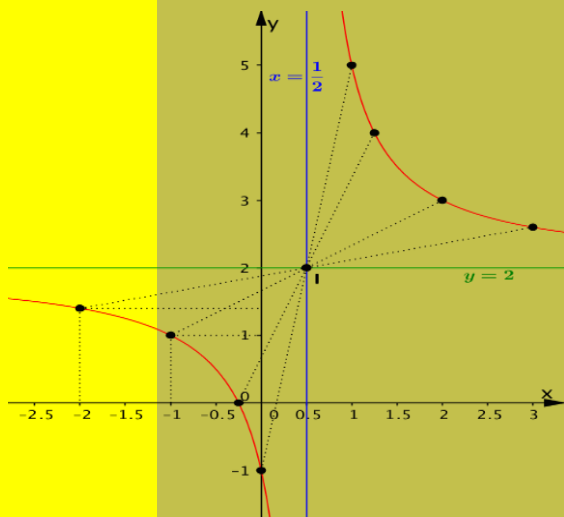


Bí

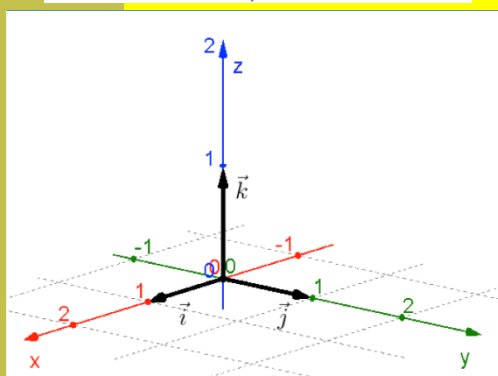
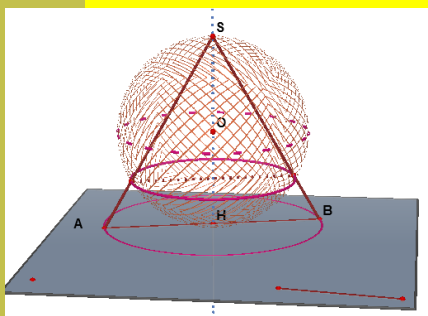
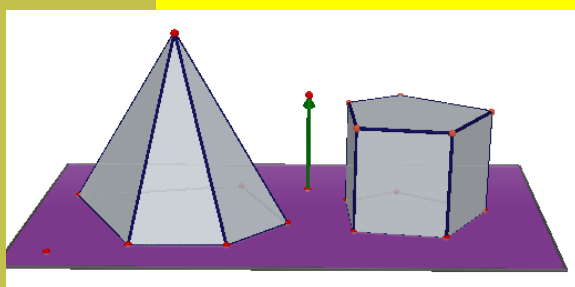


HỆ
THỐNG
KIẾN
THỨC
VÀ

$$\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$i^2 = -1$$



PHƯƠNG
PHÁP
GIẢI
TOÁN
THPT

Công

TRƯỜNG

0983.900.570

2019-2020

MỤC LỤC

CHỦ ĐỀ 1: KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN	1
I. BẢNG ĐẠO HÀM	1
II. SỰ BIẾN THIÊN	1
III. CỰC TRỊ	1
IV. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT	3
V. ĐƯỜNG TIẾM CẬN	3
VI. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ	4
VII. TIẾP TUYẾN	5
VIII. SỰ TƯƠNG GIAO (Dấu hiệu nhận biết: Trong đề có từ: Cắt, tiếp xúc, giao điểm hay điểm chung...)	6
IX. ỨNG DỤNG SỰ TƯƠNG GIAO	7
X. PHÉP SUY ĐỒ THỊ	7
CHỦ ĐỀ 2: LŨY THỪA, MŨ VÀ LÔGARÍT	9
I. CÔNG THỨC	9
II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARÍT	9
III. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, LÔGARIT	10
IV. ỨNG DỤNG HÀM MŨ – LÔGARIT VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ	11
CHỦ ĐỀ 3: NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG	13
I. NGUYÊN HÀM	13
II. TÍCH PHÂN	13
III. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH	16
CHỦ ĐỀ 4: SỐ PHỨC	18
I. CÔNG THỨC, PHÉP TOÁN	18
II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI	18
III. TÌM SỐ PHỨC THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC	18
IV. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC	18
CHỦ ĐỀ 5: KHỐI ĐA DIỆN	20
I. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN	20
II. ỨNG DỤNG THỂ TÍCH	20
III. MỘT SỐ HÌNH ĐA DIỆN THƯỜNG GẶP	20
IV. CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TỨ DIỆN ABCD	23
CHỦ ĐỀ 6: KHỐI TRÒN XOAY	24
I. THỂ TÍCH, DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN XOAY	24
II. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA HÌNH TRÒN XOAY VÀ HÌNH ĐA DIỆN	24
CHỦ ĐỀ 7: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	26
I. VECTƠ VÀ TỌA ĐỘ	26
II. MẶT PHẪNG	27
III. ĐƯỜNG THẲNG	28
IV. MẶT CẦU	29
V. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI	30
VI. KHOẢNG CÁCH	31
VII. GÓC	32
VIII. HÌNH CHIẾU, ĐIỂM ĐỐI XỨNG	32
IX. TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM THỎA ĐIỀU KIỆN “LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT”	33
X. TỌA ĐỘ CÁC TÂM CỦA TAM GIÁC	34
PHỤ LỤC	35
PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH	35
I. NHỊ THỨC BẬC NHẤT	35

II. TAM THỨC BẬC 2, PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2:	35
III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC 3:	36
IV. PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG:	36
V. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC.....	36
VI. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC	37
VII. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI	37
VIII. HỆ PHƯƠNG TRÌNH.....	37
BẤT ĐẲNG THỨC	37
LƯỢNG GIÁC	38
TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT	41
CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN	44
GIỚI HẠN	44
HÌNH HỌC (TỔNG HỢP) PHẪNG	45
I. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC:	45
II. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TỨ GIÁC:	46
III. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN:	46
IV. TÂM CỦA TAM GIÁC	46
HÌNH HỌC TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG	46
I. TỌA ĐỘ	46
II. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG	47
III. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN	47
IV. ELÍP	48
V. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC, HÌNH BÌNH HÀNH BẰNG TỌA ĐỘ:	48
PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẪNG	48
HÌNH HỌC KHÔNG GIAN (TỔNG HỢP) LỚP 11	49
I. QUAN HỆ SONG SONG	49
Dạng 1: Chứng minh quan hệ song song.	49
Dạng 2: Tìm giao tuyến của 2 Mặt phẳng.	50
Dạng 3: Tìm giao điểm của Đường thẳng và Mặt phẳng.	50
Dạng 4: Tìm thiết diện của hình chóp, lăng trụ được cắt bởi Mặt phẳng	50
II. QUAN HỆ VUÔNG GÓC	50
Dạng 1: Chứng minh quan hệ vuông góc.....	50
Dạng 2: Tìm hình chiếu của Điểm lên Mặt phẳng.....	51
Dạng 3: Tính góc.....	52
Dạng 4: Tính khoảng cách.	52
SƠ ĐỒ TƯ DUY	54

CHỦ ĐỀ 1: KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

I. BẢNG ĐẠO HÀM

Hàm sơ cấp	Hàm hợp	Phép toán
$(C)' = 0$	$[f(u)]' = f'(u) \cdot u'$	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
$(x)' = 1$		$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \rightarrow (k \cdot v)' = k \cdot v'$
$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \rightarrow \left(\frac{k}{v}\right)' = \frac{-k \cdot v'}{v^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	Đặc biệt $\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)' = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$ $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ $\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)' = \frac{adx^2+2aex+\begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix}}{(dx+e)^2}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$	
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$	
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$	
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	
$(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$	

II. SỰ BIẾN THIÊN

- Định lý:** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $K \Leftrightarrow y'(x) > 0$ ($y'(x) < 0$), $\forall x \in K$
- ĐL mở rộng:** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $K \Leftrightarrow y'(x) \geq 0$ ($y'(x) \leq 0$), $\forall x \in K$ và $y'(x) = 0$ có hữu hạn nghiệm.
- Tính đơn điệu của một số hàm thường gặp:**

Hàm số bậc 3 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$: $+ \text{ Đồng biến (Nghịch biến) trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c > 0 \text{ (} c < 0 \text{)} \\ a > 0 \text{ (} a < 0 \text{)} \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$	Hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$: Đồng biến (Nghịch biến) trên từng khoảng xác định $\left(-\infty; \frac{-d}{c}\right)$ và $\left(\frac{-d}{c}; +\infty\right) \Leftrightarrow y' > 0$ ($y' < 0$), $\forall x \neq \frac{-d}{c}$ Chú ý: Nếu hệ số c có chứa tham số ta xét thêm $c = 0$
Hàm số đơn điệu trên khoảng K: TH1: Hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$ (Đối với hàm bậc lẻ) TH2: Hàm số không đơn điệu trên $\mathbb{R}$ B1: Lập bảng biến thiên $\rightarrow$ Đặt khoảng K vào vị trí thỏa tính đơn điệu. B2: Lập điều kiện $\rightarrow$ Giải $\rightarrow$ Kết quả.	

III. CỰC TRỊ

- Điều kiện để hàm số đạt cực trị tại một điểm:**

a) Định lý 1:

x	x_0
y'	$\begin{array}{cc} + & - \end{array}$
y	$\nearrow y_{CD} \searrow$

Hàm số đạt Cực đại tại điểm x_0

và giá trị Cực đại $y_{CD} = y(x_0)$

x	x_0
y'	$\begin{array}{cc} - & + \end{array}$
y	$\searrow y_{CT} \nearrow$

Hàm số đạt Cực tiểu tại điểm x_0

và giá trị Cực tiểu $y_{CT} = y(x_0)$

Chú ý: x_0 : Là điểm Cực đại (Cực tiểu) của **hàm số** $\rightarrow$ Gọi chung là điểm Cực trị của **hàm số**
 y_{CD} (y_{CT}): Là giá trị Cực đại (Cực tiểu) của HS $\rightarrow$ Gọi chung là giá trị Cực trị; Gọi gọn là Cực trị.
 $(x_0; y_{CD})$, $(x_0; y_{CT})$: Là điểm Cực đại, Cực tiểu của **đồ thị hàm số**.

b) Định lý 2:

$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số đạt Cực Trị tại x_0	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y''(x_0) < 0 \text{ (} > 0 \text{)} \end{cases} \Rightarrow$ Hàm số đạt Cực Đại (Cực Tiểu) tại x_0
---	--

2) Điều kiện để hàm số đạt cực trị bằng y_0 :

$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = 0 \Rightarrow \text{HS đạt cực trị bằng } y_0 \\ y''(x_0) \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = 0 \Rightarrow \text{HS đạt CĐ bằng } y_0 \\ y''(x_0) < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = 0 \Rightarrow \text{HS đạt CT bằng } y_0 \\ y''(x_0) > 0 \end{cases}$
--	--	--

3) Điều kiện để hàm số có n điểm cực trị

$y = f(x)$ có n điểm cực trị $\Leftrightarrow f'(x)$ đổi dấu khi qua n điểm x_i và $f(x_i)$ xác định.

Chú ý:

- Nếu $f'(x)$ có n nghiệm đơn x_i và $f(x_i)$ xác định thì $y = f(x)$ có n điểm cực trị.
- Số điểm cực trị của hàm số bậc ba** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

Số điểm cực trị	Số nghiệm của PT $y' = 0$	Điều kiện của hệ số	Công thức điểm cực trị
Có 2 điểm cực trị	Có 2 nghiệm phân biệt	$\Delta'_{y'} = b^2 - 3ac > 0$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$
Không có cực trị	Vô nghiệm hoặc có nghiệm kép	$\Delta'_{y'} = b^2 - 3ac \leq 0$	

- Số điểm cực trị của hàm số bậc bốn trùng phương** $y = ax^4 + bx^2 + c$:

Số điểm cực trị	Số nghiệm của PT $y' = 0$	Điều kiện của hệ số	Công thức điểm cực trị
Có 3 điểm cực trị	Có 3 nghiệm phân biệt	$a.b < 0$ (a, b trái dấu)	$x = 0; \quad x = \pm \sqrt{\frac{-b}{2a}}$
Có 1 điểm cực trị	Có 1 nghiệm (đơn)	$\begin{cases} a.b \geq 0 \\ a^2 + b^2 \neq 0 \end{cases}$ (a, b cùng dấu)	$x = 0$

- Hàm số nhất biến** $y = \frac{ax+b}{cx+d}$: Không có cực trị.

4) Cực trị của đồ thị hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (Gọi A, B là 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số)

a. Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị:

- Cách 1:** $\frac{y}{y'} = g(x) + \frac{r(x)}{y'}$ $\rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y = r(x)$

- Cách 2:** Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y = \frac{6ac - 2b^2}{9a}x + \frac{9ad - bc}{9a}$

- Cách 3:** Bấm máy tính cầm tay.

Vào phương thức Số Phức (Mode 2), nhập $y - \frac{y' \cdot y''}{18a} \rightarrow$ Gán (calc) $x = i \rightarrow$ Ta được KQ dạng: $b + ai$
 $\rightarrow$ PT đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = ax + b$

- b. Khoảng cách giữa 2 điểm cực trị:** $AB = \sqrt{\frac{4k + 16k^3}{a}}$ (với $k = \frac{\Delta'_{y'}}{9a}$)

- c. Diện tích tam giác ABM:** $S_{ABM} = \sqrt{\frac{k}{a}} \cdot \left| 2k \cdot x_M + y_M + \frac{bc - 9ad}{9a} \right|$ (với $k = \frac{\Delta'_{y'}}{9a}$)

5) Cực trị của đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương:

Đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 điểm cực trị A, B, C ($A \in Oy$). Khi đó:

$$A(0; c), B\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; \frac{-\Delta}{4a}\right), C\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}; \frac{-\Delta}{4a}\right), \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac$$

$BC = \sqrt{\frac{-2b}{a}}$	$AB = AC = \sqrt{\frac{b^4 - 8b}{16a^2}}$	$\tan^2 BAC = \frac{-8a}{b^3}$	$S_{\triangle ABC} = \sqrt{\frac{-b^5}{32a^3}}$
-----------------------------	---	--------------------------------	---

Tính chất	Điều kiện	Tính chất	Điều kiện
1. $\triangle ABC$ đều	$24a + b^3 = 0$	6. $\triangle ABC$ vuông (cân)	$8a + b^3 = 0$
2. O là trọng tâm $\triangle ABC$	$b^2 - 6ac = 0$	7. O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$	$b^3 - 8a - 8abc = 0$
3. O là trực tâm $\triangle ABC$	$b^3 + 8a - 4ac = 0$	8. O là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$	$b^3 - 8a - 4abc = 0$
4. $\triangle ABC$ có cực trị $B, C \in Ox$	$b^2 = 4ac$	9. $\triangle ABC$ có điểm cực trị cách đều trục Ox	$b^2 = 8ac$
5. $\triangle ABC$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp R	$R = \frac{b^3 - 8a}{8 a b}$	10. $\triangle ABC$ có bán kính đường tròn nội tiếp r	$r = \frac{b^2}{4 a \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^3}{8a}}\right)}$

IV. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

1) **Định lý:** Nếu hàm số liên tục trên đoạn thì GTLN-GTNN của hàm số đạt được tại 2 đầu đoạn hoặc tại các điểm cực trị thuộc đoạn đó.

2) **Quy tắc tìm GTLN-GTNN:**

Trên đoạn $[a; b]$	Trên khoảng (hay nửa khoảng) K
- Tìm $y' \rightarrow$ Giải PT $y' = 0 \rightarrow$ Tìm nghiệm $x_i \in (a; b)$ - Tính $y(x_i), y(a), y(b)$ - Kết luận: $\max_{[a;b]} y = M$ (số lớn nhất); $\min_{[a;b]} y = m$ (số nhỏ nhất).	- Lập bảng biến thiên trên K - Dựa vào bảng biến thiên, nhận xét và kết luận GTLN-GTNN Chú ý: Trên một khoảng hàm số có thể không có hay chỉ có GTLN hoặc GTNN.

3) **Chú ý:**

- Nếu hàm số chỉ có 1 CĐ trên $(a; b)$ thì $\max_{(a;b)} y = y_{CD}$. Nếu hàm số chỉ có 1 CT trên $(a; b)$ thì $\min_{(a;b)} y = y_{CT}$
- Hàm số đồng biến trên đoạn $[a; b] \Rightarrow \begin{cases} \min_{[a;b]} y = y(a) \\ \max_{[a;b]} y = y(b) \end{cases}$; Hàm số nghịch biến trên đoạn $[a; b] \Rightarrow \begin{cases} \min_{[a;b]} y = y(b) \\ \max_{[a;b]} y = y(a) \end{cases}$

V. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

1) **Định nghĩa:**

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = y_0 \Leftrightarrow$ Tiệm cận ngang (TCN) là đường thẳng $y = y_0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} y = \infty \Leftrightarrow$ Tiệm cận đứng (TCD) là đường thẳng $x = x_0$

2) **Chú ý:**

- Đề tìm đường TCN, TCD $\rightarrow$ Ta tính giới hạn của hàm số tại các “đầu ngoặc tròn” của Tập xác định
- Cụ thể:** Để tìm TCN $\rightarrow$ Ta tính giới hạn tại vô cực;
Để tìm TCD $\rightarrow$ Ta tính giới hạn tại các nghiệm của mẫu.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty \Rightarrow$ Không có TCN.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} y = y_0 \Rightarrow$ Không có TCD: $x = x_0$.
- Đồ thị hàm số đa thức không có đường tiệm cận.

3) **Đường tiệm cận đứng, ngang của đồ thị hàm số hữu tỷ (thương của 2 đa thức).**

- TCD: $x = x_i$ (với x_i là các nghiệm của mẫu nhưng khác nghiệm của tử)
- TCN: - Bậc tử > Bậc mẫu $\rightarrow$ Không có TCN
- Bậc tử = Bậc mẫu $\rightarrow$ TCN: $y = \frac{a_T}{a_M}$ (Bằng thương hệ số lũy thừa bậc cao nhất của tử và mẫu)
- Bậc tử < Bậc mẫu $\rightarrow$ TCN: $y = 0$

VI. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

1) Sơ đồ khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:

B1. Tìm tập xác định

B2. Sự biến thiên:

+ Tìm đạo hàm. Tìm nghiệm của đạo hàm và điểm không xác định của đạo hàm.

+ Tính giới hạn của hàm số tại các “đầu ngoặc tròn” của TXĐ. Suy ra các đường tiệm cận (nếu có)

+ Lập bảng biến thiên:

x	Điền TXĐ; nghiệm của đạo hàm và điểm không xác định của đạo hàm (theo thứ tự tăng dần).
y'	Xét dấu đạo hàm y'
y	Vẽ chiều biến thiên (mũi tên chéo); Điền Giới hạn hàm số, Giá trị hàm số tại các điểm x tương ứng vào các đầu mũi tên

+ Nêu các khoảng đồng biến, nghịch biến và cực trị (nếu có)

B3. Vẽ đồ thị: Lập bảng giá trị (hay điểm đặc biệt), vẽ đồ thị và nhận xét về đồ thị

2) Các dạng đồ thị hàm số:

☞ **Hàm số bậc 3:** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

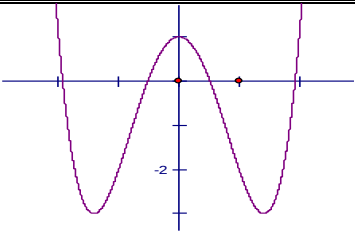
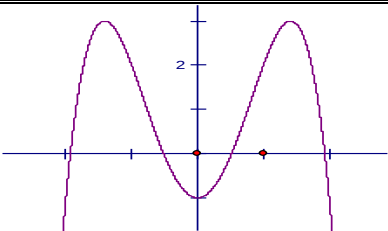
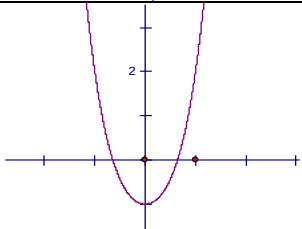
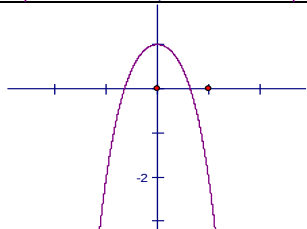
Dấu của a	$a > 0$	$a < 0$
PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt. ($\Delta'_y = b^2 - 3ac > 0$)		
PT $y' = 0$ có nghiệm kép. ($\Delta'_y = b^2 - 3ac = 0$)		
PT $y' = 0$ vô nghiệm. ($\Delta'_y = b^2 - 3ac < 0$)		

Nhận xét đồ thị:

- Tâm đối xứng:** điểm $I(x_0; y_0)$, với $x_0 = \frac{-b}{3a}$ (là nghiệm PT $y'' = 0$) và $y_0 = f(x_0)$
Tâm đối xứng cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị.
Tâm đối xứng nằm **bên phải** trục $Oy \rightarrow a, b$ trái dấu; **bên trái** trục $Oy \rightarrow a, b$ cùng dấu.
- Hai đầu đồ thị:** ĐTHS bậc 3 (bậc lẻ nói chung) luôn có một đầu đi lên và một đầu đi xuống.
Đầu bên phải: Đi lên $\rightarrow a > 0$; Đi xuống $\rightarrow a < 0$.
- Giao điểm với trục tung:** Nằm phía trên trục hoành thì $d > 0$; Nằm phía dưới trục hoành thì $d < 0$.
- Điểm cực trị:** Hai điểm cực trị nằm **2 phía** so với trục $Oy \rightarrow a.c < 0$; **cùng phía** $\rightarrow a.c > 0$.
Có điểm cực trị thuộc $Ox \rightarrow c = 0$

☞ **Hàm số bậc bốn trùng phương:** $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

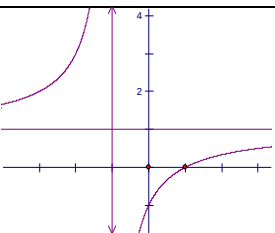
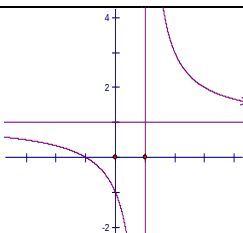
Dấu a	$a > 0$	$a < 0$
---------	---------	---------

PT $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt ($a.b < 0$)		
PT $y' = 0$ có một nghiệm ($a.b \geq 0$)		

Nhận xét đồ thị:

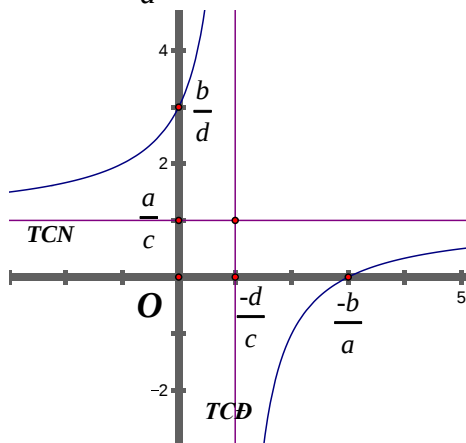
- **Trục đối xứng:** Nhận trục tung làm trục đối xứng.
- **Hai đầu đồ thị:** ĐTHS bậc 4 (bậc chẵn) luôn có hai đầu cùng đi lên hoặc cùng đi xuống; Đi lên $\rightarrow a > 0$, đi xuống $\rightarrow a < 0$.
- **Điểm cực trị:** Luôn có một điểm cực trị thuộc trục tung và 2 điểm cực trị còn lại (nếu có) đối xứng qua trục tung.
- **Giao điểm với trục tung:** Nằm phía trên trục hoành $\rightarrow c > 0$; Nằm phía dưới trục hoành $\rightarrow c < 0$.

☞ **Hàm số nhất biến:** $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad-bc \neq 0$)

$y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} > 0$	$y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} < 0$
	

Nhận xét đồ thị:

- **Tâm đối xứng** là điểm $I\left(\frac{-d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ (là giao điểm 2 đường tiệm cận).
- **Tiệm cận ngang:** $y = \frac{a}{c}$; **Tiệm cận đứng:** $x = \frac{-d}{c}$ (nghiệm của mẫu).
- **Giao điểm với trục tung:** $x = 0 \Rightarrow y = \frac{b}{d}$; **Giao điểm với trục hoành:** $y = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$ (nghiệm của tử).



VII. TIẾP TUYẾN

1) **Định lý:** PT tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0) \quad (*)$$

Trong đó: $+ x_0$: Hoành độ tiếp điểm;
 $+ y_0 = y(x_0)$: Tung độ tiếp điểm;
 $+ k = f'(x_0)$: Hệ số góc của tiếp tuyến.

2) Quy tắc lập phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$

B1. Tìm đạo hàm $y' = f'(x)$

B2. Dựa vào giả thiết, tính $x_0, y_0, f'(x_0)$.

B3. Thay vào PT (*), thu gọn, ta được PT tiếp tuyến cần tìm (Chú ý: So điều kiện, loại PTTT nếu có)

3) Chú ý:

- Đường thẳng $(d): y = ax + b$ có hệ số góc $k_d = a$; Đường thẳng $(d): ax + by + c = 0$ có hệ số góc $k_d = \frac{-a}{b}$.
- Hai đường thẳng song song thì hệ số góc của chúng bằng nhau.
- Hai đường thẳng vuông góc $\Leftrightarrow$ Tích hệ số góc của chúng bằng -1 .
- Tiếp tuyến đi qua $A(x_A; y_A)$: Thay tọa độ điểm A, $y_0 = f(x_0)$ và $k = f'(x_0)$ vào PT(*) $\rightarrow$ Giải PT tìm x_0
 $\rightarrow$ Thay x_0 vào (*) ta được PT tiếp tuyến cần tìm.

VIII. SỰ TƯƠNG GIAO (Dấu hiệu nhận biết: Trong đề có từ: Cắt, tiếp xúc, giao điểm hay điểm chung...)

1) Định lý:

ĐTHS $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có n điểm chung
 $\Leftrightarrow$ PT hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$ có n nghiệm phân biệt.

2) Tìm giao điểm của đường cong $(C): y = f(x)$ và đường thẳng $(d): y = g(x)$

B1. Lập PT hoành độ giao điểm của (C) và $(d): f(x) = g(x)$ (*)

B2. Giải PT(*) tìm x (là hoành độ giao điểm) $\rightarrow$ Thay x vào $y = f(x)$ hay $y = g(x) \rightarrow$ Tính y (là tung độ giao điểm).

3) Biện luận giao điểm của đường cong $(C): y = f(x, m)$ và đường thẳng $(d): y = g(x, m)$ (hay tìm tham số m để thỏa mãn điều kiện về giao điểm của (C) và (d))

B1. Lập PT: $f(x, m) = g(x, m)$ (1) $\rightarrow$ Biến đổi làm xuất hiện PT bậc 2 (Như bảng dưới đây)

B2. Lập điều kiện theo yêu cầu bài toán $\rightarrow$ Quy về điều kiện nghiệm PT bậc 2 $\rightarrow$ Giải điều kiện tìm m

• PT(1) là PT bậc 2: <i>(Xem phụ lục phần PT bậc 2)</i>	• PT(1) là PT bậc 3: Biến đổi đưa về PT tích dạng: $(x - x_0) \cdot (Ax^2 + Bx + C) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ Ax^2 + Bx + C = 0 \end{cases}$ <i>(Xem phụ lục phần PT bậc 3)</i>	• PT(1) là PT bậc 4 trùng phương: 1) Đặt $t = x^2, t \geq 0$, ta được PT bậc 2: $at^2 + bt + c = 0, (2)$. 2) Biện luận nghiệm PT(2), suy ra: nghiệm PT(1) <i>(Xem phụ lục phần PT bậc 4 trùng phương)</i>	• PT(1) có chứa ẩn ở mẫu: $\rightarrow$ Quy đồng khử mẫu $\rightarrow$ Thu gọn về PT đa thức bậc 2, 3, 4.
---	---	---	--

Chú ý: Nếu biến đổi PT $f(x, m) = g(x, m) \Leftrightarrow u(x) = v(m)$ thì Áp dụng phương pháp **Đồ thị** (Xem Mục IX).

- Lập phương trình hoành độ giao điểm: $f(x, m) = g(x, m)$ (1) $\rightarrow$ Biến đổi về dạng: $u(x) = v(m)$

4) Khoảng cách giữa các giao điểm, tam giác chứa các giao điểm,...

c) Đường cong $y = ax^2 + bx + c$ cắt đường thẳng $y = kx + r$ tại 2 điểm M, N:

Lập PTHĐGD: $ax^2 + bx + c = kx + r \Leftrightarrow ax^2 + (b - k)x + (c - r) = 0$ (2).

Khi đó: $MN = \sqrt{\frac{1 + k^2}{a^2} \cdot \Delta_{(2)}}$ $S_{\triangle MNQ} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta_{(2)}}{a^2}} \cdot |kx_Q - y_Q + r|$

d) Đường cong $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt đường thẳng $y = kx + r$ tại 3 điểm M, N, P:

Lập PTHĐGD: $ax^3 + bx^2 + cx + d = kx + r \Leftrightarrow (x - x_0)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 = x_p \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (2) \end{cases}$

(Xem cách phân tích thành nhân tử ở Phần Phụ lục, mục “Phương trình bậc 3”)

Khi đó:

$$MN = \sqrt{\frac{1+k^2}{\alpha^2}} \cdot \Delta_{(2)}$$

$$S_{\triangle MNQ} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta_{(2)}}{\alpha^2}} \cdot |kx_Q - y_Q + r|$$

ĐTHS bậc 3 cắt đường thẳng d tại 3 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng khi d đi qua tâm đối xứng

e) Đường cong $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ cắt đường thẳng $y = kx + r$ tại điểm M, N :

Lập PTHĐGD: $\frac{ax+b}{cx+d} = kx + r \Rightarrow \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (2)$

Khi đó:

$$MN = \sqrt{\frac{1+k^2}{\alpha^2}} \cdot \Delta_{(2)}$$

$$S_{\triangle MNQ} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Delta_{(2)}}{\alpha^2}} \cdot |kx_Q - y_Q + r|$$

Chú ý:

- $x_M + x_N = \frac{-\beta}{\alpha}$; $x_M \cdot x_N = \frac{\gamma}{\alpha}$; $|x_M - x_N| = \sqrt{\Delta_{(2)}}$
- $y_M + y_N = k \cdot \frac{-\beta}{\alpha} + 2r$; $y_M \cdot y_N = \frac{\gamma}{\alpha} + r \cdot \frac{-\beta}{\alpha} + r^2$; $|y_M - y_N| = |k| \sqrt{\Delta_{(2)}}$
- Nếu PT (2) ta tính biệt thức thu gọn Δ' thì thay $\Delta = 4\Delta'$

5) ĐTHS $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục Ox tại 4 điểm có hoành độ lập thành cấp số cộng khi: $b^2 - \frac{100}{9}ac = 0$

IX. ỨNG DỤNG SỰ TƯƠNG GIAO

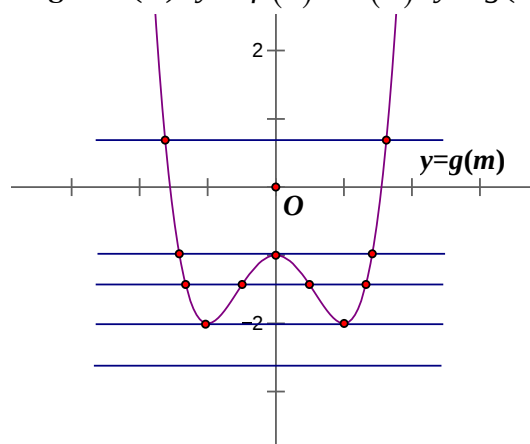
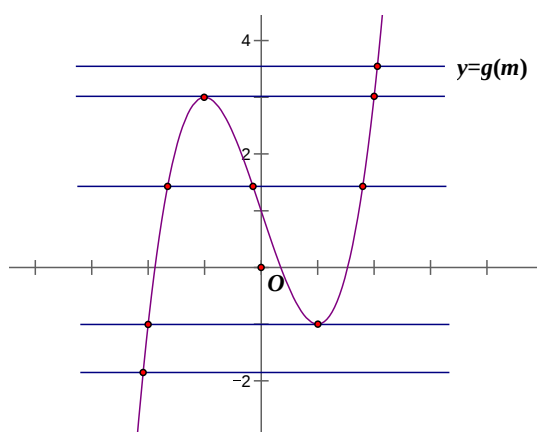
Dùng đồ thị $(C): y = f(x)$, biện luận nghiệm phương trình $F(x, m) = 0 \quad (1)$, (m là tham số).

- Biến đổi: $F(x, m) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(m) \quad (2)$

(PT(2) là PT hoành độ giao điểm của $(C): y = f(x)$ và $(d): y = g(m)$, với (d) là đường thẳng cùng phương trục Ox)

- Vẽ $(C): y = f(x)$ và $(d): y = g(m)$ trên cùng hệ trục tọa độ. (Vẽ đường thẳng $(d): y = g(m)$ nằm ngang ở các vị trí: Dưới cực trị; Qua cực trị; Giữa các cực trị; Trên cực trị).
- Dựa vào đồ thị, Theo YCBT $\rightarrow$ Chọn vị trí tương ứng $\rightarrow$ Lập điều kiện $\rightarrow$ Giải và tìm tham số m .

Chú ý: Số nghiệm PT $F(x, m) = 0$ bằng Số điểm chung của $(C): y = f(x)$ và $(d): y = g(m)$.



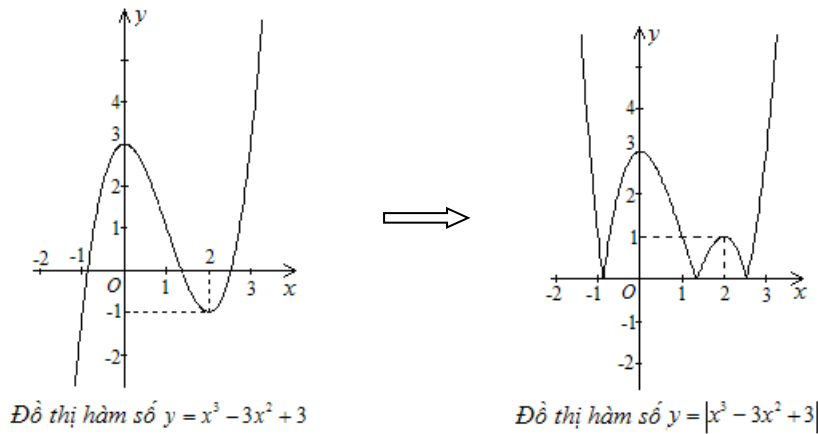
X. PHÉP SUY ĐỒ THỊ

Dạng 1. Từ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$, suy ra cách vẽ đồ thị (G) của hàm số $y = |f(x)|$

Ta có: $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases} \rightarrow (G) = (C_1) \cup (C_2)$ (Với (C_1) là phần đồ thị (C) nằm phía

trên trục hoành ($y_{(C)} \geq 0$), còn (C_2) là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục hoành ($y_{(C)} < 0$)

Ví dụ 1. Từ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3$, vẽ đồ thị (G) của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + 3|$



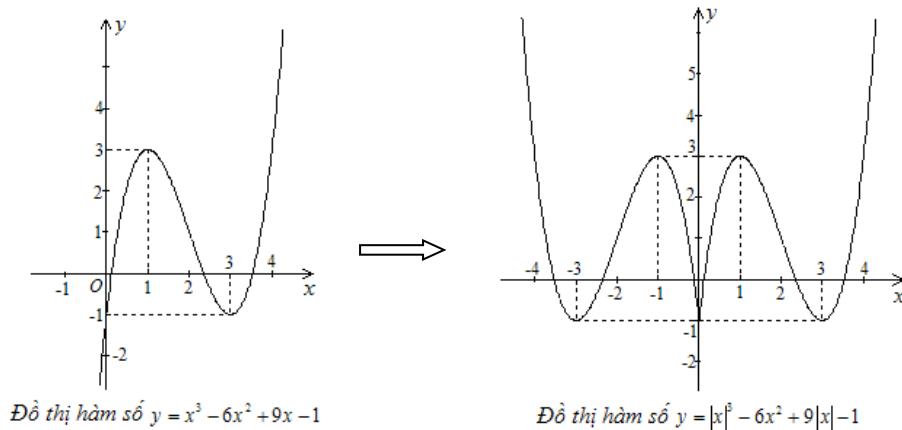
Lấy đối xứng của phần đồ thị dưới trục hoành qua trục hoành, rồi xóa phần đồ thị dưới trục hoành.

Dạng 2. Từ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$, suy ra cách vẽ đồ thị (H) của hàm số $y = f(|x|)$

Ta có: $y = f(|x|)$ là hàm số chẵn $\rightarrow$ Đồ thị (H) nhận trục tung làm trục đối xứng $\rightarrow (H) = (C_3) \cup (C_4)$

Với (C_3) là phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục Oy ($x \geq 0$), còn (C_4) là phần đối xứng của (C_3) qua trục Oy

Ví dụ 2. Từ đồ thị (C) của HS $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, vẽ đồ thị (H) của HS $y = |x^3 - 6x^2 + 9|x| - 1$.



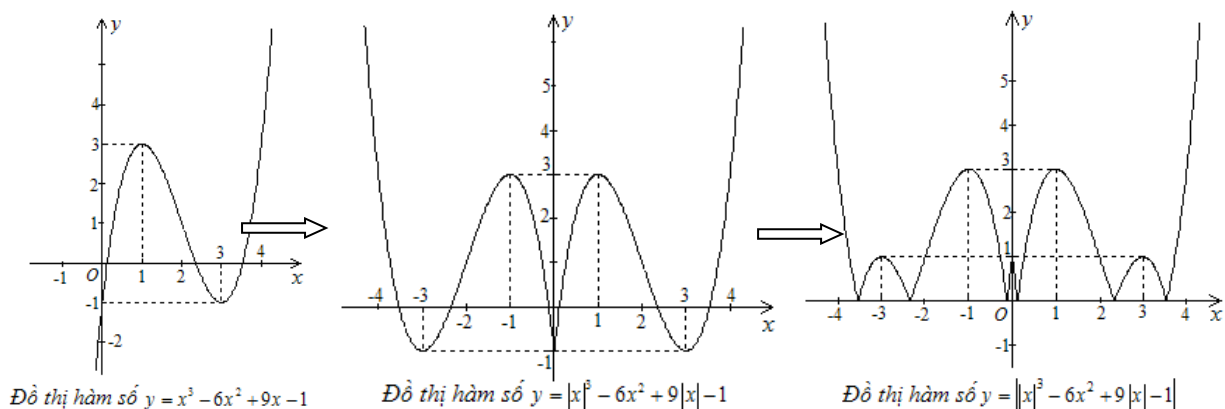
Xóa phần đồ thị bên trái trục tung, rồi lấy đối xứng phần đồ thị bên phải trục tung qua trục tung.

Dạng 3. Từ đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$, suy ra cách vẽ đồ thị (K) của hàm số $y = |f(|x|)|$

Ta có: $y = |f(|x|)| = \begin{cases} f(|x|) & \text{ khi } f(|x|) \geq 0 \\ -f(|x|) & \text{ khi } f(|x|) < 0 \end{cases} \rightarrow (K) = (H_1) \cup (H_2)$

Với (H_1) là phần đồ thị của (H) của hàm số $y = f(|x|)$ nằm phía trên trục hoành ($y_{(H)} \geq 0$), còn (H_2) là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (H) ở phía dưới trục hoành ($y_{(H)} < 0$).

Ví dụ 3. Từ đồ thị (C) của hsó $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, vẽ đồ thị (K) của hsó $y = ||x^3 - 6x^2 + 9|x| - 1|$.



Thực hiện 2 bước: Dạng 1 $\rightarrow$ Dạng 2, hay Dạng 2 $\rightarrow$ Dạng 1

CHỦ ĐỀ 2: LŨY THỪA, MŨ VÀ LÔGARÍT

I. CÔNG THỨC

1) Lũy thừa

$a^n = a.a \dots a$ (tích của n thừa số a) $a^0 = 1$, ($a \neq 0$) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, ($a \neq 0$)	$a^{m+n} = a^m . a^n$ $(a.b)^n = a^n . b^n$ $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m.n}$	$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	❖ $a > 1$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ ❖ $0 < a < 1$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$
--	--	---	--	---

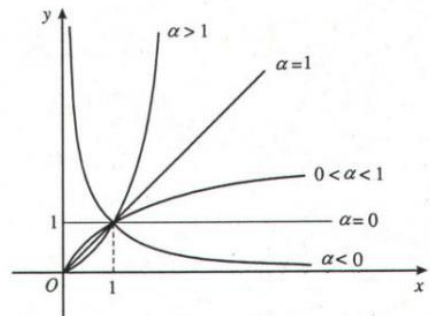
2) Logarit

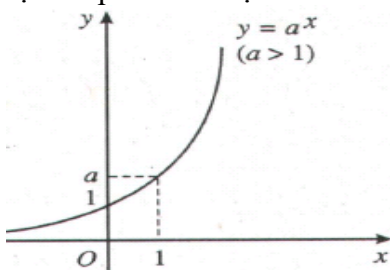
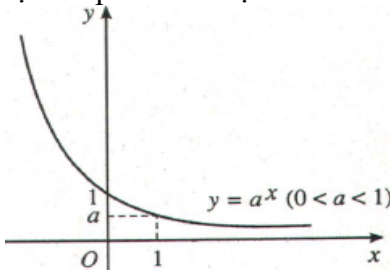
$\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$ ($a, b > 0; a \neq 1$) $\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$ $\log_a (a^\alpha) = \alpha$ $a^{\log_a b} = b$	$\log_a (b_1 . b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$ $\log_a \left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$ $\log_a (b^\alpha) = \alpha . \log_a b$ $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $\log_c a . \log_a b = \log_c b$ $\log_{a^\alpha} (b^\beta) = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b$	❖ $a > 1$: $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ $\Leftrightarrow f(x) > g(x) > 0$ ❖ $0 < a < 1$: $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ $\Leftrightarrow 0 < f(x) < g(x)$
--	---	--	---

3) Đạo hàm

Hàm sơ cấp	Hàm hợp
$(x^\alpha)' = \alpha . x^{\alpha-1}$ $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n . \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $(a^x)' = a^x . \ln a$ $(e^x)' = e^x$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x . \ln a}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(u^\alpha)' = \alpha . u^{\alpha-1} . u'$ $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n . \sqrt[n]{u^{n-1}}}$ $(a^u)' = a^u . \ln a . u'$ $(e^u)' = e^u . u'$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u . \ln a}$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

II. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARÍT.

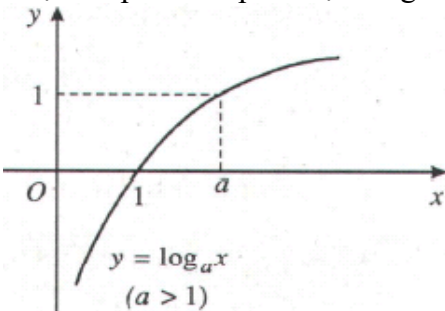
Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$	
❖ TXĐ: + α nguyên dương : $D = \mathbb{R}$. + α nguyên không dương : $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. + α không nguyên: $D = (0; +\infty)$. ❖ Khảo sát trên $(0; +\infty)$: $\alpha < 0$: HS nghịch biến; TCN: Ox ; TCD : Oy $\alpha > 0$: HS đồng biến; Không có đường tiệm cận.	Đồ thị: (tùy theo số mũ α) 

Hàm số mũ $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$)	
<u>$a > 1$</u> ❖ TXĐ: $D = \mathbb{R}$. TGT: $T = (0; +\infty)$. ❖ Hàm số luôn đồng biến ❖ Tiệm cận ngang là trục Ox ❖ Đồ thị nằm phía trên trục hoành 	<u>$0 < a < 1$</u> ❖ TXĐ: $D = \mathbb{R}$. TGT: $T = (0; +\infty)$. ❖ Hàm số luôn nghịch biến ❖ Tiệm cận ngang là trục Ox ❖ Đồ thị nằm phía trên trục hoành 

Hàm số logarit $y = \log_a x$, ($0 < a \neq 1$)

$a > 1$

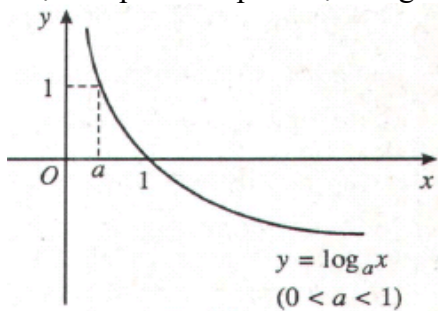
- ❖ TXĐ: $D = (0; +\infty)$. TGT: $T = \mathbb{R}$.
- ❖ Hàm số luôn đồng biến
- ❖ Tiệm cận đứng là trục Oy
- ❖ Đồ thị nằm phía bên phải trục tung



$y = \log_a x$
($a > 1$)

$0 < a < 1$

- ❖ TXĐ: $D = (0; +\infty)$. TGT:
- ❖ Hàm số luôn nghịch biến
- ❖ Tiệm cận đứng là trục Oy
- ❖ Đồ thị nằm phía bên phải trục tung



$y = \log_a x$
($0 < a < 1$)

Chú ý: Đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ (hai hàm ngược nhau) đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$

➤ **ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA HÀM LŨY THỪA – MŨ – LOGARIT**

1. $y = u^\alpha$ xác định khi :	$\forall u$, nếu α nguyên dương $u \neq 0$, nếu α nguyên không dương $u > 0$, nếu α không nguyên
2. $y = a^u$ xác định khi :	$u > 0$
3. $y = \log_a u$ xác định khi :	$\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ u > 0 \end{cases}$

III. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, LÔGARIT

1) Phương trình, bất phương trình mũ- lôgarit cơ bản :

Mũ	Logarit
Dạng $a^x = b$, ($a > 0, a \neq 1$) $b \leq 0$: PT vô nghiệm $b > 0$: $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ Chú ý: $a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$	Dạng $\log_a x = b$, ($a > 0, a \neq 1$) ❖ Điều kiện: $x > 0$ ❖ $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$ Chú ý: $\log_a u = \log_a v \Leftrightarrow u = v$
Dạng $a^x > b$, ($a > 0, a \neq 1$) $b \leq 0$: BPT có tập nghiệm $\mathbb{R}$ $b > 0$: $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$, khi $a > 1$ $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$, khi $0 < a < 1$ Chú ý: $a^u > a^v \Leftrightarrow u > v$, khi $a > 1$ $a^u > a^v \Leftrightarrow u < v$, khi $0 < a < 1$	Dạng $\log_a x > b$, ($a > 0, a \neq 1$) ❖ Điều kiện: $x > 0$ ❖ $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$, khi $a > 1$ $\log_a x > b \Leftrightarrow x < a^b$, khi $0 < a < 1$ Chú ý: $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u > v$, khi $a > 1$ $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u < v$, khi $0 < a < 1$

2) Phương trình, bất phương trình mũ- lôgarit đơn giản:

Mũ	Logarit
Phương pháp đưa về cùng cơ số	
$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ $m.a^{f(x)} = n.b^{f(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = \frac{n}{m}$	$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) > 0$
Phương pháp đặt ẩn phụ	
Nguyên tắc: Áp dụng cho PT, BPT chứa một hàm số (mũ, logarit,...) ở nhiều vị trí (trong lũy thừa, dưới mẫu, dưới căn...)	
Cách giải: Đặt hàm số mũ, logarit,... làm ẩn phụ $\rightarrow$ Biến đổi đưa về PT, BPT đại số.	

Dạng 1 (mũ bội): Chứa $a^u; a^{2u}; a^{3u}; \dots$ Thường gặp: $m.a^{2u} + n.a^u + p = 0$ Cách giải: C1: Đặt $t = a^u, (t > 0) \rightarrow$ Ta được: $m.t^2 + n.t + p = 0$ $\rightarrow$ Giải tìm $t \rightarrow$ Thay $t = a^u \rightarrow$ Giải tìm nghiệm. C2: Xem ẩn là $a^u \rightarrow$ Giải trực tiếp tìm a^u $\rightarrow$ Giải tìm nghiệm. Dạng 2 (mũ đối): Chứa $a^u; a^{-u}$ Thường gặp: $m.a^u + n.a^{-u} + p = 0$ Cách giải: Biến đổi $a^{-u} = \frac{1}{a^u} \rightarrow$ Biến đổi về Dạng 1. Dạng 3 (cơ số nghịch đảo): Chứa $a^u; b^u$ (với $a.b = 1$) Thường gặp: $m.a^u + n.b^u + p = 0$ (với $a.b = 1$) Cách giải: Biến đổi $b^u = \frac{1}{a^u} \rightarrow$ Biến đổi về Dạng 1. ĐẶC BIỆT: Với $(a-b)(a+b) = 1$, Ta có: $(a-b)^u + (a+b)^u = 2a \Leftrightarrow u = \pm 1$ $(a-b)^u + (a+b)^u = 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow u = \pm 2$ Dạng 4 (cơ số lập thành cấp số nhân): Chứa $a^u; b^u; c^u$ (với $a.c = b^2$) Thường gặp: $m.a^u + n.b^u + p.c^u = 0$ Cách giải: <u>Cách 1:</u> Chia 2 vế PT, BPT cho a^u (hay c^u) $\rightarrow$ Biến đổi về dạng 1. <u>Cách 2:</u> Chia 2 vế PT, BPT cho $b^u \rightarrow$ Biến đổi về dạng 2.	Dạng 1: Chứa $\log_a u, \log_a^2 u, \log_a^3 u, \dots$ Thường gặp: $m.\log_a^2 u + n.\log_a u + p = 0$ Cách giải: C1: Đặt $t = \log_a u \rightarrow$ Ta được: $m.t^2 + n.t + p = 0$ $\rightarrow$ Giải tìm $t \rightarrow$ Thay $t = \log_a u \rightarrow$ Giải tìm nghiệm. C2: Xem ẩn là $\log_a u \rightarrow$ Giải trực tiếp tìm $\log_a u$ $\rightarrow$ Giải tìm nghiệm. Dạng 2: Chứa $\log_a u, \log_u a$ Cách giải: Biến đổi $\log_u a = \frac{1}{\log_a u} \rightarrow$ Biến đổi về Dạng 1. Chú ý: Đối với BPT thì không được khử mẫu, mà ta chỉ quy đồng để được BPT chứa ẩn ở mẫu.
Phương pháp: Logarit hóa	Phương pháp: Mũ hóa
$a^u = b^v \Leftrightarrow \log_a a^u = \log_a b^v \Leftrightarrow u = v.\log_a b$ Tương tự cho BPT, chú ý đổi chiều khi cơ số $0 < a < 1$	$\log_a u = \log_b v \Leftrightarrow a^{\log_a u} = a^{\log_b v} \Leftrightarrow u = a^{\log_b v}$ Tương tự cho BPT, chú ý đổi chiều khi cơ số $0 < a < 1$

IV. ỨNG DỤNG HÀM MŨ – LÔGARIT VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài toán	Công thức	Diễn giải
1. Tính tiền gửi lãi kép: (Gửi một lần và rút một lần)	$T_n = T_0(1+r)^n$	T_0 : số tiền ban đầu gửi; r : lãi suất/kì; n : số kì gửi; T_n : số tiền sau n kì gửi.
2. Tính tiền gửi tiết kiệm lãi kép: (Mỗi kì gửi một lần số tiền cố định và chỉ rút một lần)	$T_n = T_0 \cdot \frac{1+r}{r} \left[(1+r)^n - 1 \right]$	T_0 : số tiền gửi mỗi kì; r : lãi suất/kì; n : số kì gửi; T_n : số tiền sau n kì gửi.
3. Tính tiền trả góp lãi kép: (Vay một lần và trả góp cố định mỗi kì)	$t = T_0 \cdot \frac{r(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$	t : số tiền trả mỗi kì; T_0 : số tiền vay ban đầu; r : lãi suất/kì; n : số kì phải trả
4. Tính tiền rút định kì: (Gửi một lần và rút dần mỗi kì số tiền cố định)	$T_n = T_0 \cdot (1+r)^n + \frac{M}{r} \left[1 - (1+r)^n \right]$	T_0 : số tiền gửi ban đầu; r : lãi suất/kì; n : số kì gửi;

		T_n : số tiền còn lại sau n kì; M : số tiền rút mỗi kì.
5. Tính biến động dân số: <i>(Tính dân số tăng, giảm)</i>	$S_n = S_0 \cdot e^{n \cdot r}$	S_0 : số dân ban đầu; r : tỉ lệ biến động dân số/kì; n : số kì; S_n : số dân sau n kì.
6. Tính phóng xạ bán rã:	$m_t = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$	m_0 : khối lượng chất phóng xạ ban đầu; t : thời gian bán rã; T : chu kì bán rã; m_t : khối lượng tại thời điểm t .
7. Tính cường độ động đất:	$M = \log \left(\frac{A}{A_0} \right)$	M : cường độ động đất; A : biên độ rung tối đa; A_0 : biên độ chuẩn (hằng số định trước).
8. Công thức liên hệ 2 trận động đất có cùng biên độ chuẩn:	$\frac{A_1}{A_2} = 10^{M_1 - M_2}$	A_1, M_1 và A_2, M_2 : lần lượt là biên độ rung tối đa, cường độ của trận động đất thứ nhất và thứ hai.

CHỦ ĐỀ 3: NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

I. NGUYÊN HÀM

1) Định nghĩa:

$$F(x) \text{ là một nguyên hàm của } f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \\ \Leftrightarrow \int f(x) dx = F(x) + C \text{ (họ nguyên hàm)}$$

2) Tính chất:

$\int f'(x) dx = f(x) + C$	$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$	$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

3) Bảng nguyên hàm :

Hàm sơ cấp	Hàm hợp với $u = ax + b$	Công thức Đặc biệt.
$\int 0 \cdot dx = C$		$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
$\int k dx = kx + C$		$\int \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \rightarrow$	$\int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \rightarrow$	$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$	$\int \sqrt[n]{x} dx = \frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C \rightarrow$	$\int \sin(ax+b) dx = \frac{-1}{a} \cos(ax+b) + C$	$\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C \rightarrow$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$	$\int \cot x dx = \ln \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \rightarrow$	$\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$	$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \rightarrow$	$\int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = \frac{-1}{a} \cot(ax+b) + C$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
$\int e^x dx = e^x + C \rightarrow$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$	
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \rightarrow$	$\int a^{kx+b} dx = \frac{1}{k} \cdot \frac{a^{kx+b}}{\ln a} + C$	

4) Tìm một nguyên hàm: Tìm họ nguyên hàm $F(x) + C \rightarrow$ Dùng điều kiện từ giả thiết thay vào để tính C,

II. TÍCH PHÂN

1) Định nghĩa: $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$, (với $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; b]$)

2) Tính chất:

$\int_a^a f(x) dx = 0$	$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$	$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$
$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$	$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (a < c < b)$	
$\int_m^n f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int_{a.m+b}^{a.n+b} f(x) dx$	Nếu $f(x)$ là hàm lẻ thì $\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx$ và $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$	
$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^a f(-x) dx$	Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_{-a}^0 f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.	

$\int_a^b f^2(x) dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$	Nếu $f(x)$ là hàm chẵn thì $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+b^x} dx = \int_0^a f(x) dx$
---	---

3) Phương pháp tính tích phân:

a) **Phương pháp cơ bản:** Dùng công thức nguyên hàm và tính chất

• **Phương pháp:** Tách hàm số thành tổng, hiệu của các biểu thức có công thức nguyên hàm.

• **Các dạng thường gặp:**

Dạng	Đặc điểm nhận dạng	Phương pháp
1. Phân thức hữu tỉ: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$	Bậc tử $\geq$ Bậc mẫu	Chia đa thức: $\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$, ($P_1(x)$ là đa thức và r là phần dư) • Bậc 2/Bậc 1: $\frac{P(x)}{Q(x)} = ax + b + \frac{r}{Q(x)}$ (1) $\rightarrow$ Tính số dư $r = P(x_0)$ (với x_0 là nghiệm của mẫu $Q(x)$) $\rightarrow$ Cho 2 giá trị của x vào (1), ta được 2 PT ẩn $a, b \rightarrow$ Giải Hệ tìm a, b. • Bậc 3/Bậc 1: $\frac{P(x)}{Q(x)} = ax^2 + bx + c + \frac{r}{Q(x)}$ (2) $\rightarrow$ Làm tương tự, ta được Hệ 3 ẩn a, b, c.
	Bậc tử < Bậc mẫu và mẫu có nghiệm	Hệ số bất định: Phân tích mẫu thành tích rồi tách thành tổng theo các cách sau: Cách 1: (Làm thủ công) <u>Dạng 1:</u> $\frac{ax+b}{(cx+d)(ex+f)} = \frac{A}{cx+d} + \frac{B}{ex+f} = \frac{(Ae+Bc)x+(Af+Bd)}{(cx+d)(ex+f)}$ (quy đồng) $\rightarrow$ Cho $(Ae+Bc)x+(Af+Bd) = ax+b \rightarrow$ Ta được Hệ PT 2 ẩn A, B: $\begin{cases} e.A+c.B=a \\ f.A+d.B=b \end{cases} \rightarrow \text{Giải tìm } A, B$ <u>Dạng 2:</u> $\frac{ax+b}{(cx+d)^2} = \frac{A}{(cx+d)^2} + \frac{B}{cx+d} = \frac{Bc.x+(A+Bd)}{(cx+d)^2}$ (quy đồng) $\rightarrow$ Cho $(Bc)x+(A+Bd) = ax+b \rightarrow$ Ta được Hệ PT 2 ẩn A, B: $\begin{cases} c.B=a \\ A+d.B=b \end{cases}$ Cách 2: Cho 2 giá trị của x vào: $\frac{ax+b}{(cx+d)(ex+f)} = \frac{A}{cx+d} + \frac{B}{ex+f}$ (hay $\frac{ax+b}{(cx+d)^2} = \frac{A}{(cx+d)^2} + \frac{B}{cx+d}$), ta được 2 PT ẩn $A, B \rightarrow$ Giải Hệ, tìm A, B Cách 3: <u>Dạng 1:</u> $\frac{ax+b}{(cx+d)(ex+f)} = \frac{A}{cx+d} + \frac{B}{ex+f}$. Với: $A = \frac{ax+b}{ex+f} \Big _{x=-\frac{d}{c}}$; $B = \frac{ax+b}{cx+d} \Big _{x=-\frac{f}{e}}$ <u>Dạng 2:</u> $\frac{ax+b}{(cx+d)^2} = \frac{A}{(cx+d)^2} + \frac{B}{cx+d}$. Với: $A = ax+b \Big _{x=-\frac{d}{c}}$; $B = \frac{a}{c}$
2. Tích của các hàm lượng giác	Tích của sin, cos	Dùng công thức biến tích thành tổng $\rightarrow$ Tách thành tổng, hiệu
	sinx, cosx đều có bậc chẵn	Dùng công thức hạ bậc $\rightarrow$ Hạ đến bậc nhất.

b) **Phương pháp đổi biến số:**

① **Phương pháp đổi biến dạng “đặt t theo x ”:**

$$I = \int f[u(x)] \cdot u'(x) dx \rightarrow \text{Đặt } t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) \Rightarrow I = \int f(t) \cdot dt$$

- **Phương pháp:**
 - + Đặt $t = u(x) \rightarrow$ Lấy vi phân: $dt = u'(x).dx$ và Rút ra một số biểu thức cần thiết;
 - + Đổi cận;
 - + Thay biến mới, cận mới và tính tích phân theo biến mới.

• **Các dạng thường gặp**

	Dạng tích phân	Đặc điểm nhận dạng	Cách đặt
1	$\int \frac{u'(x)}{u(x)}.dx$	Thương, có tử là đạo hàm của mẫu	$t = u(x)$
2	$\int [u(x)]^\alpha .u'(x).dx$	Chứa Hàm lũy thừa và một nhân tử là đạo hàm của cơ số.	$t = u(x)$
3	$\int a^{u(x)}.u'(x).dx$	Chứa Hàm mũ và một nhân tử là đạo hàm của mũ thức.	$t = u(x)$
4	$\int (ax^m + b)^\alpha .x^k dx$	Chứa $a.x^m + b$ và $x^k .dx$ (với m và k không cùng chẵn)	$t = ax^m + b$
5	$\int f(\sqrt[n]{ax^m + b}).x^k dx$	Chứa $\sqrt[n]{ax^m + b}$ và $x^k .dx$ (với m và k không cùng chẵn)	$t = \sqrt[n]{ax^m + b}$ hay $t = ax^m + b$
6	$\int f(e^x).e^x dx$	Chứa biểu thức của e^x và $e^x dx$	$t = e^x$ hay $t = a.e^x + b$
7	$\int f(\ln x).\frac{1}{x}.dx$	Chứa biểu thức của $\ln x$ và $\frac{1}{x}.dx$	$t = \ln x$ hay $t = a.\ln x + b$
8	$\int f(\sin x).\cos x.d x$	Chứa biểu thức của $\sin x$ và $\cos x.d x$	$t = \sin x$ hay $t = a.\sin x + b$
	$\int f(\cos x).\sin x.d x$	Chứa biểu thức của $\cos x$ và $\sin x.d x$	$t = \cos x$ hay $t = a.\cos x + b$
9	$\int f(\tan x).\frac{1}{\cos^2 x}.dx$	Chứa biểu thức của $\tan x$ và $\frac{1}{\cos^2 x}.dx$	$t = \tan x$ hay $t = a.\tan x + b$
	$\int f(\cot x).\frac{1}{\sin^2 x}.dx$	Chứa biểu thức của $\cot x$ và $\frac{1}{\sin^2 x}.dx$	$t = \cot x$ hay $t = a.\cot x + b$

Chú ý: + Nếu x được thay thành $ax + b$ thì ta đặt tương tự.

+ Dấu hiệu thường gặp: đặt t là biểu thức trong ngoặc, căn thức, mẫu, mũ,...

ĐẶC BIỆT: Phương pháp đổi đuôi:

$$\int f[u(x)].u'(x).dx = \int f[u(x)].d[u(x)] = F[u(x)] + C$$

Công thức đổi đuôi thường gặp:

1) $\int \frac{u'(x)}{u(x)}.dx = \ln u(x) + C$	2) $\int [u(x)]^\alpha .u'(x).dx = \frac{[u(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	3) $\int e^{u(x)}.u'(x).dx = e^{u(x)} + C$
---	--	--

② **Phương pháp đổi biến dạng “đặt x theo t ”**

- **Phương pháp:**
 - + Đặt $x = g(t)$ (điều kiện) $\rightarrow$ Lấy vi phân: $dx = g'(t).dt$ (Rút ra biểu thức cần thiết)
 - + Đổi cận;
 - + Thay biến mới, cận mới và tính tích phân theo biến mới.

• **Các dạng thường gặp:**

	Đặc điểm nhận dạng: Tích phân có chứa	Cách đặt
1	$a^2 - x^2$ hay $\sqrt{a^2 - x^2}$	Đặt $x = a \sin t, \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ hay $x = a \cos t, (0 \leq t \leq \pi)$
2	$a^2 + x^2$ hay $\sqrt{a^2 + x^2}$	Đặt $x = a \tan t, \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ hay $x = a \cot t, (0 < t < \pi)$
3	$x^2 - a^2$ hay $\sqrt{x^2 - a^2}$	Đặt $x = \frac{ a }{\cos t}, \left(0 \leq t \leq \pi, t \neq \frac{\pi}{2}\right)$ hay $x = \frac{ a }{\sin t}, \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, t \neq 0\right)$

c) **Phương pháp tích phân từng phần:** $\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$ (*)

- **Nhận dạng:** Áp dụng cho tích phân chứa tích (hay thương) của 2 hàm số khác loại (như chứa 2 trong các hàm số: đa thức (hàm lũy thừa, căn thức), lượng giác, mũ, logarit,...)
- **Nguyên tắc:** Đặt u là biểu thức có đạo hàm đơn giản hơn và chọn dv là phần còn lại mà nguyên hàm đã biết.
- **Phương pháp:** Tính $I = \int f(x) \cdot g(x) \cdot dx$

+ Đặt: $u = f(x)$ (có đạo hàm gọn hơn) $\Rightarrow du = f'(x) \cdot dx$ (lấy vi phân)

$dv = g(x) \cdot dx$ ($g(x)$ có nguyên hàm) $\Rightarrow v = G(x)$ (lấy một nguyên hàm, cho $C = 0$)

+ Thay vào công thức (*) $\Rightarrow$ Tính $\int_a^b v \cdot du$, Suy ra kết quả

- **Dạng thường gặp:**

	Dạng tích phân	Đặt $u =$	Đặt $dv =$
1	$\int P(x) \cdot \sin(ax+b) \cdot dx$	$P(x)$	$\sin(ax+b) \cdot dx$
	$\int P(x) \cdot \cos(ax+b) \cdot dx$	$P(x)$	$\cos(ax+b) \cdot dx$
2	$\int P(x) \cdot e^{ax+b} \cdot dx$	$P(x)$	$e^{ax+b} \cdot dx$
3	$\int P(x) \cdot \ln(ax+b) \cdot dx$	$\ln(ax+b)$	$P(x) \cdot dx$
	$\int \frac{\ln(ax+b)}{P(x)} \cdot dx = \int \ln(ax+b) \cdot P^{-1}(x) \cdot dx$	$\ln(ax+b)$	$P^{-1}(x) \cdot dx$
4	$\int \frac{P(x)}{\cos^2(ax+b)} \cdot dx$	$P(x)$	$\frac{1}{\cos^2(ax+b)} \cdot dx$
	$\int \frac{P(x)}{\sin^2(ax+b)} \cdot dx$	$P(x)$	$\frac{1}{\sin^2(ax+b)} \cdot dx$

- **Dạng khác:** Biểu thức tích phân là tích (hay thương) của 2 trong các hàm số logarit, mũ, lượng giác $\rightarrow$ Đặt u là 1 trong 2 hàm số đó và dv là phần còn lại (không chứa hàm logarit).
- **Chú ý:** Nếu gặp tích phân của thương thì viết thành tích của tử nhân nghịch đảo của mẫu:

$$I = \int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} dx = \int f(x) \cdot g^{-1}(x) dx$$

- **ĐẶC BIỆT:** Công thức tích phân từng phần không cần đặt u, dv :

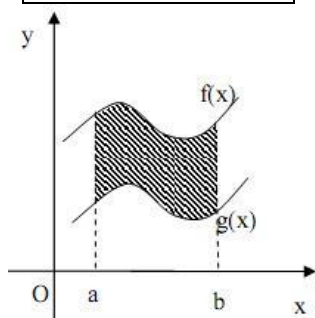
$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) \cdot dx = f(x) \cdot G(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot G(x) \cdot dx$$

(với $g(x)$ có một nguyên hàm $G(x)$ và $f(x)$ có đạo hàm gọn hơn)

III. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ĐỂ TÍNH DIỆN TÍCH, THỂ TÍCH

- 1) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 4 đường: $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$ ($a < b$) được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx (*)$$



- **Chú ý:** a) Trường hợp Hình phẳng giới hạn không đủ 4 đường như trên (thiếu ít nhất 1 trong 2 đường thẳng $x = a$, $x = b$), ta thực hiện như sau:

Giải PT $f(x) - g(x) = 0$ tìm nghiệm $x_i \rightarrow$ Chọn cận dưới trong công thức (*) là số nhỏ nhất, cận trên là số lớn nhất trong các số a, b, x_i .

b) Nếu phương trình $f(x) - g(x) = 0$ có n nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a; b]$ (giả sử $x_1 < x_2 < \dots < x_n$) thì tích phân (*) được tách thành tổng (phân đoạn tích phân) như sau:

$$S = \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_n}^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

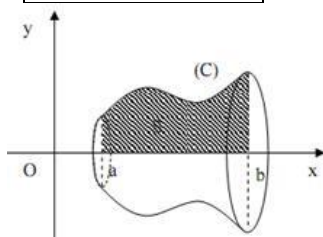
- **Quy tắc tính :**

B1. Giải PT : $f(x) - g(x) = 0 \rightarrow$ Tìm a, b (nếu chưa có đủ) và tìm nghiệm $x_i \in [a; b]$

B2. Diện tích hình phẳng đã cho là $\dots$ (lập công thức (**)) $\rightarrow$ Tính kết quả.

2) **Thể tích vật thể tròn xoay** được sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = f(x)$; Ox ; $x = a$; $x = b$ ($a < b$) được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx (**)$$



- **Chú ý:** Trường hợp Hình phẳng giới hạn không đủ 4 đường như trên (thiếu ít nhất 1 trong 2 đường thẳng $x = a$, $x = b$), ta thực hiện như sau:

Giải PT $f(x) - g(x) = 0$ tìm nghiệm $x_i \rightarrow$ Chọn cận dưới trong công thức (**) là số nhỏ nhất, cận trên là số lớn nhất trong các số a, b, x_i .

- **Quy tắc tính :**

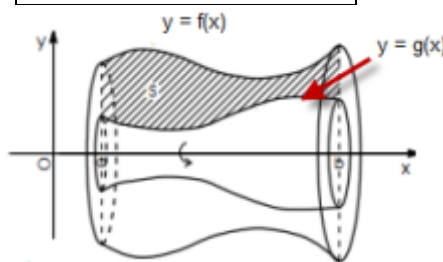
B1. Giải PT $f(x) = 0 \rightarrow$ Tìm a, b (với a là nghiệm nhỏ nhất, b là nghiệm lớn nhất của PT $f(x) = 0$).

Chú ý : Nếu đã có đủ a, b thì bỏ qua B1

B2. Thể tích khối tròn xoay đã cho là $\dots$ (lập công thức (**)) $\rightarrow$ Tính kết quả.

3) **Thể tích vật thể tròn xoay** được sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = f(x)$; $y = g(x)$; $x = a$; $x = b$ (Với $f(x), g(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$) được tính bởi công thức:

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx (***)$$



CHỦ ĐỀ 4: SỐ PHỨC

I. CÔNG THỨC, PHÉP TOÁN :

• $i^2 = -1 \Rightarrow i^3 = -i; i^4 = 1; \dots;$ $\Rightarrow i^{4n} = 1; i^{4n+1} = i; i^{4n+2} = -1; i^{4n+3} = -i \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ • $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$ • $z = a + bi \Rightarrow \begin{cases} \bar{z} = a - bi \\ z = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$ • Căn bậc 2 của số thực $a < 0$ là $\pm i\sqrt{ a }$ • Căn bậc 2 của số phức $z = a + bi$ là số phức $\delta = x + y.i$ thỏa: $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$	• $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i \Rightarrow z + \bar{z} = 2a$ • $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \Rightarrow z.\bar{z} = z ^2$ • $\frac{c + di}{a + bi} = \frac{(c + di)(a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{ z ^2}$ • $z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2$ • $\left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 }$ • $z_1 + z_2 ^2 + z_1 - z_2 ^2 = 2(z_1 ^2 + z_2 ^2)$ • z_1, z_2 liên hợp, ta có: $\clubsuit z_1 ^2 = z_2 ^2 = z_1 z_2$ $\heartsuit z_1 - z_2 ^2 = \frac{ \Delta }{a^2}$
---	--

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI :

$Az^2 + Bz + C = 0 \quad (A \neq 0)$. Biệt thức $\Delta = B^2 - 4AC$

a) **A, B, C là số thực:**

Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt $z = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$

Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm thực kép $z = \frac{-B}{2A}$

Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phức phân biệt $z = \frac{-B \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2A}$

b) **A, B, C là số phức:**

Trên tập số phức, PT bậc 2 luôn có 2 nghiệm (không nhất thiết phân biệt) : $z = \frac{-B \pm \delta}{2A}$ (Với δ là một căn

bậc 2 của Δ)

c) **Biểu thức đối xứng đối với 2 nghiệm PT bậc hai :** (Xem Phụ lục, mục PT bậc hai)

Bổ sung : Cho z_1, z_2 là 2 nghiệm của PT $Az^2 + Bz + C = 0$ trên tập số phức. Ta có:

$$\clubsuit |z_1|^2 = |z_2|^2 = z_1 z_2 = \frac{C}{A} \qquad \heartsuit (z_1 - z_2)^2 = (z_1 + z_2)^2 - 4z_1 z_2 = \left(\frac{-B}{A}\right)^2 - 4\frac{C}{A}$$

$$\heartsuit |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)^2 = \left(\frac{-B}{A}\right)^2$$

III. TÌM SỐ PHỨC THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC:

Phương pháp:

B1. Gọi số phức cần tìm là $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1)$

B2. Thay $z = a + bi$ vào điều kiện cho trước $\rightarrow$ Biến đổi và thu gọn mỗi vế thành dạng một số phức $\rightarrow$ Cho phần thực, ảo tương ứng bằng nhau $\rightarrow$ Lập hệ PT 2 ẩn $a, b \rightarrow$ Giải hệ, tìm $a, b \rightarrow$ Kết quả

IV. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM BIỂU DIỄN SỐ PHỨC:

Phương pháp:

B1. Trong mặt phẳng Oxy, gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}; i^2 = -1)$

B2. Biến đổi hệ thức điều kiện ở giả thiết (có chứa số phức z) thành hệ thức có dạng thường gặp sau:

PT, BPT	Tập hợp điểm	PT, BPT	Tập hợp điểm
$ax + by + c = 0$ $y = ax + b$ $y = b$	Đường thẳng	$ax + by + c < 0 \quad (*)$ (Tương tự cho dấu $\leq, >, \geq$)	Nửa mặt phẳng chứa điểm có tọa độ thỏa BPT(*), với bờ là ĐT(d): $ax + by + c = 0$ (Nếu

$x = c$			dấu BĐT có dấu bằng thì kể cả bờ)
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$	Đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính r	$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$	Hình tròn tâm $I(a;b)$, bán kính r
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$	Đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$	$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0$	Hình tròn tâm $I(a;b)$, bán kính $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Elip	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Hypebol
$y = ax^2 + bx + c$ $x = ay^2 + by + c$	Parabol		«

Chú ý :

♣ Nếu thay dấu đẳng thức (dấu ‘=’) trong các PT trên thành các dấu BĐT ($>$, $<$, $\geq$, $\leq$) thì tập hợp điểm biểu diễn là phần mặt phẳng chứa điểm có tọa độ thỏa mãn BPT, có bờ là đường có PT tương ứng (Kể cả bờ nếu dấu BĐT có dấu bằng)

♣ Nếu M_1, M_2 lần lượt biểu diễn số phức z_1, z_2 thì $\overline{M_1 M_2}$ biểu diễn số phức $\overline{z_2 - z_1}$ và $M_1 M_2 = |z_1 - z_2|$

ĐẶC BIỆT:

1. Nếu số phức z thỏa có tập hợp điểm biểu diễn là đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính R thì số phức $w = z_1 \cdot z + z_2$ có tập hợp điểm biểu diễn là đường tròn tâm I' biểu diễn $z' = z_1 \cdot (a + bi) + z_2$ và bán kính $R' = |z_1| \cdot R$

2. Nếu $z = x + y.i$ thỏa $(a + b.i) \cdot z + (c + d.i) \cdot \bar{z} = e + f.i$ thì x, y là nghiệm Hệ PT:
$$\begin{cases} (a+c)x + (d-b)y = e \\ (d+b)x + (a-c)y = f \end{cases}$$

3. $a.z^2 + b.\bar{z} + c = 0 \Leftrightarrow z = \frac{b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$, với $D = 3b^2 + 4ac$

CHỦ ĐỀ 5: KHỐI ĐA DIỆN

I. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Khối đa diện	Hộp chữ nhật	Lập phương	Lăng trụ	Chóp
Công thức thể tích	$V = a.b.c$	$V = a^3$	$V = B.h$	$V = \frac{1}{3} B.h$
Diễn giải	a, b, c là 3 kích thước	a là độ dài cạnh	B là diện tích đáy, h là chiều cao	

Quy tắc tính thể tích khối đa diện:

B1. Xác định các yếu tố: đường cao, đáy $\rightarrow$ Lập công thức thể tích

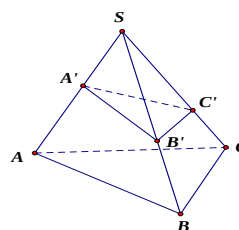
B2. Xác định các đại lượng không gian: các loại góc không gian, các loại khoảng cách,...

B3. Tính toán số đo của các yếu tố $\rightarrow$ Thay vào công thức thể tích $\rightarrow$ Kết quả.

II. ỨNG DỤNG THỂ TÍCH

1. Công thức tỉ số thể tích: Cho hình chóp $S.ABC$ và A', B', C' lần lượt thuộc cạnh bên SA, SB, SC . Khi đó:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$



2. Khoảng cách từ 1 đỉnh đến mặt đối diện của một hình tứ diện (hình chóp tam giác):

$$V_{A.BCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot d(A, (BCD)) \Rightarrow d(A, (BCD)) = \frac{3 \cdot V_{A.BCD}}{S_{BCD}}$$

III. MỘT SỐ HÌNH ĐA DIỆN THƯỜNG GẶP

HÌNH CHÓP

H1. Hình chóp có một cạnh bên vuông góc đáy: $\rightarrow$ Đường cao hình chóp là cạnh bên vuông góc đáy. Ví dụ: Hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên SA vuông góc mặt đáy $(ABCD) \rightarrow$ Đường cao của hình chóp là SA	
H2. Hình chóp có 2 mặt bên (mặt chéo) cùng vuông góc mặt đáy: $\rightarrow$ Đường cao hình chóp là đoạn giao tuyến của 2 mặt đó Ví dụ: Hình chóp $S.ABC$ có 2 mặt $(SAB), (SAC)$ cùng vuông góc mặt đáy $(ABC) \rightarrow$ Đường cao hình chóp là đoạn giao tuyến SA của 2 mặt $(SAB), (SAC)$.	
H3. Hình chóp có một mặt bên vuông góc đáy: $\rightarrow$ Đường cao hình chóp là đường cao của mặt bên đó (hạ từ đỉnh hình chóp). Ví dụ: Hình chóp $S.ABCD$ có (SAB) vuông góc mặt đáy $(ABCD) \rightarrow$ Đường cao SH của tam giác SAB là đường cao hình chóp $S.ABCD$	
H4. Hình chóp đều: là hình chóp có đáy là đa giác đều và chân đường cao trùng tâm đáy Tính chất (chung): - Các cạnh bên bằng nhau, cạnh đáy bằng nhau - Các mặt bên là những tam giác cân tại đỉnh hình chóp và bằng nhau - Đường cao của hình chóp là SH (Với S là đỉnh và H là tâm đáy) - Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy bằng nhau, - Góc giữa các mặt bên và mặt đáy bằng nhau.	

1) Hình chóp tam giác đều:

a) Tính chất (riêng):

Mặt đáy là tam giác đều

Đường cao của hình chóp là SH (Với S là đỉnh và H là giao điểm 2 đường trung tuyến của tam giác đáy)

Góc giữa cạnh bên và mặt đáy là: $SAH = SBH = SCH = \alpha$.

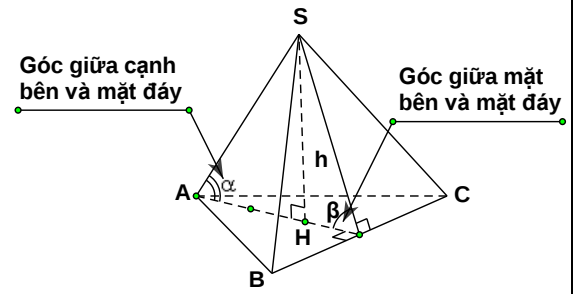
Góc giữa mặt bên và mặt đáy là: $SIH = \beta$ (với I là trung điểm cạnh đáy)

b) Công thức liên hệ: Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy a , cạnh bên b , chiều cao h , góc giữa cạnh bên và mặt đáy α , góc giữa mặt bên và mặt đáy β . Khi đó:

$$\begin{aligned} a &= b \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \alpha \\ h &= b \cdot \sin \alpha \\ h &= \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \tan \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \tan \beta \\ b^2 &= h^2 + \frac{a^2}{3} \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{3} \left(a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cdot h$$



Cách vẽ hình chóp tam giác đều S.ABC (hoặc tứ diện đều):

Vẽ đáy ABC → Dựng trọng tâm H (Là giao điểm 2 đường trung tuyến) → Vẽ SH vuông góc (ABC) → Vẽ các cạnh bên

3) Hình tứ diện đều là hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng cạnh đáy (hình chóp tam giác có tất cả các cạnh bằng nhau). Cho khối tứ diện đều cạnh a , chiều cao h , khoảng cách giữa 2 cạnh đối diện d . Ta có:

$$h = a \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$d = a \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

3). Hình chóp tứ giác đều

a) Tính chất (riêng):

Mặt đáy là hình vuông

Đường cao của hình chóp là SH (Với S là đỉnh và H là giao điểm 2 đường chéo của đáy hình vuông)

Góc giữa cạnh bên và mặt đáy là:

$$SAH = SBH = SCH = SDH = \alpha$$

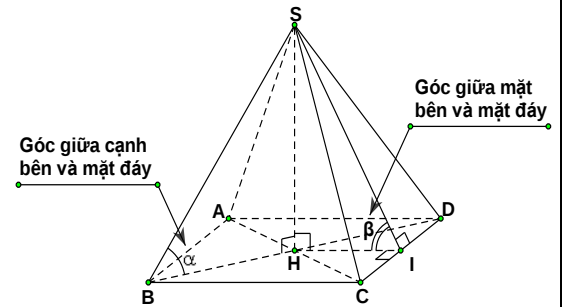
Góc giữa mặt bên và mặt đáy là: $SIH = \beta$ (với I là trung điểm cạnh đáy)

b) Công thức liên hệ:

$$\begin{aligned} a &= b \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \alpha \\ h &= b \cdot \sin \alpha \\ h &= \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \tan \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + \frac{a^2}{2} \\ h &= \frac{a}{2} \cdot \tan \beta \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$$



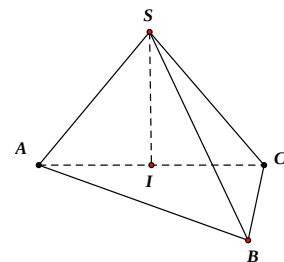
Cách vẽ hình chóp tứ giác đều S.ABCD:

Vẽ đáy hình bình hành ABCD → Vẽ H là giao điểm của hai đường chéo AC & BD → Vẽ SH vuông góc (ABCD) → Vẽ các cạnh bên

H5. Hình chóp có tất cả cạnh bên bằng nhau:

→ Đường cao hình chóp là đoạn thẳng hạ từ đỉnh hình chóp đến tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy.

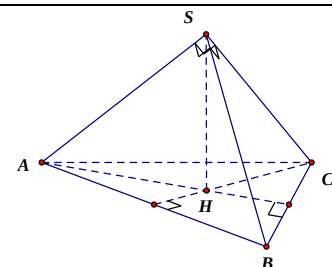
Ví dụ: Hình chóp S.ABC các cạnh bên SA, SB, SC bằng nhau và đáy ABC là tam giác vuông tại B → Đường cao hình chóp là SI, với I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (I là trung điểm AC)



H6. Tứ diện vuông: (Tứ diện có 3 mặt là 3 tam giác vuông tại cùng một đỉnh)

→ Chân đường cao ứng với đỉnh vuông là trực tâm mặt đối diện với đỉnh vuông.

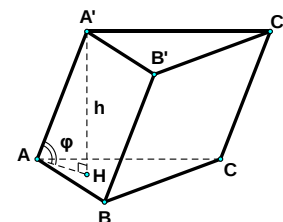
Ví dụ: Hình chóp S.ABC có mặt bên SAB, SBC, SCA là tam giác vuông tại S → Đường cao SH, (với H là trực tâm tam giác ABC)



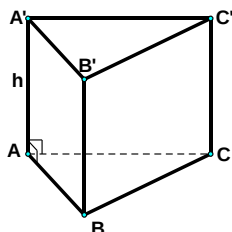
HÌNH LĂNG TRỤ

Tính chất: Hình Lăng trụ có:

- + Các cạnh bên song song và bằng nhau;
- + Các mặt bên là hình bình hành;
- + Hai mặt đáy song song và bằng nhau;
- + Đường cao là đoạn thẳng nối từ một điểm thuộc đáy này đến hình chiếu của nó lên đáy kia;
- + Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy đều bằng nhau;
- + Góc giữa các mặt bên và mặt đáy đều bằng nhau;

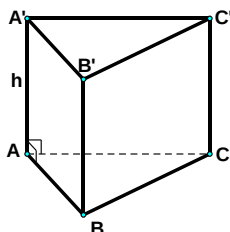


Lăng trụ đứng: là lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy



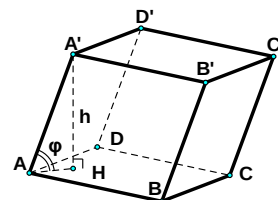
Đường cao là các cạnh bên $A'A$, $B'B$, $C'C$

Lăng trụ đều: là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều



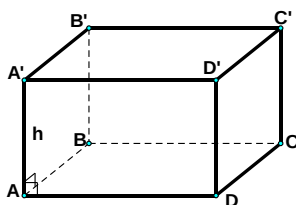
Đường cao là các cạnh bên $A'A$, $B'B$, $C'C$

Hình hộp: là lăng trụ có đáy là hình bình hành



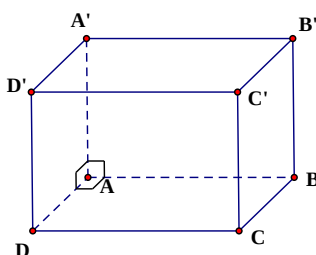
Đường cao: $A'H$ (với H là hình chiếu của A' lên (ABC))

Hình hộp đứng: là hình hộp có các cạnh bên vuông góc đáy (đáy là hình bình hành)



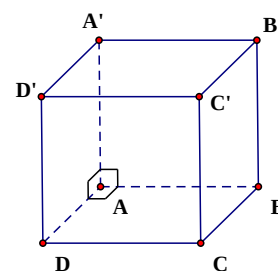
Đường cao: $A'A$, $B'B$, $C'C$, $D'D$

Hình hộp chữ nhật: là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật (có 6 mặt đều là hình chữ nhật)



Đường cao: $A'A$, $B'B$, $C'C$, $D'D$

Hình lập phương: là hình hộp có 6 mặt đều là hình vuông



Bảng tóm tắt của năm loại khối đa diện đều

Loại $\{p; q\}$	Tên gọi	Hình vẽ	Số mặt (m)	Số cạnh (c)	Số đỉnh (d)	Số MP đối xứng
$\{3; 3\}$	Tứ diện đều		4	6	4	6
$\{4; 3\}$	Khối lập phương		6	12	8	9
$\{3; 4\}$	Bát diện đều		8	12	6	9
$\{5; 3\}$	Thập nhị diện đều		12	30	20	15
$\{3; 5\}$	Nhị thập diện đều		20	30	12	15

Chú ý: Giả sử khối đa diện đều loại $\{p; q\}$ có m mặt, c cạnh và d đỉnh. Khi đó: $p.m = 2c = q.d$

IV. CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT TÍNH THỂ TÍCH KHỐI TỨ DIỆN ABCD

- $V = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d(AB, CD) \cdot \sin(\angle(AB, CD))$ $V_{tdABCD} = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|$
- Tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối bằng nhau $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$ có thể tích:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$$

- Tứ diện có độ dài các cặp cạnh đối diện lần lượt là $a, a_1; b, b_1; c, c_1$ có thể tích:

$$V = \frac{1}{12} \sqrt{A + B + C - D}$$

Với:

$$A = a^2 a_1^2 (-a^2 + b^2 + c^2 - a_1^2 + b_1^2 + c_1^2); \quad B = b^2 b_1^2 (a^2 - b^2 + c^2 + a_1^2 - b_1^2 + c_1^2);$$

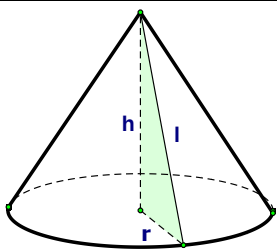
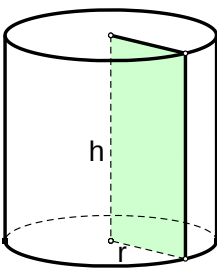
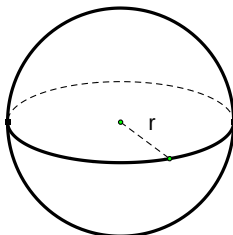
$$C = c^2 c_1^2 (a^2 + b^2 - c^2 + a_1^2 + b_1^2 - c_1^2); \quad D = (abc)^2 + (ab_1c_1)^2 + (a_1bc_1)^2 + (a_1b_1c)^2$$

- Tứ diện ABCD vuông tại A (có AB, AC, AD đôi một vuông góc) và $AB = a, AC = b, AD = c$ có thể tích:

$$V = \frac{abc}{6}$$

CHỦ ĐỀ 6: KHỐI TRÒN XOAY

I. THỂ TÍCH, DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN XOAY

	Hình nón	Hình trụ	Hình cầu
Hình vẽ và các yếu tố	 Chiều cao: h Bán kính đáy: r Độ dài đường sinh: l	 Chiều cao: h Bán kính: r	 Bán kính: r
Diện tích xung quanh	$S_{xq} = \pi r l$	$S_{xq} = 2\pi r l$	$S = 4\pi r^2$
Diện tích toàn phần	$S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi r l + \pi r^2$	$S_{tp} = S_{xq} + 2.S_d = 2\pi r l + 2.\pi r^2$	$S = 4\pi r^2$
Thể tích	$V = \frac{1}{3} \pi .r^2 .h$	$V = \pi .r^2 .h$	$V = \frac{4}{3} \pi .r^3$

Quy tắc tính thể tích, diện tích hình tròn xoay:

B1. Xác định các yếu tố: Đường cao, đường sinh, bán kính $\rightarrow$ Lập công thức thể tích, diện tích,...

B2. Xác định các đại lượng không gian: Các loại góc không gian, khoảng cách,...

B3. Tính toán số đo của các yếu tố $\rightarrow$ Thay vào công thức thể tích $\rightarrow$ Kết quả.

II. SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA HÌNH TRÒN XOAY VÀ HÌNH ĐA DIỆN

3) Ngoại tiếp, nội tiếp:

Quan hệ nội tiếp, ngoại tiếp	Điều kiện
Hình nón ngoại (nội) tiếp hình chóp	Hai đỉnh trùng nhau và đáy hình nón ngoại (nội) tiếp đáy hình chóp
Hình trụ ngoại (nội) tiếp Lăng trụ đứng	Hai đáy hình trụ ngoại (nội) tiếp hai đáy hình lăng trụ
Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện	Mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình đa diện
Mặt cầu nội tiếp hình đa diện	Mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện
Mặt cầu ngoại tiếp Hình chóp	Đáy của hình chóp nội tiếp được đường tròn.
Mặt cầu ngoại tiếp Hình lăng trụ	Đáy của hình lăng trụ nội tiếp được đường tròn.

❖ **Chú ý:** Tứ diện (hình chóp tam giác) luôn có mặt cầu ngoại tiếp.

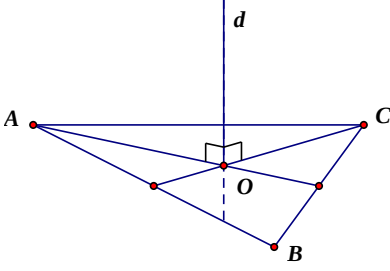
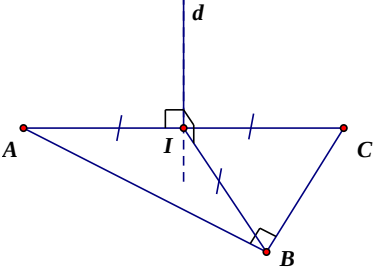
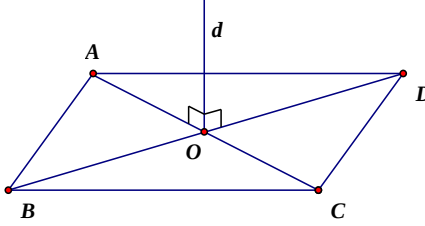
4) Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp:

Cách 1: Vẽ trục d của đa giác đáy $\rightarrow$ Trong mặt phẳng chứa cạnh bên và trục đáy, vẽ đường trung trực Δ của cạnh bên đó $\rightarrow$ Tâm mặt cầu ngoại tiếp: $I = d \cap \Delta$ và bán kính: $r = IS = IA = IB = \dots$

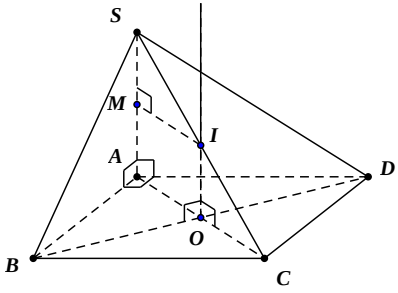
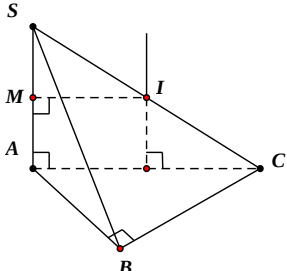
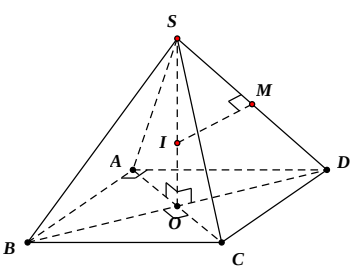
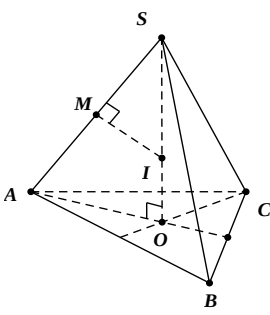
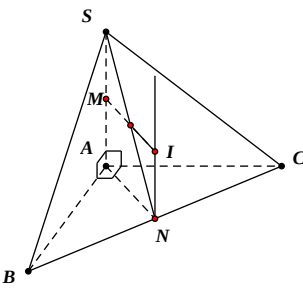
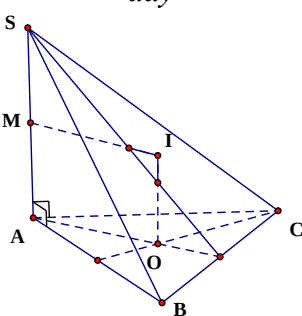
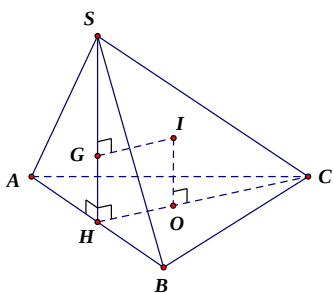
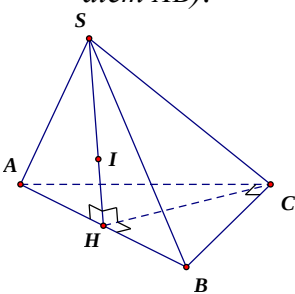
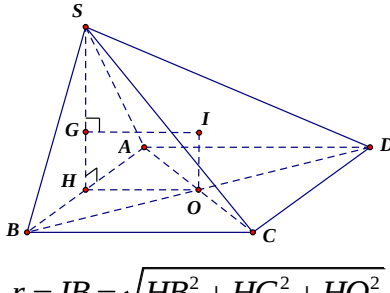
Cách 2: Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là giao điểm của trục mặt đáy và trục một mặt bên.

Chú ý:

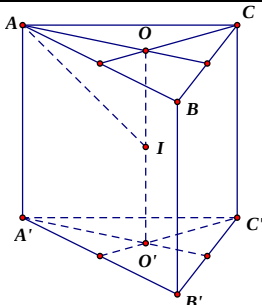
Trục của đa giác là đường thẳng vuông góc mặt phẳng chứa đa giác tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đó.

 Hình vẽ trục của tam giác đều	 Hình vẽ trục của tam giác vuông	 Hình vẽ trục của hình chữ nhật hay hình vuông
--	--	--

5) Hình vẽ Tâm và công thức tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp của một số hình chóp thường gặp

H1. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật (hay hình vuông) và SA vuông góc đáy  $r = \frac{SC}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{SA^2 + AB^2 + AD^2}$	H2. Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B và SA vuông góc đáy  $r = SI = \frac{SC}{2}$	H3. Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$  $r = SI = \frac{SA^2}{2SO}$
H4. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$  $r = SI = \frac{SA^2}{2SO}$	H5. Tứ diện vuông: Hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông tại A và SA vuông góc mặt đáy (Hình chóp tam giác có 3 cạnh bên đôi một vuông góc)  $r = IA = \frac{1}{2} \sqrt{AS^2 + AB^2 + AC^2}$	H6. Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều và SA vuông góc đáy  $r = IA = \sqrt{\frac{SA^2}{4} + \frac{AB^2}{3}}$
H7. Hình chóp tam giác có 1 mặt bên vuông góc mặt đáy. VD: Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên SAB cân tại S và vuông góc mặt đáy ABC đều. Khi đó, tâm I của mặt cầu ngoại tiếp là giao điểm của trục đáy IO và trục của mặt bên IG.  $r = IB = \sqrt{HB^2 + HG^2 + HO^2}$	H8. Hình chóp tam giác có 1 mặt bên vuông góc mặt đáy. VD: Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên SAB cân tại S và vuông góc mặt đáy ABC vuông tại C. Khi đó, tâm I của mặt cầu ngoại tiếp là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB. (Nếu SAB vuông cân tại S thì I trùng H là trung điểm AB).  $r = IB = \sqrt{HB^2 + HI^2}$	H9. Hình chóp tứ giác có 1 mặt bên vuông góc mặt đáy. VD: Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên SAB cân tại S và vuông góc góc mặt đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Khi đó, tâm I của mặt cầu ngoại tiếp là giao điểm của trục đáy IO và trục của mặt bên IG.  $r = IB = \sqrt{HB^2 + HG^2 + HO^2}$

6) Hình vẽ Tâm và công thức tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình Lăng trụ đứng

☞ Tâm I là trung điểm đoạn thẳng nối 2 tâm đường tròn ngoại tiếp 2 đáy (Trục của Lăng trụ đứng) ☞ Bán kính $r = IA = \sqrt{\left(\frac{A'A}{2}\right)^2 + R^2}$ (Với R là bán kính đường tròn đa giác đáy)	Hình vẽ tâm mặt cầu ngoại tiếp Lăng trụ tam giác đều 
---	---

CHỦ ĐỀ 7: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

I. VECTƠ VÀ TỌA ĐỘ

1) Tóm tắt lý thuyết và công thức:

f) Tọa độ của điểm : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Leftrightarrow \vec{M} = (x; y; z)$

Tọa độ điểm đặc biệt:

Điểm trên MP tọa độ	$M \in (Oxy) \Leftrightarrow M(x; y; 0)$	$N \in (Oyz) \Leftrightarrow N(0; y; z)$	$K \in (Oxz) \Leftrightarrow K(x; 0; z)$
Điểm trên trục tọa độ	$M \in Ox \Leftrightarrow M(x; 0; 0)$	$N \in Oy \Leftrightarrow N(0; y; 0)$	$K \in Oz \Leftrightarrow K(0; 0; z)$
M là trung điểm AB	$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$		
G là trọng tâm tam giác ABC	$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$		
G là trọng tâm tứ giác (hay tứ diện) ABCD	$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + x_D}{4}\right)$		

g) Tọa độ của vector: $\vec{a} = a_1.\vec{i} + a_2.\vec{j} + a_3.\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

❖ Tọa độ vector đơn vị: $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$ lần lượt là vector đơn vị của trục Ox, Oy, Oz

h) Phép toán vector: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$; $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$

Cộng, trừ: $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$	Tích vô hướng: $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$	Tích có hướng: $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; - \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$
Nhân 1 số với 1 vector: $k.\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$	Độ dài vector: $ \vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$	Góc giữa 2 vector: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{ \vec{a} . \vec{b} } = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$
Tọa độ vector cố định: $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$	Độ dài đoạn thẳng (Độ dài vector cố định): $AB = \overrightarrow{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$	

i) Quan hệ vector:

$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$	$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases}$	$\vec{a}, \vec{b} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \vec{a} = k.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k.b_1 \\ a_2 = k.b_2 \\ a_3 = k.b_3 \end{cases}$
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0$		$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$

2) Ứng dụng tích có hướng:

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$	A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD} = 0$
$ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ và } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0})$	$ABCD$ là một hình tứ diện (hay A, B, C, D không đồng phẳng) $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD} \neq 0$
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} $	$S_{hhABCD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} $
$V_{tdABCD} = \frac{1}{6} (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD} $	$V_{hhABCD.A'B'C'D'} = (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AA'} $

II. MẶT PHẪNG

1) Tóm tắt lý thuyết

- Vector pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng:** Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ có giá vuông góc $mp(\alpha)$ gọi là VTPT của $mp(\alpha)$
- Phương trình:** Mặt phẳng (α) qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ có phương trình dạng:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$$

Chú ý :

- Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (2) thì mặt phẳng (α) có 1 VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$
- Phương trình các mặt phẳng tọa độ: $(Oyz): x = 0$ $(Oxz): y = 0$ $(Oxy): z = 0$
- Trường hợp riêng:

$Ax + By + Cz = 0$: Qua gốc tọa độ O	$By + Cz + D = 0$: Song song trục Ox
$Ax + Cz + D = 0$: Song song trục Oy	$Ax + By + D = 0$: Song song trục Oz

- Mặt phẳng đi qua $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ có PT dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$)

• Điều kiện để xác định VTPT của mặt phẳng:

- Dùng định nghĩa: $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) \Leftrightarrow \vec{n}$ là VTPT của mặt phẳng (α)
- Nếu mặt phẳng (α) song song hoặc chứa giá $\vec{a}, \vec{b}$ (không cùng phương) thì $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ là một VTPT của mặt phẳng (α)

2) Phương pháp Lập phương trình mặt phẳng

Cách 1: Xác định yếu tố: Điểm đi qua và VTPT (như bảng dưới đây)

- Từ giả thiết, xác định các vector và các yếu tố khác (nếu cần)
- Xác định tọa độ VTPT và tọa độ một điểm của mặt phẳng
- Thay vào PT (1) $\rightarrow$ Thu gọn và kết luận

Cách 2: Xác định hệ số

- Gọi PT mặt phẳng đã cho có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$, (2)
- Từ giả thiết, xác định 4 hệ số A, B, C, D (kiểm tra điều kiện, nếu có)
- Thay vào PT (2) $\rightarrow$ Kết luận

Dạng	Tính chất của mặt phẳng (α) (giả thiết cho)	Đi qua điểm	VTPT
1	Qua 3 điểm A, B, C	A, B, C	$\vec{n}_\alpha = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$
2	Là mặt phẳng trung trực đoạn AB	M là trung điểm AB	$\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{AB}$
3	Qua M và song song $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$	M	$\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = (A; B; C)$
4	Qua M và vuông góc đường thẳng (d)	M	$\vec{n}_\alpha = \vec{a}_d$
	Qua M và vuông góc đường thẳng AB	M	$\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{AB}$
5	Qua A, B và song song (d)	A hoặc B	$\vec{n}_\alpha = [\overrightarrow{AB}, \vec{a}_d]$
	Qua A, B và song song CD	A hoặc B	$\vec{n}_\alpha = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$
	Chứa (d) và song song (d')	Lấy $M \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}]$
	Chứa (d) và song song AB	Lấy $M \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{a}_d, \overrightarrow{AB}]$
6	Qua 2 điểm M, N và vuông góc mặt phẳng (β)	M hoặc N	$\vec{n}_\alpha = [\overrightarrow{MN}, \vec{n}_\beta]$
	Chứa (d) và vuông góc mặt phẳng (β)	Lấy $M \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{a}_d, \vec{n}_\beta]$
7	Qua điểm M và vuông góc 2 mặt phẳng $(\beta), (\gamma)$	M	$\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_\gamma, \vec{n}_\beta]$
8	Qua điểm M và song 2 đường thẳng $(d), (d')$	M	$\vec{n}_\alpha = [\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}]$
9	Qua điểm M , vuông góc $mp(\beta)$ và song đường thẳng (d)	M	$\vec{n}_\alpha = [\vec{a}_d, \vec{n}_\beta]$

Dạng	Tính chất của mặt phẳng(α) (giả thiết cho)	Đi qua điểm	VTPT
10	Chứa (d) và đi qua $M \notin (d)$	M hoặc Lấy $N \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{MN}, \vec{a}_d]$
11	Chứa 2 đường thẳng (d) và (d') cắt nhau	Lấy $M \in (\Delta)$ hay $M \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}]$
12	Chứa 2 đường thẳng (d) và (d') song nhau	Lấy $M \in (\Delta)$, $N \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{a}_d, \vec{MN}]$ hay $\vec{n}_\alpha = [\vec{MN}, \vec{a}_{d'}]$

ĐẶC BIỆT: Mặt phẳng (α) cắt 3 trục tọa độ tại A, B, C sao cho $H(a;b;c)$ là trực tâm $\triangle ABC$

$$\rightarrow PT(\alpha): ax + by + cz - (a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

III. ĐƯỜNG THẲNG

1) Tóm tắt lý thuyết

1. Vector chỉ phương (VTCP) của đường thẳng:

ĐN: Vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng (d) gọi là VTCP của đường thẳng (d)

2. Phương trình: Đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, có:

$$\text{Phương trình tham số: } \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (1); \quad \text{Phương trình chính tắc: } \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \quad (2)$$

$(a_1, a_2, a_3 \neq 0)$

Chú ý:

• **Phương trình các trục tọa độ:**

$$Ox: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

• **Điều kiện để xác định VTCP của đường thẳng:**

1) Dùng định nghĩa: $\vec{a} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng (d) $\Leftrightarrow \vec{a}$ là VTCP của (d)

2) Nếu (d) vuông góc giá $\vec{a}, \vec{b}$ (không cùng phương) thì $\vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ là một VTCP của (d)

2) Phương pháp Lập phương trình đường thẳng:

Phương pháp: Xác định yếu tố: Điểm đi qua và VTCP (như bảng dưới đây)

B1. Từ giả thiết, xác định các vector và các yếu tố khác liên quan (nếu cần)

B2. Xác định tọa độ VTCP và tọa độ một điểm của đường thẳng

B3. Thay vào PT tham số hay PT chính tắc

Dạng	Tính chất của đường thẳng d (giả thiết cho)	Đi qua điểm	VTCP
1	Qua A, B	A, B	$\vec{a}_d = \vec{AB}$
2	Qua A và song song đường thẳng Δ	A	$\vec{a}_d = \vec{a}_\Delta$
3	Qua A và vuông góc mặt phẳng(α)	A	$\vec{a}_d = \vec{n}_\alpha$
4	Qua A và vuông góc 2 đường thẳng d_1, d_2	A	$\vec{a}_d = [\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}]$
5	Qua A , song 2 mp (α) và (β) (hay song mp(α) và chứa trong mp(β))	A	$\vec{a}_d = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta]$
6	Là giao tuyến của mp(α) và mp(β)	$I \in (\alpha) \cap (\beta)$	$\vec{a}_d = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta]$
7	Qua A , vuông góc đường thẳng Δ và song (hay chứa trong) mặt phẳng(α)	A	$\vec{a}_d = [\vec{a}_\Delta, \vec{n}_\alpha]$
8	Qua A , vuông góc đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2	A	$\vec{a}_d = [\vec{a}_{d_1}, \vec{n}_\alpha]$ (Với (α) là mặt phẳng qua A và d_2)
9	Qua A , vuông góc và cắt đường thẳng Δ	A	$\vec{a}_d = \vec{AB}$ (Với B là h/chiếu của A lên Δ)

Dạng	Tính chất của đường thẳng d (giả thiết cho)	Đi qua điểm	VTCP
			$\vec{a}_d = \left[\left[\vec{a}_\Delta, \vec{AM} \right], \vec{a}_\Delta \right]$ (Với $M \in \Delta$)
10	Là hình chiếu của đường thẳng Δ lên $mp(\alpha)$	A' và B' (lần lượt là h/chiếu của A, B lên (α) ; lấy $A, B \in d$)	$\vec{a}_d = \vec{A'B'}$
11	Qua A và cắt 2 đường thẳng d_1, d_2	A	$\vec{a}_d = \left[\left[\vec{a}_{d_1}, \vec{AM} \right], \left[\vec{a}_{d_2}, \vec{AN} \right] \right]$ (Lấy $M \in d_1, N \in d_2$)
12	Qua A và cắt đường thẳng Δ và song $mp(\alpha)$	A	$\vec{a}_d = \left[\left[\vec{a}_\Delta, \vec{AM} \right], \vec{n}_\alpha \right]$ (Với $M \in \Delta$)
13	Là đường vuông góc chung của d_1, d_2 chéo nhau	$A = d_2 \cap (\alpha)$ (Với $mp(\alpha)$ qua $M \in d_1$ và có VTPT $\vec{n}_\alpha = \left[\vec{a}_d, \vec{a}_{d_1} \right]$)	$\vec{a}_d = \left[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2} \right]$

IV. MẶT CẦU

1) Tóm tắt lý thuyết

a. Phương trình:

- Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính r có dạng: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ (1)
- Phương trình dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2) (với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$) là phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

2) Phương pháp Lập phương trình mặt cầu:

Cách 1: Xác định yếu tố: Tâm và bán kính, (như bảng dưới đây)

B1. Từ giả thiết, xác định các vectơ và các yếu tố khác liên quan (nếu cần)

B2. Xác định tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu

B3. Thay vào PT (1).

Dạng	Tính chất của mặt cầu (giả thiết cho)	Tâm	Bán kính
1	Mặt cầu (S) tâm I đi qua A	I	$r = IA$
2	Mặt cầu (S) đường kính AB	I là trung điểm AB	$r = \frac{AB}{2}$
3	Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc mặt phẳng (α)	I	$r = d(I, (\alpha))$
4	Mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc đường thẳng Δ	I	$r = d(I, \Delta)$

Cách 2 : Xác định hệ số

B1. Gọi mặt cầu đã cho có PT dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, (2)

B2. Từ giả thiết lập hệ 4 PT ẩn $a, b, c, d \rightarrow$ Giải tìm a, b, c, d

B3. Thay vào PT (2)

Dạng 5: Mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD (hay đi qua 4 điểm A, B, C, D)

+ Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2)

+ $A, B, C, D \in (S) \Rightarrow$ Tọa độ 3 điểm A, B, C, D thỏa mãn PT(2) $\rightarrow$ Thay tọa độ A, B, C, D vào PT(2),

Ta được hệ 4 phương trình 4 ẩn a, b, c, d .

+ Giải hệ tìm a, b, c, d

Dạng 6: Mặt cầu (S) đi qua 3 điểm A, B, C và tâm $I \in (\alpha)$

+ Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2) $\Rightarrow$ tâm $I(a; b; c)$

+ $A, B, C \in (S) \Rightarrow$ Tọa độ 3 điểm A, B, C thỏa mãn PT(2) $\rightarrow$ Thay tọa độ 3 điểm A, B, C vào PT(2), Ta được 3 phương trình 4 ẩn a, b, c, d .

+ Tâm $I(a;b;c) \in (\alpha) \Rightarrow a, b, c$ thỏa mãn phương trình mặt phẳng $(\alpha) \rightarrow$ Thay a, b, c vào phương trình mặt phẳng (α) , ta được thêm 1 PT 4 ẩn a, b, c, d .

+ Giải hệ 4 phương trình trên tìm a, b, c, d

Dạng 7: Mặt cầu (S) đi qua 2 điểm A, B và tâm $I \in (d)$

Cách 1: Đường thẳng (d) cho bởi phương trình tham số

+ $I \in (d) \Rightarrow I(x_0 + a_1t; y_0 + a_2t; z_0 + a_3t)$

+ $A, B \in (S) \Rightarrow AI^2 = BI^2 \rightarrow$ Ta được phương trình ẩn $t \rightarrow$ Giải tìm $t \rightarrow$ Thay t , tìm tọa độ điểm I

Cách 2: Đường thẳng (d) cho bởi phương trình chính tắc:

+ Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2) $\Rightarrow$ tâm $I(a;b;c)$

+ $A, B \in (S) \Rightarrow$ tọa độ điểm A, B thỏa mãn PT(2) $\rightarrow$ Thay tọa độ A, B vào PT(2), Ta được 2 phương trình 4 ẩn a, b, c, d .

+ Tâm $I(a,b,c) \in (d) \Rightarrow a, b, c$ thỏa mãn phương trình đường thẳng $(d) \rightarrow$ Thay a, b, c vào phương trình đường thẳng (d) , ta được thêm 2 PT 3 ẩn a, b, c

+ Giải hệ 4 phương trình trên tìm a, b, c, d

3) Phương trình tiếp diện của mặt cầu:

Dạng 1: Mặt phẳng (α) tiếp xúc mặt cầu (S) tại $A \Rightarrow$ mặt phẳng (α) qua A và có vtpt $\vec{n} = \overrightarrow{IA}$

Dạng 2: Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) và vuông góc đường thẳng Δ (có vtcp $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$)

+ Mặt phẳng (α) vuông góc $\Delta \Rightarrow$ mặt phẳng (α) nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm vtpt $\Rightarrow$ PT mặt phẳng (α) có dạng: $a_1x + a_2y + a_3z + m = 0$ (m chưa biết)

+ Mặt phẳng (α) tiếp xúc $(S) \Rightarrow d(I, (\alpha)) = r \rightarrow$ Giải tìm m

Dạng 3: Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) và song song với mặt phẳng (β) (có VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$)

+ Mặt phẳng (α) song song $(\beta) \Rightarrow$ mặt phẳng (α) nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm VTPT $\Rightarrow$ PT mặt phẳng (α) có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ (D chưa biết)

+ Mặt phẳng (α) tiếp xúc $(S) \Rightarrow d(I, (\alpha)) = r \rightarrow$ Giải tìm D

Dạng 4: Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) và song song 2 đường thẳng $(d_1), (d_2)$:

+ Mặt phẳng (α) song song 2 đường thẳng $(d_1), (d_2) \Rightarrow$ VTPT của mặt phẳng (α) là $\vec{n} = [\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}]$

$\Rightarrow$ PT mặt phẳng (α) có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ (D chưa biết)

+ Mặt phẳng (α) tiếp xúc $(S) \Rightarrow d(I, (\alpha)) = r \rightarrow$ Giải tìm D

4) Tìm tiếp điểm H của mặt cầu (S) và mặt phẳng (α) ($\rightarrow H$ là hình chiếu của tâm I trên mặt phẳng (α))

Như dạng toán tìm hình chiếu của điểm lên mặt phẳng

5) Giao điểm của đường thẳng và mặt cầu:

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$ (1) và mặt cầu $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ (2)

+ Thay phương trình đường thẳng d (1) vào phương trình mặt cầu (2), giải tìm t ,

+ Thay t vào (1), tìm được tọa độ giao điểm

6) Tìm bán kính r' và tâm H của đường tròn (C) (Là thiết diện của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S))

+ Bán kính $r' = \sqrt{r^2 - d^2(I, (\alpha))}$ (với I là tâm và r là bán kính mặt cầu (S))

+ Tìm tâm H là h/chiều của tâm I trên mặt phẳng (α)

V. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$(\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 = k.D_2 \end{cases}$$

$$(\alpha) \not\equiv (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 \neq k.D_2 \end{cases}$$

$(\alpha) \cap (\beta) = d \Leftrightarrow (A_1; B_1; C_1) \neq k(A_2; B_2; C_2)$	$(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$
---	--

2. Vị trí tương đối đường thẳng và mặt phẳng: ĐT $(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ và mp $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Lập PT tương giao giữa ĐT (d) và MP $(\alpha): A(x_0 + a_1 t) + B(y_0 + a_2 t) + C(z_0 + a_3 t) + D = 0$ (*), (t là ẩn)

- (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow d // (\alpha)$
- (*) có đúng 1 nghiệm $t = t_0 \Leftrightarrow d \cap (\alpha) = M(x_0 + a_1 t_0; y_0 + a_2 t_0; z_0 + a_3 t_0)$
- (*) vô số nghiệm $\Leftrightarrow d \subset (\alpha)$

3. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu:

Cho $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ (tâm I , bán kính r) và $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

$d(I, (\alpha)) > r$	$(S) \cap (\alpha) = \emptyset$	(α) không cắt (S)
$d(I, (\alpha)) = r$	$(S) \cap (\alpha) = \{H\}$	(α) tiếp xúc (S) tại H (H : tiếp điểm, (α) : tiếp diện)
$d(I, (\alpha)) < r$	$(S) \cap (\alpha) = C(H; r')$	(α) cắt (S) theo một đường tròn tâm H (là h/chiều của I lên (α)) và bán kính $r' = \sqrt{r^2 - d^2}$

4. Vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng: $(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ và $(d'): \begin{cases} x = x'_0 + a'_1 t' \\ y = y'_0 + a'_2 t' \\ z = z'_0 + a'_3 t' \end{cases}$

Lập Hệ PT tương giao giữa (d) và (d') : $\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + a'_1 t' \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + a'_3 t' \end{cases}$ (I). Khi đó:

VTTĐ	Điều kiện	VTTĐ	Điều kiện
d cắt d'	HPT (I) có đúng 1 nghiệm $(t; t') = (t_0; t'_0)$	$d // d'$	HPT (I) vô nghiệm và $(a_1; a_2; a_3) = k(a'_1; a'_2; a'_3)$
$d \equiv d'$	HPT (I) có vô số nghiệm	d chéo d'	HPT (I) vô nghiệm và $(a_1; a_2; a_3) \neq k(a'_1; a'_2; a'_3)$

5. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu:

Cho mặt cầu (S) có tâm I , bán kính r và đường thẳng Δ . Ta có:

$d(I, \Delta) > r$	$(S) \cap \Delta = \emptyset$	Δ không cắt (S)
$d(I, \Delta) = r$	$(S) \cap \Delta = \{H\}$	Δ tiếp xúc (S) tại H (H : tiếp điểm, Δ : tiếp tuyến)
$d(I, \Delta) < r$	$(S) \cap \Delta = \{A; B\}$	Δ cắt (S) tại 2 điểm A, B

VI. KHOẢNG CÁCH

Khoảng cách	Cách tính & Công thức
1. Từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$	$d(M, (\alpha)) = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
2. Giữa ĐT $(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ và MP $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ song song Với $(a_1; a_2; a_3) = k(A; B; C)$	Bằng khoảng cách từ 1 điểm thuộc ĐT Δ đến MP (α) . Cho $t = 0$ vào PT ĐT Δ , ta tìm được $M(x_0; y_0; z_0) \in \Delta$ $d(\Delta, (\alpha)) = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
3. Giữa 2 MP $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$ song song Với $(A'; B'; C') = k(A; B; C)$	Bằng khoảng cách từ 1 điểm thuộc MP này đến MP kia. Cho 2 số vào 2 ẩn của PT MP $(\beta) \rightarrow$ tính được ẩn còn lại $\rightarrow$ Ta được điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in (\beta)$

		$d((\alpha), (\beta)) = \frac{ Ax_o + By_o + Cz_o + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$	
4. Từ điểm M đến đường thẳng Δ		$d(M, \Delta) = \frac{ \overrightarrow{M_0M} \wedge \overrightarrow{a_\Delta} }{ \overrightarrow{a_\Delta} }, \quad (M_0 \in \Delta)$	
5. Giữa 2 đường thẳng song song d, Δ	Bằng khoảng cách từ 1 điểm thuộc ĐT này đến ĐT kia. Lấy điểm $M \in d$. Khi đó: $d(d, \Delta) = d(M, \Delta)$		
6. Giữa 2 đường thẳng chéo nhau d, Δ		$d(d, \Delta) = \frac{ \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{a_d} \wedge \overrightarrow{a_\Delta}) }{ \overrightarrow{a_d} \wedge \overrightarrow{a_\Delta} }, \quad (A \in d, B \in \Delta)$	

VII. GÓC

Góc	Cách tính & Công thức
1. ABC :	$\cos ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} }$
2. Giữa 2 vector:	$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{ \vec{a} \cdot \vec{b} }{ \vec{a} \cdot \vec{b} }$
3. Giữa hai MP $(\alpha), (\beta)$ (Có lần lượt 2 VTPT $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$)	$\cos((\alpha), (\beta)) = \frac{ \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta }{ \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta }$
4. Giữa hai ĐT d, Δ (Có lần lượt 2 VTCP $\vec{a_d}, \vec{a_\Delta}$)	$\cos(d, \Delta) = \frac{ \vec{a_d} \cdot \vec{a_\Delta} }{ \vec{a_d} \cdot \vec{a_\Delta} }$
5. Giữa ĐT Δ và MP (α) (Δ có 1 VTCP $\vec{a_\Delta}$ và (α) có 1 VTPT $\vec{n}_\alpha$)	$\sin(\Delta, (\alpha)) = \frac{ \vec{a_\Delta} \cdot \vec{n}_\alpha }{ \vec{a_\Delta} \cdot \vec{n}_\alpha }$

VIII. HÌNH CHIẾU, ĐIỂM ĐỐI XỨNG

1. Tìm H là hình chiếu của M lên $mp(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

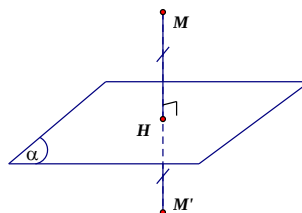
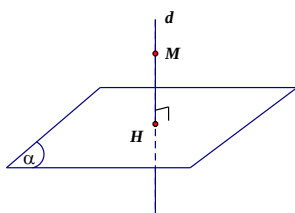
Cách 1. H là hình chiếu của M lên $(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (\alpha) \\ \overrightarrow{MH} = k \cdot \vec{n}_\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax_H + By_H + Cz_H + D = 0 \\ x_H - x_M = A.k \\ y_H - y_M = B.k \\ z_H - z_M = C.k \end{cases}$

→ Giải HPT, tìm được tọa độ điểm H

Cách 2. → Lập PT (tham số) đường thẳng (d) qua M và vuông góc $mp(\alpha)$:
$$\begin{cases} x = x_M + At \\ y = y_M + Bt, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_M + Ct \end{cases}$$

→ Lập PT tương giao giữa (d) và (α) : $A(x_M + At) + B(y_M + Bt) + C(z_M + Ct) + D = 0 \rightarrow$ Giải tìm t

→ Thay t vào PT $(d) \rightarrow$ Ta được tọa độ điểm H



ĐẶC BIỆT. Công thức tính nhanh:

Lập PT: $A(x_M + At) + B(y_M + Bt) + C(z_M + Ct) + D = 0 \rightarrow$ Giải tìm $t \rightarrow$ Thay t vào 3 biểu thức trong dấu ngoặc $\rightarrow$ Tính được tọa độ hình chiếu H .

2. Tìm điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (α)

Tìm hình chiếu H của M lên mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \rightarrow$ Tọa độ M' :

$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$$

3. Tìm H là hình chiếu của M lên đường thẳng (d) :

$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases}$$

Cách 1. H là hình chiếu của M lên $(d) \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (d) \\ \overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{u_d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (d) \\ \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{a_d} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = x_o + a_1 t \\ y_H = y_o + a_2 t \\ z_H = z_o + a_3 t \\ (x_H - x_M) \cdot a_1 + (y_H - y_M) \cdot a_2 + (z_H - z_M) \cdot a_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Giải hệ PT, tìm tọa độ điểm } H.$$

Cách 2. $\rightarrow$ Lập PT mp (α) qua M và vuông góc ĐT (d) : $(x - x_M) \cdot a_1 + (y - y_M) \cdot a_2 + (z - z_M) \cdot a_3 = 0 \rightarrow$ Đưa về dạng: $a_1 x + a_2 y + a_3 z + n = 0$

$\rightarrow$ Lập PT tương giao giữa (d) và (α) : $a_1(x_o + a_1 t) + a_2(y_o + a_2 t) + a_3(z_o + a_3 t) + n = 0 \rightarrow$ Giải tìm t ;

$\rightarrow$ Thay t vào PT $(d) \rightarrow$ Ta được tọa độ điểm H

ĐẶC BIỆT. Công thức tính nhanh:

Lập PT: $a_1(x_o + a_1 t - x_M) + a_2(y_o + a_2 t - y_M) + a_3(z_o + a_3 t - z_M) = 0 \rightarrow$ Giải tìm $t \rightarrow$ Thay t vào PT ĐT $d \rightarrow$ Tính được tọa độ hình chiếu H .

4. Tìm Điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng (d) :

Tìm hình chiếu H của M lên đường thẳng $(d) \Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \rightarrow$ Tọa độ M' :

$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$$

HÌNH CHIẾU CỦA ĐIỂM LÊN MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ, TRỤC TỌA ĐỘ

Hình chiếu của điểm $M(a; b; c)$ lên $\rightarrow$	(Oxy) là $H(a; b; 0)$	Hình chiếu của điểm $M(a; b; c)$ lên $\rightarrow$	Ox là $H(a; 0; 0)$
	(Oxz) là $H(a; 0; c)$		Oy là $H(0; b; 0)$
	(Oyz) là $H(0; b; c)$		Oz là $H(0; 0; c)$

IX. TÌM TỌA ĐỘ ĐIỂM THỎA ĐIỀU KIỆN “LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT”

Dạng 1: Tìm tọa độ điểm M thuộc mp (α) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

TH1: Nếu A, B khác phía so với mp (α) thì $M = AB \cap (\alpha)$

TH2: Nếu A, B cùng phía so với mp (α) thì $M = AB' \cap (\alpha)$, với B' là hình chiếu của B lên mp (α)
hay $M = A'B \cap (\alpha)$, với A' là hình chiếu của A lên mp (α)

Chú ý: Vị trí tương đối của 2 điểm với đường thẳng:

Cho hai điểm $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Khi đó:

☞ M và N nằm cùng phía đối với mp $(\alpha) \Leftrightarrow (Ax_M + By_M + Cz_M + D)(Ax_N + By_N + Cz_N + D) > 0$

☞ M và N nằm khác phía đối với mp $(\alpha) \Leftrightarrow (Ax_M + By_M + Cz_M + D)(Ax_N + By_N + Cz_N + D) < 0$

Dạng 2: Tìm tọa độ điểm M thuộc $mp(\alpha)$ (hay Δ) sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

Tìm H, K lần lượt là hình chiếu của A, B lên $mp(\alpha)$ (hay Δ) $\rightarrow M$ là trung điểm HK .

Dạng 3: Tìm tọa độ điểm M thuộc $mp(\alpha)$ (hay Δ) sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất.

Tìm I là trung điểm $AB \rightarrow M$ là hình chiếu của I lên $mp(\alpha)$ (hay Δ).

X. TỌA ĐỘ CÁC TÂM CỦA TAM GIÁC

① G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$

② H là trực tâm tam giác $ABC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ H \in (ABC) \end{cases}$

③ I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{IN} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ I \in (ABC) \end{cases}$ (Với M, N lần lượt là trung điểm BC, AC)

④ I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $ABC \Rightarrow BC \cdot \overrightarrow{IA} + CA \cdot \overrightarrow{IB} + AB \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{BC \cdot x_A + CA \cdot x_B + AB \cdot x_C}{BC + CA + AB} \\ y_I = \frac{BC \cdot y_A + CA \cdot y_B + AB \cdot y_C}{BC + CA + AB} \\ z_I = \frac{BC \cdot z_A + CA \cdot z_B + AB \cdot z_C}{BC + CA + AB} \end{cases}$

PHU LỤC
(KIẾN THỨC 10, 11)

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. NHỊ THỨC BẬC NHẤT:

Cho nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$)

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	Trái dấu a	0	Cùng dấu a

II. TAM THỨC BẬC 2, PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2:

1) Công thức tính nghiệm PT $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$). Tính $\Delta = b^2 - 4ac$ hay $\Delta' = (b')^2 - ac$, $\left(b' = \frac{b}{2}\right)$

Dấu Δ	Nghiệm PT	Dấu Δ'	Nghiệm PT
$\Delta > 0$	PT có 2 nghiệm phân biệt $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\Delta' > 0$	PT có 2 nghiệm phân biệt $x = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$
$\Delta = 0$	PT có nghiệm kép $x = \frac{-b}{2a}$	$\Delta' = 0$	PT có nghiệm kép $x = \frac{-b'}{a}$
$\Delta < 0$	PT vô nghiệm.	$\Delta' < 0$	PT vô nghiệm.

❖ Nhẩm nghiệm PT bậc hai:

Dấu hiệu	Công thức nghiệm	Dấu hiệu	Công thức nghiệm
$a + b + c = 0$	$x = 1; x = \frac{c}{a}$	$a - b + c = 0$	$x = -1; x = \frac{-c}{a}$
$ax^2 + bx = 0$	$x = 0; x = \frac{-b}{a}$	$ax^2 + c = 0$	Vô nghiệm, ($c > 0$) $x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}, (c \leq 0)$
$ac + 1 = b$	$x = -c; x = -\frac{1}{a}$	$ac + 1 = -b$	$x = c; x = \frac{1}{a}$

2) Dấu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$), $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$		$\Delta = 0$		$\Delta > 0$	
x	$-\infty$ $+\infty$	x	$-\infty$ $\frac{-b}{2a}$ $+\infty$	x	$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$
$f(x)$	Cùng dấu a	$f(x)$	Cùng dấu a 0 Cùng dấu a	$f(x)$	Cùng dấu a 0 Trái dấu a 0 Cùng dấu a

3) Điều kiện để tam thức bậc 2 không đổi dấu trên tập số thực:

$ax^2 + bx + c > 0$ (< 0), $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \text{ (} a < 0 \text{)} \\ \Delta < 0 \end{cases}$	$ax^2 + bx + c \geq 0$ (≤ 0), $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \text{ (} a < 0 \text{)} \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$
--	---

4) Dấu nghiệm phương trình bậc hai:

Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (*) (với $\Delta = b^2 - 4ac$, $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$). Khi đó, ta có:

Nghiệm PT (*)	Điều kiện	Nghiệm PT (*)	Điều kiện
2 nghiệm trái dấu	$a \cdot c < 0$	2 nghiệm phân biệt cùng dấu	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$

2 nghiệm phân biệt cùng dương (cùng âm)	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \quad (S < 0) \end{cases}$	1 nghiệm kép dương (âm)	$\begin{cases} a \neq 0 \\ x = -\frac{b}{2a} > 0 \quad \left(x = -\frac{b}{2a} < 0 \right) \\ \Delta = 0 \end{cases}$
---	--	-------------------------	--

5) So sánh một số với hai nghiệm:

Hệ thức so sánh	Điều kiện	Hệ thức so sánh	Điều kiện
$x_1 < \beta < x_2$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\beta) < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \beta < x_1 < x_2 \\ x_1 < x_2 < \beta \end{cases}$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\beta) > 0 \end{cases}$
$\beta < x_1 < x_2$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\beta) > 0 \\ \frac{S}{2} - \beta > 0 \end{cases}$	$x_1 < x_2 < \beta$	$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a.f(\beta) > 0 \\ \frac{S}{2} - \beta < 0 \end{cases}$

6) Biểu thức đối xứng đối với x_1 và x_2 :

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2.x_1.x_2 = S^2 - 2P$	$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4.x_1.x_2 = S^2 - 4P$
$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3PS$	$x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = P.S$
$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P}$	$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P}$

III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC 3:

Cho PT: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, (a \neq 0)$ (1)

1. Các trường hợp nghiệm:

- ☛ Một nghiệm đơn duy nhất
- ☛ Hai nghiệm phân biệt (gồm 1 nghiệm đơn và 1 nghiệm kép)
- ☛ Ba nghiệm đơn phân biệt

2. Cách phân tích đa thức bậc 3 thành nhân tử:

Nhắm 1 nghiệm $x = x_0 \rightarrow$ Dùng sơ đồ Hoocner, biến đổi PT (1) về dạng:

$$(x - x_0)(Ax^2 + Bx + C) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ Ax^2 + Bx + C = 0, (2) \end{cases}, \begin{cases} A = a, B = a.x_0 + b, C = \frac{-d}{x_0} \end{cases}$$

$\rightarrow$ Biện luận nghiệm PT(2), suy ra nghiệm PT(1) (**Chú ý:** Xét trường hợp PT(2) có nghiệm $x = x_0$)

IV. PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 TRÙNG PHƯƠNG:

Cho PT $ax^4 + bx^2 + c = 0, (*) \rightarrow$ Đặt $t = x^2, t \geq 0 \rightarrow$ Ta được PT: $at^2 + bt + c = 0 (**)$. Khi đó:

Nghiệm PT (*)	Nghiệm PT (**)
4 nghiệm phân biệt	2 nghiệm dương phân biệt
3 nghiệm phân biệt	1 nghiệm dương và 1 nghiệm bằng 0
2 nghiệm phân biệt (đối nhau)	2 nghiệm trái dấu hoặc có nghiệm kép dương
1 nghiệm (kép)	1 nghiệm bằng không hoặc {1 nghiệm âm và 1 nghiệm bằng 0}
Vô nghiệm	2 nghiệm âm hoặc 1 nghiệm kép âm hoặc vô nghiệm

V. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \text{ (hay } f(x) \geq 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$	Mở rộng: $\sqrt[k]{P(x)} = \sqrt[k]{Q(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} Q(x) \geq 0 \text{ (hay } P(x) \geq 0) \\ P(x) = Q(x) \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$	$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) + f(x) + 2\sqrt{f(x).g(x)} = h(x) \end{cases}$

$\sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$	$\sqrt[3]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^3(x)$
$\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)} \Leftrightarrow f(x) + g(x) + 3\sqrt[3]{f(x).g(x).h(x)} = h(x)$	

VI. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$	$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$	$f(x)\sqrt{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$

VII. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

$ f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$	$ f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = \pm g(x) \end{cases}$
$ f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x) \vee g(x) < f(x)$	$ f(x) < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$

VIII. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

1. Hệ phương trình đối xứng loại 1: Là hệ mà khi ta thay x bởi y và thay y bởi x thì mỗi phương trình của hệ không thay đổi.

Cách giải: Đặt $S = x + y$ và $P = xy \rightarrow$ Đưa về hệ mới theo S và $P \rightarrow$ Giải hệ mới $\rightarrow$ Suy ngược lại x, y .

Chú ý: Nếu $(x; y)$ là nghiệm thì $(y; x)$ cũng là nghiệm.

2. Hệ phương trình đối xứng loại 2: Là hệ mà khi ta thay x bởi y và thay y bởi x thì phương trình này trở thành phương trình kia.

Cách giải: Lấy phương trình này trừ phương trình kia về theo về.

BẤT ĐẲNG THỨC

I. TÍNH CHẤT BẤT ĐẲNG THỨC:

$A > B \Rightarrow A + C > B + C$	$\begin{cases} A > B \\ C > D \end{cases} \Rightarrow A + C > B + D$	$A > B > 0 \Rightarrow \begin{cases} A^2 > B^2 \\ \sqrt{A} > \sqrt{B} \end{cases}$
$A > B \Rightarrow \begin{cases} AC > BC, C > 0 \\ AC < BC, C < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} A > B > 0 \\ C > D > 0 \end{cases} \Rightarrow AC > BD$	$A > B \Rightarrow \begin{cases} A^3 > B^3 \\ \sqrt[3]{A} > \sqrt[3]{B} \end{cases}$

II. BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY (CÔ-SI)

1) Bất đẳng thức về trung bình cộng và trung bình nhân (Bất đẳng thức Cauchy)

* Đối với hai số không âm. Với mọi $a \geq 0, b \geq 0$, ta có:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

* Đối với n số không âm ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Với n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ bất kì, Ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

2) Bất đẳng thức Cauchy mở rộng

Với n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ bất kì, với $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$ thỏa $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$. Ta có:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n \geq a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

III. BẤT ĐẲNG THỨC BU-NHI-A-CÔP-XKI

1) Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki.

* Đối với hai cặp số thực. Với hai cặp số thực $(a;b)$ và $(x;y)$ bất kỳ ta có:

$$(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ ($xy \neq 0$)

* Đối với hai bộ n số thực ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Với hai bộ n số thực $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ và $(b_1; b_2; \dots; b_n)$ bất kỳ ta có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ ($b_1, b_2, \dots, b_n \neq 0$)

2) Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki mở rộng

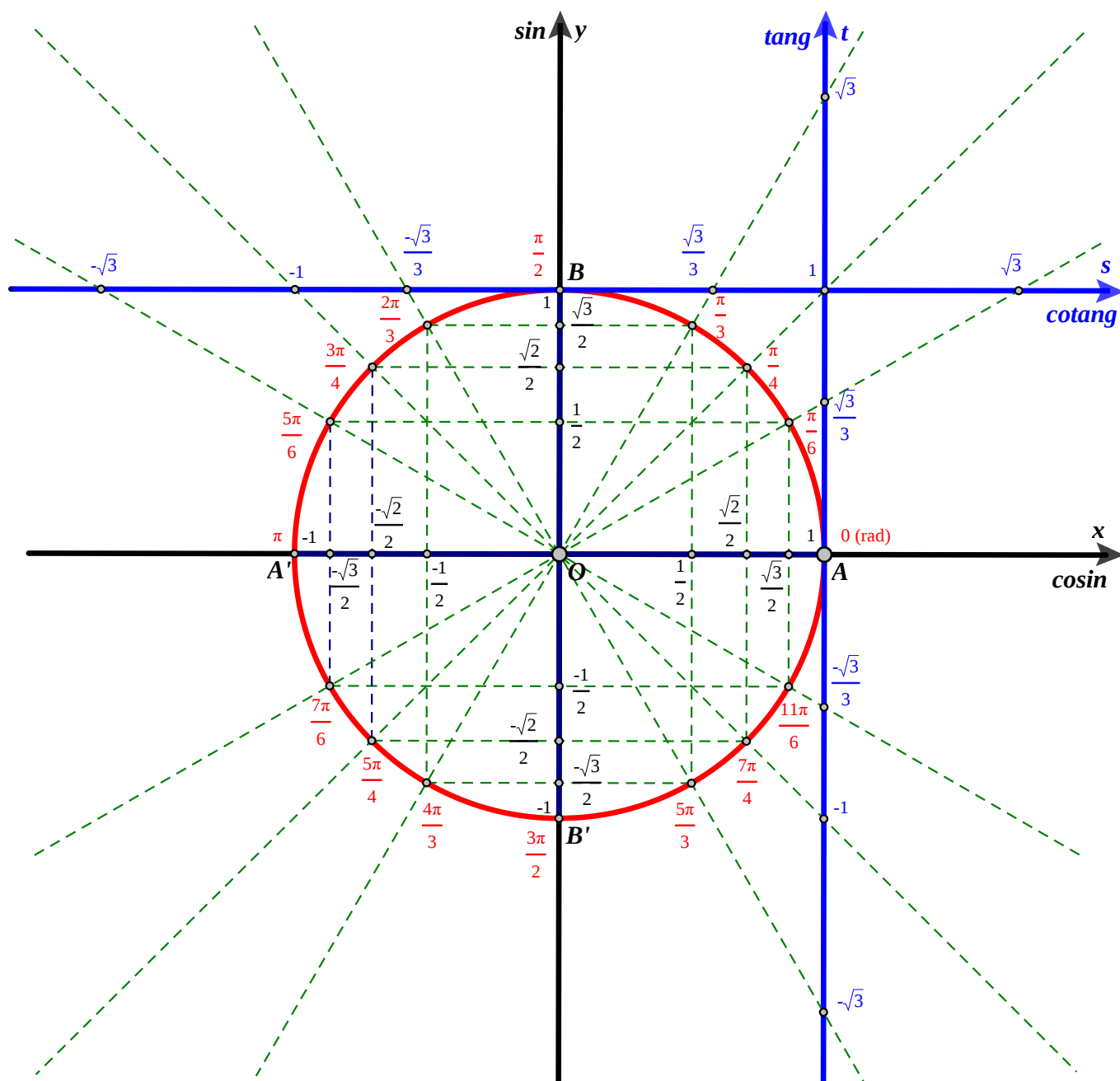
Cho dãy m số thực không âm: $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n; \dots; c_1, c_2, \dots, c_n$, ta có

$$(a_1b_1 \dots c_1 + a_2b_2 \dots c_2 + \dots + a_nb_n \dots c_n)^m \leq (a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m)(b_1^m + b_2^m + \dots + b_n^m) \dots (c_1^m + c_2^m + \dots + c_n^m)$$

Đẳng thức xảy ra khi: $a_1 : b_1 : \dots : c_1 = a_2 : b_2 : \dots : c_2 = \dots = a_n : b_n : \dots : c_n$

LƯỢNG GIÁC

I. ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC

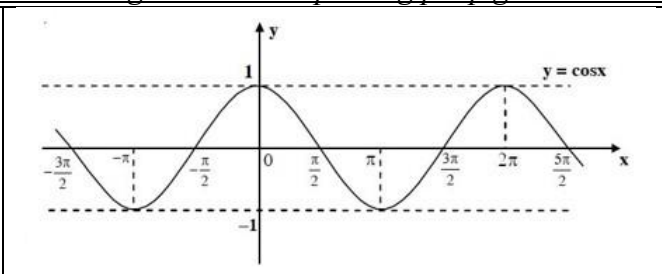
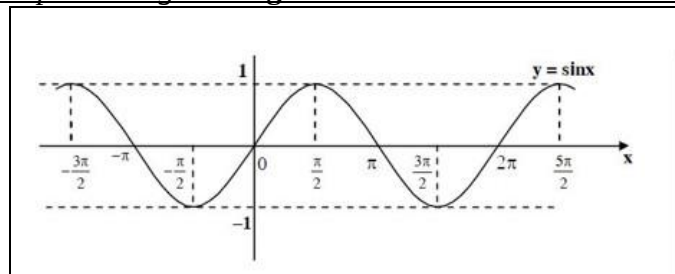


II. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1) Hằng đẳng thức cơ bản: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \quad \tan a \cdot \cot a = 1$ $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \quad 1 + \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$	2) Cung liên kết: Cos đối $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$ Sin bù $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$
3) Công thức cộng: $\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$ $\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$ $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}$	Chéo phụ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$
4) Công thức nhân đôi: $\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ $= 2 \cos^2 a - 1$ $= 1 - 2 \sin^2 a$ $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$	Tang, Cotang hơn kém π $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$ $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$ $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$ $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$
5) Công thức hạ bậc $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ $\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$	Sin hơn = Cos kém ($\pi/2$) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$
6) Công thức biến tích thành tổng $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$	7) Công thức biến tổng thành tích $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$ $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$ $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$
8) Công thức đặc biệt $(\cos x \pm \sin x)^2 = 1 \pm \sin 2x,$ $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2 \cos^2 x \cdot \sin^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x,$ $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$ $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$ $\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3 \cos^2 x \cdot \sin^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$ $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	

III. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

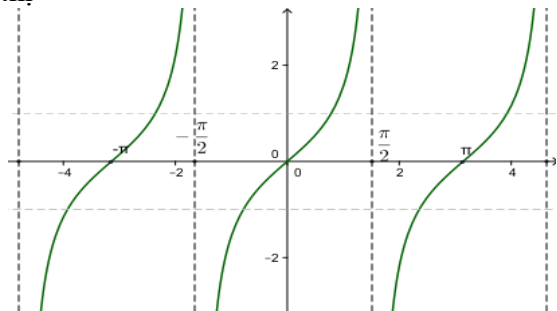
$y = \sin x$ TXĐ: $D = \mathbb{R}$. TGT: $T = [-1; 1]$ Là hàm lẻ $\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ Tuần hoàn với chu kỳ 2π Đồ thị:	$y = \cos x$ TXĐ: $D = \mathbb{R}$. TGT: $T = [-1; 1]$ Là hàm chẵn $\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua trục tung Tuần hoàn với chu kỳ 2π Đồ thị:
---	--



$y = \tan x$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$. TGT: $T = \mathbb{R}$

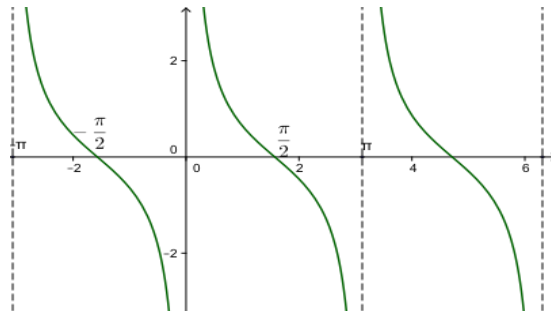
Là hàm lẻ $\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ
Tuần hoàn với chu kỳ π
Đồ thị



$y = \cot x$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$. TGT: $T = \mathbb{R}$

Là hàm lẻ $\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ
Tuần hoàn với chu kỳ π
Đồ thị



IV. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH:

- a. **Phương pháp:** Lập điều kiện xác định $\rightarrow$ Giải, tìm điều kiện của biến $\rightarrow$ Kết luận TXĐ
b. **Các dạng biểu thức có điều kiện xác định:**

$\frac{u}{v}$ xác định khi $v \neq 0$	$\sqrt{u}$ xác định khi $u \geq 0$	$\tan u$ xác định khi $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$	$\cot u$ xác định khi $u \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
---------------------------------------	------------------------------------	---	---

V. BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC:

$-1 \leq \sin u \leq 1$ $-1 \leq \cos u \leq 1$	$0 \leq \sin^2 u \leq 1$ $0 \leq \cos^2 u \leq 1$	$0 \leq \sin u \leq 1$ $0 \leq \cos u \leq 1$	$\tan^2 u \geq 0$ $\cot^2 u \geq 0$
$-\sqrt{2} \leq \sin u \pm \cos u \leq \sqrt{2}$	$-\frac{1}{2} \leq \sin u \cdot \cos u \leq \frac{1}{2}$	$-1 \leq \sin^2 u - \cos^2 u \leq 1$	

VI. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Dạng $f(u) = a$	Dạng $f(u) = f(v)$
$\sin u = a \Leftrightarrow \begin{cases} u = \arcsin a + k2\pi \\ u = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases}, (a \leq 1)$	$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}$
$\cos u = a \Leftrightarrow u = \pm \arccos a + k2\pi, (a \leq 1)$	$\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi$
$\tan u = a \Leftrightarrow u = \arctan a + k\pi$	$\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi$
$\cot u = a \Leftrightarrow u = \operatorname{arccot} a + k\pi$	$\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi$

TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT: Đối với PT $\sin u = a, \cos u = a$

- ❖ Nếu $a = \pm 1$ thì chỉ cần lấy 1 trong 2 công thức nghiệm.
- ❖ Nếu $a = 0$ thì chỉ cần lấy 1 trong 2 công thức nghiệm và thay $k2\pi$ thành $k\pi$

$\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi$	$\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$	$\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$
$\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi$	$\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi$	$\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi$

VII. PHƯƠNG TRÌNH THƯỜNG GẶP

a. Phương trình bậc hai đối với một HSLG là PT có dạng: $a \sin^2 u + b \sin u + c = 0$ (1) (Trương tự cho $\cos u, \tan u, \cot u$) Cách giải: Xem $\sin u$ là ẩn, Ta có PT bậc 2 với ẩn là $\sin u \rightarrow$ Giải PT bậc 2, Ta được PTLG cơ bản $\rightarrow$ Giải PTLG cơ bản, tìm nghiệm.	
b. Phương trình bậc nhất đối với $\sin u, \cos u$ là PT có dạng: $a \sin u + b \cos u = c$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) (2) Cách giải: B1. Kiểm tra điều kiện có nghiệm: Nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$ thì PT có nghiệm B2. Chia 2 vế PT cho $\sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow$ Đặt: $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha$. $\sin u \cdot \cos \alpha + \cos u \cdot \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(u + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} (*)$ Ta được PT: B3. Giải PT cơ bản (*) $\rightarrow$ Tìm nghiệm. Mở rộng: Loại 1: $a \sin u + b \cos u = c \cdot \sin v$ ($a^2 + b^2 = c^2$) hay $a \sin u + b \cos u = c \cdot \cos v$ ($a^2 + b^2 = c^2$) Loại 2: $a \sin u + b \cos u = c \cdot \sin v + d \cdot \cos v$ ($a^2 + b^2 = c^2 + d^2$) Cách giải: Chia 2 vế cho $\sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow$ Biến đổi đưa về dạng $\sin t = \sin r$ hay $\cos t = \cos r$	

VIII. PHƯƠNG PHÁP KIỂM TRA ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH:

- Cách 1:** $\rightarrow$ Biểu diễn điểm xác định công thức điều kiện và công thức nghiệm lên Đường tròn lượng giác
 $\rightarrow$ Loại bỏ điểm trùng của nghiệm so với điểm của điều kiện
 $\rightarrow$ Kết luận: Nghiệm PT là những điểm còn lại (Mỗi điểm cộng thêm $k2\pi$).
- Cách 2:** $\rightarrow$ Cho tham số nguyên (k) trong công thức điều kiện và công thức nghiệm chạy từ 0 đến khi tìm đủ số điểm trên đoạn $[0; \pi]$
 $\rightarrow$ Loại bỏ điểm trùng của nghiệm so với điểm của điều kiện
 $\rightarrow$ Kết luận: Nghiệm PT là những điểm còn lại (Mỗi điểm cộng thêm $k2\pi$).

TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

I. QUY TẮC ĐẾM

- Quy tắc cộng:** Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động: Hành động thứ nhất có n cách thực hiện, hành động thứ hai có m cách thực hiện (không trùng với bất cứ cách nào của cả hai hành động thứ nhất). Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $n + m$ cách.
- Quy tắc nhân:** Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp: Hành động thứ nhất có n cách thực hiện, với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất có m cách thực hiện hành động thứ hai. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $n \cdot m$ cách.

II. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP – TỔ HỢP

	Định nghĩa	Công thức tính số lượng
Hoán vị	Mỗi vị trí sắp xếp thứ tự của n phần tử ($n \in \mathbb{N}^*$) gọi là một hoán vị của n phần tử.	$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$
Chỉnh hợp	Mỗi vị trí sắp xếp thứ tự k phần tử được lấy trong n phần tử ($n \geq k$) gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.	$A_n^k = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
Tổ hợp	Mỗi tập hợp k phần tử được lấy trong n phần tử ($n \geq k$) gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

• Công thức đặc biệt:

$0! = 1$	Nếu $k = n$ thì $A_n^n = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$.
----------	---

$C_n^0 = C_n^n = 1$	$C_n^1 = n$
$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n)$	$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \quad (0 \leq k < n)$
$\sum_{k=0}^n C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n \quad (0 \leq k \leq n)$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{A_n^k}{k!}$

III. NHỊ THỨC NIU-TON

1. Công thức nhị thức Niu-Ton:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k, (n \in \mathbb{N}^*)$$

2. Tính chất của nhị thức Niu-ton

- Số các số hạng tử của công thức là $n+1$
- Số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng từ 0 đến n đồng thời tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử đều bằng n
- Số hạng tổng quát thứ $k+1$ có dạng $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \quad (k=0,1,\dots,n)$
- Các hệ số của nhị thức cách đều hai số hạng đầu và cuối bằng nhau: $C_n^k = C_n^{n-k}; 0 \leq k \leq n$

3. Một số dạng đặc biệt

Dạng 1. Thay $a=1$ và $b=x$ vào (1), ta được: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$
 $\rightarrow$ Cho $x=1 \Rightarrow C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$

Dạng 2. Thay $a=1, b=-x$ vào (1), ta được: $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^k C_n^k x^k + \dots + (-1)^n C_n^n x^n$
 $\rightarrow$ Cho $x=1 \Rightarrow C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$

IV. XÁC SUẤT

1. Xác suất của biến cố.

a) Định nghĩa cổ điển của xác suất:

b) Xác suất của biến cố A là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$$

Trong đó: $n(A) = |\Omega_A|$ là số phần tử (hay kết quả thuận lợi) của biến cố A ;

$n(\Omega) = |\Omega|$ là số phần tử của không gian mẫu (hay tất cả kết quả có thể xảy ra của phép thử).

c) Tính chất:

- $0 \leq P(A) \leq 1$; $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$

2. Biến cố đối

a) **Định nghĩa:** Biến cố không xảy ra A gọi là biến cố đối của A , Kí hiệu: $\overline{A}$

b) Tính chất:

- $\overline{\overline{A}} = A$; $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Hai biến cố đối nhau là hai biến cố xung khắc.

• CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Bài toán đếm:

Quy tắc: Hành động nào có điều kiện mạnh nhất thì thực hiện đếm trước nhất,...

Cách 1: Đếm trực tiếp

- Nhận xét đề bài để phân chia các trường hợp xảy ra đối với bài toán cần đếm.
- Đếm số phương án thực hiện trong mỗi trường hợp đó
- Kết quả của bài toán là tổng số phương án đếm trong cách trường hợp trên

Cách 2: Đếm gián tiếp (đếm phần bù)

Trong trường hợp hành động H chia nhiều trường hợp thì ta đi đếm phần bù của bài toán như sau:

- Đếm số phương án thực hiện hành động H (không cần quan tâm đến có thỏa tính chất T hay không) ta được a phương án.
 - Đếm số phương án thực hiện hành động H không thỏa tính chất T ta được b phương án.
- Khi đó số phương án thỏa yêu cầu bài toán là: $a - b$.

Dạng 1.1: Đếm số lượng số tự nhiên

Khi lập một số tự nhiên $x = \overline{a_1 \dots a_n}$ ta cần lưu ý:

- * $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ và $a_1 \neq 0$.
- * x là số chẵn $\Leftrightarrow a_n$ là số chẵn
- * x là số lẻ $\Leftrightarrow a_n$ là số lẻ
- * x chia hết cho 3 $\Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n$ chia hết cho 3
- * x chia hết cho 4 $\Leftrightarrow \overline{a_{n-1}a_n}$ chia hết cho 4
- * x chia hết cho 5 $\Leftrightarrow a_n \in \{0, 5\}$
- * x chia hết cho 6 $\Leftrightarrow x$ là số chẵn và chia hết cho 3
- * x chia hết cho 8 $\Leftrightarrow \overline{a_{n-2}a_{n-1}a_n}$ chia hết cho 8
- * x chia hết cho 9 $\Leftrightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_n$ chia hết cho 9.
- * x chia hết cho 11 $\Leftrightarrow$ tổng các chữ số ở hàng lẻ trừ đi tổng các chữ số ở hàng chẵn là một số chia hết cho 11.
- * x chia hết cho 25 $\Leftrightarrow$ hai chữ số tận cùng là 00, 25, 50, 75.

Dạng 1.2: Đếm số phương án liên quan đến kiến thức thực tế

Dạng 1.3: Đếm số phương án liên quan đến hình học

Dạng 2: Xác định các hệ số, số hạng trong khai triển nhị thức Newton

Phương pháp:

$$(ax^p + bx^q)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (ax^p)^{n-k} (bx^q)^k = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k x^{np-pk+qk}$$

Số hạng chứa x^m ứng với giá trị k thỏa: $np - pk + qk = m$.

$$\text{Từ đó tìm } k = \frac{m - np}{p - q}$$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^m là: $C_n^k a^{n-k} b^k$ với giá trị k đã tìm được ở trên.

Nếu k không nguyên hoặc $k > n$ thì trong khai triển không chứa x^m , hệ số phải tìm bằng 0.

Chú ý: Xác định hệ số của số hạng chứa x^m trong khai triển

$$P(x) = (a + bx^p + cx^q)^n \text{ được viết dưới dạng } a_0 + a_1x + \dots + a_{2n}x^{2n}.$$

Ta làm như sau:

$$* \text{Viết } P(x) = (a + bx^p + cx^q)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} (bx^p + cx^q)^k;$$

* Viết số hạng tổng quát khi khai triển các số hạng dạng $(bx^p + cx^q)^k$ thành một đa thức theo lũy thừa của x .

* Từ số hạng tổng quát của hai khai triển trên ta tính được hệ số của x^m .

Chú ý: Để xác định hệ số lớn nhất trong khai triển nhị thức Niuton

Ta làm như sau:

- * Tính hệ số a_k theo k và n ;
- * Giải bất phương trình $a_{k-1} \leq a_k$ với ẩn số k ;
- * Hệ số lớn nhất phải tìm ứng với số tự nhiên k lớn nhất thỏa mãn bất phương trình trên.

$$\text{Dạng 2: Bài toán tổng } \sum_{k=0}^n a_k C_n^k b^k.$$

Phương pháp 1: Dựa vào khai triển nhị thức Newton

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + a^{n-1} b C_n^1 + a^{n-2} b^2 C_n^2 + \dots + b^n C_n^n.$$

Ta chọn những giá trị a, b thích hợp thay vào đẳng thức trên.

Một số kết quả ta thường hay sử dụng:

$$* C_n^k = C_n^{n-k} \quad * C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$* \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$$

$$* \sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k} = \sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k$$

$$* \sum_{k=0}^n C_n^k a^k = (1+a)^n$$

Phương pháp 2: Dựa vào đẳng thức đặc trưng

Mẫu chốt của cách giải trên là ta tìm ra được đẳng thức (*) và ta thường gọi (*) là đẳng thức đặc trưng. Cách giải ở trên được trình bày theo cách xét số hạng tổng quát ở về trái (thường có hệ số chứa k) và biến đổi số hạng đó có hệ số không chứa k hoặc chứa k nhưng tổng mới dễ tính hơn hoặc đã có sẵn.

Dạng 3: Tính xác suất

Phương pháp tính xác suất

Bước 1. Mô tả không gian mẫu (Nếu được). Kiểm tra tính hữu hạn của Ω , tính đồng khả năng của các kết quả $\rightarrow$ Tính $n(\Omega)$

Bước 2. Đặt tên cho các biến cố bằng các chữ cái $A, B, \dots$

Bước 3. Xác định $A, B, \dots$. Tính $n(A), n(B), \dots$

Bước 4. Tính $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}, P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)}, \dots$

CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

	Cấp số cộng	Cấp số nhân
Định nghĩa	Dãy số (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d, \forall n \in \mathbb{N}^*$	Dãy số (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \cdot q, (\forall n \in \mathbb{N}^*)$
Số hạng tổng quát	$u_n = u_1 + (n-1)d, (\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$	$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, (\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$
Tính chất	$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, (\forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*)$	$u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}, (\forall k \geq 2, k \in \mathbb{N}^*)$
Tổng n số hạng đầu tiên $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$	$S = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$	Khi $q=1$: $S_n = nu_1$ Khi $q \neq 1$: $S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

GIỚI HẠN

I. Giới hạn của dãy số:

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 (k \in \mathbb{Z}^+)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 (q < 1)$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} C = C$ 2. Định lý: Cho $\lim u_n = a, \lim v_n = b$. Ta có: $\lim(u_n \pm v_n) = a \pm b$ $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$ $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$) $\lim u_n = a$ $\lim \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{a} (u_n, a \geq 0)$ 3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \dots = \frac{u_1}{1-q} (q < 1)$	1. Giới hạn đặc biệt: $\lim n^k = +\infty (k \in \mathbb{Z}^+)$ $\lim \sqrt[n]{n} = +\infty$ $\lim q^n = +\infty (q > 1)$ 2. Định lý: (Quy tắc về giới hạn vô cực) $\frac{u_n \nearrow a}{v_n \searrow \infty} \rightarrow 0$ $\frac{u_n \nearrow a \neq 0}{v_n \searrow 0} \rightarrow \infty$ $\frac{[u_n \cdot v_n] \rightarrow \infty}{\downarrow \infty \quad \downarrow a \neq 0}$ (Dấu của giới hạn vô cực được xác định theo quy tắc nhân dấu)

II. Giới hạn của hàm số:

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C$ (C là hằng số) 2. Định lý: Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Ta có: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$; $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ ($f(x) \geq 0$) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ 3. Giới hạn một bên: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$	1. Giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} C = C$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{C}{x^k} = 0$ 2. Định lý: (Quy tắc về giới hạn vô cực) $\frac{f(x) \nearrow L}{g(x) \searrow \infty} \rightarrow 0$ $\frac{f(x) \nearrow L \neq 0}{g(x) \searrow 0} \rightarrow \infty$ $\frac{f(x) \nearrow L \neq 0}{g(x) \searrow 0} \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow x_0$ hay $x \rightarrow \infty$) (Dấu của giới hạn vô cực được xác định theo quy tắc nhân dấu)

III. Hàm số liên tục:

1. Định nghĩa:

$$y = f(x) \text{ liên tục tại } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

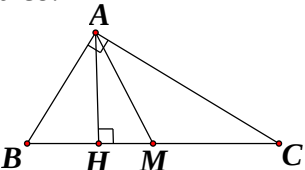
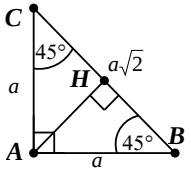
$$y = f(x) \text{ liên tục tại } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

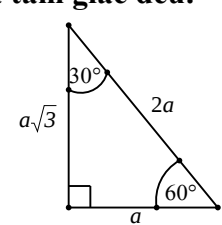
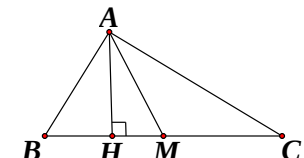
2. Tính chất:

- Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.
- Tổng hiệu, tích, thương của các hàm số liên tục tại một điểm là hàm số liên tục tại điểm đó.

HÌNH HỌC (TỔNG HỢP) PHẪNG

I. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC:

1) Tam giác vuông: Cho ΔABC vuông tại A có đường cao AH và trung tuyến AM. Ta có:		
• $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Pi-ta-go) • $AC^2 = CH.BC$ • $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ • $\frac{BH}{BC} = \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AB^2}{AB^2 + AC^2}$ • Diện tích: $S = \frac{1}{2}.AB.AC$ (bằng nửa tích độ dài 2 cạnh góc vuông)	• $AH.BC = AB.AC$ • $AB^2 = BH.BC$ • $AH^2 = \frac{AB^2.AC^2}{AB^2 + AC^2}$ • $\frac{CH}{BC} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{AB^2 + AC^2}$ • $AM = \frac{BC}{2}$	
2) Tam giác vuông cân: Cho ΔABC vuông cân tại A có đường cao AH. Ta có:		
• $AB = AC = a$ • $BC = a\sqrt{2}$ • $AH = a \frac{\sqrt{2}}{2}$ • Diện tích: $S = \frac{AB^2}{2} = \frac{AC^2}{2} = \frac{BC^2}{4}$		

3) Tam giác đều: Cho ΔABC đều cạnh a, có tâm I và đường cao AH. Ta có: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $IH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ - Diện tích: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	4) Nửa tam giác đều: 
5) Tam giác thường: Cho ΔABC độ dài cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$, đường cao $AH = h_a$, trung tuyến $AM = m_a$, phân giác AD, bán kính đường tròn ngoại tiếp là R, bán kính đường tròn nội tiếp là r. Ta có: - Định lý cosin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ - Định lý sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ $R = \frac{bc}{2h_a}$ $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$ - Diện tích: $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$ $S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$ $S = \frac{abc}{4R}$ $S = p \cdot r$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (với $p = \frac{a+b+c}{2}$)	

II. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TỨ GIÁC:

1) Hình thang: Diện tích hình thang ABCD có đáy AB, CD: $S = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h$ (với h là chiều cao và h bằng khoảng cách giữa AB và CD)
2) Hình thang vuông: Diện tích hình thang ABCD vuông tại A, D: $S = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AD$
3) Hình bình hành: Diện tích hình bình hành ABCD: $S = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h$ (với h là chiều cao và h bằng khoảng cách giữa AB và CD)
4) Hình thoi: Diện tích hình thoi ABCD: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ (bằng nửa tích độ dài 2 đường chéo) $S = AB^2 \cdot \sin A$ (Bằng bình phương 1 cạnh nhân sin của 1 góc)
5) Hình chữ nhật: Diện tích hình chữ nhật ABCD: $S = AB \cdot BC$ (bằng tích chiều dài và chiều rộng)
6) Hình vuông: Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O $AC = BD = a\sqrt{2}$ $OA = OB = OC = OD = a \frac{\sqrt{2}}{2}$ - Diện tích: $S = a^2$

III. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN:

- Diện tích hình tròn bán kính R: $S = \pi \cdot R^2$ - Chu vi đường tròn bán kính R: $C = 2\pi \cdot R$

IV. TÂM CỦA TAM GIÁC

- Trọng tâm tam giác là giao điểm 3 đường trung tuyến
- Trực tâm tam giác là giao điểm 3 đường cao
- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm 3 đường trung trực
- Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm 3 đường phân giác

HÌNH HỌC TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

I. TỌA ĐỘ

1. Hệ trục tọa độ Oxy gồm 2 trục Ox, Oy vuông góc với nhau, lần lượt có hai vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}$ ($|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$).

2. Tọa độ vectơ, tọa độ điểm: $\vec{a} = (a_1; a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$; $M(x; y) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Cho $\vec{u} = (x; y), \vec{v} = (x'; y')$

$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$	$\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x'; y \pm y')$	$k\vec{u} = (kx; ky)$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
--	--	-----------------------	-------------------------------------

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$	$ \vec{u} = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{u} \cdot \vec{v} }$	
---	--------------------------------	--	--

Cho $A(x_a; y_a), B(x_b; y_b)$

$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
M là trung điểm của AB : $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$	G là trọng tâm tam giác ABC : $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$
G là trọng tâm tứ giác $ABCD$: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}\right)$	M chia AB theo tỉ số k : $x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k}; y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k}$

II. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. **Phương trình:** Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ và có 1 VTPT $\vec{n} = (A; B)$ hay có 1 VTCP $\vec{a} = (a; b)$, có:

Phương trình tổng quát: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + C = 0$ (với $C = -Ax_0 - By_0$)

Phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$

Phương trình chính tắc: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, (a, b \neq 0)$

Chú ý: Phương trình đường thẳng qua $M(x_0; y_0)$ có hệ số góc k : $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Phương trình đường thẳng qua 2 điểm A, B : $\frac{x - x_B}{x_A - x_B} = \frac{y - y_B}{y_A - y_B}$

2. **Khoảng cách** từ một điểm $M(x_M; y_M)$ đến một đường thẳng $\Delta: Ax + By + C = 0$ là:

$$d(M, \Delta) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

3. **Góc giữa hai đường thẳng:** Cho hai đường thẳng $d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và $d_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

$$\cos(d_1, d_2) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \left| \cos(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \right| = \frac{|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} \quad \text{và} \quad d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

4. **Phương trình hai đường phân giác** của các góc tạo bởi $d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$; $d_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ là:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Lưu ý: Dấu $\pm$ tương ứng với một đường phân giác của góc nhọn và một đường phân giác góc tù. Để phân biệt được dấu nào là của đường phân giác góc nhọn và dấu nào là đường phân giác góc tù thì cần nhớ quy tắc sau: Đường phân giác **góc nhọn** luôn **ngược dấu** với tích hai pháp véctor, đường phân giác góc tù mang dấu còn lại.

5. **Vị trí tương đối của 2 điểm với đường thẳng:** Cho hai điểm $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N)$ và đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$. Khi đó:

☞ M và N nằm cùng phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$

☞ M và N nằm khác phía đối với $\Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$

III. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

1. **Phương trình:** Đường tròn có tâm $I(a; b)$ và bán kính R , có phương trình:

Dạng 1: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Dạng 2: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, với điều kiện $a^2 + b^2 - c > 0$ và $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

2. Vị trí tương đối của đường thẳng Δ và đường tròn $C(I, R)$:

- $d(I, \Delta) > R \Leftrightarrow \Delta \cap (C) = \emptyset \rightarrow \Delta$ không có điểm chung với (C) .
- $d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \Delta \cap (C) = \{A\} \rightarrow \Delta$ tiếp xúc với (C) .
- $d(I, \Delta) < R \Leftrightarrow \Delta \cap (C) = \{A; B\} \rightarrow \Delta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

3. Phương trình tiếp tuyến: của đường tròn $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ là:

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

IV. ELÍP

1. Phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$.

2. Các yếu tố: $c^2 = a^2 - b^2, (c > 0)$.

Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$	Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a$	Độ dài trục bé: $B_1B_2 = 2b$
Tiêu điểm: $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$	Tâm sai: $e = \frac{c}{a} < 1$	Đường chuẩn: $x = \pm \frac{a}{e}$
Đỉnh: Đỉnh trên trục lớn $A_1(-a; 0), A_2(a; 0)$, Đỉnh trên trục bé $B_1(0; -b), B_2(0; b)$		
Bán kính qua tiêu điểm: $MF_1 = a + ex_M = a + \frac{c}{a}x_M; MF_2 = a - ex_M = a - \frac{c}{a}x_M$		
Khoảng cách giữa hai đường chuẩn: $d = 2\frac{a}{e}$.		
Diện tích: $S = \pi ab$		

3. Điều kiện để đường thẳng $Ax + By + C = 0$ tiếp xúc với elip là: $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$

V. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC, HÌNH BÌNH HÀNH BẰNG TỌA ĐỘ:

Diện tích tam giác ABC	$S_{ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} b_1c_2 - b_2c_1 $	$\overrightarrow{AB} = (b_1; b_2), \overrightarrow{AC} = (c_1; c_2)$
Diện tích hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông ABCD	$S_{ABCD} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = b_1d_2 - b_2d_1 $	$\overrightarrow{AB} = (b_1; b_2), \overrightarrow{AD} = (d_1; d_2)$

PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẪNG

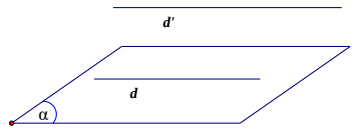
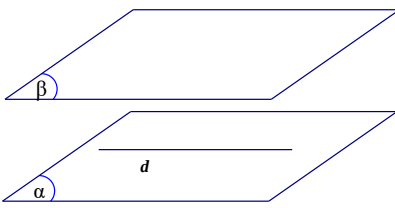
I. PHÉP TỊNH TIẾN: 1. Định nghĩa: $T_v(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ 2. Biểu thức tọa độ: $T_{\vec{v}(a;b)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = x_M + a \\ y_{M'} = y_M + b \end{cases}$	II. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM: 1. Định nghĩa: $\mathcal{D}_I(M) = M' \Leftrightarrow I \text{ là trung điểm } MM'$ 2. Biểu thức tọa độ: $\mathcal{D}_I(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_I - x_M \\ y_{M'} = 2y_I - y_M \end{cases}$
III. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC: 1. Định nghĩa: $\mathcal{D}_d(M) = M' \Leftrightarrow d \text{ là đường trung trực của } MM'$ 2. Biểu thức tọa độ:	IV. PHÉP QUAY: 1. Định nghĩa: $Q_{(I;\varphi)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} IM = IM' \\ (\overrightarrow{IM}; \overrightarrow{IM'}) = \varphi \end{cases}$ 2. Biểu thức tọa độ: $Q_{(O;\varphi)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = x_M \cdot \cos \varphi - y_M \cdot \sin \varphi \\ y_{M'} = y_M \cdot \cos \varphi + x_M \cdot \sin \varphi \end{cases}$

$D_{d:ax+by+c=0}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = x_M - 2a \cdot \frac{ax_M + by_M + c}{a^2 + b^2} \\ y_{M'} = y_M - 2b \cdot \frac{ax_M + by_M + c}{a^2 + b^2} \end{cases}$ $D_{Ox}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = x_M \\ y_{M'} = -y_M \end{cases}$ $D_{Oy}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = -x_M \\ y_{M'} = y_M \end{cases}$	$Q_{(O, 90^\circ)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = -y_M \\ y_{M'} = x_M \end{cases}$ $Q_{(O, -90^\circ)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = y_M \\ y_{M'} = -x_M \end{cases}$
V. PHÉP VỊ TỰ: 1. Định nghĩa: $V_{(I, k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = k \cdot \overrightarrow{IM}$ 2. Biểu thức tọa độ: $V_{(I, k)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} - x_I = k(x_M - x_I) \\ y_{M'} - y_I = k(y_M - y_I) \end{cases}$ $V_{(O, k)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = k \cdot x_M \\ y_{M'} = k \cdot y_M \end{cases}$	VI. PHÉP DỜI HÌNH: 1. Định nghĩa: Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa 2 điểm bất kì. 2. Tính chất: Phép dời hình biến: - Đường thẳng thành đường thẳng. - Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự ba điểm đó. - Tam giác thành tam giác bằng nó. - Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính. VII. PHÉP ĐỒNG DẠNG: 1. Định nghĩa: Phép đồng dạng tỉ số $k > 0$ là phép biến hình đoạn thẳng có độ dài a thành đoạn thẳng có độ dài $k.a$. 2. Tính chất: Phép đồng dạng tỷ số $k > 0$ biến: - Đường thẳng thành đường thẳng. - Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự ba điểm đó. - Tam giác thành tam giác đồng dạng tỉ số k. - Đường tròn bán kính r thành đường tròn có bán kính $k.r$.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN (TỔNG HỢP) LỚP 11

I. QUAN HỆ SONG SONG

Dạng 1: Chứng minh quan hệ song song.

1. Chứng minh 2 ĐT song song: Sử dụng kết quả hình học phẳng để chứng minh			
2. Chứng minh ĐT song song MP			
Cách 1	$\left. \begin{array}{l} d \not\subset (\alpha) \\ d \parallel d' \\ d' \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel (\alpha)$	→ Chứng minh: ĐT không chứa trong MP và song song 1 ĐT khác chứa trong MP đó.	
Cách 2	$\left. \begin{array}{l} d \subset (\alpha) \\ (\alpha) \parallel (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel (\beta)$	→ Chứng minh: ĐT này chứa trong MP song song với MP đó.	
3. Chứng minh 2 MP song song			

Cách 1	$\left. \begin{array}{l} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = I \\ a \parallel a' \\ b \parallel b' \\ a', b' \subset (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$	→ Chứng minh: MP này có chứa 2 ĐT cắt nhau lần lượt song song 2 ĐT chứa trong MP kia.	
---------------	---	--	--

Dạng 2: Tìm giao tuyến của 2 Mặt phẳng.

Cách 1: Tìm 2 điểm chung phân biệt của 2 mặt phẳng → Giao tuyến là đường thẳng đi qua 2 điểm chung đó.

$$\left. \begin{array}{l} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ B \in (\alpha) \cap (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow AB = (\alpha) \cap (\beta)$$

Cách 2: Tìm 1 điểm chung của 2 mặt phẳng và chứng tỏ trong 2 mặt phẳng lần lượt có chứa 2 đường thẳng song song nhau → Giao tuyến là đường thẳng đi qua điểm chung và song song 2 đường thẳng đó.

$$\left. \begin{array}{l} I \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha), b \subset (\beta) \\ a \parallel b \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Ix \ (Ix \parallel a \parallel b)$$

Cách 3: Tìm 1 điểm chung của 2 mặt phẳng và chứng tỏ trong mặt phẳng này có chứa 1 đường thẳng song song với mặt phẳng kia → Giao tuyến là đường thẳng đi qua điểm chung và song song đường thẳng đó.

$$\left. \begin{array}{l} I \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha) \\ a \parallel (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Ix \ (Ix \parallel a)$$

Dạng 3: Tìm giao điểm của Đường thẳng và Mặt phẳng.

TH1: Nếu trong (α) có sẵn chứa đường thẳng a cắt d tại I thì I là giao điểm của d và (α) .

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \supset a \\ a \cap d = I \end{array} \right\} \Rightarrow d \cap (\alpha) = I$$

TH2: Nếu trong (α) **không** có sẵn chứa đường thẳng a cắt d thì ta thực hiện như sau:

B1: Chọn mặt phẳng phụ (β) chứa d sao cho giao tuyến của (α) và (β) dễ tìm.

B2: Tìm giao tuyến Δ của (α) và (β) .

B3: Trong (β) , tìm giao điểm I của Δ và $d \rightarrow I$ là giao điểm của d và (α) .

$$\left. \begin{array}{l} (\beta) \supset d \\ (\alpha) \cap (\beta) = \Delta \\ \Delta \cap d = I \end{array} \right\} \Rightarrow d \cap (\alpha) = I$$

Dạng 4: Tìm thiết diện của hình chóp, lăng trụ được cắt bởi Mặt phẳng

Cách 1: Tìm tất cả các đoạn giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp, lăng trụ → Thiết diện là đa giác tạo bởi các đoạn giao tuyến đó.

Cách 2: Tìm tất cả các giao điểm của (α) với các cạnh (nếu có) của hình chóp, lăng trụ → Thiết diện là đa giác tạo bởi các giao điểm đó.

II. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Dạng 1: Chứng minh quan hệ vuông góc.

1. Chứng minh 2 ĐT vuông góc:

Cách 1	$\left. \begin{array}{l} d \perp (\alpha) \\ a \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp a$	→ Chứng minh: DT này vuông góc với MP chứa DT kia.	
Cách 2	$\left. \begin{array}{l} d \perp AB \\ d \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp BC$	→ Chứng minh: DT này vuông góc 2 cạnh tam giác có cạnh còn lại nằm trên DT kia.	

2. Chứng minh DT vuông góc MP:

Cách 1	$\left. \begin{array}{l} d \perp a; d \perp b \\ a \cap b = I \\ a, b \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (\alpha)$	→ Chứng minh: DT vuông góc với 2 DT cắt nhau cùng chứa trong MP.	
Cách 2	$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ \Delta \subset (\beta) \\ \Delta \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \perp (\alpha)$	→ Nếu 2 MP vuông góc nhau thì bất kì DT nào nằm trong MP này và vuông góc với giao tuyến 2 MP sẽ vuông góc MP kia.	
Cách 3	$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (\beta) = d \\ (\alpha) \perp (\gamma) \\ (\beta) \perp (\gamma) \end{array} \right\} \Rightarrow d \perp (\gamma)$	→ 2 MP phân biệt cùng vuông góc MP thứ 3 thì giao tuyến của 2 MP đó (nếu có) sẽ vuông góc MP thứ 3 đó.	

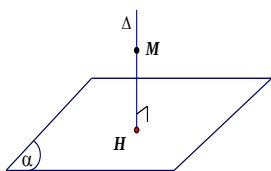
3. Chứng minh 2 MP vuông góc:

Cách 1	$(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta \subset (\beta) \\ \Delta \perp (\alpha) \end{array} \right.$	→ Chứng minh: MP này có chứa 1 DT vuông góc MP kia.	
Cách 2	$\left. \begin{array}{l} (\beta) \supset \Delta \\ \Delta \perp a, \Delta \perp b \\ a \cap b = I \\ a, b \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$	→ Chứng minh MP này chứa 1 DT vuông góc với 2 DT cắt nhau chứa trong MP kia.	

Dạng 2: Tìm hình chiếu của Điểm lên Mặt phẳng

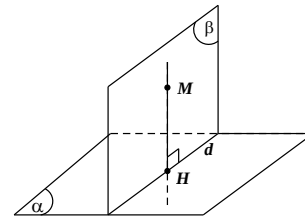
• **Định nghĩa:** H là hình chiếu của M lên $(\alpha) \Leftrightarrow MH \perp (\alpha)$ tại H.

TH1: Có DT Δ đi qua điểm M và vuông góc mp (α) tại H → H là hình chiếu của M lên (α)



TH2: Chưa có sẵn DT Δ như TH1.

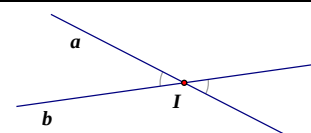
- Tìm mp (β) qua M và $(\beta) \perp (\alpha)$
- Tìm $d = (\alpha) \cap (\beta)$
- Vẽ $MH \perp d$ tại H
 $\Rightarrow MH \perp (\alpha)$ tại H
 $\Rightarrow H$ là hình chiếu của M lên (α) .



Dạng 3: Tính góc.

1. Góc giữa 2 ĐT cắt nhau

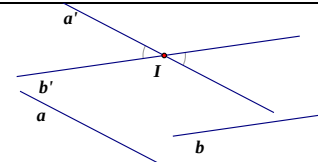
ĐN: Là góc có số đo nhỏ nhất (góc nhọn) trong 4 góc tạo thành.



2. Góc giữa 2 ĐT bất kì

ĐN: Là góc giữa 2 đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với 2 đường thẳng đó.

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel a' \\ b \parallel b' \end{array} \right\} \Rightarrow (a; b) = (a'; b')$$



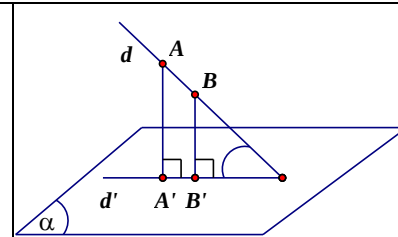
3. Góc giữa ĐT và MP

ĐN: Là góc giữa đường thẳng với hình chiếu của nó trên mặt phẳng.

$$(d, (\alpha)) = (d, d')$$

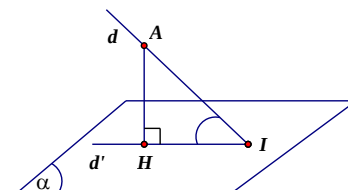
(với d' là hình chiếu của d lên (α))

Lấy $A, B \in d$
 Tìm A', B' lần lượt là hình chiếu của A, B lên (α)
 $\rightarrow d' (A'B')$ là hình chiếu của d lên (α)
 $\rightarrow (d, (\alpha)) = (d, d')$



Đặc biệt: Nếu d cắt (α) tại I thì:

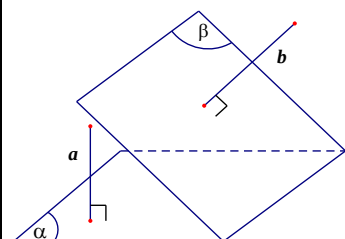
$$\left. \begin{array}{l} AI \cap (\alpha) = I \\ AH \perp (\alpha) \text{ tại } H \end{array} \right\} \Rightarrow (AI, (\alpha)) = AIH$$



4. Góc giữa 2 MP

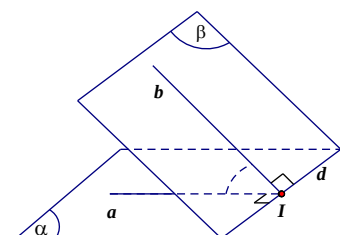
ĐN: Là góc giữa 2 đường thẳng lần lượt vuông góc với 2 mặt phẳng đó.

$$\left. \begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow ((\alpha), (\beta)) = (a, b)$$



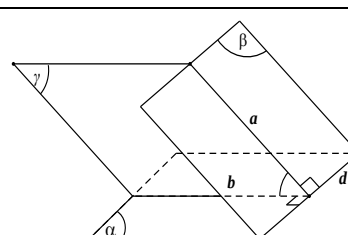
Cách xác định thường dùng: Góc giữa hai MP bằng góc giữa 2 ĐT lần lượt chứa trong 2 MP và cùng vuông góc với giao tuyến của 2 MP đó.

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha); b \subset (\beta) \\ a \perp d; b \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow ((\alpha), (\beta)) = (a, b)$$



Cách xác định khác:

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (\beta) = d; (\gamma) \perp d \\ (\gamma) \cap (\alpha) = a \\ (\gamma) \cap (\beta) = b \end{array} \right\} \Rightarrow ((\alpha), (\beta)) = (a, b)$$



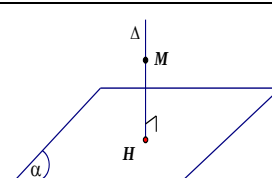
Dạng 4: Tính khoảng cách.

1. Khoảng cách từ 1 Điểm đến MP

ĐN: Là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó lên mặt phẳng.

Tìm H là hình chiếu của A lên (α) .
 Khi đó:

$$d(A, (\alpha)) = AH$$

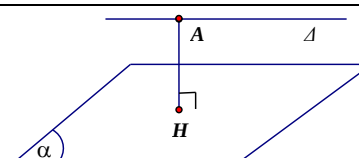


2. Khoảng cách giữa ĐT và MP song song

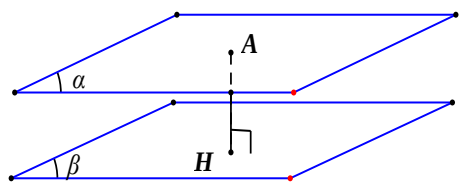
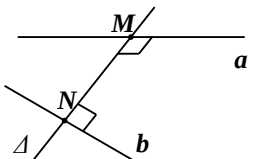
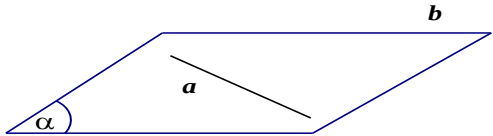
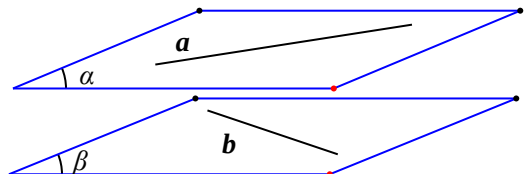
ĐN: Là khoảng cách từ 1 điểm bất kì thuộc đường thẳng đến mặt phẳng.

Lấy $A \in \Delta$.
 Khi đó:

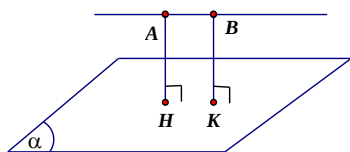
$$d(\Delta, (\alpha)) = d(A, (\alpha))$$



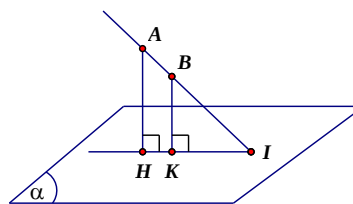
3. Khoảng cách giữa 2 MP song song

ĐN: là khoảng cách từ 1 điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.	Lấy $A \in (\alpha)$. Khi đó: $d((\alpha), (\beta)) = d(A, (\beta))$	
4. Khoảng cách giữa 2 ĐT chéo nhau		
ĐN: Là độ dài đoạn vuông góc chung của 2 ĐT đó.	Tìm ĐT Δ cùng vuông góc a tại M và vuông góc với b tại N. Khi đó: $\left. \begin{array}{l} \Delta \perp a \text{ tại } M \\ \Delta \perp b \text{ tại } N \end{array} \right\} \Rightarrow d(a, b) = MN$	
	Cách khác: $\left. \begin{array}{l} (\alpha) \supset a \\ (\alpha) // b \end{array} \right\} \Rightarrow d(a, b) = d(b, (\alpha))$	
	$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \supset a, (\beta) \supset b \\ (\alpha) // (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow d(a, b) = d((\alpha), (\beta))$	

•**ĐẶC BIỆT:** Quy tắc dời điểm khi tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng:



$$AB // (\alpha) \Rightarrow d(A, (\alpha)) = d(B, (\alpha))$$



$$AB \cap (\alpha) = I \Rightarrow \frac{d(A, (\alpha))}{d(B, (\alpha))} = \frac{AI}{BI}$$

SƠ ĐỒ TƯ DUY

