

Họ và tên thí sinh:..... SBD:.....

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Giá trị cực đại của hàm số là

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-2	3	-2	$+\infty$

- A. 1. B. -2. C. 3. D. 0.

Câu 2. Cho $a > 0, a \neq 1$, tính giá trị biểu thức $A = a^{6\log_a 7}$.

- A. 42. B. 343. C. 21. D. 7.

Câu 3. Tính thể tích V của khối hộp chữ nhật có độ dài 3 kích thước lần lượt bằng 1; 2; 3.

- A. $V = 2$. B. $V = 4$. C. $V = 6$. D. $V = 3$.

Câu 4. Khối hai mươi mặt đều có số đỉnh, số cạnh, số mặt lần lượt là

- A. 20; 30; 12. B. 12; 30; 20 C. 30; 12; 20. D. 12; 20; 30.

Câu 5. Với mọi hàm số $f(x); g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, cho các khẳng định sau :

- (I). $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$.
 (II). $\int [f(x).g(x)] dx = \left(\int f(x) dx \right) \cdot \left(\int g(x) dx \right)$.
 (III). Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f(u) du = F(u) + C$.
 (IV). $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ với mọi hằng số $k \in \mathbb{R}$.

Có bao nhiêu khẳng định sai?

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3

Câu 6. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V , khối tứ diện $A'BCC'$ có thể tích là V_1 . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 7. Cho K là một khoảng. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của nó là đường đi lên từ phải sang trái.
 B. Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K .
 C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K nếu tồn tại một cặp x_1, x_2 thuộc K sao cho $x_1 < x_2$ và $f(x_1) < f(x_2)$
 D. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K và $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên K .

Câu 8. Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = \frac{1-x}{x+1}$.

- A. $(-\infty; -1); (-1; +\infty)$. B. $(-\infty; +\infty)$.
 C. Không tồn tại. D. $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x+2}$ có đồ thị (H) . Điểm nào sau đây thuộc (H) ?

- A. $N(-1; -4)$. B. $P(1; 1)$. C. $Q(-3; 7)$. D. $M(0; -1)$.

Câu 10. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2020x-1}{2021x+1}$ là

- A. $y = 1$. B. $x = \frac{2020}{2021}$. C. $y = -1$. D. $y = \frac{2020}{2021}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Số giao điểm của (C) với đường thẳng $y = 4$ là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 12. Tìm hàm số có đồ thị **không** nhận trục tung làm trục đối xứng.

- A. $y = \cos 2x$. B. $y = \cos^2 x$. C. $y = \sin 2x$. D. $y = \sin^2 x$.

Câu 13. Cho $n, k \in \mathbb{N}^*$ và $n \geq k$. Tìm công thức đúng.

- A. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!(k+1)!}$. B. $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.
C. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. D. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Câu 14. Có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau ?

- A. 60480. B. 151200. C. 136080. D. 15120.

Câu 15. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \frac{1}{x}$. B. $y = \cot x$. C. $y = \frac{1}{x^2+1}$. D. $y = \frac{-x^3}{x^2+1}$.

Câu 16. Cho khối tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Sử dụng mặt phẳng trung trực của AB và mặt phẳng trung trực của CD , ta chia khối tứ diện đó thành bốn khối tứ diện nào sau đây?

- A. $MANC, BCDN, AMND, ABND$. B. $MANC, BCMN, AMND, MBND$.
C. $ABCN, ABND, AMND, MBND$. D. $NACB, BCMN, ABND, MBND$.

Câu 17. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy $R = 3$ cm và chiều cao $h = 4$ cm.

- A. $V = 36\pi \text{ cm}^3$. B. $V = 12\pi \text{ cm}^3$. C. $V = 24\pi \text{ cm}^3$. D. $V = 48\pi \text{ cm}^3$.

Câu 18. Tính thể tích V của khối nón có chiều cao h và đường kính đáy $\frac{h}{2}$.

- A. $V = \frac{1}{48}\pi.h^2$. B. $V = \frac{1}{48}\pi.h^3$. C. $V = \frac{1}{3}\pi.h^3$. D. $V = \frac{1}{12}\pi.h^3$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
y'	+		+ 0 -	
y	$-\infty$	$+\infty$	4	$-\infty$

- A. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{-1}{2}; +\infty\right)$.
B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{-1}{2}; 3\right)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 3)$.

Câu 20. Tính thể tích V của khối chóp có diện tích đáy bằng B và độ dài đường cao bằng $3h$.

- A. $V = Bh$. B. $V = \frac{4}{3}Bh$. C. $V = \frac{1}{3}Bh$. D. $V = \frac{2}{3}Bh$.

Câu 21. Tính thể tích của khối cầu biết chu vi đường tròn lớn của nó bằng 5π .

- A. $\frac{125\pi}{6}$. B. $\frac{500\pi}{3}$. C. 100π . D. 25π .

Câu 22. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - (2m - 3)x - m + 2$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. 5. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 23. Tìm số nghiệm trên $[0; \pi)$ của phương trình $\sin 5x = 0$.

- A. 5. B. 4. C. 6. D. 3.

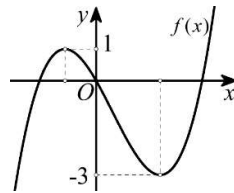
Câu 24. Tính bán kính R của mặt cầu (S) biết diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu đó có giá trị bằng nhau.

- A. $R = \sqrt{3}$. B. $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $R = 3$. D. $R = \frac{1}{3}$.

Câu 25. Tính giá trị biểu thức $A = 3(3^{3x} + 3^{-3x})$ biết $3^x + 3^{-x} = 4$.

- A. $A = 192$. B. $A = 3$. C. $A = 156$. D. $A = 12$.

Câu 26. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 27. Biết rằng $\int (\cos^3 x \cdot \sin 3x + \sin^3 x \cdot \cos 3x) dx = \frac{a}{b} \cos 4x + C$ với $a, b \in \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản ($a < 0; b > 0$), tính $2a + b$.

- A. -13. B. 13. C. -10. D. 10.

Câu 28. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^9$.

- A. $\frac{21}{16}$. B. 84. C. $\frac{27}{16}$. D. 64.

Câu 29. Cho phương trình: $2^{|x+4|} = 16^{x^2+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Phương trình vô nghiệm.
B. Tổng các nghiệm của phương trình là một số nguyên.
C. Tích các nghiệm của phương trình là một số dương.
D. Tổng các nghiệm của phương trình là một số dương.

Câu 30. Một lớp học có 20 nữ và 15 nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 5 bạn sao cho có đủ nam, nữ và số nam ít hơn số nữ?

- A. 192375. B. 84075. C. 113750. D. 129254.

Câu 31. Bất phương trình $\log_2(x^2 - x - 2) \geq \log_{0,5}(x - 1) + 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc $[0; 2021]$?

- A. 2019. B. 2018. C. 2021. D. 2020.

Câu 32. Cho hàm số $y = \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ (m, n, a, b, c là các tham số thực). Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tối đa bao nhiêu đường tiệm cận (ngang hoặc đứng) ?

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 33. Cho một hình trụ và một hình lập phương có cùng chiều cao, đường tròn đáy của hình trụ là đường tròn ngoại tiếp đáy của hình lập phương. Tính tỷ số thể tích của khối trụ và khối lập phương đó.

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{2}$. C. 2π . D. π .

Câu 34. Một đoàn tàu gồm 12 toa chở khách (mỗi toa có thể chứa tối đa 12 khách). Có 7 hành khách chuẩn bị lên tàu. Tính xác suất để đúng 3 toa có người (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

- A. 0,123. B. 0,011. C. 0,018. D. 0,017.

Câu 35. Tung ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối đồng chất một lần. Tính xác suất để xuất hiện mặt có số chấm lẻ.

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 36. Cho hình tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng 1. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD, ACD . Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $ABCD$. Tính thể tích của khối tứ diện $OMNP$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{192}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{864}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{576}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{1296}$.

Câu 37. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; \dots; 90\}$. Chọn từ A hai tập con phân biệt gồm hai phần tử $\{a, b\}; \{c, d\}$, tính xác suất sao cho trung bình cộng của các phần tử trong mỗi tập đều bằng 30.

- A. $\frac{406}{4005}$. B. $\frac{29}{572715}$. C. $\frac{29}{267}$. D. $\frac{29}{534534}$.

Câu 38. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của BC . Biết thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $\frac{3a^3}{20}$. Tính tang của góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy.

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{6\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{6}{5}$.

Câu 39. Cho hình tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng 1. Gọi A', B', C', D' lần lượt là điểm đối xứng của A, B, C, D qua các mặt phẳng $(BCD), (ACD), (ABD), (ABC)$. Tính thể tích của khối tứ diện $A'B'C'D'$.

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{9\sqrt{2}}{32}$. C. $\frac{16\sqrt{2}}{81}$. D. $\frac{125\sqrt{2}}{324}$.

Câu 40. Tìm tất cả giá trị dương của n thỏa mãn $(3^n + 7^n)^{2021} > (3^{2021} + 7^{2021})^n$.

- A. $1 < n < 2021$. B. $0 < n < 1$. C. $n > 2021$. D. $0 < n < 2021$.

Câu 41. Cho hàm số $y = \frac{(2m-1)x-m}{x+m}$ ($m \neq 0$) có đồ thị (C_m) . Biết rằng tồn tại duy nhất một đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$ sao cho (C_m) luôn tiếp xúc với (d) . Giá trị của $a + b$ là

- A. -3. B. 1. C. -1. D. 2.

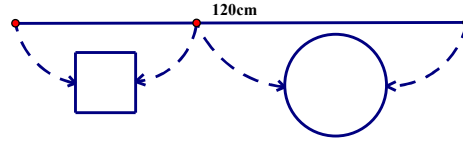
Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(x-3)$. Điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x)$ là

- A. $x = 3$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Câu 43. Cho hàm số $y = x^3 + x^2 - 4$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) sao cho ba điểm O, A, B thẳng hàng và $OA = 2OB$ (O là gốc tọa độ)?

- A. 2. B. 4. C. Vô số. D. 1.

Câu 44. Một sợi dây kim loại dài 120cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất được uốn thành hình vuông, đoạn dây thứ hai được uốn thành vòng tròn (tham khảo hình bên dưới).



Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất là (làm tròn đến hàng đơn vị)

- A. 498. B. 462. C. 504. D. 426.

Câu 45. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Biết khoảng cách từ điểm O đến các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt là $a, a\sqrt{2}, a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) theo a .

- A. $2a$. B. $\frac{a\sqrt{66}}{11}$. C. $\frac{11a}{6}$. D. $\frac{2a\sqrt{33}}{11}$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = (x^2 - m)|x - 2| + (m + 6)x - 2x^2$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có 3 điểm cực trị?

- A. 5. B. 7. C. 6. D. 9.

Câu 47. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và các cạnh bên hợp với đáy một góc bằng 45° . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC . Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 48. Cho $S = \{1, 2, \dots, 35\}$, tìm số cách chọn một tập con của S gồm 26 phần tử sao cho tổng các phần tử của nó chia hết cho 5.

- A. 15141523. B. 14121492. C. 1321250. D. 131213.

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = (\sin x - m)^2 + (\cos x - n)^2$ (m, n là các tham số nguyên). Có tất cả bao nhiêu bộ số $(m; n)$ sao cho $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) + \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 52$?

- A. 4. B. 0. C. 8. D. 12.

Câu 50. Cho bất phương trình $\log_{\frac{37}{55}} \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} + \log_{\frac{37}{55}} \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} + \dots + \log_{\frac{37}{55}} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} < 1$ với $x \in \mathbb{N}, x > 2$. Tổng các nghiệm của bất phương trình đã cho bằng bao nhiêu?

- A. 54. B. 228. C. 207. D. 42.

----- HẾT -----

Mã đề [191]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	B	C	B	C	A	B	C	A	D	B	C	D	C	D	B	A	B	B	A	A	D	A	C	C
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	D	A	D	A	A	C	B	B	A	D	B	C	D	D	B	C	A	C	D	A	A	B	D	D

BẢNG ĐÁP ÁN

1-C	2-B	3-C	4-B	5-C	6-A	7-B	8-C	9-A	10-D
11-B	12-C	13-D	14-C	15-D	16-B	17-A	18-B	19-B	20-A
21-A	22-D	23-A	24-C	25-C	26-B	27-D	28-A	29-D	30-A
31-D	32-C	33-A	34-D	35-A	36-D	37-B	38-C	39-D	40-D
41-B	42-C	43-A	44-C	45-D	46-A	47-A	48-B	49-D	50-D

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1(NB)****Phương pháp:**

Dựa vào BBT xác định điểm cực đại của hàm số: điểm mà tại đó hàm số liên tục và đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm

Cách giải:

Dựa vào BBT ta thấy $x_{CD} = 0, y_{CD} = 3$.

Chọn C.

Câu 2 (NB)**Phương pháp:**

Sử dụng công thức $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b (0 < a \neq 1, b > 0), a^{\log_a x} = x (0 < a \neq 1)$.

Cách giải:

$$A = a^{6 \log_a 7} = a^{6 \cdot \frac{1}{2} \log_a 7} = \left(a^{\log_a 7}\right)^3 = 7^3 = 343.$$

Chọn B.

Câu 3 (NB)**Phương pháp:**

Thể tích V của khối hộp chữ nhật có độ dài 3 kích thước lần lượt bằng $a; b; c$ là $V = abc$.

Cách giải:

Thể tích V của khối hộp chữ nhật có độ dài 3 kích thước lần lượt bằng 1; 2; 3 là $V = 1.2.3 = 6$

Chọn C.

Câu 4 (NB)**Phương pháp:**

Sử dụng công thức: Khối đa diện đều loại $\{n; p\}$ có Đ đỉnh, C cạnh và M mặt thì $\text{Đ} + \text{M} - \text{C} = 2$.

Cách giải:

Khối hai mặt đều là khối $\{3; 5\}$ có $M = 20$, $C = 30$ và $D = 12$.

Chọn B.**Câu 5 (NB)****Phương pháp:**

Sử dụng tính chất của tích phân.

Cách giải:

Dễ thấy khẳng định (II) và (IV) sai.

Khẳng định (IV), với $k = 0$ ta có:

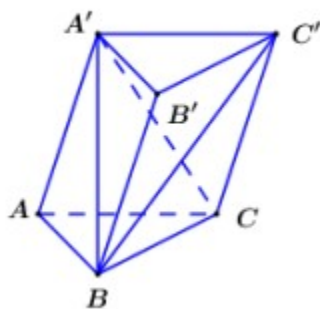
$$VT = \int 0 \cdot f(x) dx = \int 0 dx = 0 + C$$

$$VP = 0 \cdot \int f(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow VT \neq VP$$

Chọn C.**Câu 6 (NB)****Phương pháp:**

Phân chia, lắp ghép khối đa diện

Cách giải:

Ta có: $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}$, mà $V_{A'.ABC} + V_{A'.BCC'B'} = V_{ABC.A'B'C'}$ nên $V_{A'.BCC'B'} = \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'}$.

Lại có $V_{A'.BCC'} = \frac{1}{2} V_{A'.BCC'B'} \Rightarrow V_{A'.BCC'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}$.

$$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3} V \Rightarrow \frac{V_1}{V} = \frac{1}{3}$$

Chọn A.

Câu 7 (NB)

Phương pháp:

Sử dụng định nghĩa tính đơn điệu của hàm số.

Cách giải:

Đáp án A sai do nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của nó là đường đi lên từ trái sang phải.

Đáp án C sai do hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K nếu tồn tại một cặp x_1, x_2 thuộc K sao cho
$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0.$$

Đáp án D sai do nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K và $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên K .

Chọn B.

Câu 8 (NB)

Phương pháp:

Tính đạo hàm và suy ra các khoảng đồng biến của hàm số.

Cách giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y = \frac{-x+1}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{-2}{(x+1)^2} < 0 \forall x \in D$.

Do đó hàm số không tồn tại khoảng đồng biến.

Chọn C.

Câu 9 (NB)

Phương pháp:

Thay lần lượt từng tọa độ từng điểm vào hàm số.

Cách giải:

Thay tọa độ điểm $N(-1; -4)$ vào hàm số ta có $\frac{3 \cdot (-1) - 1}{(-1) + 2} = \frac{-4}{1} = -4$.

Vậy điểm $N \in (H)$.

Chọn A.

Câu 10 (NB)

Phương pháp:

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có TCN $y = \frac{a}{c}$.

Cách giải:

Đồ thị hàm số $y = \frac{2020x-1}{2021x+1}$ có TCN $y = \frac{2020}{2021}$.

Chọn D.

Câu 11 (NB)

Phương pháp:

Giải phương trình hoành độ giao điểm.

Cách giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + 3x^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$.

Vậy số giao điểm của (C) với đường thẳng $y = 4$ là 3.

Chọn B.

Câu 12 (NB):

Phương pháp:

Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

Cách giải:

Hàm số $y = \sin 2x$ là hàm số lẻ nên không nhận trục tung làm trục đối xứng.

Chọn C.

Câu 13 (NB)

Phương pháp:

Sử dụng các công thức chỉnh hợp và tổ hợp.

Cách giải:

Ta có $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, do đó đáp án D đúng.

Chọn D.

Câu 14 (NB)

Phương pháp:

Sử dụng chỉnh hợp

Cách giải:

Số các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau là $A_{10}^6 - X_9^5 = 136080$.

Chọn C.

Câu 15 (TH)**Phương pháp:**

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và $y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Cách giải:

Đáp án A và B loại do hai hàm số đó không xác định $\forall x \in \mathbb{R}$

Xét đáp án C ta có $y' = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$.

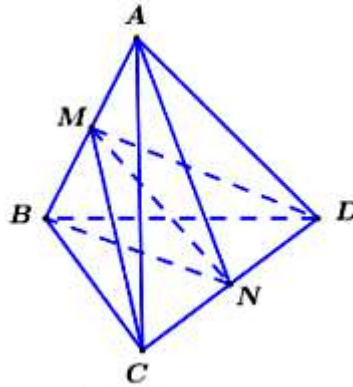
Xét đáp án D ta có $y' = \frac{-3x^2(x^2 + 1) + x^3 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^4 - 3x^2}{(x^2 + 1)^2} \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y = \frac{-x^3}{x^2 + 1}$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Chọn D.

Câu 16 (TH)**Phương pháp:**

Sử dụng khái niệm mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng là mặt phẳng vuông góc với đoạn thẳng tại trung điểm của đoạn thẳng đó.

Cách giải:

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên các mặt của nó là tam giác đều.

Ta có: $\begin{cases} MD \perp AB \\ MC \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCD) \text{ tại } M \Rightarrow (MCD) \text{ là mặt phẳng trung trực của } AB$.

Chứng minh tương tự ta có (NAB) là mặt phẳng trung trực của CD .

Khi đó $(MCD), (NAB)$ chia khối tứ diện thành bốn khối tứ diện: $MANC, BCMN, AMND, MBND$.

Chọn B.

Câu 17 (NB)

Phương pháp:

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy R và chiều cao h là $V = \pi R^2 h$.

Cách giải:

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy $R = 3\text{cm}$ và chiều cao $h = 4\text{cm}$ là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 36\pi (\text{cm}^3)$.

Chọn A.

Câu 18 (NB)**Phương pháp:**

Thể tích của khối nón có bán kính đáy R và chiều cao h là $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$.

Cách giải:

Thể tích của khối nón có bán kính đáy $\frac{h}{2} \Rightarrow$ bán kính đáy $R = \frac{h}{4}$ và chiều cao h là

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{h}{4}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{48} \pi h^3.$$

Chọn B.

Câu 19 (NB)**Phương pháp:**

Dựa vào BBT xác định các khoảng đơn điệu của hàm số.

Cách giải:

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; 3\right)$.

Chọn B.

Câu 20 (NB)**Phương pháp:**

Thể tích V của khối chóp có diện tích đáy bằng B và độ dài đường cao bằng h là $V = \frac{1}{3} Bh$.

Cách giải:

Thể tích V của khối chóp có diện tích đáy bằng B và độ dài đường cao bằng $3h$ là $V = \frac{1}{3} B \cdot 3h = Bh$.

Chọn A.

Câu 21 (TH)**Phương pháp:**

- Đường tròn lớn của khối cầu bán kính R có bán kính R .

- Thể tích khối cầu bán kính R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Cách giải:

Gọi bán kính khối cầu là $R \Rightarrow$ Đường tròn lớn của khối cầu có bán kính R .

$$\Rightarrow 2\pi R = 5\pi \Leftrightarrow R = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Vậy thể tích khối cầu là } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125\pi}{6}.$$

Chọn A.

Câu 22 (TH)

Phương pháp:

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

$$\text{- Sử dụng: } ax^2 + bx + c \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}.$$

Cách giải:

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta có } y' = x^2 - 2mx - 2m + 3.$$

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - (2m-3)x - m + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m + 3 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \text{ (luôn đúng)} \\ \Delta' = m^2 + 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$$

$$\text{Mà } m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m = 1.$$

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn D.

Câu 23 (TH)

Phương pháp:

$$\text{- Sử dụng: } \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

- Giải bất phương trình $0 \leq x < \pi$ tìm số giá trị nguyên k thỏa mãn.

Cách giải:

Ta có: $\sin 5x = 0 \Leftrightarrow 5x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{5} (k \in \mathbb{Z})$

$0 \leq x < \pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{k\pi}{5} < \pi \Leftrightarrow 0 \leq k < 5$. Mà $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc $[0; \pi)$.

Chọn A.

Câu 24 (TH)

Phương pháp:

- Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu bán kính R lần lượt là $S = 4\pi R^2$ và $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Cách giải:

Vì diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu đó có giá trị bằng nhau nên $4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \Leftrightarrow R = 3$.

Chọn C.

Câu 25 (TH)

Phương pháp:

Sử dụng biến đổi $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$.

Cách giải:

Ta có:

$$3^{3x} + 3^{-3x} = (3^x + 3^{-x})^3 - 3 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} (3^x + 3^{-x})$$

$$\Rightarrow 3^{3x} + 3^{-3x} = 4^3 - 3 \cdot 4 = 52$$

Vậy $A = 3 \cdot 52 = 156$.

Chọn C.

Câu 26 (TH)

Phương pháp:

- Sử dụng chiều đồ thị suy ra dấu của hệ số a .
- Dựa vào giao điểm của đồ thị với trục tung suy ra dấu của hệ số d .
- Dựa vào dấu các điểm cực trị của hàm số suy ra dấu của hệ số b, c .

Cách giải:

Đồ thị hàm số có nhánh cuối cùng đi lên nên $a > 0$.

Đồ thị đi qua điểm $O(0;0)$ nên $d = 0$.

Hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 và $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases}$.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$.

Vậy có một số dương trong các số a, b, c, d .

Chọn B.

Câu 27 (TH)

Phương pháp:

- Sử dụng các công thức: $\cos^3 x = \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}$, $\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$, $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

- Sử dụng công thức tính nguyên hàm: $\int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$.

Cách giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} & \int (\cos^3 x \cdot \sin 3x + \sin^3 x \cdot \cos 3x) dx \\ &= \int \left(\frac{3 \cos x + \cos 3x}{4} \cdot \sin 3x + \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \cdot \cos 3x \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int (3 \sin 3x \cos x + \sin 3x \cos 3x + 3 \sin x \cos 3x - \sin 3x \cos 3x) dx \\ &= \frac{3}{4} \int \sin 4x dx = -\frac{3}{16} \cos 4x + C \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = -3, b = 16$. Vậy $2a + b = 2 \cdot (-3) + 16 = 10$.

Chọn D.

Câu 28 (TH)

Phương pháp:

Khai triển nhị thức Niu-ơn: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$.

Cách giải:

$$\text{Ta có: } \left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k (x^2)^{9-k} \left(\frac{1}{2x}\right)^k = \sum_{k=0}^9 C_9^k \frac{1}{2^k} x^{18-3k}$$

Do đó số hạng không chứa x ứng với $18 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 6$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^9$ là $C_9^6 \frac{1}{2^6} = \frac{21}{16}$.

Chọn A.

Câu 29 (TH)

Phương pháp:

Đưa về cùng cơ số.

Cách giải:

$$2^{|x+4|} = 16^{x^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{|x+4|} = 2^{4x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow |x+4| = 4x^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4 = x + 4 & \text{khi } x \geq -4 \\ 4x^2 + 4 = -x - 4 & \text{khi } x < -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - x = 0 & \text{khi } x \geq -4 \\ 4x^2 + x + 8 = 0 & \text{khi } x < -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = 0 \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là một số dương.

Chọn D.

Câu 30 (TH):

Phương pháp:

Sử dụng tổ hợp và quy tắc nhân.

Cách giải:

Để chọn ra 5 bạn sao cho có đủ nam, nữ và số nam ít hơn số nữ ta có các trường hợp sau:

TH1: 1 nam và 4 nữ $\Rightarrow$ Có $C_{15}^1 \cdot C_{20}^4 = 72675$ cách.

TH2: 2 nam và 3 nữ $\Rightarrow$ Có $C_{15}^2 \cdot C_{20}^3 = 119700$ cách.

Vậy có tất cả $72675 + 119700 = 192375$ cách.

Chọn A.

Câu 31 (VD):

Phương pháp:

- Đưa về cùng cơ số.

- Sử dụng công thức $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a [f(x)g(x)]$ ($0 < a \neq 1, f(x), g(x) > 0$).

- Giải bất phương trình logarit: $\log_a f(x) \geq b \Leftrightarrow f(x) \geq a^b$ ($a > 1$).

Cách giải:

$$\log_2 (x^2 - x - 2) \geq \log_{0,5} (x - 1) + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 - x - 2) \geq -\log_2 (x - 1) + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 - x - 2) + \log_2 (x - 1) \geq +1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 - x - 2)(x - 1) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x - 1) \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x - x^2 + x + 2 \geq 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 0 \\ x \geq 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện đề bài $x \in [0; 2021], x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0; 3; 4; 5; \dots; 2021\}$

Vậy bất phương trình đã cho có 2020 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Chọn D.

Câu 32 (TH):

Phương pháp:

- Hàm phân thức có bậc tử < bậc mẫu thì đồ thị hàm số có TCN $y = 0$.

- Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm phân thức bằng số nghiệm của phương trình mẫu không bị triệt tiêu bởi nghiệm của phương trình tử.

Cách giải:

Vì hàm phân thức có bậc tử < bậc mẫu thì đồ thị hàm số có TCN $y = 0$.

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có tối đa 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{n}{m}$ nên đồ thị có tối đa 2 TCD.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tối đa 3 đường tiệm cận.

Chọn C.

Câu 33 (VD)

Phương pháp:

- Hình vuông cạnh a có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Thể tích khối trụ có chiều cao h bán kính đáy R là $V = \pi R^2 h$.
- Thể tích khối lập phương cạnh a là $V = a^3$.

Cách giải:

Giả sử hình lập phương có cạnh $a \Rightarrow$ Hình trụ có chiều cao $h = a$.

Vì đường tròn đáy của hình trụ là đường tròn ngoại tiếp đáy của hình lập phương nên hình trụ có bán kính đáy $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Thể tích khối trụ là } V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot a = \frac{\pi a^3}{4}.$$

Thể tích khối lập phương là $V' = a^3$.

Vậy tỉ số thể tích của khối trụ và khối lập phương đó là $\frac{V}{V'} = \frac{\pi}{4}$.

Chọn A.

Câu 34 (VD)

Phương pháp:

Sử dụng nhân xác suất.

Cách giải:

Xác suất để 1 toa có người là $\frac{7}{12}$ và xác suất để 1 toa không có người là $\frac{5}{12}$.

Vậy xác suất để 3 toa có người là $C_{12}^3 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^9 \approx 0,107$.

Chọn D.

Câu 35 (NB):

Phương pháp:

Tính xác suất bằng phương pháp liệt kê.

Cách giải:

Tung ngẫu nhiên 1 con súc sắc cân đối đồng chất một lần $\Rightarrow$ số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 6$.

Gọi A là biến cố: “xuất hiện mặt có số chấm lẻ” $\Rightarrow A = \{1; 3; 5\} \Rightarrow n(A) = 3$.

Vậy xác suất để xuất hiện mặt có số chấm lẻ là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Chọn A.

Câu 36 (VD)

Phương pháp:

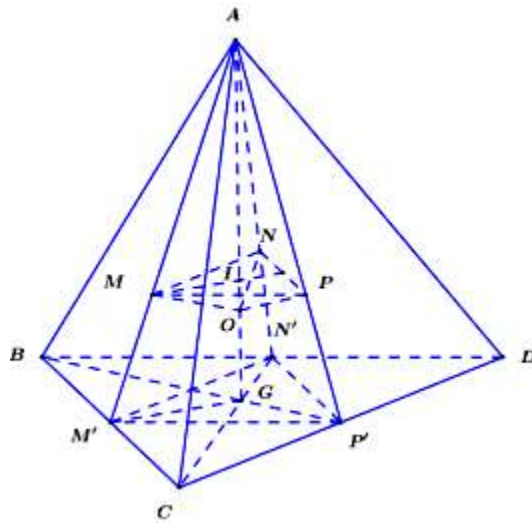
- Gọi M', N', P' lần lượt là trung điểm của BC, BD, CD, G, I lần lượt là trọng tâm tam giác BCD, MNP . Tính $\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta BCD}}$ dựa vào tỉ số tam giác đồng dạng.

- Tính tỉ số $\frac{OI}{AG}$, sử dụng định lí Ta-lét.

- Tính $\frac{V_{OMNP}}{V_{ABCD}} = \frac{OI}{AG} \cdot \frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta BCD}}$.

- Sử dụng công thức tính nhanh: Thể tích tứ diện đều cạnh a là $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.

Cách giải:



Gọi M', N', P' lần lượt là trung điểm của BC, BD, CD, G, I lần lượt là trọng tâm tam giác BCD, MNP .

Ta có: $\frac{MN}{M'N'} = \frac{AM}{AM'} = \frac{2}{3} \Rightarrow \Delta MNP \sim \Delta M'N'P'$ theo tỉ số $\frac{2}{3} \Rightarrow S_{\Delta MNP} = \frac{4}{9} S_{\Delta M'N'P'}$.

Lại có $\Delta M'N'P' \sim \Delta DCB$ theo tỉ số $\frac{1}{2}$ nên $S_{\Delta MNP} = \frac{1}{4} S_{\Delta BCD} \Rightarrow S_{\Delta M'N'P'} = \frac{1}{9} S_{\Delta BCD}$

Vì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên $\frac{AO}{AG} = \frac{3}{4}$.

$$\text{Áp dụng định lí Ta-lét: } \frac{AI}{AG} = \frac{AM}{AM'} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AI}{AO} = \frac{AI}{AG} : \frac{AO}{AG} = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{OI}{AO} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{OI}{AG} = \frac{OI}{AO} \cdot \frac{AO}{AG} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{12}.$$

$$\Rightarrow \frac{V_{OMNP}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{108} \Rightarrow V_{OMNP} = \frac{1}{108} V_{ABCD}.$$

$$\text{Mà } ABCD \text{ là tứ diện đều cạnh } 1 \text{ nên } V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

$$\text{Vậy } V_{OMNP} = \frac{\sqrt{2}}{1296}.$$

Chọn D.

Câu 37 (VD)

Phương pháp:

- Tính số tập hợp con có 2 phần tử của A , từ đó tính số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)$.
- Gọi A là biến cố: “trung bình cộng của các phần tử trong mỗi tập hợp đều bằng 30”, tính số phần tử $n(A)$ của biến cố A .
- Tính xác suất của biến cố A : $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Cách giải:

Số tập hợp con có 2 phần tử của A là $C_{90}^2 = 4005 \Rightarrow$ Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{4005}^2$.

Gọi A là biến cố: “trung bình cộng của các phần tử trong mỗi tập hợp đều bằng 30”

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{2} = 30 \\ \frac{c+d}{2} = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 60 \\ c+d = 60 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a; b)(c; d) \in \{(1; 59); (2; 58); \dots; (29; 31)\} \Rightarrow n(A) = C_{29}^2.$$

$$\text{Vậy xác suất của biến cố } A \text{ là: } P(A) = \frac{C_{29}^2}{C_{4005}^2} = \frac{29}{572715}.$$

Chọn B.

Câu 38 (TH)

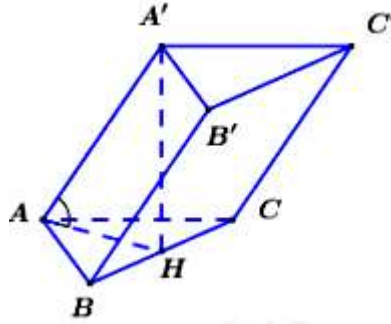
Phương pháp:

- Gọi H là trung điểm của BC ta có $A'H \perp (ABC)$. Tính $A'H = \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}}$.

- Xác định góc giữa cạnh bên và mặt đáy là góc giữa cạnh bên và hình chiếu của cạnh bên trên mặt đáy.

- Sử dụng tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông để tính tang của góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy.

Cách giải:



Gọi H là trung điểm của BC ta có $A'H \perp (ABC)$.

Vì ΔABC đều cạnh $a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} \Rightarrow A'H = \frac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{3a^3}{20}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{5}$.

Vì $A'H \perp (ABC)$ nên AH là hình chiếu vuông góc của AA' lên (ABC) .

$\Rightarrow \angle(AA'; (ABC)) = \angle(AA'; AH) = \angle A'AH$.

Xét tam giác vuông $AA'H$ ta có $\tan \angle A'AH = \frac{A'H}{AH} = \frac{a\sqrt{3}}{5} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{5}$.

Chọn C.

Câu 39 (VD)

Phương pháp:

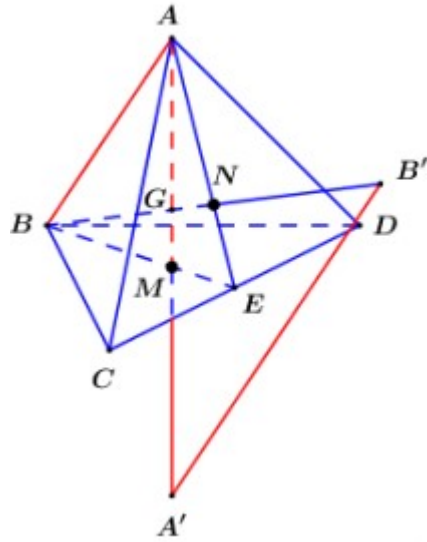
- Tứ diện $A'B'C'D'$ đồng dạng với tứ diện $ABCD$ theo tỉ số $k = \frac{A'B'}{AB}$.

- Gọi M, N lần lượt là trọng tâm tam giác BCD, ACD , gọi $G = AM \cap BN$. Tính $\frac{GA'}{GA} = \frac{A'B'}{AB}$.

- Tính $\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = k^3$.

- Sử dụng công thức tính nhanh: Thể tích khối tứ diện đều cạnh a là $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Cách giải:



Dễ dàng nhận thấy tứ diện $A'B'C'D'$ đồng dạng với tứ diện $ABCD$ theo tỉ số $k = \frac{A'B'}{AB}$.

Gọi M, N lần lượt là trọng tâm tam giác BCD, ACD ta có $AM \perp (BCD), BN \perp (ACD)$. Gọi $G = AM \cap BN$.

Ta có G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên $\frac{AG}{AM} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AG}{AA'} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{AG}{AA'} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{GA'}{GA} = \frac{5}{3}$.

Áp dụng định lí Ta-lét ta có: $\frac{GA'}{GA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{5}{3} = k$.

$$\Rightarrow \frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = k^3 = \frac{125}{27}.$$

Mà $ABCD$ là tứ diện đều cạnh 1 nên $V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

$$\text{Vậy } V_{A'B'C'D'} = \frac{125}{27} \cdot \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{125\sqrt{2}}{324}.$$

Chọn D.

Câu 40 (VDC)

Phương pháp:

- Lấy logarit hai vế của bất phương trình.
- Sử dụng phương pháp xét hàm đặc trưng.

Cách giải:

Lấy loganepe hai vế của bất phương trình ta có:

$$(3^n + 7^n)^{2021} > (3^{2021} + 7^{2021})^n$$

$$\Leftrightarrow 2021 \cdot \ln(3^n + 7^n) > n \cdot \ln(3^{2021} + 7^{2021})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(3^n + 7^n)}{n} > \frac{\ln(3^{2021} + 7^{2021})}{2021} (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\ln(3^t + 7^t)}{t}$ với $t \in \mathbb{Z}^+$ ta có:

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{3^t + 7^t} (3^t \ln 3 + 7^t \ln 7) t - \ln(3^t + 7^t)}{t^2}$$

$$f'(t) = \frac{t \cdot 3^t \cdot \ln 3 + t \cdot 7^t \cdot \ln 7 - (3^t + 7^t) \ln(3^t + 7^t)}{t^2 (3^t + 7^t)}$$

$$f'(t) = \frac{3^t \cdot \ln 3^t + 7^t \cdot \ln 7^t - 3^t \ln(3^t + 7^t) - 7^t \ln(3^t + 7^t)}{t^2 (3^t + 7^t)}$$

$$f'(t) = \frac{3^t \cdot [\ln 3^t - \ln(3^t + 7^t)] + 7^t \cdot [\ln 7^t - \ln(3^t + 7^t)]}{t^2 (3^t + 7^t)}$$

$$\forall t \begin{cases} 3^t < 3^t + 7^t \Rightarrow \ln 3^t < \ln(3^t + 7^t) \\ 7^t < 3^t + 7^t \Rightarrow \ln 7^t < \ln(3^t + 7^t) \end{cases} \Rightarrow f'(t) < 0 \forall t \in \mathbb{Z}^+$$

Do đó hàm số $y = f(t)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Từ (*) suy ra $0 < n < 2021$.

Chọn D.

Câu 41 (VDC)

Phương pháp:

- Tìm điểm $M_0 \in (C_m)$ cố định, **dự đoán** M_0 là tiếp điểm.

- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại M_0 .

- Thử lại: Xét phương trình hoành độ giao điểm, chứng minh tiếp tuyến vừa tìm được luôn tiếp xúc với (C_m) $\forall m \neq 0$.

- Đồng nhất hệ số tìm a, b .

Cách giải:

Ta có $y = \frac{(2m-1)x-m}{x+m} = \frac{2mx-x-m}{x+m} = \frac{2mx}{x+m} - 1$.

$\Rightarrow \forall m \neq 0$ thì đồ thị hàm số (C_m) luôn đi qua điểm cố định $M_0(0; -1)$. Ta dự đoán M_0 là tiếp điểm.

Khi đó ta có: Đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của (C_m) tại $M_0(0; -1)$.

Ta có: $y' = \frac{2m^2}{(x+m)^2} \Rightarrow y'(0) = 2$.

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại $M_0(0; -1)$ là: $y = 2(x-0) - 1 = 2x - 1$.

Thử lại: Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{2mx}{x+m} - 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow 2mx = 2x^2 + 2mx \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (nghiệm kép)}.$$

Do đó đường thẳng $y = 2x - 1$ luôn tiếp xúc với (C_m) (thỏa mãn).

Vậy $a = 2, b = -1 \Rightarrow a + b = 1$.

Chọn B.

Câu 42 (VD)

Phương pháp:

- Tính $g'(x)$, giải phương trình $g'(x) = 0$.
- Lập BXD của $g'(x)$.
- Xác định điểm cực đại của hàm số $g(x)$ là điểm mà $g'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm.

Cách giải:

Ta có:

$$g(x) = f(x^2 - 2x)$$

$$\Rightarrow g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \text{ (ta không xét } x^2 - 2x = 0 \text{ vì } x = 0 \text{ là nghiệm kép của phương trình } f'(x) = 0). \\ x^2 - 2x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \\ x=-1 \end{cases} \text{ và qua các nghiệm này thì } g'(x) \text{ đổi dấu.}$$

Chọn $x=4$ ta có $g'(4)=6.f'(8)>0$.

Khi đó ta có BXD của $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Điểm cực đại của hàm số $g(x)=f(x^2-2x)$ là $x_{CD}=1$.

Chọn C.

Câu 43 (VD):

Phương pháp:

- Giả sử $A(a; a^3 + a^2 - 4), B(b; b^3 + b^2 - 4)$.

- Vì $OA=2OB$ nên $\begin{cases} \overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OA}=-2\overrightarrow{OB} \end{cases}$, giải hệ phương trình bằng phương pháp thế.

Cách giải:

Giả sử $A(a; a^3 + a^2 - 4), B(b; b^3 + b^2 - 4)$.

- Vì $OA=2OB$ nên $\begin{cases} \overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OA}=-2\overrightarrow{OB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a; a^3 + a^2 - 4) = 2(b; b^3 + b^2 - 4) \\ (a; a^3 + a^2 - 4) = -2(b; b^3 + b^2 - 4) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ a^3 + a^2 - 4 = 2b^3 + 2b^2 - 8 \\ a=-2b \\ a^3 + a^2 - 4 = -2b^3 - 2b^2 + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ 8b^3 + 4b^2 - 4 = 2b^3 + 2b^2 - 8 \\ a=-2b \\ -8b^3 + 4b^2 - 4 = -2b^3 - 2b^2 + 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ 6b^3 + 2b^2 + 4 = 0 \\ a=-2b \\ 6b^3 - 6b^2 + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ b=-1 \\ a=-2b \\ b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \\ a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

Vậy có 2 cặp điểm A, B thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn A.

Câu 44 (VD)

Phương pháp:

- Đặt cạnh hình vuông là $x(cm)$, bán kính hình tròn là $y(cm)$.
- Tính chu vi hình vuông và chu vi hình tròn, suy ra tổng 2 chu vi bằng $120cm$.
- Tính diện tích hình vuông, diện tích hình tròn và tính tổng.
- Sử dụng BĐT Bunhiacopxki: $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Cách giải:

Đặt cạnh hình vuông là $x(cm)$, bán kính hình tròn là $y(cm)$.

$\Rightarrow$ Độ dài đoạn dây thứ nhất là $4x(cm)$, độ dài đoạn dây thứ hai là $2\pi y(cm)$.

$$\Rightarrow 4x + 2\pi y = 120 \Leftrightarrow 2x + \pi y = 60(cm)(*)$$

Diện tích hình vuông là $x^2(cm^2)$.

Diện tích hình tròn là $\pi y^2(cm^2)$.

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là: $x^2 + \pi y^2(cm^2)$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có:

$$60^2 = (2x + \pi y)^2 = (2x + \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi} y)^2 \leq (2^2 + \sqrt{\pi}^2)(x^2 + \pi y^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + \pi y^2 \geq \frac{60^2}{4 + \pi} \approx 504(cm^2)$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{\pi} y}{\sqrt{\pi}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = y$, kết hợp (*)

$$\Rightarrow 4y + \pi y = 60(cm) \Leftrightarrow y = \frac{60}{4 + \pi}(cm) \Rightarrow x = \frac{120}{4 + \pi}(cm)$$

Vậy tổng diện tích của hình vuông và hình tròn đạt giá trị nhỏ nhất $504(cm^2)$.

Chọn C.**Câu 45 (VD)****Phương pháp:**

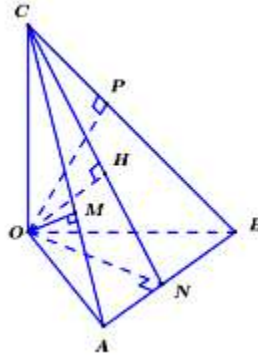
- Kẻ $OM \perp AC (M \in AC)$, $ON \perp AB (N \in AB)$, $OP \perp BC (P \in BC)$. Khi đó ta có

$$OP = a, OM = a\sqrt{2}, ON = a\sqrt{3}.$$

- Trong (OCN) kẻ $OH \perp CN (H \in CN)$, chứng minh $OH \perp (ABC)$.

- Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính khoảng cách.

Cách giải:



Kẻ $OM \perp AC (M \in AC)$, $ON \perp AB (N \in AB)$, $OP \perp BC (P \in BC)$.

Khi đó ta có $OP = a$, $OM = a\sqrt{2}$, $ON = a\sqrt{3}$.

Trong (OCN) kẻ $OH \perp CN (H \in CN)$ ta có:

$$\begin{cases} AB \perp ON \\ AB \perp OC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCN) \Rightarrow AB \perp OH$$

$$\begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp CN \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC) \Rightarrow d(O; (ABC)) = OH$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Lại có

$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OC^2}; \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}; \frac{1}{OP^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2} = 2 \left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{11}{12a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{11}{12a^2} \Rightarrow OH = \frac{2a\sqrt{33}}{11}$$

$$\text{Vậy } d(O; (ABC)) = \frac{2a\sqrt{33}}{11}.$$

Chọn D.

Câu 46 (VDC)**Cách giải:**

Ta có:

$$f(x) = (x^2 - m)|x - 2| + (m + 6)x - 2x^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x|x - 2| + (x^2 - m) \cdot \frac{x - 2}{|x - 2|} - 4x + m + 6$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x(x - 2) + x^2 - m - 4x + m + 6 = 3x^2 - 8x + 6 & \text{khi } x > 2 \\ -2x(x - 2) - x^2 + m - 4x + m + 6 = -3x^2 + 2m + 6 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 8x + 6 > 0 \forall x > 2.$$

Để hàm số đã cho có 2 điểm cực trị thì phương trình $-3x^2 + 2m + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2m + 6}{3}$ có 2 nghiệm $x_1 < x_2 < 2$ (*).

Ta có BXD $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	2	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	0	-		+

Khi đó hàm số ban đầu sẽ thỏa mãn có 3 điểm cực trị.

$$\text{Ta có (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m + 6}{3} > 0 \\ \sqrt{\frac{2m + 6}{3}} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ \frac{2m + 6}{3} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 3.$$

$$\text{Mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}.$$

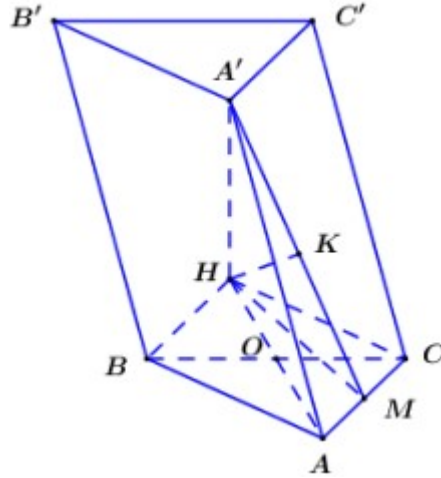
Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn A.**Câu 47 (VDC)****Phương pháp:**

- Gọi O là trung điểm của BC , gọi H là điểm đối xứng với A qua O , chứng minh H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.
- Xác định $\angle(A'A; (ABC))$.
- Đặt $AB = AC = AH = A'H = x (x > 0)$.

- Chứng minh $\Rightarrow d(B; (ACC'A')) = d(H; (ACC'A'))$. Gọi M là trung điểm của AC , trong $(A'HM)$ kẻ $HK \perp A'M (K \in A'M)$, chứng minh $d(H; (ACC'A')) = HK$.
- Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $A'HM$ tìm x .
- Tính $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC}$.

Cách giải:



Gọi O là trung điểm của BC , gọi H là điểm đối xứng với A qua O , dễ dàng chứng minh được $ABHC$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = BH \\ \angle ABH = 180^\circ - \angle BAC = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta ABH \text{ đều} \Rightarrow AB = AH = AC \Rightarrow H \text{ là tâm đường tròn ngoại tiếp } \Delta ABC \Rightarrow A'H \perp (ABC).$$

Do đó $A'H$ là hình chiếu vuông góc của AA' lên (ABC) .

$$\Rightarrow \angle(AA'; (ABC)) = \angle(AA'; A'H) = \angle A'AH = 45^\circ \Rightarrow \Delta AA'H \text{ vuông cân tại } H \Rightarrow AH = A'H.$$

$$\text{Đặt } AB = AC = AH = A'H = x (x > 0)$$

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm của } AC, \text{ ta có } AH = AC = CH = x \Rightarrow \Delta ACH \text{ đều cạnh } x \Rightarrow HM \perp AC \text{ và } HM = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Trong $(A'HM)$ kẻ $HK \perp A'M (K \in A'M)$ ta có:

$$\begin{cases} AC \perp HM \\ AC \perp A'H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'HM) \Rightarrow AC \perp HK$$

$$\begin{cases} HK \perp A'M \\ HK \perp AC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (ACC'A') \Rightarrow d(H; (ACC'A')) = HK$$

$$\text{Lại có } BH \parallel AC \Rightarrow BH \parallel (ACC'A') \Rightarrow d(B; (ACC'A')) = d(H; (ACC'A')) = HK = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $A'HM$ ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{HM^2} \Leftrightarrow \frac{7}{3} = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{3x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{3} = \frac{7}{3x^2} \Leftrightarrow x = AB = A'H$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Chọn A.

Câu 48 (VDC)

Cách giải:

Trong tập hợp S ta có:

- Tập hợp các số chia hết cho 5 là $S_0 = \{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35\}$: 7 phần tử

- Tập hợp các số chia cho 5 dư 1 là $S_1 = \{1; 6; 11; 16; 21; 26; 31\}$: 7 phần tử.

- Tập hợp các số chia cho 5 dư 2 là $S_2 = \{2; 7; 12; 17; 22; 27; 32\}$: 7 phần tử.

- Tập hợp các số chia cho 5 dư 3 là $S_3 = \{3; 8; 13; 18; 23; 28; 33\}$: 7 phần tử.

- Tập hợp các số chia cho 5 dư 4 là $S_4 = \{4; 9; 14; 19; 24; 29; 34\}$: 7 phần tử.

Gọi X là tập hợp các tập hợp gồm tất cả các tập con chứa 26 phần tử của S ta có $n(X) = C_{35}^{26}$.

Gọi $X_0 = \{\text{những số chia hết cho 5}\}$, $X_1 = \{\text{những số chia cho 5 dư 1}\}$, $X_2 = \{\text{những số chia cho 5 dư 2}\}$, $X_3 = \{\text{những số chia cho 5 dư 3}\}$, $X_4 = \{\text{những số chia cho 5 dư 4}\}$.

$$\Rightarrow X = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4.$$

Ta chứng minh được $n(X_0) = n(X_1) = n(X_2) = n(X_3) = n(X_4)$.

Vậy số cách chọn một tập con của S gồm 26 phần tử sao cho tổng các phần tử của nó chia hết cho 5 là $\frac{C_{35}^{26}}{5} = 14121492$.

Chọn B.

Câu 49 (VD)

Phương pháp:

- Khai triển hằng đẳng thức.

- Sử dụng: $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, từ đó tìm $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x), \max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.

- Giải phương trình tìm nghiệm nguyên m, n .

Cách giải:

Ta có:

$$f(x) = (\sin x - m)^2 + (\cos x - n)^2$$

$$f(x) = \sin^2 x - 2m \sin x + m^2 + \cos^2 x - 2n \cos x + n^2$$

$$f(x) = 1 - 2(m \sin x + n \cos x) + m^2 + n^2$$

$$\text{Ta có: } -\sqrt{m^2 + n^2} \leq m \sin x + n \cos x \leq \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{m^2 + n^2} \geq -2(m \sin x + n \cos x) \geq -2\sqrt{m^2 + n^2}$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sqrt{m^2 + n^2} \geq 1 - 2(m \sin x + n \cos x) \geq 1 - 2\sqrt{m^2 + n^2}$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sqrt{m^2 + n^2} + m^2 + n^2 \geq f(x) \geq 1 - 2\sqrt{m^2 + n^2} + m^2 + n^2$$

$$\Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1 - 2\sqrt{m^2 + n^2} + m^2 + n^2$$

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1 + 2\sqrt{m^2 + n^2} + m^2 + n^2$$

Theo bài ra ta có:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) + \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 52$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{m^2 + n^2} + m^2 + n^2 + 1 + 2\sqrt{m^2 + n^2} + m^2 + n^2 = 52$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2m^2 + 2n^2 = 52$$

$$\Leftrightarrow m^2 + n^2 = 25$$

$$\text{Vì } m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (m; n) \in \left\{ \begin{array}{l} (0; 5); (0; -5); (5; 0); (-5; 0); \\ (3; 4); (3; -4); (-3; 4); (-3; -4); \\ (4; 3); (4; -3); (-4; 3); (-4; -3) \end{array} \right\}.$$

Vậy có 12 bộ số $(m; n)$ thỏa mãn.

Chọn D.

Câu 50 (VDC)

Phương pháp:

Rút gọn $\frac{x^3 - 1}{(x+1)^3 + 1} = \frac{x-1}{x+2}$. Từ đó rút gọn biểu thức trong log và giải bất phương trình.

Cách giải:

Ta có:

$$\log_{\frac{37}{55}} \frac{2^3-1}{2^3+1} + \log_{\frac{37}{55}} \frac{3^3-1}{3^3+1} + \dots + \log_{\frac{37}{55}} \frac{x^3-1}{x^3+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{37}{55}} \left(\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \dots \frac{x^3-1}{x^3+1} \right) < 1 (*)$$

$$\text{Ta có: } \frac{x^3-1}{(x+1)^3+1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+2)\left[(x+1)^2-(x+1)+1\right]} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{x-1}{x+2}.$$

Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow \log_{\frac{37}{55}} \left(\frac{1}{2^3+1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} \dots \frac{x-2}{x+1} \cdot (x^3-1) \right) < 1$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{37}{55}} \left(\frac{x^3-1}{9} \cdot \frac{1.2.3}{(x-1)x(x+1)} \right) < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-1}{9} \cdot \frac{1.2.3}{(x-1)x(x+1)} > \frac{37}{55}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2+x+1}{x^2+x} > \frac{37}{55}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2+x} > \frac{111}{110}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2+x} > \frac{1}{110}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x < 110$$

$$\Leftrightarrow -11 < x < 10$$

$$\text{Kết hợp điều kiện đề bài ta có } \begin{cases} 2 < x < 10 \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x \in \{3; 4; 5; \dots; 9\}.$$

$$\text{Vậy tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho bằng: } 3+4+\dots+9 = \frac{(3+9).7}{2} = 42.$$

Chọn D.

----- HẾT -----

<https://toanmath.com/>