Ta có:  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin(180^\circ - 105^\circ - 45^\circ)}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 14:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 5$ ,  $BC = 6$ . Tính  $\cos(B + C)$ .

- A.  $\frac{1}{8}$ .                      B.  $-\frac{1}{4}$ .                      C.  $-0,125$ .                      D.  $0,75$ .

**Lời giải.**

**Chọn C**

Ta có  $c = AB = 4$ ,  $b = AC = 5$ ,  $a = BC = 6$ .

Tính  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c} = \frac{1}{8}$ .

Đề ý  $\cos(B + C) = -\cos A = -\frac{1}{8} = -0,125$ .

**Câu 15:** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 2, 3, 4. Góc bé nhất của tam giác có sin bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{\sqrt{15}}{8}$ .                      B.  $\frac{7}{8}$ .                      C.  $\frac{1}{2}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{14}}{8}$ .

**Lời giải.**

**Chọn A**

Góc bé nhất ứng với cạnh có số đo bé nhất.

Giả sử  $a = 2, b = 3, c = 4$ . Ta có  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c} = \frac{7}{8}$ .

Do đó  $\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$ .

**Câu 16:** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 3, 8, 9. Góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{1}{6}$ .                      B.  $-\frac{1}{6}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{17}}{4}$ .                      D.  $-\frac{4}{25}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

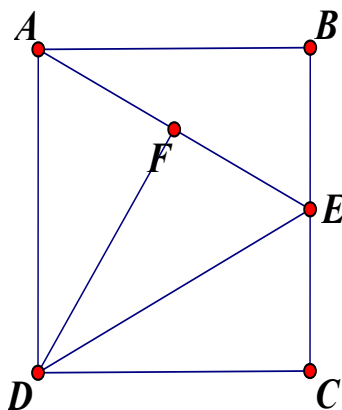
Góc lớn nhất tương ứng với cạnh lớn nhất:  $\cos \alpha = \frac{3^2 + 8^2 - 9^2}{2.3.8} = -\frac{1}{6}$ .

**Câu 17:** Hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $E$  là trung điểm cạnh  $BC$ ,  $F$  là trung điểm cạnh  $AE$ . Tìm độ dài đoạn thẳng  $DF$ .

- A.  $\frac{a\sqrt{13}}{4}$ .                      B.  $\frac{a\sqrt{5}}{4}$ .                      C.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .                      D.  $\frac{3a}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Ta có:  $AE = DE = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Dùng công thức độ dài trung tuyến:

$$DF^2 = \frac{DA^2 + DE^2}{2} - \frac{AE^2}{4} = \frac{a^2 + \frac{5a^2}{4}}{2} - \frac{5a^2}{16} = \frac{13a^2}{16} \Rightarrow DF = \frac{a\sqrt{13}}{4}$$

**Câu 18:** Tam giác  $ABC$  có  $BC = 12$ ,  $CA = 9$ ,  $AB = 6$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $BM = 4$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $AM$

- A.  $2\sqrt{5}$ .                      B.  $3\sqrt{2}$ .                      C.  $\sqrt{20}$ .                      **D.  $\sqrt{19}$ .**

Lời giải

**Chọn D**

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{6^2 + 12^2 - 9^2}{2 \cdot 6 \cdot 12} = \frac{11}{16}$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos B} = \sqrt{6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{11}{16}} = \sqrt{19}$$

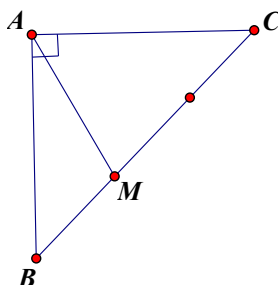
**Câu 19:** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = AC = a$ . Điểm  $M$  nằm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = \frac{BC}{3}$ .

Độ dài  $AM$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{a\sqrt{17}}{3}$ .**                      B.  $\frac{a\sqrt{5}}{3}$ .                      C.  $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$ .                      D.  $\frac{2a}{3}$ .

Lời giải

**Chọn B**



$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

**Câu 20:** Tam giác  $ABC$  có  $\cos(A+B) = -\frac{1}{8}$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 5$ . Tính cạnh  $AB$

- A.  $\sqrt{46}$ .                      B. 11.                      C.  $5\sqrt{2}$ .                      **D. 6.**

Lời giải

**Chọn A**

Vì trong tam giác  $ABC$  ta có  $A+B$  bù với góc  $C$  nên  $\cos(A+B) = -\frac{1}{8} \Rightarrow \cos C = \frac{1}{8}$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{8}} = 6.$$

**Câu 21:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 7$ ,  $AC = 5$  và  $\cos(B+C) = -\frac{1}{5}$ . Tính  $BC$

- A.  $2\sqrt{15}$ .**                      B.  $4\sqrt{22}$ .                      C.  $4\sqrt{15}$ .                      D.  $2\sqrt{22}$ .

Lời giải

**Chọn A**

Vì trong tam giác  $ABC$  ta có  $B+C$  bù với góc  $A$  nên  $\cos(B+C) = -\frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{1}{5}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{1}{5}} = 2\sqrt{15}.$$

**Câu 22:** Tam giác  $ABC$  có  $BC = \sqrt{5}$ ,  $AC = 3$  và  $\cot C = 2$ . Tính cạnh  $AB$

- A. 6.                      **B.  $\sqrt{2}$ .**                      C.  $\frac{9}{5}$ .                      D.  $2\sqrt{10}$ .

Lời giải

**Chọn B**

Từ giả thiết  $\cot C = 2$ , ta suy ra  $C$  là góc nhọn

$$\cot C = 2 \Rightarrow \tan C = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 C = \frac{1}{1 + \tan^2 C} = \frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos C = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{3^2 + \sqrt{5}^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}} = \sqrt{2}.$$

**Câu 23:** Tam giác  $ABC$  có  $AB=3$ ,  $AC=4$  và  $\tan A = -2\sqrt{2}$ . Tính cạnh  $BC$

- A.  $3\sqrt{2}$ .                      B.  $4\sqrt{3}$ .                      C.  $\sqrt{33}$ .                      D. 7.

Lời giải

**Chọn C**

Từ giả thiết  $\tan A = -2\sqrt{2}$ , ta suy ra  $A$  là góc tù

$$\tan A = -2\sqrt{2} \Rightarrow \cos^2 A = \frac{1}{1 + \tan^2 A} = \frac{1}{1 + (2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{3}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{33}.$$

**Câu 24:** Cho tam giác  $ABC$  có cạnh  $BC = a$ , cạnh  $CA = b$ . Tam giác  $ABC$  có diện tích lớn nhất khi góc  $C$  bằng:

- A.  $60^\circ$ .                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $150^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .

Lời giải

**Chọn B**

Diện tích của tam giác  $ABC$  là:  $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C$

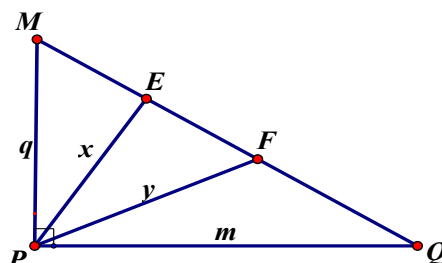
$S$  lớn nhất khi  $\sin C$  lớn nhất, hay  $\sin C = 1 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$ .

**Câu 25:** Cho tam giác  $MPQ$  vuông tại  $P$ . Trên cạnh  $MQ$  lấy hai điểm  $E, F$  sao cho các góc  $\widehat{MPE}$ ,  $\widehat{EPF}$ ,  $\widehat{FPQ}$  bằng nhau. Đặt  $MP = q$ ,  $PQ = m$ ,  $PE = x$ ,  $PF = y$ . Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?

- A.  $ME = EF = FQ$ .      B.  $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$ .  
 C.  $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$ .      D.  $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$ .

Lời giải

**Chọn C**



Từ giả thiết, suy ra  $\widehat{MPE} = \widehat{EPF} = \widehat{FPQ} = \frac{\widehat{MPQ}}{3} = 30^\circ$

Tam giác  $MPF$  có  $\widehat{MPF} = \widehat{MPE} + \widehat{EPF} = 60^\circ$ ;



$$MF^2 = MP^2 + PF^2 - 2.MP.PF.\cos\widehat{MPF} = q^2 + y^2 - 2.y.q.\frac{1}{2} = q^2 + y^2 - yq.$$

**Câu 26:** Tính góc  $C$  của tam giác  $ABC$  biết  $a \neq b$  và  $a(a^2 - c^2) = b(b^2 - c^2)$ .

- A.  $C = 150^\circ$ .      B.  $C = 120^\circ$ .      C.  $C = 60^\circ$ .      D.  $C = 30^\circ$ .

Lời giải

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } a(a^2 - c^2) = b(b^2 - c^2) \Leftrightarrow a^3 - b^3 - c^2(a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) - c^2(a - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 - c^2 = 0 \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{1}{2}. \text{ Do đó: } C = 120^\circ.$$

**Câu 27:** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  biết  $AB = 12$  và  $\cot(A + B) = \frac{1}{3}$ .

- A.  $2\sqrt{10}$ .      B.  $\frac{9\sqrt{10}}{5}$ .      C.  $5\sqrt{10}$ .      D.  $3\sqrt{2}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } \cot(A + B) = \frac{1}{3} \text{ nên } \cot C = -\frac{1}{3}, \text{ suy ra } 3 \cos C = -\sin C.$$

$$\text{Mà } \sin^2 C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \sin C = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2 \sin C} = 2\sqrt{10}.$$

**Câu 28:** Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  biết  $AB = 10$  và  $\tan(A + B) = \frac{1}{3}$ .

- A.  $\frac{5\sqrt{10}}{9}$ .      B.  $\frac{10}{3}$ .      C.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .      D.  $5\sqrt{10}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } \tan(A + B) = \frac{1}{3} \text{ nên } \tan C = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó } 3 \sin C = -\cos C, \text{ mà } \sin^2 C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \sin C = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2 \sin C} = 5\sqrt{10}.$$

**Câu 29:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 6$ ,  $\cos B = \frac{1}{8}$ ,  $\cos C = \frac{3}{4}$ . Tính cạnh  $BC$ .

- A. 7.                                      B. 5.                                      C.  $3\sqrt{3}$ .                                      D. 2.

Lời giải.

Chọn B

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{63}}{8}, \quad \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\cos A = -\cos(B + C) = \sin B \cdot \sin C - \cos B \cdot \cos C = \frac{9}{16}.$$

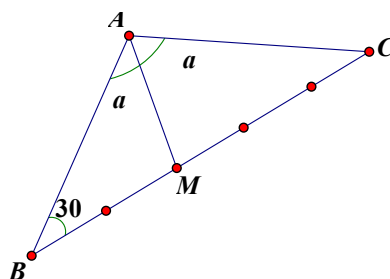
$$\text{Do đó } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A} = 5.$$

**Câu 30:** Cho tam giác cân  $ABC$  có  $\hat{A} = 120^\circ$  và  $AB = AC = a$ . Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = \frac{2BC}{5}$ . Tính độ dài  $AM$

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .                                      B.  $\frac{11a}{5}$ .                                      C.  $\frac{a\sqrt{7}}{5}$ .                                      D.  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ .

Lời giải

Chọn C



$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = a\sqrt{3} \Rightarrow BM = \frac{2a\sqrt{3}}{5}$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 30^\circ} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{5}\right)^2 - 2a \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{7}}{5}.$$

**DẠNG 2: HỆ THỨC LIÊN HỆ GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC, NHẬN DẠNG TAM GIÁC**

## 1 PHƯƠNG PHÁP.

Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lí cosin, hệ quả của định lí cosin, định lí sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.

## 2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa  $\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C$ . Tam giác  $ABC$  là tam giác gì?

Lời giải

Ta có:  $\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2 \cos C \Leftrightarrow a = 2b \cdot \cos C \Leftrightarrow a = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$   
 $\Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow b = c$   
 Tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ .

**Câu 2.** Chứng minh trong tam giác  $ABC$  ta có:  $h_a = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C$

**Lời giải**

Áp dụng định lí sin trong tam giác ta có:  $\frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow 2R \cdot \sin B = b$

Do đó:  $h_a = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C \Leftrightarrow h_a = b \cdot \sin C$  (đúng)

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh  $S = R \cdot r \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $VP = R \cdot r \cdot \left( \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \right) = r \cdot \left( \frac{a+b+c}{2} \right) = r \cdot p = S$  (đpcm).

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa  $\begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b+c-a} = a^2 \\ a = 2b \cdot \cos C \end{cases}$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  là tam giác đều.

**Lời giải**

Ta có:  $\begin{cases} \frac{b^3 + c^3 - a^3}{b+c-a} = a^2 \\ a = 2b \cdot \cos C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^3 + c^3 - a^3 = a^2 b + a^2 c - a^3 \\ a = 2b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b+c)(b^2 - bc + c^2 - a^2) = 0 \\ a = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} \end{cases}$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} -bc + 2bc \cdot \cos A = 0 \\ b^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{1}{2} \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 60^\circ \\ b = c \end{cases}$

Vì tam giác  $ABC$  cân có 1 góc bằng  $60^\circ$  nên tam giác  $ABC$  là tam giác đều.

**Câu 5.** Chứng minh trong tam giác  $ABC$  ta có:  $\sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B = \sin A$

**Lời giải**

$VT = \frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{c}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4aR} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4aR} = \frac{2a^2}{4aR} = \frac{a}{2R} = \sin A$



### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$ , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

**A.**  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$ .    **B.**  $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ .

**C.**  $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$ .    **D.**  $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo công thức đường trung tuyến ta có  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$ .

**Câu 2:** Trong tam giác  $ABC$ , câu nào sau đây đúng?

**A.**  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos A$ .

**B.**  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ .

C.  $a^2 = b^2 + c^2 + bc \cdot \cos A$ .

D.  $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cdot \cos A$ .

Lời giải

**Chọn B**

Áp dụng định lí hàm số cos tại đỉnh  $A$  ta có:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ .

**Câu 3:** Nếu tam giác  $ABC$  có  $a^2 < b^2 + c^2$  thì:

A.  $\widehat{A}$  là góc tù.

B.  $\widehat{A}$  là góc vuông.

C.  $\widehat{A}$  là góc nhọn.

D.  $\widehat{A}$  là góc nhỏ nhất.

Lời giải

**Chọn C**

Ta có  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  do  $a^2 < b^2 + c^2$  nên  $\cos A > 0$

**Câu 4:** Tam giác  $ABC$  có ba cạnh thỏa mãn điều kiện  $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$ . Khi đó số đo của  $\widehat{C}$  là

A.  $120^\circ$ .

B.  $30^\circ$ .

C.  $45^\circ$ .

D.  $60^\circ$ .

Lời giải

**Chọn D**

Ta có:  $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab \Leftrightarrow (a+b)^2 - c^2 = 3ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab$ .

Theo hệ quả của định lí hàm cosin:  $\cos \widehat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ$ .

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

B.  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

C.  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

D.  $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ .

Lời giải

Sử dụng công thức trung tuyến, ta có:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $c = a \cdot \cos B$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tam giác  $ABC$  là tam giác cân.

B. Tam giác  $ABC$  là tam giác nhọn.

C. Tam giác  $ABC$  là tam giác vuông.

D. Tam giác  $ABC$  là tam giác tù

Lời giải

Ta có:  $c = a \cdot \cos B \Leftrightarrow c = a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Leftrightarrow c = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \Leftrightarrow c^2 + b^2 = a^2$

Theo định lí pi ta có tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

**Câu 7:** Diện tích  $S$  của tam giác sẽ thỏa mãn hệ thức nào trong hai hệ thức sau đây?

I.  $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ .

II.  $16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ .

- A. Chỉ I.                      B. Chỉ II.                      C. Cả I và II.                      D. Không có.

Lời giải

Chọn C

Ta có: I. đúng vì là công thức Hê-rông tính diện tích tam giác.

Khi đó:  $S^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2}$

$\Leftrightarrow 16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ . Do đó II. đúng

Câu 8: Cho tam giác  $ABC$ , các đường cao  $h_a, h_b, h_c$  thỏa mãn hệ thức  $3h_a = 2h_b + h_c$ . Tìm hệ thức giữa  $a, b, c$ .

- A.  $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} - \frac{1}{c}$ .                      B.  $3a = 2b + c$ .                      C.  $3a = 2b - c$ .                      D.  $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$ .

Lời giải

Chọn D

Kí hiệu  $S = S_{\triangle ABC}$ .

Ta có:  $3h_a = 2h_b + h_c \Leftrightarrow \frac{3 \cdot 2S}{a} = \frac{2 \cdot 2S}{b} + \frac{2S}{c} \Leftrightarrow \frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$ .

Câu 9: Trong tam giác  $ABC$ , hệ thức nào sau đây sai?

- A.  $a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B}$ .                      B.  $\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$ .                      C.  $a = 2R \cdot \sin A$ .                      D.  $b = R \cdot \tan B$ .

Lời giải

Chọn D

Theo định lí hàm số sin ta có:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

Suy ra:

$+\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \sin A}{\sin B}$ .

$+\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a}$ .

$+\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow a = 2R \cdot \sin A$ .

$+\frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{b}{2} = R \sin B \Rightarrow \frac{b}{2 \cos B} = R \tan B$ .

Câu 10: Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn hệ thức  $b + c = 2a$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.  $\cos B + \cos C = 2 \cos A$ .                      B.  $\sin B + \sin C = 2 \sin A$ .  
C.  $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$ .                      D.  $\sin B + \cos C = 2 \sin A$ .

Lời giải

Chọn B

Ta có  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2R \sin A \\ b = 2R \sin B \\ c = 2R \sin C \end{cases}$

Mà  $b + c = 2a \Leftrightarrow 2R \sin B + 2R \sin C = 4R \sin A \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A$ .

**Câu 11:** Tam giác  $ABC$  có  $A = 120^\circ$  thì câu nào sau đây đúng?

- A.  $a^2 = b^2 + c^2 - 3bc$ .    **B.  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ .**  
 C.  $a^2 = b^2 + c^2 + 3bc$ .    D.  $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ .

Lời giải

**Chọn B**

Áp dụng định lí hàm số cos tại đỉnh  $A$  ta có:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ .

$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + bc$ .

**Câu 12:** Trong tam giác  $ABC$ , điều kiện để hai trung tuyến vẽ từ  $A$  và  $B$  vuông góc với nhau là:

- A.  $2a^2 + 2b^2 = 5c^2$ .    **B.  $3a^2 + 3b^2 = 5c^2$ .**    C.  $2a^2 + 2b^2 = 3c^2$ .    **D.  $a^2 + b^2 = 5c^2$ .**

Lời giải

**Chọn D**

Vì hai trung tuyến vẽ từ  $A$  và  $B$  vuông góc với nhau nên  $\triangle ABG$  vuông tại  $G$  với  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

Khi đó:  $c^2 = GA^2 + GB^2 \Leftrightarrow c^2 = \frac{4}{9} \left( \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right)$

$\Leftrightarrow c^2 = \frac{4}{9} \left( c^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right) \Leftrightarrow 5c^2 = a^2 + b^2$ .

**Câu 13:** Trong tam giác  $ABC$ , nếu có  $a^2 = b \cdot c$  thì :

- A.  $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}$ .    **B.  $h_a^2 = h_b \cdot h_c$ .**    C.  $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ .    D.  $\frac{1}{h_a^2} = \frac{2}{h_b} + \frac{2}{h_c}$ .

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:  $a^2 = b \cdot c \Leftrightarrow \left( \frac{2S}{h_a} \right)^2 = \left( \frac{2S}{h_b} \right) \cdot \left( \frac{2S}{h_c} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b} \cdot \frac{1}{h_c} \Leftrightarrow h_a^2 = h_b \cdot h_c$ .

**Câu 14:** Trong tam giác  $ABC$ , nếu có  $2h_a = h_b + h_c$  thì :

- A.  $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$ .**    B.  $2 \sin A = \sin B + \sin C$ .  
 C.  $\sin A = 2 \sin B + 2 \sin C$ .    D.  $\frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin C}$ .

Lời giải

**Chọn A**

Ta có :

$2h_a = h_b + h_c \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{2S}{a} = \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \Leftrightarrow \frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{2}{2R \cdot \sin A} = \frac{1}{2R \cdot \sin B} + \frac{1}{2R \cdot \sin C}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin A} = \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}$ .

**Câu 15:** Trong tam giác  $ABC$ , câu nào sau đây đúng?

- A.  $m_a = \frac{b+c}{2}$ .    **B.  $m_a > \frac{b+c}{2}$ .**    **C.  $m_a < \frac{b+c}{2}$ .**    D.  $m_a = b+c$ .

Lời giải

**Chọn C**

Ta có:  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{(b+c)^2 + (b-c)^2 - a^2}{4}$

$$\text{Vì } |b-c| < a \Rightarrow (b-c)^2 < a^2 \Rightarrow m_a^2 < \frac{(b+c)^2}{4} \Leftrightarrow m_a < \frac{b+c}{2}.$$

**Câu 16:** Tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$ . Tính số đo của góc  $C$ .

A.  $45^\circ$ .

**B.  $60^\circ$ .**

C.  $120^\circ$ .

D.  $30^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } (a+b+c)(a+b-c) = 3ab \Leftrightarrow (a+b)^2 - c^2 = 3ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab.$$

$$\text{Mà } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ.$$

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$ , xét các bất đẳng thức sau:

I.  $|a-b| < c$ .

II.  $a < b+c$ .

III.  $m_a + m_b + m_c < a+b+c$ .

Hỏi khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Chỉ I, II.

B. Chỉ II, III.

C. Chỉ I, III.

**D. Cả I, II, III.**

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có I. và II. **đúng** vì đây là bất đẳng thức tam giác

$$\text{Ta có: } m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{(b+c)^2 + (b-c)^2 - a^2}{4}.$$

$$\text{Vì } |b-c| < a \Rightarrow (b-c)^2 < a^2 \Rightarrow m_a^2 < \frac{(b+c)^2}{4} \Leftrightarrow m_a < \frac{b+c}{2}.$$

$$\text{Tương tự ta có: } m_b < \frac{a+c}{2}; m_c < \frac{a+c}{2}.$$

$$\text{Do đó: } m_a + m_b + m_c < a+b+c.$$

Vậy III. **Đúng**.

**Câu 18:** Tam giác  $ABC$  có các cạnh  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$ . Tính số đo của góc  $A$ .

A.  $45^\circ$ .

B.  $60^\circ$ .

C.  $120^\circ$ .

**D.  $30^\circ$ .**

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc \Leftrightarrow 2bc \cos A = \sqrt{3}bc \Leftrightarrow \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^\circ.$$

$$\text{Mà } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ.$$

**Câu 19:** Tam giác  $ABC$   $a \cdot \cos B = b \cdot \cos A$ . Tam giác  $ABC$  là tam giác gì?

A. Tam giác vuông.

B. Tam giác đều.

C. Tam giác vuông cân **D. Tam giác cân.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } a \cdot \cos B = b \cdot \cos A \Leftrightarrow a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Vậy tam giác ABC cân.

**Câu 20:** Cho tam giác ABC vuông tại A, AC = b, AB = c. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho góc  $\widehat{BAM} = 30^\circ$ . Tính tỉ số  $\frac{MB}{MC}$ .

A.  $\frac{b\sqrt{3}}{3c}$ .

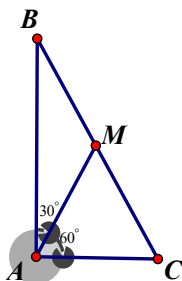
**B.  $\frac{\sqrt{3}c}{3b}$ .**

C.  $\frac{\sqrt{3}c}{b}$ .

D.  $\frac{b-c}{b+c}$ .

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } \frac{MB}{\sin 30^\circ} = \frac{AM}{\sin B} \Rightarrow MB = \frac{AM \cdot \sin 30^\circ}{\sin B} = \frac{AM}{2 \cdot \sin B}.$$

$$\frac{MC}{\sin 60^\circ} = \frac{AM}{\sin C} \Rightarrow MC = \frac{AM \cdot \sin 60^\circ}{\sin C} = \frac{AM \sqrt{3}}{2 \cdot \sin C}.$$

$$\text{Do đó } \frac{MB}{MC} = \frac{\sin C}{\sqrt{3} \sin B} = \frac{c}{\sqrt{3}b} = \frac{\sqrt{3}c}{3b}.$$

**Câu 21:** Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Nếu  $a^2 > b^2 + c^2$  thì A là góc tù.

**B. Nếu tam giác ABC có một góc tù thì  $a^2 > b^2 + c^2$ .**

C. Nếu  $a^2 < b^2 + c^2$  thì A là góc nhọn.

D. Nếu  $a^2 = b^2 + c^2$  thì A là góc vuông.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Do đó :

\*  $a^2 > b^2 + c^2$  thì  $\cos A < 0$  do đó A là góc tù nên

**A. đúng.**

\*  $a^2 < b^2 + c^2$  thì  $\cos A > 0$  do đó A là góc nhọn nên

**C. đúng.**

\*  $a^2 = b^2 + c^2$  thì  $\cos A = 0$  do đó A là góc vuông nên

**D. đúng.**

\* Nếu tam giác ABC có góc B tù thì  $b^2 > a^2 + c^2$ ; nếu góc C tù thì  $c^2 > a^2 + b^2$  do đó **B. sai.**



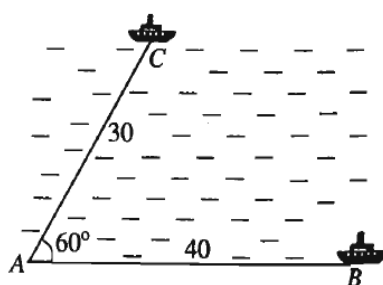
**DẠNG 3: ỨNG DỤNG THỰC TẾ**

**1 PHƯƠNG PHÁP.**

Áp dụng các công thức sách giáo khoa như: định lí cosin, hệ quả của định lí cosin, định lí sin, các công thức liên quan đến diện tích để vận dụng vào làm bài.

**2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

**Câu 1:** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc  $60^\circ$ . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ  $30\text{ km/h}$ , tàu thứ hai chạy với tốc độ  $40\text{ km/h}$ . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu  $\text{km}$ ?



**Lời giải**

Ta có: Sau  $2h$  quãng đường tàu thứ nhất chạy được là:  $S_1 = 30.2 = 60\text{ km}$ .

Sau  $2h$  quãng đường tàu thứ hai chạy được là:  $S_2 = 40.2 = 80\text{ km}$ .

Vậy: sau  $2h$  hai tàu cách nhau là:  $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1.S_2.\cos 60^\circ} = 20\sqrt{13}$ .

**Câu 2:** Từ một đỉnh tháp chiều cao  $CD = 80\text{ m}$ , người ta nhìn hai điểm  $A$  và  $B$  trên mặt đất dưới các góc nhìn là  $72^\circ 12'$  và  $34^\circ 26'$  so với phương nằm ngang. Ba điểm  $A, B, D$  thẳng hàng. Tính khoảng cách  $AB$  (chính xác đến hàng đơn vị)?

**Lời giải**

Ta có: Trong tam giác vuông  $CDA$ :  $\tan 72^\circ 12' = \frac{CD}{AD} \Rightarrow AD = \frac{CD}{\tan 72^\circ 12'} = \frac{80}{\tan 72^\circ 12'} \approx 25,7$ .

Trong tam giác vuông  $CDB$ :  $\tan 34^\circ 26' = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{CD}{\tan 34^\circ 26'} = \frac{80}{\tan 34^\circ 26'} \approx 116,7$ .

Suy ra: khoảng cách  $AB = 116,7 - 25,7 = 91\text{ m}$ .

**BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.**

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 13, b = 8, c = 7$ . Tính góc  $A$ , suy ra  $S, h_a, R, r, m_a$ .

**Lời giải**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = 120^\circ$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}56 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$$

$$S = \frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{28\sqrt{3}}{13}$$

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 13}{4 \cdot 14\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

$$S = p.r \Rightarrow r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 14\sqrt{3}}{7+8+13} = \sqrt{3}$$

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{57}}{2}$$

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $AC = 5$  và  $\cos A = \frac{3}{5}$ . Tính cạnh  $BC$ , và độ dài đường cao kẻ từ  $A$ .

**Lời giải**

Áp dụng định lí côsin ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 17 \text{ Suy ra } BC = \sqrt{17}$$

$$\text{Vì } \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{ nên } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Theo công thức tính diện tích ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 8 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot h_a \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot h_a = 8 \Rightarrow h_a = \frac{16\sqrt{17}}{17}$$

$$\text{Vậy độ dài đường cao kẻ từ } A \text{ là } h_a = \frac{16\sqrt{17}}{17}$$

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 10$ ,  $AC = 4$  và  $\hat{A} = 60^\circ$ .

a) Tính chu vi của tam giác

b) Tính  $\tan C$

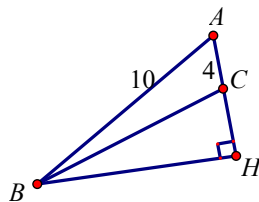
**Lời giải**

a) Theo định lí côsin ta có

$$BC^2 = 10^2 + 4^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4 \cos 60^\circ = 76 \\ \Rightarrow BC \approx 8,72$$

$$\text{Suy ra chu vi tam giác là } 2p \approx 10 + 4 + 8,72 = 22,72$$

b) (Hình 2.23a)



Hình 2.23a

Kẻ đường cao BH ta có

$$AH = AB \cos 60^\circ = 5$$

$$\Rightarrow HC = 5 - 4 = 1$$

$$BH = AB \cdot \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}. \text{ Vậy } \tan C = -\tan \widehat{BCH} = -\frac{HB}{HC} = -5\sqrt{3}$$

**Câu 6:** Giải tam giác  $ABC$  biết  $\widehat{A} = 60^\circ$ ,  $\widehat{B} = 40^\circ$  và  $c = 14$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 40^\circ = 80^\circ$$

Theo định lí sin ta có

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow a \approx 12,3$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{14 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow b \approx 9,1$$

**Câu 7:** Giải tam giác  $ABC$ , biết:

$$b = 4,5; \quad \widehat{A} = 30^\circ; \quad \widehat{C} = 75^\circ$$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{C} = 180^\circ - 30^\circ - 75^\circ = 75^\circ = \widehat{C}$$

suy ra tam giác  $ABC$  cân tại  $A \Rightarrow c = b = 4,5$ .

Theo định lí sin ta có

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{4,5 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} \Rightarrow a \approx 2,33.$$

**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  biết  $a = \sqrt{3}$ ;  $\widehat{B} = \widehat{C} = 30^\circ$ . Tính  $R$ ,  $r$ , cạnh  $c$ ,  $b$ , suy ra  $S$

**Lời giải**

Áp dụng định lí sin:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow b = c = 2R \sin 30^\circ = 1$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{3}).$$

**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết  $\widehat{A} = 30^\circ$ ,  $\widehat{B} = 45^\circ$ . Tính độ dài trung tuyến kẻ từ  $A$  và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$$

$$\text{Theo định lí sin ta có } a = 2R \sin A = 2 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ = 3,$$

$$b = 2R \sin B = 2 \cdot 3 \cdot \sin 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$c = 2R \sin C = 2 \cdot 3 \cdot \sin 105^\circ \approx 5,796$$

Theo công thức đường trung tuyến ta có

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \approx \frac{2(18 + 5,796^2) - 9}{4} = 23,547$$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$$\begin{aligned} S_{ABC} = pr &= \frac{1}{2}bc \sin A \Rightarrow r = \frac{bc \sin A}{2p} \\ &\approx \frac{3\sqrt{2} \cdot 5,796 \sin 30^\circ}{3 + 3\sqrt{2} + 5,796} \approx 0,943 \end{aligned}$$

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$ . Chứng minh rằng

a)  $a^2 = bc$

b)  $\cos A \geq \frac{1}{2}$

**Lời giải**

a) Áp dụng định lí sin ta có  $\sin A = \frac{a}{2R}$ ,  $\sin B = \frac{b}{2R}$ ,  $\sin C = \frac{c}{2R}$

$$\text{Suy ra } \sin^2 A = \sin B \cdot \sin C \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 = bc \text{ đpcm}$$

b) Áp dụng định lí côsin và câu a) ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - bc}{2bc} \geq \frac{2bc - bc}{2bc} = \frac{1}{2} \text{ đpcm}$$

**Câu 11:** Tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  và trung tuyến  $AM = AB = c$  chứng minh rằng:

- a)  $a^2 = 2(b^2 - c^2)$   
 b)  $\sin^2 A = 2(\sin^2 B - \sin^2 C)$

**Lời giải**

a) Áp dụng công thức đường trung tuyến

$$\text{Ta có } b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2AM^2 = \frac{a^2}{2} + 2c^2 \Rightarrow a^2 = 2(b^2 - c^2) (*)$$

b) Theo định lí sin ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4R^2 \sin^2 A \\ b^2 = 4R^2 \sin^2 B \\ c^2 = 4R^2 \sin^2 C \end{cases}$$

Thay vào (\*) ta có đpcm

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là  $b^2 + c^2 = 5a^2$ .

**Lời giải**

Gọi G là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

Khi đó hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau khi và chỉ khi tam giác  $GBC$  vuông tại G

$$\Leftrightarrow GB^2 + GC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = a^2 (*)$$

Mặt khác theo công thức đường trung tuyến ta có

$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

$$\text{Suy ra } (*) \Leftrightarrow \frac{4}{9}(m_b^2 + m_c^2) = a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9} \left[ \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \right] = a^2 \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + c^2 = 9a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$$

**Câu 13:** Chứng minh rằng trong mọi tam giác  $ABC$  ta có;

- a)  $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$   
 b)  $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$

**Lời giải**

a) Áp dụng định lí côsin ta có:

$$VP = b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2 + c^2 + a^2 - b^2}{2a} = a = VT$$

$$b) \sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B \Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{b}{2R} \cdot \cos C + \frac{c}{2R} \cdot \cos B$$

$$\Leftrightarrow a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$$

**Câu 14:** Chứng minh rằng trong mọi tam giác  $ABC$  ta có:  $h_a = 2R \sin B \sin C$

**Lời giải**

$$h_a = 2R \sin B \sin C \Leftrightarrow \frac{2S}{a} = 2R \frac{b}{2R} \sin C$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2} ab \sin C \text{ (đúng)}$$

**Câu 15:** Tìm tính chất đặc biệt của tam giác  $ABC$  biết:  $2a \cos A = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$

**Lời giải**

Yêu cầu bài toán tương đương với:

$$2(2R \sin A) \cos A = (2R \sin B) \cos C + 2R \sin C \cos B$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin A \cdot \cos A = \sin(B + C) = \sin A$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \text{ (do } \sin A \neq 0) \Leftrightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

Nhận dạng tam giác  $ABC$  biết: 
$$\begin{cases} a = 2b \cos C & (1) \\ a^2 = \frac{a^3 - b^3 - c^3}{a - b - c} & (2) \end{cases}$$

**Câu 16:**

**Lời giải**

Áp dụng định lí cosin ở (1) và thế vào (2)

$$(1) \Leftrightarrow a = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} \Leftrightarrow b = c$$

$$(2) \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

KL: Tam giác  $ABC$  đều.

**Câu 17:** Nhận dạng tam giác  $ABC$  biết:  $a \cdot \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$

**Lời giải**

Áp dụng công thức diện tích ta có  $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ah_a$  suy ra

$$a \cdot \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c \Leftrightarrow a \cdot \frac{2S}{bc} + b \cdot \frac{2S}{ca} + c \cdot \frac{2S}{ab} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

Vậy tam giác  $ABC$  đều.

**Câu 18:** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  cân nếu  $h_a = c \cdot \sin A$

**Lời giải**

Sử dụng công thức  $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc \sin A$  (\*) thay  $h_a = c \cdot \sin A$  vào (\*) được:

$$bh_a = ah_a \Leftrightarrow a = b \text{ suy ra tam giác } ABC \text{ cân tại C}$$

# HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

## BÀI 2. ĐỊNH LÝ COSIN VÀ ĐỊNH LÝ SIN BÀI 3. GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ



### HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

#### DẠNG 1. ĐỊNH LÝ COSIN, ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ COSIN ĐỂ GIẢI TOÁN

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$ , mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$ .                                      B.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ .  
C.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$ .                                      D.  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos B$ .

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$ , có độ dài ba cạnh là  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Gọi  $m_a$  là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh  $A$ ,  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và  $S$  là diện tích tam giác đó. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ .    B.  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$ .  
C.  $S = \frac{abc}{4R}$ .    D.  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 8, b = 10$ , góc  $C$  bằng  $60^\circ$ . Độ dài cạnh  $c$  là?

- A.  $c = 3\sqrt{21}$ .                                      B.  $c = 7\sqrt{2}$ .                                      C.  $c = 2\sqrt{11}$ .                                      D.  $c = 2\sqrt{21}$ .

**Câu 4:** Cho  $\triangle ABC$  có  $b = 6, c = 8, \hat{A} = 60^\circ$ . Độ dài cạnh  $a$  là:

- A.  $2\sqrt{13}$ .                                      B.  $3\sqrt{12}$ .                                      C.  $2\sqrt{37}$ .                                      D.  $\sqrt{20}$ .

**Câu 5:** Cho  $\triangle ABC$  có  $B = 60^\circ, a = 8, c = 5$ . Độ dài cạnh  $b$  bằng:

- A. 7.                                      B. 129.                                      C. 49.                                      D.  $\sqrt{129}$ .

**Câu 6:** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 9; BC = 8; \hat{B} = 60^\circ$ . Tính độ dài  $AC$ .

- A.  $\sqrt{73}$ .                                      B.  $\sqrt{217}$ .                                      C. 8.                                      D.  $\sqrt{113}$ .

**Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 1$  và  $A = 60^\circ$ . Tính độ dài cạnh  $BC$ .

- A.  $BC = \sqrt{2}$ .                                      B.  $BC = 1$ .                                      C.  $BC = \sqrt{3}$ .                                      D.  $BC = 2$ .

**Câu 8:** Tam giác  $ABC$  có  $a = 8, c = 3, \hat{B} = 60^\circ$ . Độ dài cạnh  $b$  bằng bao nhiêu?

- A. 49.                                      B.  $\sqrt{97}$                                       C. 7.                                      D.  $\sqrt{61}$ .

**Câu 9:** Tam giác  $ABC$  có  $\hat{C} = 150^\circ, BC = \sqrt{3}, AC = 2$ . Tính cạnh  $AB$  ?

- A.  $\sqrt{13}$ .                                      B.  $\sqrt{3}$ .                                      C. 10.                                      D. 1.



- Câu 10:** Cho  $a; b; c$  là độ dài 3 cạnh của tam giác  $ABC$ . Biết  $b = 7; c = 5; \cos A = \frac{4}{5}$ . Tính độ dài của  $a$ .
- A.  $3\sqrt{2}$ .                      B.  $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ .                      C.  $\frac{23}{8}$ .                      D. 6.
- Câu 11:** Cho  $\widehat{xOy} = 30^\circ$ . Gọi  $A, B$  là 2 điểm di động lần lượt trên  $Ox, Oy$  sao cho  $AB = 2$ . Độ dài lớn nhất của  $OB$  bằng bao nhiêu?
- A. 4.                      B. 3.                      C. 6.                      D. 2.
- Câu 12:** Cho  $a; b; c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây không đúng?
- A.  $a^2 < ab + ac$ .                      B.  $a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$ .                      C.  $b^2 + c^2 > a^2 + 2bc$ .                      D.  $ab + bc > b^2$ .
- Câu 13:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$  cm,  $BC = 7$  cm,  $AC = 9$  cm. Tính  $\cos A$ .
- A.  $\cos A = -\frac{2}{3}$ .                      B.  $\cos A = \frac{1}{2}$ .                      C.  $\cos A = \frac{1}{3}$ .                      D.  $\cos A = \frac{2}{3}$ .
- Câu 14:** Cho tam giác  $ABC$  có  $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ . Khi đó:
- A. Góc  $C > 90^\circ$                       B. Góc  $C < 90^\circ$   
 C. Góc  $C = 90^\circ$                       D. Không thể kết luận được gì về góc  $C$ .
- Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn:  $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$ . Khi đó:
- A.  $A = 30^\circ$ .                      B.  $A = 45^\circ$ .                      C.  $A = 60^\circ$ .                      D.  $A = 75^\circ$ .
- Câu 16:** Cho các điểm  $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$ . Góc  $\widehat{BAC}$  bằng bao nhiêu?
- A.  $90^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $45^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .
- Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $a = 24, b = 13, c = 15$ . Tính góc  $A$ ?
- A.  $33^\circ 34'$ .                      B.  $117^\circ 49'$ .                      C.  $28^\circ 37'$ .                      D.  $58^\circ 24'$ .
- Câu 18:** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $a = 13, b = 14, c = 15$ . Tính góc  $B$ ?
- A.  $59^\circ 49'$ .                      B.  $53^\circ 7'$ .                      C.  $59^\circ 29'$ .                      D.  $62^\circ 22'$ .
- Câu 19:** Cho tam giác  $ABC$  biết độ dài ba cạnh  $BC, CA, AB$  lần lượt là  $a, b, c$  và thỏa mãn hệ thức  $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2)$  với  $b \neq c$ . Khi đó, góc  $\widehat{BAC}$  bằng
- A.  $45^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .
- Câu 20:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = c, BC = a, CA = b$ . Các cạnh  $a, b, c$  liên hệ với nhau bởi đẳng thức  $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$ . Khi đó góc  $\widehat{BAC}$  bằng bao nhiêu độ.
- A.  $30^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $45^\circ$ .
- Câu 21:** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và  $M$  là điểm nằm trong tam giác  $ABC$  sao cho  $MA:MB:MC = 1:2:3$  khi đó góc  $AMB$  bằng bao nhiêu?
- A.  $135^\circ$ .                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $150^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .
- Câu 22:** Cho tam giác  $ABC$ , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:
- A.  $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$ .                      B.  $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ .  
 C.  $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ .                      D.  $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$ .
- Câu 23:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 9$  cm,  $BC = 15$  cm,  $AC = 12$  cm. Khi đó đường trung tuyến  $AM$  của tam giác có độ dài là
- A. 10 cm.                      B. 9 cm.                      C. 7,5 cm.                      D. 8 cm.

- Câu 24:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3, BC = 5$  và độ dài đường trung tuyến  $BM = \sqrt{13}$ . Tính độ dài  $AC$ .
- A.  $\sqrt{11}$ .                      B. 4.                      C.  $\frac{9}{2}$ .                      D.  $\sqrt{10}$ .
- Câu 25:** Cho  $\triangle ABC$  vuông ở  $A$ , biết  $\widehat{C} = 30^\circ, AB = 3$ . Tính độ dài trung tuyến  $AM$ ?
- A. 3                      B. 4                      C.  $\frac{5}{2}$                       D.  $\frac{7}{2}$
- Câu 26:** Tam giác  $ABC$  có  $a = 6, b = 4\sqrt{2}, c = 2$ .  $M$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = 3$ . Độ dài đoạn  $AM$  bằng bao nhiêu?
- A.  $\sqrt{9}$ .                      B. 9.                      C. 3.                      D.  $\frac{1}{2}\sqrt{108}$ .
- Câu 27:** Gọi  $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$  là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác  $ABC$ . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?
- A.  $S = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ .    B.  $S = a^2 + b^2 + c^2$ .    C.  $S = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$ .    D.  $S = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ .
- Câu 28:** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 2; AC = 3; \widehat{A} = 60^\circ$ . Tính độ dài đường phân giác trong góc  $A$  của tam giác  $ABC$ .
- A.  $\frac{12}{5}$ .                      B.  $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ .                      C.  $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ .                      D.  $\frac{6}{5}$ .
- DẠNG 2. ĐỊNH LÝ SIN, ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ SIN ĐỂ GIẢI TOÁN**
- Câu 29:** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm công thức sai:
- A.  $\frac{a}{\sin A} = 2R$ .                      B.  $\sin A = \frac{a}{2R}$ .                      C.  $b \sin B = 2R$ .                      D.  $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$ .
- Câu 30:** Cho  $\triangle ABC$  với các cạnh  $AB = c, AC = b, BC = a$ . Gọi  $R, r, S$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác  $ABC$ . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?
- A.  $S = \frac{abc}{4R}$ .                      B.  $R = \frac{a}{\sin A}$ .  
 C.  $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ .                      D.  $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$ .
- Câu 31:** Cho tam giác  $ABC$  có góc  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  và cạnh  $BC = \sqrt{3}$ . Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .
- A.  $R = 4$ .                      B.  $R = 1$ .                      C.  $R = 2$ .                      D.  $R = 3$ .
- Câu 32:** Trong mặt phẳng, cho tam giác  $ABC$  có  $AC = 4$  cm, góc  $\widehat{A} = 60^\circ, \widehat{B} = 45^\circ$ . Độ dài cạnh  $BC$  là
- A.  $2\sqrt{6}$ .                      B.  $2 + 2\sqrt{3}$ .                      C.  $2\sqrt{3} - 2$ .                      D.  $\sqrt{6}$ .
- Câu 33:** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 5; \widehat{A} = 40^\circ; \widehat{B} = 60^\circ$ . Độ dài  $BC$  gần nhất với kết quả nào?
- A. 3,7.                      B. 3,3.                      C. 3,5.                      D. 3,1.
- Câu 34:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn hệ thức  $b + c = 2a$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
- A.  $\cos B + \cos C = 2 \cos A$ .                      B.  $\sin B + \sin C = 2 \sin A$ .  
 C.  $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$ .                      D.  $\sin B + \cos C = 2 \sin A$ .
- Câu 35:** Tam giác  $ABC$  có  $a = 16,8; \widehat{B} = 56^\circ 13'; \widehat{C} = 71^\circ$ . Cạnh  $c$  bằng bao nhiêu?

A. 29,9.                                      B. 14,1.                                      C. 17,5.                                      D. 19,9.

**Câu 36:** Tam giác ABC có  $\widehat{A} = 68^{\circ}12'$ ,  $\widehat{B} = 34^{\circ}44'$ ,  $AB = 117$ . Tính AC?

A. 68.    B. 168.    C. 118.    D. 200.

**DẠNG 3. DIỆN TÍCH TAM GIÁC, BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN**

**Câu 37:** Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A.  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ .                              B.  $S = \frac{1}{2}ac \sin A$ .                              C.  $S = \frac{1}{2}bc \sin B$ .                              D.  $S = \frac{1}{2}bc \sin B$ .

**Câu 38:** Cho hình thoi ABCD có cạnh bằng a. Góc  $\widehat{BAD} = 30^{\circ}$ . Diện tích hình thoi ABCD là

A.  $\frac{a^2}{4}$ .    B.  $\frac{a^2}{2}$ .    C.  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .    D.  $a^2$ .

**Câu 39:** Tính diện tích tam giác ABC biết  $AB = 3$ ,  $BC = 5$ ,  $CA = 6$ .

A.  $\sqrt{56}$ .    B.  $\sqrt{48}$ .    C. 6.    D. 8.

**Câu 40:** Cho  $\Delta ABC$  có  $a = 6$ ,  $b = 8$ ,  $c = 10$ . Diện tích S của tam giác trên là:

A. 48.    B. 24.    C. 12.    D. 30.

**Câu 41:** Cho  $\Delta ABC$  có  $a = 4$ ,  $c = 5$ ,  $B = 150^{\circ}$ . Diện tích của tam giác là:

A.  $5\sqrt{3}$ .    B. 5.    C. 10.    D.  $10\sqrt{3}$ .

**Câu 42:** Một tam giác có ba cạnh là 13,14,15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

A. 84.    B.  $\sqrt{84}$ .    C. 42.    D.  $\sqrt{168}$ .

**Câu 43:** Cho các điểm  $A(1;-2)$ ,  $B(-2;3)$ ,  $C(0;4)$ . Diện tích  $\Delta ABC$  bằng bao nhiêu?

A.  $\frac{13}{2}$ .    B. 13.    C. 26.    D.  $\frac{13}{4}$ .

**Câu 44:** Cho tam giác ABC có  $A(1;-1)$ ,  $B(3;-3)$ ,  $C(6;0)$ . Diện tích  $\Delta ABC$  là

A. 12.    B. 6.    C.  $6\sqrt{2}$ .    D. 9.

**Câu 45:** Cho tam giác ABC có  $a = 4$ ,  $b = 6$ ,  $c = 8$ . Khi đó diện tích của tam giác là:

A.  $9\sqrt{15}$ .    B.  $3\sqrt{15}$ .    C. 105.    D.  $\frac{2}{3}\sqrt{15}$ .

**Câu 46:** Cho tam giác ABC. Biết  $AB = 2$ ;  $BC = 3$  và  $\widehat{ABC} = 60^{\circ}$ . Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.

A.  $5 + \sqrt{7}$  và  $\frac{3}{2}$ .                                      B.  $5 + \sqrt{7}$  và  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .                                      C.  $5\sqrt{7}$  và  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .                                      D.  $5 + \sqrt{19}$  và  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 47:** Tam giác ABC có các trung tuyến  $m_a = 15$ ,  $m_b = 12$ ,  $m_c = 9$ . Diện tích S của tam giác ABC bằng

A. 72.    B. 144.    C. 54.    D. 108.

**Câu 48:** Cho tam giác  $\Delta ABC$  có  $b = 7$ ;  $c = 5$ ;  $\cos A = \frac{3}{5}$ . Độ dài đường cao  $h_a$  của tam giác  $\Delta ABC$  là.

A.  $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ .    B. 8.    C.  $8\sqrt{3}$     D.  $80\sqrt{3}$

**Câu 49:** Cho tam giác ABC có  $AB = 2a$ ;  $AC = 4a$  và  $\widehat{BAC} = 120^{\circ}$ . Tính diện tích tam giác ABC?

A.  $S = 8a^2$ .    B.  $S = 2a^2\sqrt{3}$ .                                      C.  $S = a^2\sqrt{3}$ .                                      D.  $S = 4a^2$ .

**Câu 50:** Cho tam giác ABC đều cạnh a. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .    B.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .    C.  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ .    D.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

- Câu 51:** Cho tam giác  $ABC$  có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác  $ABC$  bằng
- A. 12.                                      B. 3.                                      C. 6.                                      D. 24.
- Câu 52:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $2a$ . Tính bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .
- A.  $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ .                                      B.  $\frac{4a}{\sqrt{3}}$ .                                      C.  $\frac{8a}{\sqrt{3}}$ .                                      D.  $\frac{6a}{\sqrt{3}}$ .
- Câu 53:** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = \sqrt{6}$ ,  $AC = 2$  và  $AB = \sqrt{3} + 1$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  bằng:
- A.  $\sqrt{5}$ .                                      B.  $\sqrt{3}$ .                                      C.  $\sqrt{2}$ .                                      D. 2.
- Câu 54:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 5$ . Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng
- A. 1.                                      B.  $\frac{8}{9}$ .                                      C.  $\frac{4}{5}$ .                                      D.  $\frac{3}{4}$ .
- Câu 55:** Cho  $\Delta ABC$  có  $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$ . Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp  $R$  của tam giác trên là:
- A. 8,125.                                      B. 130.                                      C. 8.                                      D. 8,5.
- Câu 56:** Cho  $\Delta ABC$  có  $S = 10\sqrt{3}$ , nửa chu vi  $p = 10$ . Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp  $r$  của tam giác trên là:
- A. 3.                                      B. 2.                                      C.  $\sqrt{2}$ .                                      D.  $\sqrt{3}$ .
- Câu 57:** Một tam giác có ba cạnh là 26, 28, 30. Bán kính đường tròn nội tiếp là:
- A. 16.                                      B. 8.                                      C. 4.                                      D.  $4\sqrt{2}$ .
- Câu 58:** Một tam giác có ba cạnh là 52, 56, 60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:
- A.  $\frac{65}{8}$ .                                      B. 40.                                      C. 32,5.                                      D.  $\frac{65}{4}$ .
- Câu 59:** Tam giác với ba cạnh là 5; 12; 13 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?
- A. 6.                                      B. 8.                                      C.  $\frac{13}{2}$ .                                      D.  $\frac{11}{2}$ .
- Câu 60:** Tam giác với ba cạnh là 5; 12; 13 có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?
- A. 2.                                      B.  $2\sqrt{2}$ .                                      C.  $2\sqrt{3}$ .                                      D. 3.
- Câu 61:** Tam giác với ba cạnh là 6; 8; 10 có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bao nhiêu?
- A. 5.                                      B.  $4\sqrt{2}$ .                                      C.  $5\sqrt{2}$ .                                      D. 6.
- Câu 62:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có cạnh  $AB = 4, BC = 6$ ,  $M$  là trung điểm của  $BC, N$  là điểm trên cạnh  $CD$  sao cho  $ND = 3NC$ . Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMN$  bằng
- A.  $3\sqrt{5}$ .                                      B.  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ .                                      C.  $5\sqrt{2}$ .                                      D.  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ .
- Câu 63:** Cho tam giác đều  $ABC$ ; gọi  $D$  là điểm thỏa mãn  $\overline{DC} = 2\overline{BD}$ . Gọi  $R$  và  $r$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác  $ADC$ . Tính tỉ số  $\frac{R}{r}$ .
- A.  $\frac{5}{2}$ .                                      B.  $\frac{5+7\sqrt{7}}{9}$ .                                      C.  $\frac{7+5\sqrt{5}}{9}$ .                                      D.  $\frac{7+5\sqrt{7}}{9}$ .

#### DẠNG 4. ỨNG DỤNG THỰC TẾ

- Câu 64:** Khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm  $C$  mà từ đó có thể nhìn được  $A$  và  $B$  dưới một góc  $78^\circ 24'$ . Biết  $CA = 250m, CB = 120m$ . Khoảng cách  $AB$  bằng bao nhiêu?

- A. 266m.                      B. 255m.                      C. 166m.                      D. 298m.

**Câu 65:** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc  $60^\circ$ . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ  $30\text{km/h}$ , tàu thứ hai chạy với tốc độ  $40\text{km/h}$ . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu  $\text{km}$ ?

- A. 13.                      B.  $20\sqrt{13}$ .                      C.  $10\sqrt{13}$ .                      D. 15.

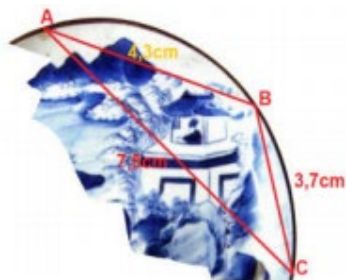
**Câu 66:** Từ một đỉnh tháp chiều cao  $CD = 80\text{m}$ , người ta nhìn hai điểm  $A$  và  $B$  trên mặt đất dưới các góc nhìn là  $72^\circ 12'$  và  $34^\circ 26'$ . Ba điểm  $A, B, D$  thẳng hàng. Tính khoảng cách  $AB$ ?

- A. 71m.                      B. 91m.                      C. 79m.                      D. 40m.

**Câu 67:** Khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm  $C$  mà từ đó có thể nhìn được  $A$  và  $B$  dưới một góc  $56^\circ 16'$ . Biết  $CA = 200\text{m}$ ,  $CB = 180\text{m}$ . Khoảng cách  $AB$  bằng bao nhiêu?

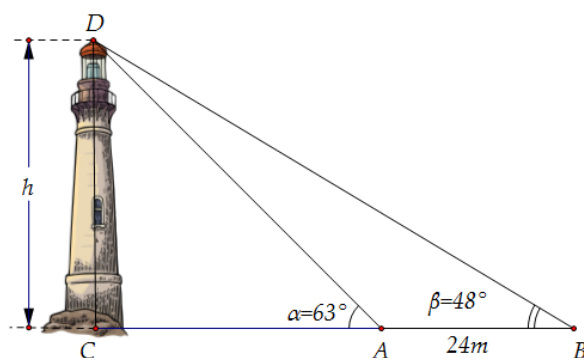
- A. 180m.                      B. 224m.                      C. 112m.                      D. 168m.

**Câu 68:** Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như hình vẽ ( $AB = 4,3\text{cm}$ ;  $BC = 3,7\text{cm}$ ;  $CA = 7,5\text{cm}$ ). Bán kính của chiếc đĩa này bằng.



- A. 5,73 cm.                      B. 6,01cm.                      C. 5,85cm.                      D. 4,57cm.

**Câu 69:** Giả sử  $CD = h$  là chiều cao của tháp trong đó  $C$  là chân tháp. Chọn hai điểm  $A, B$  trên mặt đất sao cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng. Ta đo được  $AB = 24\text{m}$ ,  $\widehat{CAD} = 63^\circ$ ;  $\widehat{CBD} = 48^\circ$ . Chiều cao  $h$  của khối tháp gần với giá trị nào sau đây?



- A. 61,4 m.                      B. 18,5 m.                      C. 60 m.                      D. 18 m.





**Câu 11:** Cho  $\widehat{xOy} = 30^\circ$ . Gọi  $A, B$  là 2 điểm di động lần lượt trên  $Ox, Oy$  sao cho  $AB = 2$ . Độ dài lớn nhất của  $OB$  bằng bao nhiêu?

**A.** 4.

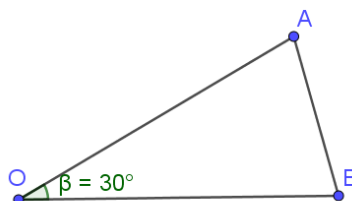
**B.** 3.

**C.** 6.

**D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn A**



Áp dụng định lí cosin:  $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 30^\circ \Leftrightarrow 4 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow OA^2 - \sqrt{3} \cdot OB \cdot OA + OB^2 - 4 = 0.$$

Coi phương trình là một phương trình bậc hai ẩn  $OA$ . Để tồn tại giá trị lớn nhất của  $OB$  thì  $\Delta_{(*)} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}OB)^2 - 4(OB^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow OB^2 \leq 16 \Leftrightarrow OB \leq 4$ .

Vậy  $\max OB = 4$ .

**Câu 12:** Cho  $a; b; c$  là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây không đúng?

**A.**  $a^2 < ab + ac$ .

**B.**  $a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$ .

**C.**  $b^2 + c^2 > a^2 + 2bc$ .

**D.**  $ab + bc > b^2$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Do  $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot \cos \hat{A} \leq 2bc \Rightarrow b^2 + c^2 \leq a^2 + 2bc$  nên mệnh đề C sai.

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có  $a < b + c \Rightarrow a^2 < ab + ac$ ; đáp án A đúng.

Tương tự  $a + c > b \Rightarrow ab + bc > b^2$ ; mệnh đề D đúng.

Ta có:  $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cdot \cos B < 2ac \Rightarrow a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$ ; mệnh đề B đúng.

**Câu 13:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$  cm,  $BC = 7$  cm,  $AC = 9$  cm. Tính  $\cos A$ .

**A.**  $\cos A = -\frac{2}{3}$ .

**B.**  $\cos A = \frac{1}{2}$ .

**C.**  $\cos A = \frac{1}{3}$ .

**D.**  $\cos A = \frac{2}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{4^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 9} = \frac{2}{3}.$$

**Câu 14:** Cho tam giác  $ABC$  có  $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ . Khi đó:

**A.** Góc  $C > 90^\circ$

**B.** Góc  $C < 90^\circ$

**C.** Góc  $C = 90^\circ$

**D.** Không thể kết luận được gì về góc  $C$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Mà:  $a^2 + b^2 - c^2 > 0$  suy ra:  $\cos C > 0 \Rightarrow C < 90^\circ$ .

**Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn:  $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$ . Khi đó:

**A.**  $A = 30^\circ$ .

**B.**  $A = 45^\circ$ .

**C.**  $A = 60^\circ$ .

**D.**  $A = 75^\circ$ .

**Lời giải**



**Chọn A**

Ta có:  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\sqrt{3}bc}{2bc} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A = 30^\circ$ .

**Câu 16:** Cho các điểm  $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$ . Góc  $\widehat{BAC}$  bằng bao nhiêu?

- A.**  $90^\circ$ .                      **B.**  $60^\circ$ .                      **C.**  $45^\circ$ .                      **D.**  $30^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $\overline{AB} = (1;3), \overline{AC} = (9;-3)$ .

Suy ra:  $\cos \widehat{BAC} = \frac{|\overline{AB} \cdot \overline{AC}|}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = 0 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ$ .

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $a = 24, b = 13, c = 15$ . Tính góc  $A$ ?

- A.**  $33^\circ 34'$ .                      **B.**  $117^\circ 49'$ .                      **C.**  $28^\circ 37'$ .                      **D.**  $58^\circ 24'$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{13^2 + 15^2 - 24^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = -\frac{7}{15} \Rightarrow A \approx 117^\circ 49'$ .

**Câu 18:** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $a = 13, b = 14, c = 15$ . Tính góc  $B$ ?

- A.**  $59^\circ 49'$ .                      **B.**  $53^\circ 7'$ .                      **C.**  $59^\circ 29'$ .                      **D.**  $62^\circ 22'$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{33}{65} \Rightarrow B \approx 59^\circ 29'$ .

**Câu 19:** Cho tam giác  $ABC$  biết độ dài ba cạnh  $BC, CA, AB$  lần lượt là  $a, b, c$  và thỏa mãn hệ thức  $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2)$  với  $b \neq c$ . Khi đó, góc  $\widehat{BAC}$  bằng

- A.**  $45^\circ$ .                      **B.**  $60^\circ$ .                      **C.**  $90^\circ$ .                      **D.**  $120^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2) \Leftrightarrow b^3 - ba^2 = c^3 - ca^2 \Leftrightarrow b^3 - c^3 - a^2(b - c) = 0$   
 $\Leftrightarrow (b - c)(b^2 + bc + c^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = -bc$ .

Mặt khác  $\cos \widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ$ .

**Câu 20:** Tam giác  $ABC$  có  $AB = c, BC = a, CA = b$ . Các cạnh  $a, b, c$  liên hệ với nhau bởi đẳng thức  $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$ . Khi đó góc  $\widehat{BAC}$  bằng bao nhiêu độ.

- A.**  $30^\circ$ .                      **B.**  $60^\circ$ .                      **C.**  $90^\circ$ .                      **D.**  $45^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo bài ra, ta có:  $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2) \Leftrightarrow b^3 - a^2b = a^2c - c^3 = 0 \Leftrightarrow b^3 + c^3 - a^2b - a^2c = 0$   
 $\Leftrightarrow (b + c)(b^2 - bc + c^2) - a^2(b + c) = 0 \Leftrightarrow (b + c)(b^2 - bc + c^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 - bc + c^2 - a^2 = 0$   
 $\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60^\circ$ .

**Câu 21:** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và  $M$  là điểm nằm trong tam giác  $ABC$  sao cho  $MA:MB:MC=1:2:3$  khi đó góc  $AMB$  bằng bao nhiêu?

- A.**  $135^\circ$ .                      **B.**  $90^\circ$ .                      **C.**  $150^\circ$ .                      **D.**  $120^\circ$ .

**Lời giải**

$$MB = x \Leftrightarrow MA = 2x; MC = 3x \text{ với } 0 < x < BC = \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } \cos \widehat{BAM} = \frac{1+4x^2-x^2}{2 \cdot 1 \cdot 2x} = \frac{3x^2+1}{4x}$$

$$\cos \widehat{MAC} = \frac{1+4x^2-9x^2}{4x} = \frac{1-5x^2}{4x}.$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3x^2+1}{4x}\right)^2 + \left(\frac{1-5x^2}{4x}\right)^2 = 1 \Rightarrow 9x^4 + 6x^2 + 1 + 1 - 10x^2 + 25x^4 = 16.$$

$$\Rightarrow 34x^4 - 20x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{5+2\sqrt{2}}{17} > \frac{1}{5} (l) \\ x^2 = \frac{5-2\sqrt{2}}{17} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{AMB} = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot BM} = \frac{4x^2 + x^2 - 1}{2 \cdot 2x \cdot x}$$

$$= \frac{5x^2 - 1}{4x^2} = \left(\frac{25 - 10\sqrt{2}}{17} - 1\right) : \frac{20 - 8\sqrt{2}}{17} = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy  $\widehat{AMB} = 135^\circ$ .

**Câu 22:** Cho tam giác  $ABC$ , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

- A.**  $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$ .      **B.**  $m_a^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ .  
**C.**  $m_a^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$ .      **D.**  $m_a^2 = \frac{2c^2+2b^2-a^2}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}.$$

**Câu 23:** Tam giác  $ABC$  có  $AB=9$  cm,  $BC=15$  cm,  $AC=12$  cm. Khi đó đường trung tuyến  $AM$  của tam giác có độ dài là

- A.** 10 cm.                      **B.** 9 cm.                      **C.** 7,5 cm.                      **D.** 8 cm.

**Lời giải**

**Chọn C**

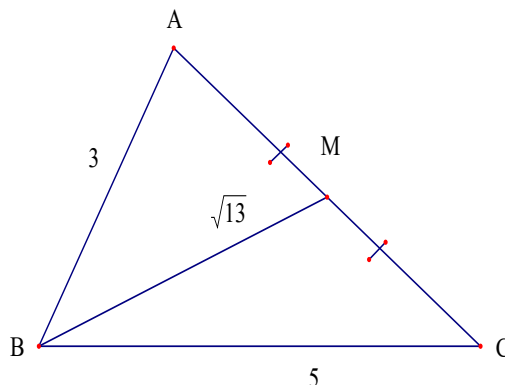
$$\text{Ta có } AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{9^2 + 12^2}{2} - \frac{15^2}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow AM = \frac{15}{2}.$$

**Câu 24:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB=3$ ,  $BC=5$  và độ dài đường trung tuyến  $BM = \sqrt{13}$ . Tính độ dài  $AC$ .

- A.**  $\sqrt{11}$ .                      **B.** 4.                      **C.**  $\frac{9}{2}$ .                      **D.**  $\sqrt{10}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến; ta có:

$$BM^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow (\sqrt{13})^2 = \frac{3^2 + 5^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \Leftrightarrow AC = 4.$$

**Câu 25:** Cho  $\triangle ABC$  vuông ở  $A$ , biết  $\hat{C} = 30^\circ$ ,  $AB = 3$ . Tính độ dài trung tuyến  $AM$ ?

- A.** 3                                    **B.** 4                                    **C.**  $\frac{5}{2}$                                     **D.**  $\frac{7}{2}$

**Lời giải**

**Chọn A**

$AM$  là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên  $AM = \frac{1}{2}BC = BM = MC$ .

Xét  $\triangle BAC$  có  $\hat{B} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .

Xét tam giác  $ABM$  có  $BM = AM$  và  $\hat{B} = 60^\circ$  suy ra  $\triangle ABM$  là tam giác đều.  
 $\Rightarrow AM = AB = 3$ .

**Câu 26:** Tam giác  $ABC$  có  $a = 6, b = 4\sqrt{2}, c = 2$ .  $M$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $BM = 3$ . Độ dài đoạn  $AM$  bằng bao nhiêu?

- A.**  $\sqrt{9}$ .                                    **B.** 9.                                    **C.** 3.                                    **D.**  $\frac{1}{2}\sqrt{108}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: Trong tam giác  $ABC$  có  $a = 6 \Rightarrow BC = 6$  mà  $BM = 3$  suy ra  $M$  là trung điểm  $BC$ .

$$\text{Suy ra: } AM^2 = m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 9 \Rightarrow AM = 3.$$

**Câu 27:** Gọi  $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$  là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác  $ABC$ . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

- A.**  $S = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ .    **B.**  $S = a^2 + b^2 + c^2$ .  
**C.**  $S = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$ .    **D.**  $S = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

**Câu 28:** Cho  $\triangle ABC$  có  $AB = 2$ ;  $AC = 3$ ;  $\hat{A} = 60^\circ$ . Tính độ dài đường phân giác trong góc  $A$  của tam giác  $ABC$ .

A.  $\frac{12}{5}$ .

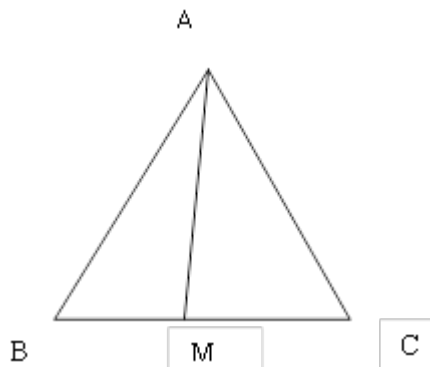
B.  $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ .

**C.  $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ .**

D.  $\frac{6}{5}$ .

Lời giải

**Chọn C**



Gọi  $M$  là chân đường phân giác góc **A.**

Ta có  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$ .

Lại có  $\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$ .

Suy ra  $BM = \frac{2\sqrt{7}}{5}$ .

Áp dụng định lý cosin trong tam giác  $ABM$  ta được:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos \widehat{ABC} = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC} = \frac{108}{25}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

## CÁCH 2

Gọi  $M$  là chân đường phân giác trong của góc  $A$ .

Vì đoạn thẳng  $AM$  chia tam giác  $ABC$  thành hai phần nên ta có:

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2}AB.AM.\sin \widehat{BAM} + \frac{1}{2}AC.AM.\sin \widehat{MAC}$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{AB.AC.\sin 60^\circ}{(AB + AC).\sin 30^\circ}$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{6\sqrt{3}}{5}$$

Vậy  $AM = \frac{6\sqrt{3}}{5}$ .

## DẠNG 2. ĐỊNH LÝ SIN, ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ SIN ĐỂ GIẢI TOÁN

**Câu 29:** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm công thức sai:

A.  $\frac{a}{\sin A} = 2R$ .

B.  $\sin A = \frac{a}{2R}$ .

**C.  $b \sin B = 2R$ .**

D.  $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$ .

Lời giải

**Chọn C**

Ta có:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ .

**Câu 30:** Cho  $\Delta ABC$  với các cạnh  $AB = c, AC = b, BC = a$ . Gọi  $R, r, S$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác  $ABC$ . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sai?

A.  $S = \frac{abc}{4R}$ .

B.  $R = \frac{a}{\sin A}$ .

C.  $S = \frac{1}{2}ab \sin C$ .

D.  $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$ .

Lời giải

Chọn B

Theo định lí Sin trong tam giác, ta có  $\frac{a}{\sin A} = 2R$ .

**Câu 31:** Cho tam giác  $ABC$  có góc  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  và cạnh  $BC = \sqrt{3}$ . Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

A.  $R = 4$ .

B.  $R = 1$ .

C.  $R = 2$ .

D.  $R = 3$ .

Lời giải

Chọn B

Ta có:  $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$ .

**Câu 32:** Trong mặt phẳng, cho tam giác  $ABC$  có  $AC = 4$  cm, góc  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $\hat{B} = 45^\circ$ . Độ dài cạnh  $BC$  là

A.  $2\sqrt{6}$ .

B.  $2 + 2\sqrt{3}$ .

C.  $2\sqrt{3} - 2$ .

D.  $\sqrt{6}$ .

Lời giải

Chọn A

Ta có  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow BC = \frac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{6}$ .

**Câu 33:** Cho  $\Delta ABC$  có  $AB = 5$ ;  $\hat{A} = 40^\circ$ ;  $\hat{B} = 60^\circ$ . Độ dài  $BC$  gần nhất với kết quả nào?

A. 3,7.

B. 3,3.

C. 3,5.

D. 3,1.

Lời giải

Chọn B

$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$

Áp dụng định lý sin:  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin C} \cdot \sin A = \frac{5}{\sin 80^\circ} \sin 40^\circ \approx 3,3$ .

**Câu 34:** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn hệ thức  $b + c = 2a$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A.  $\cos B + \cos C = 2 \cos A$ .

B.  $\sin B + \sin C = 2 \sin A$ .

C.  $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$ .

D.  $\sin B + \cos C = 2 \sin A$ .

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{b+c}{2} = \frac{b}{2} + \frac{c}{2} \Leftrightarrow \frac{b+c}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin A} + \frac{c}{2 \sin A} \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A$ .

- Câu 35:** Tam giác  $ABC$  có  $a=16,8$ ;  $\widehat{B}=56^{\circ}13'$ ;  $\widehat{C}=71^{\circ}$ . Cạnh  $c$  bằng bao nhiêu?  
**A.** 29,9.                      **B.** 14,1.                      **C.** 17,5.                      **D.** 19,9.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: Trong tam giác  $ABC$ :  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^{\circ} \Rightarrow \widehat{A} = 180^{\circ} - 71^{\circ} - 56^{\circ}13' = 52^{\circ}47'$ .

Mặt khác  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{16,8 \cdot \sin 71^{\circ}}{\sin 52^{\circ}47'} \approx 19,9$ .

- Câu 36:** Tam giác  $ABC$  có  $\widehat{A}=68^{\circ}12'$ ,  $\widehat{B}=34^{\circ}44'$ ,  $AB=117$ . Tính  $AC$ ?  
**A.** 68.                      **B.** 168.                      **C.** 118.                      **D.** 200.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: Trong tam giác  $ABC$ :  $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^{\circ} \Rightarrow \widehat{C} = 180^{\circ} - 68^{\circ}12' - 34^{\circ}44' = 77^{\circ}4'$ .

Mặt khác  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{117 \cdot \sin 34^{\circ}44'}{\sin 77^{\circ}4'} \approx 68$ .

### DẠNG 3. DIỆN TÍCH TAM GIÁC, BÁN KÍNH ĐƯỜNG TRÒN

- Câu 37:** Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

- A.**  $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ .                      **B.**  $S = \frac{1}{2}ac \sin A$ .                      **C.**  $S = \frac{1}{2}bc \sin B$ .                      **D.**  $S = \frac{1}{2}bc \sin B$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$ .

- Câu 38:** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Góc  $\widehat{BAD} = 30^{\circ}$ . Diện tích hình thoi  $ABCD$  là  
**A.**  $\frac{a^2}{4}$ .                      **B.**  $\frac{a^2}{2}$ .                      **C.**  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ .                      **D.**  $a^2$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = a \cdot a \cdot \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}a^2$ .

- Câu 39:** Tính diện tích tam giác  $ABC$  biết  $AB=3$ ,  $BC=5$ ,  $CA=6$ .

- A.**  $\sqrt{56}$ .                      **B.**  $\sqrt{48}$ .                      **C.** 6.                      **D.** 8.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{3 + 5 + 6}{2} = 7$ .

Vậy diện tích tam giác  $ABC$  là:

$S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \sqrt{7(7-3)(7-6)(7-5)} = \sqrt{56}$ .

- Câu 40:** Cho  $\Delta ABC$  có  $a=6$ ,  $b=8$ ,  $c=10$ . Diện tích  $S$  của tam giác trên là:

- A.** 48.                      **B.** 24.                      **C.** 12.                      **D.** 30.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: Nửa chu vi  $\Delta ABC$ :  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .

Áp dụng công thức Hê-rông:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)} = 24$ .

**Câu 41:** Cho  $\Delta ABC$  có  $a = 4, c = 5, B = 150^\circ$ . Diện tích của tam giác là:

- A.  $5\sqrt{3}$ .                      B. 5.                      C. 10.                      D.  $10\sqrt{3}$ .

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a.c.\sin B = \frac{1}{2} .4.5.\sin 150^\circ = 5$ .

**Câu 42:** Một tam giác có ba cạnh là 13,14,15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

- A. 84.                      B.  $\sqrt{84}$ .                      C. 42.                      D.  $\sqrt{168}$ .

Lời giải

**Chọn A**

Ta có:  $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21$ .

Suy ra:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$ .

**Câu 43:** Cho các điểm  $A(1;-2), B(-2;3), C(0;4)$ . Diện tích  $\Delta ABC$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{13}{2}$ .                      B. 13.                      C. 26.                      D.  $\frac{13}{4}$ .

Lời giải

**Chọn A**

Ta có:  $\overline{AB} = (-3;5) \Rightarrow AB = \sqrt{34}$ ,  $\overline{AC} = (-1;6) \Rightarrow AC = \sqrt{37}$ ,  $\overline{BC} = (2;1) \Rightarrow BC = \sqrt{5}$ .

Mặt khác  $p = \frac{AB+AC+BC}{2} = \frac{\sqrt{37}+\sqrt{34}+\sqrt{5}}{2}$ .

Suy ra:  $S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \frac{13}{2}$ .

**Câu 44:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$ . Diện tích  $\Delta ABC$  là

- A. 12.                      B. 6.                      C.  $6\sqrt{2}$ .                      D. 9.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:  $\overline{AB} = (2;-2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$ ,  $\overline{AC} = (5;1) \Rightarrow AC = \sqrt{26}$ ,  $\overline{BC} = (3;3) \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}$ .

Mặt khác  $\overline{AB}.\overline{BC} = 0 \Rightarrow AB \perp BC$ .

Suy ra:  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.BC = 6$ .

**Câu 45:** Cho tam giác  $ABC$  có  $a = 4, b = 6, c = 8$ . Khi đó diện tích của tam giác là:

- A.  $9\sqrt{15}$ .                      B.  $3\sqrt{15}$ .                      C. 105.                      D.  $\frac{2}{3}\sqrt{15}$ .

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:  $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+6+8}{2} = 9$ .

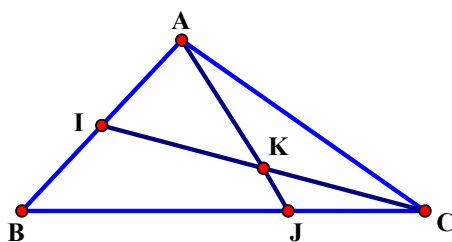
Suy ra:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 3\sqrt{15}$ .

**Câu 46:** Cho tam giác  $ABC$ . Biết  $AB = 2$ ;  $BC = 3$  và  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Tính chu vi và diện tích tam giác  $ABC$ .

- A.  $5 + \sqrt{7}$  và  $\frac{3}{2}$ .                      B.  $5 + \sqrt{7}$  và  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

- C.  $5\sqrt{7}$  và  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .      D.  $5 + \sqrt{19}$  và  $\frac{3}{2}$ .

Lời giải



**Chọn B**

Ta có:  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 13 - 6 = 7$ .

Suy ra  $AC = \sqrt{7}$ .

Chu vi tam giác  $ABC$  là  $AB + AC + BC = 2 + 3 + \sqrt{7}$ .

Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 47:** Tam giác  $ABC$  có các trung tuyến  $m_a = 15$ ,  $m_b = 12$ ,  $m_c = 9$ . Diện tích  $S$  của tam giác  $ABC$  bằng

- A. 72.      B. 144.      C. 54.      D. 108.

Lời giải 1

**Chọn A**

Theo bài toán ta có

$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 15^2 \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = 12^2 \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 9^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 900 \\ 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 576 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 324 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 2\sqrt{73} \end{cases}$$

Ta có  $p = \frac{a+b+c}{2} = 5 + 2\sqrt{13} + \sqrt{73}$ , áp dụng công thức He-rông ta có

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 72.$$

**Cách 2:**

Đặt  $BC = a, CA = b, AB = c$ ,

Theo định lý trung tuyến có:

$$\begin{cases} 4m_a^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2) \\ 4m_b^2 + b^2 = 2(a^2 + c^2) \\ 4m_c^2 + c^2 = 2(b^2 + a^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 900 \\ 2a^2 - b^2 + 2c^2 = 576 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 324 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 291 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 292 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 2\sqrt{73} \end{cases}$$

Có  $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ,  $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$  Suy ra  $S_{ABC} = 72$

**Câu 48:** Cho tam giác  $\Delta ABC$  có  $b=7; c=5; \cos A = \frac{3}{5}$ . Độ dài đường cao  $h_a$  của tam giác  $\Delta ABC$  là.

- A.  $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ .      B. 8.      C.  $8\sqrt{3}$       D.  $80\sqrt{3}$



Lời giải

Chọn A

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}. \text{ Suy ra } \begin{cases} \sin A = \frac{4}{5} \\ \sin A = -\frac{4}{5} \end{cases} \text{ vì } 0 \leq \hat{A} \leq 180^\circ \text{ nên } \sin A = \frac{4}{5}$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14 \text{ mà } S = \frac{1}{2}a \cdot h_a \Leftrightarrow 14 = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot h_a \Leftrightarrow h_a = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

**Câu 49:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2a$ ;  $AC = 4a$  và  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ ?

- A.  $S = 8a^2$ .      B.  $S = 2a^2\sqrt{3}$ .      C.  $S = a^2\sqrt{3}$ .      D.  $S = 4a^2$ .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Diện tích của tam giác } ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4a \cdot \sin 120^\circ = 2a^2\sqrt{3}.$$

**Câu 50:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  bằng

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      B.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .      C.  $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ .      D.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Gọi } G \text{ là trọng tâm } ABC. \text{ Bán kính đường tròn ngoại tiếp } R = AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

**Câu 51:** Cho tam giác  $ABC$  có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác  $ABC$  bằng

- A. 12.      B. 3.      C. 6.      D. 24.

Lời giải

Chọn C

Theo đề bài tam giác  $ABC$  có chu vi bằng 12 nên nửa chu vi là  $p = \frac{12}{2}$ ; bán kính đường tròn

nội tiếp bằng 1, tức là ta có:  $r = 1$ .

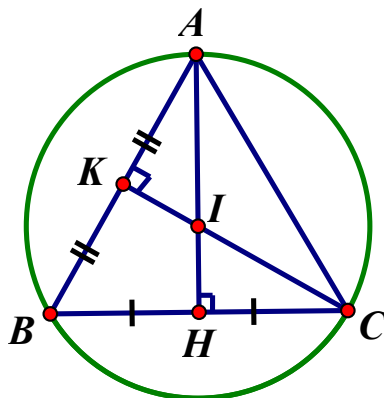
Diện tích tam giác  $ABC$  là:  $S = p \cdot r = 6 \cdot 1 = 6$ .

**Câu 52:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $2a$ . Tính bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

- A.  $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ .      B.  $\frac{4a}{\sqrt{3}}$ .      C.  $\frac{8a}{\sqrt{3}}$ .      D.  $\frac{6a}{\sqrt{3}}$ .

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là trung điểm cạnh  $AB, BC$ ;

I là giao điểm của  $AH$  và  $CK$ .

Lúc đó, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

Ta có:  $AH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .

Do đó:  $R = AI = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}a\sqrt{3} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ .

**Câu 53:** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = \sqrt{6}$ ,  $AC = 2$  và  $AB = \sqrt{3} + 1$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  bằng:

- A.  $\sqrt{5}$ .                      B.  $\sqrt{3}$ .                      **C.  $\sqrt{2}$ .**                      D. 2.

Lời giải

**Chọn C**

Áp dụng định lý cosin ta có  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$  suy ra  $A = 60^\circ$ .

Áp dụng định lý sin ta có  $R = \frac{a}{2\sin A} = \sqrt{2}$ .

**Câu 54:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 5$ . Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng

- A. 1.**                      B.  $\frac{8}{9}$ .                      C.  $\frac{4}{5}$ .                      D.  $\frac{3}{4}$ .

Lời giải

**Chọn A**

Vì  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

Do đó bán kính đường tròn nội tiếp  $r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC}{\frac{1}{2}(AB + AC + BC)} = \frac{3 \cdot 4}{3 + 4 + 5} = 1$ .

**Câu 55:** Cho  $\Delta ABC$  có  $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$ . Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp  $R$  của tam giác trên là:

- A. 8,125.**                      B. 130.                      C. 8.                      D. 8,5.

Lời giải

**Chọn A**

Ta có:  $S_{\Delta ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}$ .

**Câu 56:** Cho  $\Delta ABC$  có  $S = 10\sqrt{3}$ , nửa chu vi  $p = 10$ . Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp  $r$  của tam giác trên là:

- A. 3.                                  B. 2.                                  C.  $\sqrt{2}$ .                                  D.  $\sqrt{3}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}.$$

**Câu 57:** Một tam giác có ba cạnh là 26,28,30. Bán kính đường tròn nội tiếp là:

- A. 16.                                  B. 8.                                  C. 4.                                  D.  $4\sqrt{2}$ .

Lời giải

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{26+28+30}{2} = 42.$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = \frac{\sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)}}{42} = 8.$$

**Câu 58:** Một tam giác có ba cạnh là 52,56,60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

- A.  $\frac{65}{8}$ .                                  B. 40.                                  C. 32,5.                                  D.  $\frac{65}{4}$ .

Lời giải

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{52+56+60}{2} = 84.$$

$$\text{Suy ra: } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)} = 1344.$$

$$\text{Mà } S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{52.56.60}{4.1344} = \frac{65}{2}.$$

**Câu 59:** Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?

- A. 6.                                  B. 8.                                  C.  $\frac{13}{2}$ .                                  D.  $\frac{11}{2}$ .

Lời giải

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } 5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow R = \frac{13}{2}.$$

**Câu 60:** Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?

- A. 2.                                  B.  $2\sqrt{2}$ .                                  C.  $2\sqrt{3}$ .                                  D. 3.

Lời giải

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } p = \frac{5+12+13}{2} = 15. \text{ Mà } 5^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow S = \frac{1}{2}.5.12 = 30.$$

$$\text{Mặt khác } S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = 2.$$

**Câu 61:** Tam giác với ba cạnh là 6;8;10 có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bao nhiêu?

- A. 5.                                  B.  $4\sqrt{2}$ .                                  C.  $5\sqrt{2}$ .                                  D. 6.

Lời giải

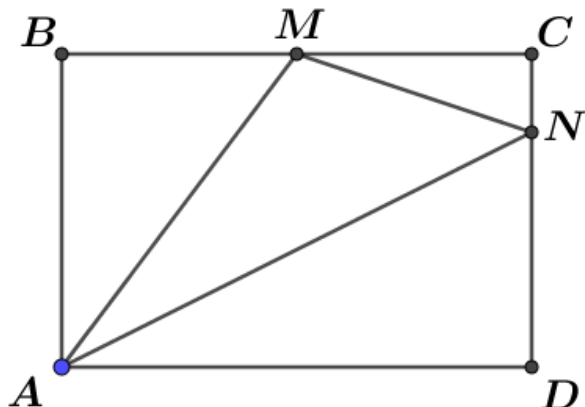
**Chọn A**

$$\text{Ta có: } 6^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow R = \frac{10}{2} = 5.$$

- Câu 62:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có cạnh  $AB = 4, BC = 6$ ,  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $N$  là điểm trên cạnh  $CD$  sao cho  $ND = 3NC$ . Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AMN$  bằng
- A.  $3\sqrt{5}$ .                      B.  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ .                      C.  $5\sqrt{2}$ .                      D.  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ .

Lời giải

Chọn D



Ta có

$$MC = 3, NC = 1 \Rightarrow MN = \sqrt{10}$$

$$BM = 3, AB = 4 \Rightarrow AM = 5$$

$$AD = 6, ND = 3 \Rightarrow AN = \sqrt{45}$$

$$p = \frac{AM + AN + MN}{2} = \frac{\sqrt{10} + 5 + \sqrt{45}}{2}$$

$$S_{AMN} = \sqrt{p(p-AM)(p-AN)(p-MN)} = \frac{15}{2}$$

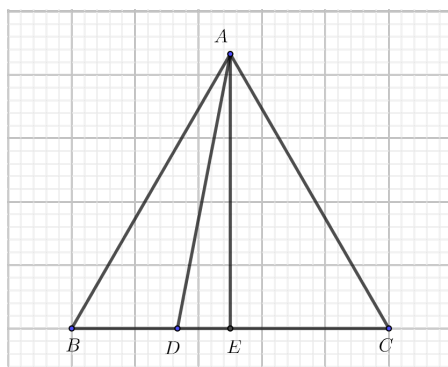
$$\text{Bán kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác } AMN \text{ là: } R = \frac{AM \cdot AN \cdot MN}{4S_{AMN}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

- Câu 63:** Cho tam giác đều  $ABC$ ; gọi  $D$  là điểm thỏa mãn  $\overline{DC} = 2\overline{BD}$ . Gọi  $R$  và  $r$  lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác  $ADC$ . Tính tỉ số  $\frac{R}{r}$ .
- A.  $\frac{5}{2}$ .                      B.  $\frac{5+7\sqrt{7}}{9}$ .                      C.  $\frac{7+5\sqrt{5}}{9}$ .                      D.  $\frac{7+5\sqrt{7}}{9}$ .

Lời giải

Chọn D

Ta có  $\overline{DC} = 2\overline{BD} \Leftrightarrow \overline{DC} = -2\overline{DB}$ . Do đó  $DC = 2DB$ .



Gọi  $S$  là diện tích của tam giác  $ADC$  và  $E$  là trung điểm của  $BC$ .

$$\text{Đặt } AB = a. \text{ Suy ra } \begin{cases} S = \frac{2}{3} S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \\ AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{6} \end{cases}$$

$$\text{Hơn nữa } \begin{cases} S = \frac{AD+DC+AC}{2} \cdot r = \frac{5+\sqrt{7}}{6} a \cdot r \\ S = \frac{AD \cdot DC \cdot BC}{4R} = \frac{2a^3 \sqrt{7}}{36R} \end{cases} \Rightarrow S^2 = \frac{(5+\sqrt{7})ar \cdot 2a^3 \sqrt{7}}{6 \cdot 36R} = \frac{\sqrt{7}(5+\sqrt{7})a^4 r}{108R}$$

$$\text{Hay } \frac{a^4}{12} = \frac{\sqrt{7}(5+\sqrt{7})a^4 r}{108R} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{7}(5+\sqrt{7}) \cdot 12}{108} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{7}(5+\sqrt{7})}{9}$$

#### DẠNG 4. ỨNG DỤNG THỰC TẾ

**Câu 64:** Khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm  $C$  mà từ đó có thể nhìn được  $A$  và  $B$  dưới một góc  $78^\circ 24'$ . Biết  $CA = 250m, CB = 120m$ . Khoảng cách  $AB$  bằng bao nhiêu?

- A. 266m.                      B. 255m.                      C. 166m.                      D. 298m.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có:  $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB \cdot CA \cdot \cos C = 250^2 + 120^2 - 2 \cdot 250 \cdot 120 \cdot \cos 78^\circ 24' \approx 64835 \Rightarrow AB \approx 255$ .

**Câu 65:** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí  $A$ , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc  $60^\circ$ . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ  $30km/h$ , tàu thứ hai chạy với tốc độ  $40km/h$ . Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu  $km$ ?

- A. 13.                      B.  $20\sqrt{13}$ .                      C.  $10\sqrt{13}$ .                      D. 15.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có: Sau 2h quãng đường tàu thứ nhất chạy được là:  $S_1 = 30 \cdot 2 = 60km$ .

Sau 2h quãng đường tàu thứ hai chạy được là:  $S_2 = 40 \cdot 2 = 80km$ .

Vậy: sau 2h hai tàu cách nhau là:  $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1 \cdot S_2 \cdot \cos 60^\circ} = 20\sqrt{13}$ .

**Câu 66:** Từ một đỉnh tháp chiều cao  $CD = 80m$ , người ta nhìn hai điểm  $A$  và  $B$  trên mặt đất dưới các góc nhìn là  $72^\circ 12'$  và  $34^\circ 26'$ . Ba điểm  $A, B, D$  thẳng hàng. Tính khoảng cách  $AB$ ?

- A. 71m.                      B. 91m.                      C. 79m.                      D. 40m.

Lời giải

**Chọn B**

Ta có: Trong tam giác vuông  $CDA$ :  $\tan 72^\circ 12' = \frac{CD}{AD} \Rightarrow AD = \frac{CD}{\tan 72^\circ 12'} = \frac{80}{\tan 72^\circ 12'} \approx 25,7$ .

Trong tam giác vuông  $CDB$ :  $\tan 34^\circ 26' = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{CD}{\tan 34^\circ 26'} = \frac{80}{\tan 34^\circ 26'} \approx 116,7$ .

Suy ra: khoảng cách  $AB = 116,7 - 25,7 = 91m$ .

**Câu 67:** Khoảng cách từ  $A$  đến  $B$  không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm  $C$  mà từ đó có thể nhìn được  $A$  và  $B$  dưới một góc  $56^\circ 16'$ . Biết  $CA = 200m, CB = 180m$ . Khoảng cách  $AB$  bằng bao nhiêu?

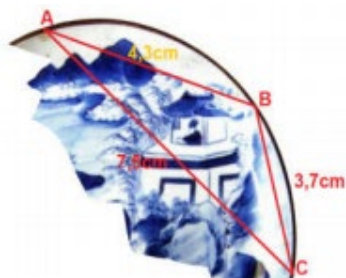
- A. 180m.                      B. 224m.                      C. 112m.                      D. 168m.

Lời giải

Chọn A

Ta có:  $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB.CA.\cos C = 200^2 + 180^2 - 2.200.180.\cos 56^{\circ}16' \approx 32416 \Rightarrow AB \approx 180$ .

**Câu 68:** Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như hình vẽ ( $AB = 4,3\text{ cm}$ ;  $BC = 3,7\text{ cm}$ ;  $CA = 7,5\text{ cm}$ ). Bán kính của chiếc đĩa này bằng.



A. 5,73 cm.

B. 6,01 cm.

C. 5,85 cm.

D. 4,57 cm.

Lời giải

Chọn A

Bán kính  $R$  của chiếc đĩa bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

Nửa chu vi của tam giác  $ABC$  là:  $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{4,3 + 3,7 + 7,5}{2} = \frac{31}{4}\text{ cm}$ .

Diện tích tam giác  $ABC$  là:  $S = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - CA)} \approx 5,2\text{ cm}^2$ .

Mà  $S = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB.BC.CA}{4S} \approx 5,73\text{ cm}$ .

**Câu 69:** Giả sử  $CD = h$  là chiều cao của tháp trong đó  $C$  là chân tháp. Chọn hai điểm  $A, B$  trên mặt đất sao cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng. Ta đo được  $AB = 24\text{ m}$ ,  $\widehat{CAD} = 63^{\circ}$ ;  $\widehat{CBD} = 48^{\circ}$ . Chiều cao  $h$  của khối tháp gần với giá trị nào sau đây?

A. 61,4 m.

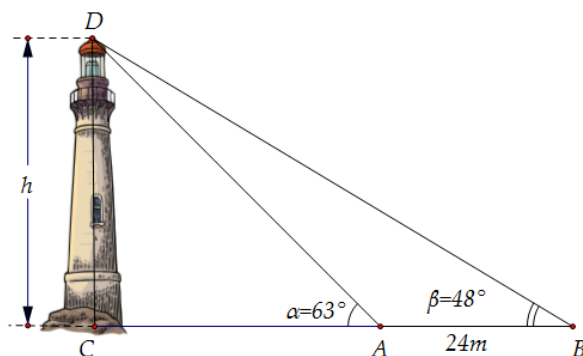
B. 18,5 m.

C. 60 m.

D. 18 m.

Lời giải

Chọn A



Ta có  $\widehat{CAD} = 63^{\circ} \Rightarrow \widehat{BAD} = 117^{\circ} \Rightarrow \widehat{ADB} = 180^{\circ} - (117^{\circ} + 48^{\circ}) = 15^{\circ}$

Áp dụng định lý sin trong tam giác  $ABD$  ta có:  $\frac{AB}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} \Rightarrow BD = \frac{AB.\sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{ADB}}$

Tam giác  $BCD$  vuông tại  $C$  nên có:  $\sin \widehat{CBD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD = BD.\sin \widehat{CBD}$

$$\text{Vậy } CD = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAD} \cdot \sin \widehat{CBD}}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{24 \cdot \sin 117^\circ \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} = 61,4m$$