SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC
TRƯỜNG THPT LIỄN SƠN

ĐỀ KSCL ĐỘI TUYỂN HSG NĂM HỌC 2020-2021
ĐỀ THI MÔN: TOÁN - KHỐI 10
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề
Đề thi gồm: 01 trang

Câu 1 (2,0 điểm). Tìm tập xác định của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{11x+3}{x^2.\sqrt{16-x^4}}$.

Câu 2 (2,0 điểm). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^2-2\left(m+1\right)x+4$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\, x_2$ thỏa mãn $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=4$.

Câu 3 (2,0 điểm). Cho a là một số thực. Xét hai tập hợp: $A=\left\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}, x+y=a\right\}$ và $B=\left\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R},\ x^3+y^3<a\right\}$. Tìm tất cả các giá trị của a để A và B không có phần tử chung.

Câu 4 (2,0 điểm). Giải bất phương trình $\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}\right)\sqrt{x^2-4x}\ge 0$.

Câu 5 (2,0 điểm). Cho phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+m}$.Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm thực.

Câu 6 (2,0 điểm). Xác định dạng của tam giác ABC biết các góc A, B, C của tam giác đó thỏa mãn hệ thức $\dfrac{\sin C}{\sin A\cos B}=2$.

Câu 7 (2,0 điểm). Cho tam giác đều ABC. Điểm M thay đổi nằm trong đoạn AB, (M khác A và B). Gọi H, K tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên các đoạn BC và AC; G là trọng tâm của tam giác MHK. Chứng minh rằng đường thẳng MG luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 8 (2,0 điểm). Cho tam giác ABC có $AB=c, AC=b, \widehat{BAC}=60^0$. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{NB}=-2\overrightarrow{NA}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa b, c để AM và CN vuông góc với nhau.

Câu 9 (2,0 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+4xy+5y^2=5\\ x^2-2y^2+2x+y=-1\end{cases}$.

Câu 10 (2,0 điểm). Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}$.

------Hết------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………….……..…….…….; Số báo danh……………………….

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC
TRƯỜNG THPT LIỄN SƠN

(Đáp án có 05 trang)

ĐỀ KSCL ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI KHỐI 10
NĂM HỌC 2020-2021
ĐÁP ÁN MÔN: TOÁN

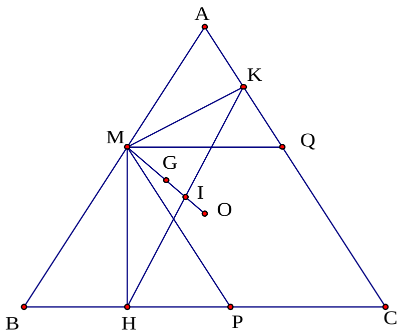
I. LƯU Ý CHUNG:

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,5 và không làm tròn.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1	Tìm tập xác định của hàm số: $f\left(x\right)=\dfrac{11x+3}{x^2.\sqrt{16-x^4}}$.	**2,0**
	Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2\neq 0 \\ 16-x^4>0 \end{cases}$.	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ \left(4-x^2\right)\left(4+x^2\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ 4-x^2>0 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ -2<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<x<0 \\ 0<x<2 \end{array}\right.$	0,5
	Tập xác định của hàm số là $D=\left(-2;0\right)\cup\left(0;2\right)$	0,5
2	Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=x^2-2\left(m+1\right)x+4$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=4$	**2,0**
	Xét phương trình $x^2-2(m+1)x+4=0\ (*)$ Để đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=4$ thì (*)phải có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1,x_2\geq 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ S\geq 0 \\ P\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>1$	0,5
	Ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2\left(m+1\right) \\ x_1x_2=4 \end{cases}$	0,5
	$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=4 \Leftrightarrow x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}=16 \Leftrightarrow m=5$. Vậy $m=5$	0,5

3	Cho a là một số thực. Xét hai tập hợp: $A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}, x+y=a\}$ và $B=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R},\ x^3+y^3<a\}$. Tìm tất cả các giá trị của a để A và B không có phần tử chung.	**2,0**
	$A\cap B=\varnothing \Leftrightarrow$ với mỗi $x,y\in\mathbb{R}$ thoả mãn $x+y=a$ thì $x^3+y^3\ge a$ Điều này tương đương với $x^3+(a-x)^3\ge a\quad \forall x\in\mathbb{R}$ Hay: $3ax^2-3a^2x+a^3-a\ge 0\ (1)\ \forall x\in\mathbb{R}$	0,5
	Nếu $a=0$ thì (1) đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$	0,5
	Nếu $a\ne 0$: (1) đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi: $\begin{cases}3a>0\\ \Delta=9a^4-12a(a^3-a)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ 4a^2-a^4\le 0\end{cases}\Leftrightarrow a\ge 2$	0,5
	Vậy các giá trị cần tìm của a là: $a=0$ hoặc $a\ge 2$.	0,5
4	**Giải bất phương trình** $\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}\right)\sqrt{x^2-4x}\ge 0$	**2,0**
	Trường hợp 1: $\begin{cases}x^2-4x=0\\ x-3\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=4\end{array}\right.$	0,5
	Trường hợp 2: $\begin{cases}x^2-4x>0\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x-3}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\quad\vee x>4\\ 1\le x\le 2\vee x>3\end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow x>4$	0,5
	Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{0\}\cup[4;+\infty)$	0,5
5	**Tìm các giá trị của tham số m để phương trình** $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+9x+m}$ **có nghiệm thực.**	**2,0**
	Phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 9\\ -\left(9x-x^2\right)+2\sqrt{9x-x^2}+9=m\end{cases}$	0,5
	Đặt $t=\sqrt{9x-x^2}$, $0\le t\le\dfrac{x+(9-x)}{2}=\dfrac{9}{2},\forall x\in[0;9]$	0,5
	Phương trình trở thành: $-t^2+2t+9=m$ Xét hàm số $f(t)=-t^2+2t+9, t\in\left[0;\dfrac{9}{2}\right]$ $\begin{array}{c\|ccccc} t & 0 & & 1 & & \frac{9}{2} \\ \hline f(t) & & & 10 & & \\ & 9 & \nearrow & & \searrow & -\frac{9}{4} \end{array}$	0,5

	Từ bảng biến thiên ta có: $-\frac{9}{4}\le m\le 10$	0,5
6	**Xác định dạng của tam giác *ABC* biết các góc *A, B, C* của tam giác đó thỏa mãn hệ thức** $\frac{\sin C}{\sin A\cos B}=2$**.**	**2,0**
	Áp dụng định lý hàm số sin: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\begin{cases}\sin A=\frac{a}{2R}\\ \sin C=\frac{c}{2R}\end{cases}$	0,5
	Áp dụng định lý hàm số côsin: $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B\Rightarrow\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$	0,5
	Theo giả thiết ta có: $\frac{\sin C}{\sin A\cos B}=2\Leftrightarrow\sin C=2\sin A\cos B\Leftrightarrow\frac{c}{2R}=2.\frac{a}{2R}.\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)$	0,5
	$\Leftrightarrow c=\frac{a^2+c^2-b^2}{c}\Leftrightarrow c^2=a^2+c^2-b^2\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow a=b$ Vậy tam giác ABC cân tại C	0,5
7	Cho tam giác đều ABC. Điểm M thay đổi nằm trong đoạn AB, (M khác A và B). Gọi H,K tương ứng là hình chiếu vuông góc của M trên các đoạn BC và AC; G là trọng tâm của tam giác MHK. Chứng minh rằng đường thẳng MG luôn đi qua một điểm cố định.  	**2,0**
	Gọi I là trung điểm HK, ta có $\overrightarrow{MG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MI}\Rightarrow\overrightarrow{MG}=\frac{\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{MK}}{3}$.	0,5
	Kẻ $MP//AC$, MQ//BC (với $P\in BC$, $Q\in AC$) suy ra H là trung điểm BP và K là trung điểm AQ. Do đó $\overrightarrow{MG}=\frac{\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MQ}}{6}$.	0,5
	Tứ giác $MPCQ$ là hình bình hành $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MC}$. Do đó $\overrightarrow{MG}=\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}}{6}$.	0,5
	Gọi O là tâm trọng tâm tam giác ABC, suy ra $\overrightarrow{MG}=\frac{\overrightarrow{MO}}{2}$.	0,5

	Vậy MG luôn đi qua trọng tâm O của tam giác ABC.	
8	**Cho tam giác** ABC **có** $AB=c, AC=b, \widehat{BAC}=60^0$**. Các điểm *M, N* được xác định bởi** $\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{NB}=-2\overrightarrow{NA}$**. Tìm hệ thức liên hệ giữa *b, c* để *AM* và *CN* vuông góc với nhau.**	**2,0**
	Ta có: $\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}=-2\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}\right)\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$	0,5
	Tương tự ta cũng có: $3\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.	0,5
	Vậy: $AM\perp CN\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CN}=0\Leftrightarrow\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow\left(2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\right)=0\Leftrightarrow 2AB^2-3AC^2-5\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ $\Leftrightarrow 2c^2-3b^2-5\dfrac{bc}{2}=0\Leftrightarrow 4c^2-5bc-6b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=2b\\ c=\dfrac{-3}{4}b\end{array}\right.$	0,5
9	**Giải hệ phương trình** $\begin{cases}2x^2+4xy+5y^2=5\\ x^2-2y^2+2x+y=-1\end{cases}$.	**2,0**
	Hệ phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}(2x+y)^2-2\left(x^2-2y^2\right)=5\\ (2x+y)+\left(x^2-2y^2\right)=-1\end{cases}$	0,5
	Đặt $\begin{cases}u=2x+y\\ v=x^2-2y^2\end{cases}$. Hệ trở thành: $\begin{cases}u^2-2v=5\\ u+v=-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=1\\ v=-2\end{cases}\\ \begin{cases}u=-3\\ v=2\end{cases}\end{array}\right.$	0,5
	Với $\begin{cases}u=1\\ v=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=1\\ x^2-2y^2=-2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0; y=1\\ x=\dfrac{8}{7}; y=-\dfrac{9}{7}\end{array}\right.$	0,5
	Với $\begin{cases}u=-3\\ v=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=-3\\ x^2-2y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2; y=1\\ x=-\dfrac{10}{7}; y=-\dfrac{1}{7}\end{array}\right.$ Vậy hệ có 4 nghiệm $(x;y)$ là: $(-2;1);(0;1);\left(\dfrac{8}{7};-\dfrac{9}{7}\right);\left(-\dfrac{10}{7};-\dfrac{1}{7}\right)$.	0,5
10	Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}$	**2,0**
	Ta có $A^2=\left(\dfrac{xy}{z}\right)^2+\left(\dfrac{yz}{x}\right)^2+\left(\dfrac{zx}{y}\right)^2+2\left(x^2+y^2+z^2\right)$	0,5

	Ta thấy $\left(x-y\right)^2+\left(y-z\right)^2+\left(z-x\right)^2\ge 0\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx,\forall x,y,z\ (*)$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$	0,5
	Áp dụng BĐT (*) ta được $\left(\frac{xy}{z}\right)^2+\left(\frac{yz}{x}\right)^2+\left(\frac{zx}{y}\right)^2\ge x^2+y^2+z^2$ Khi đó $A^2=\left(\frac{xy}{z}\right)^2+\left(\frac{yz}{x}\right)^2+\left(\frac{zx}{y}\right)^2+2\left(x^2+y^2+z^2\right)\ge 3\left(x^2+y^2+z^2\right)=3$	0,5
	Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{xy}{z}=\frac{yz}{x}=\frac{zx}{y}\Rightarrow x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$ Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức *A* bằng $\sqrt{3}$ đạt được khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$	0,5

-------Hết-------