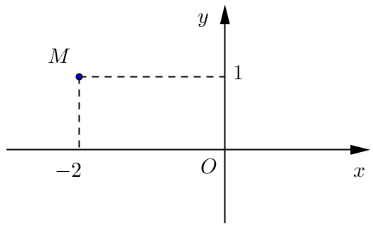
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	KỲ THI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUỐC GIA NĂM 2018
ĐỀ THI THAM KHẢO	**Bài thi: TOÁN**
(Đề thi có 06 trang)	*Thời gian làm bài: **90** phút, không kể thời gian phát đề*

Họ, tên thí sinh: ....

Số báo danh: ....

Mã đề thi 001

Câu 1. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



A. $z=-2+i.$ **B.** $z=1-2i.$

C. $z=2+i.$ **D.** $z=1+2i.$

Câu 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}\cdot$ **B.** 1. **C.** 2. **D.** -3.

Câu 3. Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là

A. A_{10}^{8}. **B.** A_{10}^{2}. **C.** C_{10}^{2}. **D.** 10^2.

Câu 4. Thể tích của khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

A. $V=\dfrac{1}{3}Bh.$ **B.** $V=\dfrac{1}{6}Bh.$ **C.** $V=Bh.$ **D.** $V=\dfrac{1}{2}Bh.$

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b\,(a<b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$ **B.** $V=2\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$ **C.** $V=\pi^2\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$ **D.** $V=\pi^2\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x=1.$ **B.** $x=0.$ **C.** $x=5.$ **D.** $x=2.$

Câu 8. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. $\log(3a)=3\log a.$ **B.** $\log a^3=\frac{1}{3}\log a.$

C. $\log a^3=3\log a.$ **D.** $\log(3a)=\frac{1}{3}\log a.$

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+1$ là

A. $x^3+C.$ **B.** $\frac{x^3}{3}+x+C.$ **C.** $6x+C.$ **D.** $x^3+x+C.$

Câu 10. Trong không gian $Oxyz,$ cho điểm $A(3;-1;1).$ Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(3;0;0).$ **B.** $N(0;-1;1).$ **C.** $P(0;-1;0).$ **D.** $Q(0;0;1).$

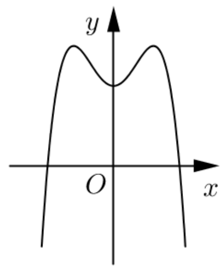
Câu 11. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây ?

A. $y=-x^4+2x^2+2.$

B. $y=x^4-2x^2+2.$

C. $y=x^3-3x^2+2.$

D. $y=-x^3+3x^2+2.$



Câu 12. Trong không gian $Oxyz,$ cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}.$ Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}_1=(-1;2;1).$ **B.** $\vec{u}_2=(2;1;0).$ **C.** $\vec{u}_3=(2;1;1).$ **D.** $\vec{u}_4=(-1;2;0).$

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x}<2^{x+6}$ là

A. $(0;6).$ **B.** $(-\infty;6).$ **C.** $(0;64).$ **D.** $(6;+\infty).$

Câu 14. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng $a.$ Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

A. $2\sqrt{2}a.$ **B.** $3a.$ **C.** $2a.$ **D.** $\frac{3a}{2}.$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz,$ cho ba điểm $M(2;0;0),$ $N(0;-1;0)$ và $P(0;0;2).$ Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A. $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=0.$ **B.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=-1.$ **C.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1.$ **D.** $\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1.$

Câu 16. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng ?

A. $y=\frac{x^2-3x+2}{x-1}.$ **B.** $y=\frac{x^2}{x^2+1}.$ **C.** $y=\sqrt{x^2-1}.$ **D.** $y=\frac{x}{x+1}.$

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x)-2=0$ là

A. $0.$ **B.** $3.$ **C.** $1.$ **D.** $2.$

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-4x^2+5$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 50. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 122.

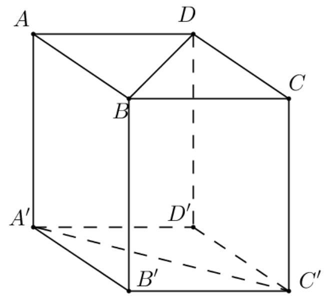
Câu 19. Tích phân $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{16}{225}$. **B.** $\log\frac{5}{3}$. **C.** $\ln\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{2}{15}$.

Câu 20. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2-4z+3=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



A. $\sqrt{3}a$. **B.** a.

C. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $\sqrt{2}a$.

Câu 22. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,4% /tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi ?

A. 102.424.000 đồng. **B.** 102.423.000 đồng. **C.** 102.016.000 đồng. **D.** 102.017.000 đồng.

Câu 23. Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để 2 quả cầu chọn ra cùng màu bằng

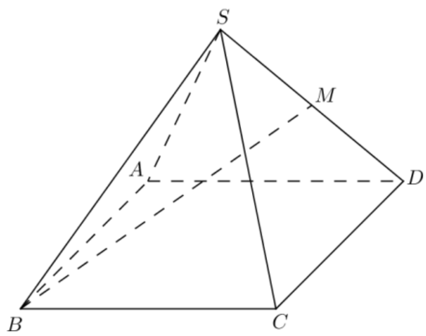
A. $\frac{5}{22}$. **B.** $\frac{6}{11}$. **C.** $\frac{5}{11}$. **D.** $\frac{8}{11}$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$ và $B(2;1;0)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $3x-y-z-6=0$. **B.** $3x-y-z+6=0$.

C. $x+3y+z-5=0$. **D.** $x+3y+z-6=0$.

Câu 25. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của SD (tham khảo hình vẽ bên). Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

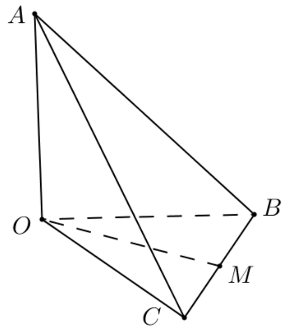
Câu 26. Với n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1+C_n^2=55$, số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^n$ bằng

A. 322560. **B.** 3360. **C.** 80640. **D.** 13440.

Câu 27. Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x=\frac{2}{3}$ bằng

A. $\frac{82}{9}$. **B.** $\frac{80}{9}$. **C.** 9. **D.** 0.

Câu 28. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng



A. 90^o.

B. 30^o.

C. 60^o.

D. 45^o.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz,$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}; d_2: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+3z-5=0$. Đường thẳng vuông góc với $(P),$ cắt d_1 và d_2 có phương trình là

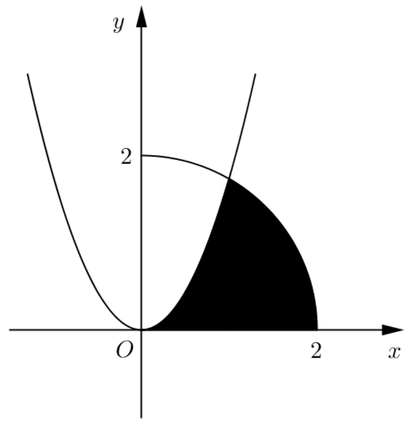
A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$. **B.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$.

C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$. **D.** $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 31. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2,$ cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0 \le x \le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$. **D.** $\frac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$.

Câu 32. Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c.$

A. $P=24.$ **B.** $P=12.$ **C.** $P=18.$ **D.** $P=46.$

Câu 33. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD.$

A. $S_{xq} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}.$ **B.** $S_{xq} = 8\sqrt{2}\pi.$ **C.** $S_{xq} = \frac{16\sqrt{3}\pi}{3}.$ **D.** $S_{xq} = 8\sqrt{3}\pi.$

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $16^x - 2.12^x + (m-2)9^x = 0$ có nghiệm dương ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\sin x}} = \sin x$ có nghiệm thực ?

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 36. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x+m|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 6.

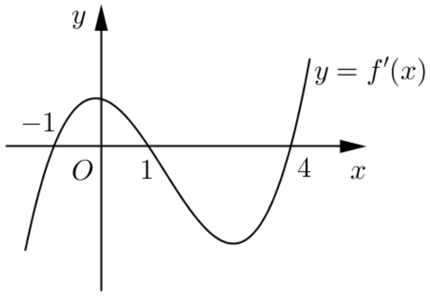
Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\dfrac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 15.$ **B.** $2+\ln 15.$ **C.** $3+\ln 15.$ **D.** $\ln 15.$

Câu 38. Cho số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b.$

A. $P=-1.$ **B.** $P=-5.$ **C.** $P=3.$ **D.** $P=7.$

Câu 39. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng



A. $(1;3).$ **B.** $(2;+\infty).$

C. $(-2;1).$ **D.** $(-\infty;-2).$

Câu 40. Cho hàm số $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{3}{2}\cdot$ **C.** $\dfrac{5}{2}\cdot$ **D.** $\dfrac{1}{2}\cdot$

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA=OB=OC\neq 0$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 42. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1+\sqrt{2+\log u_1-2\log u_{10}}=2\log u_{10}$ và $u_{n+1}=2u_n$ với mọi $n\geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>5^{100}$ bằng

A. 247. **B.** 248. **C.** 229. **D.** 290.

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1), B\left(-\dfrac{8}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{8}{3}\right)$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{2}.$ **B.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-8}{-2}=\dfrac{z-4}{2}.$

C. $\dfrac{x+\frac{1}{3}}{1}=\dfrac{y-\frac{5}{3}}{-2}=\dfrac{z-\frac{11}{6}}{2}.$ **D.** $\dfrac{x+\frac{2}{9}}{1}=\dfrac{y-\frac{2}{9}}{-2}=\dfrac{z+\frac{5}{9}}{2}.$

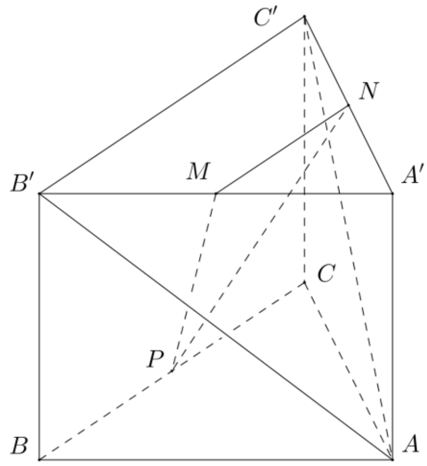
Câu 45. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua đường thẳng DE. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

A. $\dfrac{7}{6}.$ **B.** $\dfrac{11}{12}.$ **C.** $\dfrac{2}{3}.$ **D.** $\dfrac{5}{6}.$

Câu 46. Xét các số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a+b$ khi $|z+1-3i|+|z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=10.$ **B.** $P=4.$ **C.** $P=6.$ **D.** $P=8.$

Câu 47. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2.$ Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng



A. $\frac{6\sqrt{13}}{65}.$ **B.** $\frac{\sqrt{13}}{65}.$

C. $\frac{17\sqrt{13}}{65}.$ **D.** $\frac{18\sqrt{13}}{65}.$

Câu 48. Trong không gian $Oxyz,$ cho ba điểm $A(1;2;1), B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1).$ Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm $A,$ bán kính bằng $2;$ (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính đều bằng $1.$ Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 49. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C thành một hàng ngang. Xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

A. $\frac{11}{630}.$ **B.** $\frac{1}{126}.$ **C.** $\frac{1}{105}.$ **D.** $\frac{1}{42}.$

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}.$ Tích phân $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

A . $\frac{7}{5}.$ **B.** 1. **C.** $\frac{7}{4}.$ **D.** 4.

------------------------ **HẾT** ------------------------

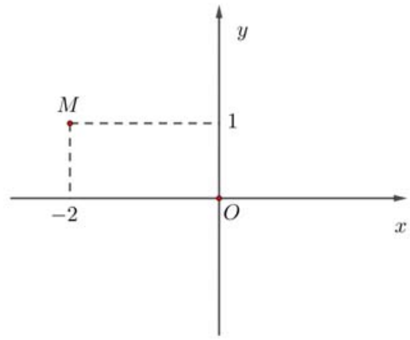
BẢNG ĐÁP ÁN

Câu 1 – A	Câu 11 – A	Câu 21 - B	Câu 31 – B	Câu 41 - A
Câu 2 – B	Câu 12 – A	Câu 22 - A	Câu 32 - D	Câu 42 - B
Câu 3 – C	Câu 13 – B	Câu 23 - C	Câu 33 - A	Câu 43 - D
Câu 4 – A	Câu 14 – B	Câu 24 - B	Câu 34 - B	Câu 44 - A
Câu 5 – A	Câu 15 – D	Câu 25 - D	Câu 35 - A	Câu 45 - D
Câu 6 – A	Câu 16 - D	Câu 26 - D	Câu 36 - B	Câu 46 - A
Câu 7 – D	Câu 17 - B	Câu 27 - A	Câu 37 - C	Câu 47 - B
Câu 8 – C	Câu 18 - A	Câu 28 - C	Câu 38 - D	Câu 48 - C
Câu 9 – D	Câu 19 - C	Câu 29 - A	Câu 39 - A	Câu 49 - A
Câu 10 – B	Câu 20 - D	Câu 30 - D	Câu 40 - B	Câu 50 - A

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐỀ THI THAM KHẢO

KỲ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2018
Bài thi: Toán
Thời gian làm bài: **90 phút**

Câu 1. Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



A. $z=-2+i$. **B.** $z=1-2i$. **C.** $z=2+i$. **D.** $z=1+2i$.

Lời giải

Chọn. **A.**

Điểm $M\left(-2;1\right)$ là điểm biểu diễn số phức $z=-2+i$.

Câu 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+3}$ bằng

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -3.

Lời giải

Chọn. **B.**

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{1+\frac{3}{x}}=1.$$

Câu 3. Cho tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là

A. A_{10}^{8}. **B.** A_{10}^{2}. **C.** C_{10}^{2}. **D.** 10^2.

Lời giải

Chọn. **C.**

Số tập con gồm 2 phần tử của M là một tổ hợp chập 2 của 10 phần tử: C_{10}^{2}.

Câu 4. Thể tích của khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B là

A. $V=\dfrac{1}{3}Bh$. **B.** $V=\dfrac{1}{6}Bh$. **C.** $V=Bh$. **D.** $V=\dfrac{1}{2}Bh$.

Lời giải

Chọn. **A.**

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn. **A.**

Dựa vào bảng biến thiên ta có: Hàm số nghịch biến trên khoảng: $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V = 2\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V = \pi^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V = \pi^2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn. **A.**

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức $V = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x = 1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 5$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn. **D.**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Câu 8. Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log(3a) = 3\log a$. **B.** $\log a^3 = \frac{1}{3}\log a$. **C.** $\log a^3 = 3\log a$. **D.** $\log(3a) = \frac{1}{3}\log a$.

Lời giải

Chọn. **C.**

Ta có:

+ $\log a^3 = 3\log a$.

+ $\log(3a) = \log 3 + \log a$.

Câu 9. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $x^3 + C$. **B.** $\dfrac{x^3}{3} + x + C$. **C.** $6x + C$. **D.** $x^3 + x + C$.

Lời giải

Chọn. **D.**

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (3x^2 + 1)\mathrm{d}x = x^3 + x + C$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;1)$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

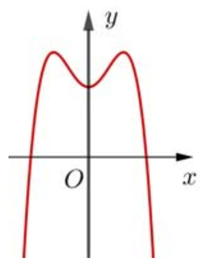
A. $M(3;0;0)$. **B.** $N(0;-1;1)$. **C.** $P(0;-1;0)$. **D.** $Q(0;0;1)$.

Lời giải

Chọn. **B.**

Hình chiếu của $A(3;-1;1)$ lên mặt phẳng (Oyz) là điểm $N(0;-1;1)$.

Câu 11. Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 + 2$. **C.** $y = x^3 - 3x^2 + 2$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2 + 2$.

Lời giải

Chọn. **A.**

Dựa vào dạng đồ thị ta loại **B, C** vì đây là dạng đồ thị hàm trùng phương.

Nhánh sau cùng đi xuống nên ta có hệ số $a < 0$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

A. $\overrightarrow{u_1} = (-1;2;1)$. **B.** $\overrightarrow{u_2} = (2;1;0)$. **C.** $\overrightarrow{u_3} = (2;1;1)$. **D.** $\overrightarrow{u_4} = (-1;2;0)$.

Lời giải.

Chọn. **A.**

Đường thẳng $d: \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a;b;c)$.

Suy ra đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (-1;2;1)$.

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là

A. $(0;6)$. **B.** $(-\infty;6)$. **C.** $(0;64)$. **D.** $(6;+\infty)$.

Lời giải.

Chọn. B.

Ta có: $2^{2x} < 2^{x+6} \Leftrightarrow 2^{2x} < 64.2^x \Leftrightarrow 2^x\left(2^x - 64\right) < 0 \Leftrightarrow 2^x < 64 = 2^6 \Leftrightarrow x < 6 \Rightarrow S = (-\infty;6)$.

Câu 14. Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $3\pi a^2$ và bán kính đáy bằng a. Độ dài đường sinh của hình nón đã cho bằng

A. $2\sqrt{2}a$. **B.** $3a$. **C.** $2a$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải.

Chọn. B.

Ta có: $S_{xq} = \pi rl = 3\pi a^2 \Leftrightarrow \pi.a.l = 3\pi a^2 \Leftrightarrow l = 3a$.

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$,cho ba điểm $M(2;0;0)$, $N(0;-1;0)$ và $P(0;0;2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là

A. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=0$. **B.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=-1$. **C.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{2}=1$. **D.** $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=1$.

Lời giải.

Chọn. D.

Áp dụng công thức phương trình đoạn chắn ta suy mặt phẳng (MNP) có phương trình là $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{2}=1$.

Câu 16. Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. **C.** $y=\sqrt{x^2-1}$. **D.** $y=\dfrac{x}{x+1}$.

Lời giải

Chọn. D.

* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=-1$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

* $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ và $y=\sqrt{x^2-1}$ mẫu vô nghiệm và không có mẫu nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

* Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x}{x+1}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x}{x+1}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là $x=-1$.

Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x)-2=0$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn. **D.**

Ta có : $f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=2\ (1)$

Khi đó số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=2$. Dựa vào bảng biến thiên ta có : số giao điểm của hai đồ thị là 2.

Vậy phương trình $f(x)-2=0$ có 2 nghiệm.

Câu 18. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^4-4x^2+5$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

A. 50. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 122.

Lời giải

Chọn. **A.**

Xét hàm số $f(x)=x^4-4x^2+5$ trên đoạn $[-2;3]$.

Ta có: $f'(x)=4x^3-8x \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-2;3] \\ x=\sqrt{2}\in[-2;3] \\ x=-\sqrt{2}\in[-2;3] \end{array}\right.$.

$f(0)=5$, $f\left(\sqrt{2}\right)=f\left(-\sqrt{2}\right)=1$, $f(-2)=5$, $f(3)=50$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 50 khi $x=3$.

Câu 19. Tích phân $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{16}{225}$. **B.** $\log\frac{5}{3}$. **C.** $\ln\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{2}{15}$.

Lời giải

Chọn. **C.**

Ta có: $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x+3}=\ln|x+3|\Big|_0^2=\ln 5-\ln 3=\ln\frac{5}{3}$.

Câu 20. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2-4z+3=0$. Giá trị của biểu thức $|z_1|+|z_2|$ bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

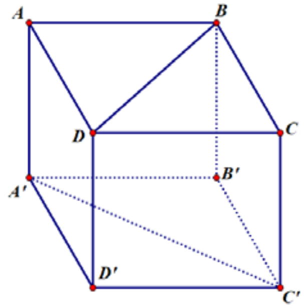
Lời giải

Chọn. **D.**

Ta có $\Delta'=4-12=-8=8i^2$. Các nghiệm của phương trình là $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Do đó $|z_1|+|z_2|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$.

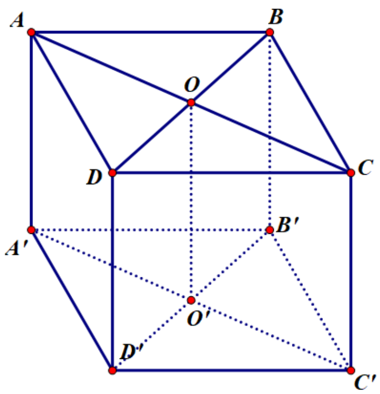
Câu 21. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



A. $a\sqrt{3}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn. B.



Ta có

$BD \perp AC$ (do $ABCD$ là hình vuông)

$BD \perp AA'$ (do $ABCD$ là hình lập phương)

$\Rightarrow BD \perp (ACC'A')$

Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai hình vuông $ABCD, A'B'C'D'$.

Khi đó $OO' \perp A'C'$ và $OO \perp BD$ nên OO' là đoạn vuông góc chung của BD và $A'C'$

$\Rightarrow d(BD, A'C') = OO' = a.$.

Câu 22. Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,4\%$/ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 102.120.000 đồng. **B.** 102.423.000 đồng.
C. 102.016.000 đồng. **D.** 102.017.000 đồng.

Lời giải

Chọn. B.

Với cách tính như trên thì đây là bài toán lãi kép với công thức tính:

$C = A(1+r)^N$

Với $A = 100.10^6$ đồng, $r = 0,4\% = 0,004$, $N = 6$

$\Rightarrow C = 100.10^6.(1,004)^6 \approx 102.424.128$ đồng.

Câu 23. Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả cầu màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để 2 quả cầu chọn ra cùng màu bằng

A. $\frac{5}{22}$. **B.** $\frac{6}{11}$. **C.** $\frac{5}{11}$. **D.** $\frac{8}{11}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega)=C_{11}^2=55$.

Số cách chọn 2 quả cầu cùng màu: $C_5^2+C_6^2=25$.

Xác suất để 2 quả cầu chọn ra cùng màu là: $P=\frac{25}{55}=\frac{5}{11}$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$ và $B(2;1;0)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB có phương trình là

A. $3x-y-z-6=0$. **B.** $3x-y-z+6=0$. **C.** $x+3y+z-5=0$. **D.** $x+3y+z-6=0$.

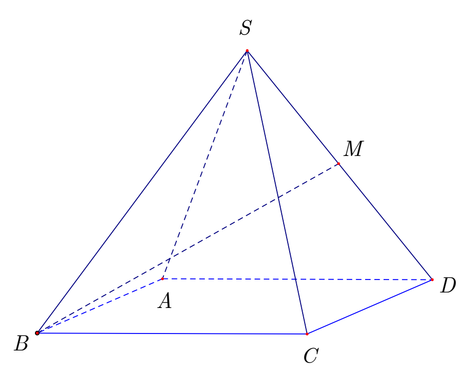
Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) qua $A(-1;2;1)$ và vuông góc với AB nên có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(3;-1;-1)$. Do đó mặt phẳng (P) có phương trình là: $3(x+1)-1(y-2)-1(z-1)=0$

$3x-y-z+6=0$.

Câu 25. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M là trung điểm của SD (*tham khảo hình vẽ dưới đây*).

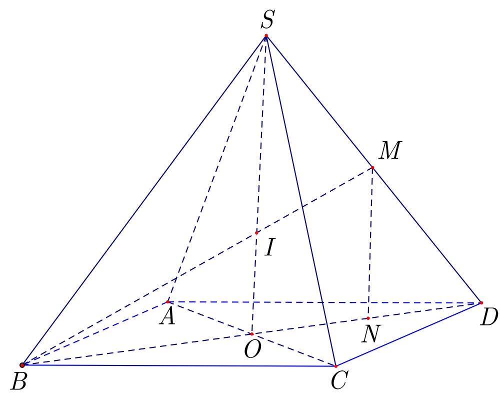


Tang của góc giữa BM và $(ABCD)$ bằng.

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm đáy, I là giao của BM và SO, vì hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO\perp(ABCD)$, gọi N là hình chiếu của M lên BD, dễ thấy $MN//SO$ nên N là hình chiếu của M lên $(ABCD)$. Vậy $\left(\widehat{BM,(ABCD)}\right)=\widehat{MBN}=\widehat{IBO}$.

Ta có tam giác SBD vuông cân tại S (vì $SB=SD=a$, $BD=a\sqrt{2}$) nên $SO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vì I là trọng tâm tam giác SBD nên $IO=\dfrac{1}{3}SO=\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

Vậy $\tan\widehat{IBO}=\dfrac{IO}{BO}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{6}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 26. Với n là số nguyên dương thỏa mãn $C_n^1+C_n^2=55$. Số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^3+\dfrac{2}{x^2}\right)^n$ bằng

A. 322560. **B.** 3360. **C.** 80640. **D.** 13440.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $n\in\mathbb{N}^*$.

Phương trình $C_n^1+C_n^2=55\Leftrightarrow\dfrac{n!}{1!(n-1)!}+\dfrac{n!}{2!(n-2)!}=55\Leftrightarrow n+\dfrac{n(n-1)}{2}=55$

$\Leftrightarrow n^2+n-110=0\Rightarrow n=10$.

Khai triển trở thành $\left(x^3+\dfrac{2}{x^2}\right)^{10}$.

Ta có số hạng tổng quát của khai triển: $T_{k+1}=C_{10}^k x^{3(10-k)}.\dfrac{2^k}{x^{2k}}=C_{10}^k.2^k.x^{30-5k}$. Để số hạng không chứa x thì $k=6$. Vậy số hạng cần tìm là $C_{10}^6.2^6=13440$.

Câu 27. Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x=\dfrac{2}{3}$ bằng

A. $\frac{82}{9}$. **B.** $\frac{80}{9}$. **C.** 9. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x>0$.

Ta có phương trình đã cho trương đương với

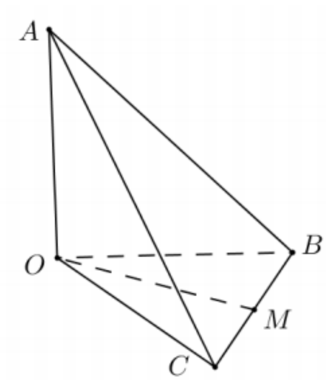
$\log_3 x.\log_{3^2} x.\log_{3^3} x.\log_{3^4} x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{24}(\log_3 x)^4=\frac{2}{3} \Leftrightarrow (\log_3 x)^4=16$

$\Leftrightarrow \log_3 x=\pm 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=\frac{1}{9} \end{array}\right.$.

Cả hai nghiệm đều thỏa điều kiện $x>0$ nên tổng các nghiệm của phương trình đã cho là $\frac{82}{9}$.

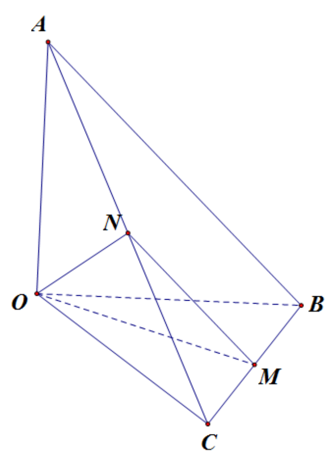
Câu 28. Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau và $OA=OB=OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. 90^o. **B.** 30^o. **C.** 60^o. **D.** 45^o.



Lời giải

Chọn C



Giả sử $OA=OB=OC=a$. Gọi N là trung điểm AC.

Ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN \parallel AB$ và $MN=\frac{1}{2}AB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $\left(\widehat{OM,AB}\right)=\left(\widehat{OM,MN}\right)$.

Xét các tam giác OAC và OBC vuông cân tại O có ON, OM lần lượt là các trung tuyến nên $ON = OM = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Như vậy tam giác OMN có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều, từ đó $\left(\widehat{OM, MN}\right) = 60^o$.

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$, $d_2: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 5 = 0$. Đường thẳng vuông góc với (P), cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$. **B.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}$.

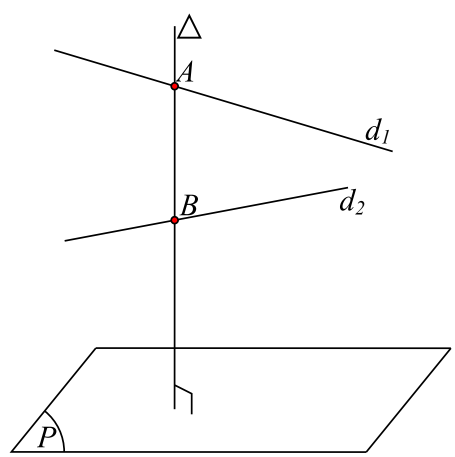
C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}$. **D.** $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$.

Lời giải

Chọn A

Viết lại phương trình

$$d_1: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}, \ d_2: \begin{cases} x = 5 - 3t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 + t' \end{cases}, \ t, t' \in \mathbb{R}.$$



Giả sử đường thẳng cần tìm là Δ cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại $A(3-t; 3-2t; -2+t)$ và $B(5-3t'; -1+2t'; 2+t')$.

Một vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{AB} = (2 - 3t' + t; -4 + 2t' + 2t; 4 + t' - t)$.

Một vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P} = (1;2;3)$

Vì $\Delta \perp (P)$ nên $\overrightarrow{u_\Delta}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_P}$ hay

$$\begin{cases} 2 - 3t' + t = k \\ -4 + 2t' + 2t = 2k \\ 4 + t' - t = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3t' + t - k = -2 \\ 2t' + 2t - 2k = 4 \\ t' - t - 3k = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ t = 2 \\ k = 1 \end{cases}.$$

Suy ra $A(1;-1;0)$, $B(2;1;3)$, $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;2;3)$, do đó $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$, đáp án. **A.**

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 5. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 + m + \dfrac{1}{x^6}, \forall x \in (0;+\infty)$.

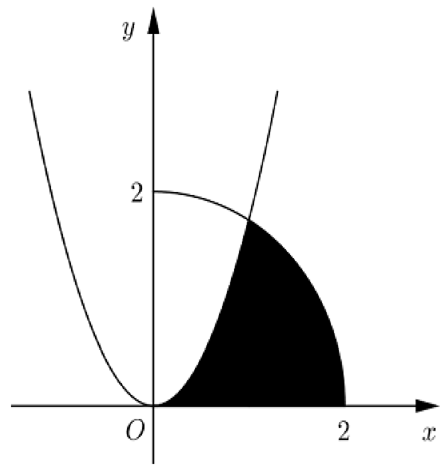
Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow -m \leq 3x^2 + \dfrac{1}{x^6}, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow -m \leq \min\limits_{(0;+\infty)}\left(3x^2 + \dfrac{1}{x^6}\right)$ (*).

Mà $3x^2 + \dfrac{1}{x^6} = x^2 + x^2 + x^2 + \dfrac{1}{x^6} \geq 4\sqrt[4]{x^2.x^2.x^2.\dfrac{1}{x^6}} = 4$.

Do đó từ (*) suy ra $-m \leq 4 \Leftrightarrow m \geq -4$. Vậy có 4 giá trị nguyên âm của m là $-1;\ -2;\ -3;\ -4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31. Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích hình (H) bằng



A. $\dfrac{4\pi + \sqrt{3}}{12}$.　　**B.** $\dfrac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$.

C. $\dfrac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}$.　　**D.** $\dfrac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn. **B.**

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow 3x^4 + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (do $0 \leq x \leq 2$).

Khi đó $S = \int\limits_0^1 \sqrt{3}x^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x = I + J$.

Tính $I = \int\limits_0^1 \sqrt{3}x^2\,\mathrm{d}x = \left.\dfrac{\sqrt{3}x^3}{3}\right|_0^1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Tính $J = \int\limits_1^2 \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x$: Đặt $x = 2\sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$ và $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6} \\ x = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$. Khi đó

$$J = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4\sin^2 t}.2\cos t\,\mathrm{d}t = 4\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = 2\left.\left(t + \dfrac{1}{2}\sin 2t\right)\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $S = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4\pi - \sqrt{3}}{6}$ (đvdt).

Câu 32. Biết $\int\limits_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.

A. $P = 24$.　　**B.** $P = 12$.　　**C.** $P = 18$.　　**D.** $P = 46$.

Lời giải

Chọn. **D.**

Ta có $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}.\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

Do đó $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=\int\limits_1^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=\int\limits_1^2\left(x^{-\frac{1}{2}}-(x+1)^{-\frac{1}{2}}\right)dx=2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2$

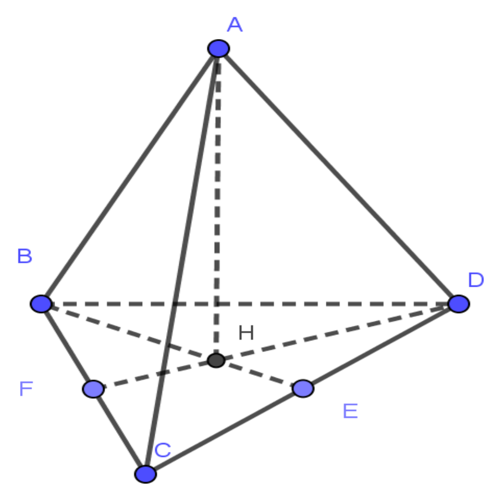
$=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2$. Suy ra $\begin{cases}a=32\\b=12\\c=2\end{cases}$ nên $P=a+b+c=32+12+2=46$.

Câu 33. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 4. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ có một đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác BCD và chiều cao bằng chiều cao của tứ diện $ABCD$.

A. $S_{xq}=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$. **B.** $S_{xq}=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$. **D.** $S_{xq}=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn. **A.**



Gọi E, F là trung điểm cạnh DC, BC.

Do $\triangle BCD$ là tam giác đều, nên BE, DF cũng là đường cao, đường phân giác của $\triangle BCD$.

Các mặt bên cũng là tam giác đều.

Gọi $BE\cap CF=\{H\}$ thì AH là đường cao của tứ diện.

$AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{4^2-\left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{4\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

Đường tròn nội tiếp $\triangle BCD$ có bán kính $r=HE=\dfrac{1}{3}AE=\dfrac{4\sqrt{3}}{2.3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là: $S_{xq}=2\pi rh=2.\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{4\sqrt{6}}{3}.\pi=\dfrac{16\sqrt{2}\pi}{3}$.

Câu 34. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $16^x-2.12^x+(m-2).9^x=0$ có nghiệm dương?

A. 1. **B.** 2.

C. 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn. **B.**

Ta có: $16^x - 2.12^x + (m-2).9^x = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2.\left(\frac{4}{3}\right)^x + (m-2) = 0$.

Đặt $\left(\frac{4}{3}\right)^x = t$, phương trình trở thành: $t^2 - 2t + (m-2) = 0$ (2)

Để phương trình (1) có nghiệm dương thì phương trình (2) có nghiệm $t > 1$.

$t^2 - 2t + (m-2) = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 3 - m$

Do $t > 1$ nên $3 - m > 0 \Leftrightarrow m < 3 \Rightarrow 0 < m < 3 \Rightarrow m \in \{1;2\}$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 35. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt[3]{m + 3\sqrt[3]{m + 3\sin x}} = \sin x$ có nghiệm thực?

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn. **A.**

$\sqrt[3]{m + 3\sqrt[3]{m + 3\sin x}} = \sin x \Leftrightarrow m + 3\sqrt[3]{m + 3\sin x} = \sin^3 x$

$\Leftrightarrow m + 3\sin x + 3\sqrt[3]{m + 3\sin x} = \sin^3 x + 3\sin x \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{m + 3\sin x}\right) = f(\sin x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{m + 3\sin x} = \sin x \Leftrightarrow \sin^3 x - 3\sin x = m$.

Đặt $\sin x = t \left(t \in [-1;1]\right)$. Ta được phương trình $t^3 - 3t = m$.

Đặt $g(t) = t^3 - 3t \left(t \in [-1;1]\right)$. Ta có $g'(t) = 3t^2 - 3; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$.

BBT

x	-1		1
g'	0	$-$	0
g	2	$\searrow$	-2

Vậy để phương trình có nghiệm thì $m \in [-2;2]$. Vậy chọn **A**.

Câu 36. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x + m|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải

Chọn. **B.**

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + m \left(x \in [0;2]\right)$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

BBT

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	m	$\searrow$	$m-2$	$\nearrow$	$m+2$

Suy ra GTLN của hàm số $y=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng $M=Max\left\{|m-2|,|m+2|\right\}$.

Do đó $\left[\begin{array}{l}|m-2|=3\\|m+2|=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=5\\m=-1\\m=1\\m=-5\end{array}\right.$.

Với $m=1$ thì $M=Max\left\{|1-2|,|1+2|\right\}=3$. (TM)

Với $m=-1$ thì $M=Max\left\{|-1-2|,|-1+2|\right\}=3$. (TM)

Với $m=5$ thì $M=Max\left\{|5-2|,|5+2|\right\}=7$. (KTM)

Với $m=-5$ thì $M=Max\left\{|-5-2|,|-5+2|\right\}=7$. (KTM)

Vậy $S=\{-1;1\}$. Chọn **B**

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$, $f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 5$.. **B.** $2+\ln 15$.. **C.** $3+\ln 15$.. **D.** $\ln 15$.

Lời giải

Chọn. **C.**

• Trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$: $f(x)=\int\frac{2}{2x-1}dx=\ln(2x-1)+C_1$.

Lại có $f(1)=2\Rightarrow C_1=2$.

• Trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$: $f(x)=\int\frac{2}{2x-1}dx=\ln(1-2x)+C_2$.

Lại có $f(0)=1\Rightarrow C_2=1$.

Vậy $f(x)=\begin{cases}\ln(2x-1)+2\ khi\ x>\frac{1}{2}\\ \ln(1-2x)+1\ khi\ x<\frac{1}{2}\end{cases}$.

Suy ra $f(-1)+f(3)=3+\ln 15$..

Câu 38. Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$.. **B.** $P=-5$.. **C.** $P=3$.. **D.** $P=7$.

Lời giải

Chọn. **D.**

Đặt $m = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ta có $m \in \mathbb{R}$ và $m > 1$.

$$z + 2 + i - |z|(1+i) = 0 \Leftrightarrow a + 2 - m + (b + 1 - m)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 - m = 0 \\ b + 1 - m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ m = a + 2 \end{cases}.$$

Kết hợp các điều trên ta có phương trình:

$$\sqrt{a^2 + (a+1)^2} = a + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 3 \end{array}\right..$$

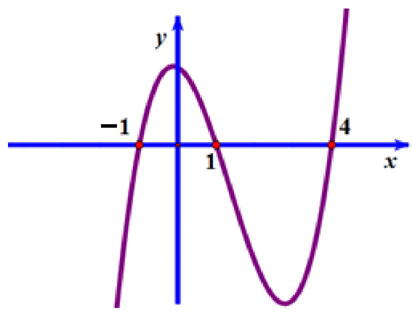
Với $a = -1 : b = 0, m = 1$ (loại vì $m > 1$)

Với $a = 3 : b = 4, m = 5$. (nhận)

Vậy $P = a + b = 3 + 4 = 7$.

.

Câu 39. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y = f(2 - x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{array}\right.$.

Ta có $\left(f(2-x)\right)' = (2-x)'.f'(2-x) = -f'(2-x)$.

Để hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến thì $\left(f(2-x)\right)' > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 - x < -1 \\ 1 < 2 - x < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{array}\right..$$

Câu 40. Cho hàm số $y = \dfrac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tổng các giá trị của tất cả các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi đường thẳng đi qua $A(a;1)$ có hệ số góc k là $y=k(x-a)+1$. Đường thẳng này là tiếp tuyến của hệ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases}\dfrac{-x+2}{x-1}=k(x-a)+1\\-\dfrac{1}{(x-1)^2}=k\end{cases}$. Thay k ở phương trình hai vào phương trình một của hệ ta có:

$\dfrac{-x+2}{x-1}=\dfrac{a-x}{(x-1)^2}+1\Leftrightarrow(-x+2)(x-1)=a-x+(x-1)^2\Leftrightarrow 2x^2-6x+3+a=0\,(*)$.

Để chỉ có một tiếp tuyến qua A thì phương trình (*)phải có nghiệm kép hay

$\Delta'=9-6-2a=0\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{2}$.

hoặc có hai nghiệm phân biệt trong có có một nghiệm bằng 1 khi đó

$\begin{cases}\Delta'>0\\2-6+3+a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9-6-2a>0\\a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<\dfrac{3}{2}\\a=1\end{cases}\Leftrightarrow a=1$

Vậy tổng các phần tử của S là $1+\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$.

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;1;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ lần lượt tại các điểm A,B,C sao cho $OA=OB=OC\neq 0$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn. **A.**

Gọi phương trình mặt phẳng cần tìm là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$. Do $M(1;1;2)$ thuộc mặt phẳng nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{c}=1$ (*). Mặt khác, ta có $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ nên từ $OA=OB=OC\neq 0$

Suy ra $|a|=|b|=|c|=\alpha>0$ từ đây $(a;b;c)$ có thể nhận các bộ số sau $(\alpha;\alpha;\alpha)$; $(-\alpha;\alpha;\alpha)$; $(\alpha;-\alpha;\alpha)$; $(\alpha;\alpha;-\alpha)$; $(-\alpha;-\alpha;\alpha)$; $(-\alpha;\alpha;-\alpha)$; $(\alpha;-\alpha;-\alpha)$; $(-\alpha;-\alpha;-\alpha)$ có 8 bộ sô ứng với mỗi bộ kết hợp với (*) ta chỉ có 3 bộ thỏa mãn. $(\alpha;\alpha;\alpha)$, $(-\alpha;\alpha;\alpha)$, $(\alpha;-\alpha;\alpha)$ ứng với mỗi bộ cho ta một mặt phẳng.

Câu 42. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_1+\sqrt{2+\log u_1-2\log u_{10}}=2\log u_{10}$ và $u_{n+1}=2u_n$ với mọi $n\geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>5^{100}$ bằng

A. 247. **B.** 248. **C.** 229. **D.** 290.

Lời giải

Chọn. **B.**

Từ điều kiện $u_{n+1}=2u_n, \forall n\geq 1$ ta có (u_n) là cấp số nhân với công bội $q=2$.

Do đó $u_{10}=2^9u_1$.

Ta có $\log u_1+\sqrt{2+\log u_1-2\log u_{10}}=2\log u_{10}$

$\Leftrightarrow \log u_1+\sqrt{2+\log u_1-2\log(2^9u_1)}=2\log(2^9u_1)$

$\Leftrightarrow \log u_1 + \sqrt{2 + \log u_1 - 18\log 2 - 2\log u_1} = 18\log 2 + 2\log u_1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2 - m - \log u_1} = m + \log u_1 \quad (m = 18\log 2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log u_1 \ge -m \\ 2 - m - \log u_1 = \log^2 u_1 + 2m.\log u_1 + m^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log u_1 \ge -m \\ \log^2 u_1 + (2m+1).\log u_1 + m^2 + m - 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log u_1 \ge -m \\ \left[\begin{array}{l} \log u_1 = -m - 2 \Leftrightarrow \log u_1 = -m + 1 = 1 - 18\log 2 = \log \dfrac{10}{2^{18}} \Leftrightarrow u_1 = \dfrac{5}{2^{17}} \\ \log u_1 = -m + 1 \end{array}\right. \end{cases}$.

Ta có $u_n = 2^{n-1}u_1 = 2^{n-1}.\dfrac{5}{2^{17}} = 2^{n-18}.5$.

Nên $u_n > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-18}.5 > 5^{100} \Leftrightarrow 2^{n-18} > 5^{99} \Leftrightarrow n > 18 + 99\log_2 5 \approx 247.871$

Vậy giá trị nhỏ nhất của n thỏa mãn là: $n = 248$..

Câu 43. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

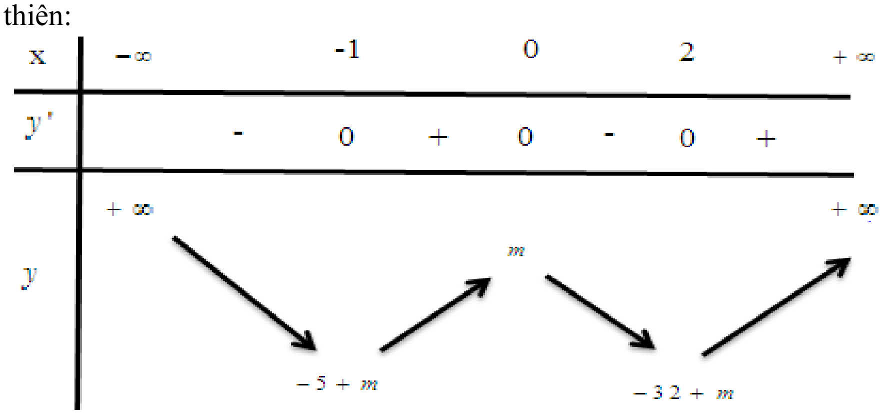
Lời giải

Chọn. D.

Xét hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ có $y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = -32 + m \\ x_2 = -1 \Rightarrow y_2 = -5 + m \\ x_3 = 0 \Rightarrow y_3 = m \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:



Dựa vào BBT để đồ thị hàm số $y = \left|3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m\right|$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi

$\begin{cases} m > 0 \\ -5 + m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5$. Với m nguyên nên ta có $m \in \{1; 2; 3; 4\}$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1), B\left(-\dfrac{8}{3}; \dfrac{4}{3}; \dfrac{8}{3}\right)$ đường thẳng đi qua tâm của đường tròn nội tiếp của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là:

A. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$. **B.** $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-8}{-2}=\dfrac{z-4}{2}$.

C. $\dfrac{x+\frac{1}{3}}{1}=\dfrac{y-\frac{5}{3}}{-2}=\dfrac{z-\frac{11}{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{x+\frac{9}{2}}{1}=\dfrac{y-\frac{2}{9}}{-2}=\dfrac{z+\frac{5}{9}}{2}$.

Lời giải

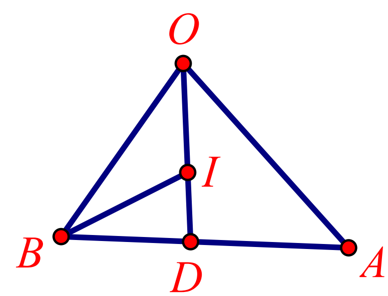
Chọn. **A.**

Ta có $\overrightarrow{OA}=(2;2;1),\overrightarrow{OB}=\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)\Rightarrow OA=3,OB=4$.

$\Rightarrow \vec{n}=\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=4(1;-2;2)$.

Gọi $D(x;y;z)$ là chân đường phân giác hạ từ O đến AB.

Ta có $\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{AO}{BO}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow \overrightarrow{AD}=-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BD}$.



$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=-\frac{3}{4}\left(x+\frac{8}{3}\right) \\ y-2=-\frac{3}{4}\left(y-\frac{4}{3}\right) \\ z-1=-\frac{3}{4}\left(z-\frac{8}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{12}{7} \\ z=\frac{12}{7} \end{cases} \Rightarrow D\left(0;\frac{12}{7};\frac{12}{7}\right)$$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD}=\left(\frac{8}{3};\frac{8}{21};-\frac{20}{27}\right)\Rightarrow BD=\dfrac{20}{7}$.

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC

$$\text{Ta có } \frac{IO}{ID}=\frac{OB}{BD}=\frac{7}{5}\Rightarrow \overrightarrow{OI}=-\frac{7}{5}\overrightarrow{DI}\Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{7}{5}x \\ y=-\frac{7}{5}\left(y-\frac{12}{7}\right) \\ z=-\frac{7}{5}\left(z-\frac{12}{7}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow I(0;1;1)$$

$\Rightarrow$ đường thẳng cần tìm đi qua $I(0;1;1)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;2)$.

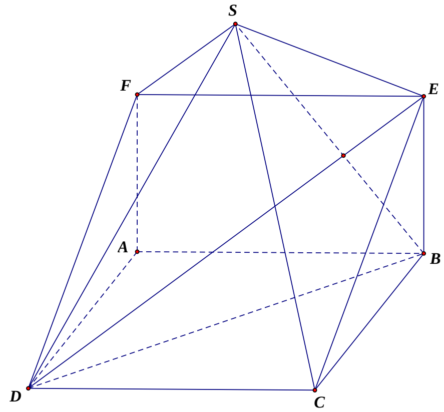
Thay tọa độ $I(0;1;1)$ vào thỏa mãn phương trình $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z+1}{2}$.

Câu 45. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh bằng 1, lần lượt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi S là điểm đối xứng với B qua đường thẳng DE. Thể tích của khối đa diện $ABCDSEF$ bằng

A. $\dfrac{7}{6}$. **B.** $\dfrac{11}{12}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn. **D.**



Gọi (H) là khối đa diện $ABCDSEF$ ta có $V_{(H)} = V_{ADF.BCE} + V_{S.CDFE}$.

* Vì $ADF.BCE$ là hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông cân nên ta có:

$V_{ADF.BCE} = AB.S_{BCE} = \dfrac{1}{2}$.

* Vì tứ giác $CDFE$ là hình chữ nhật và S là điểm đối xứng với B qua đường thẳng DE nên ta có:

$V_{S.CDFE} = 2V_{S.CDE} = 2.V_{B.CDE} = 2.V_{D.BCE} = 2.\dfrac{1}{3}CD.S_{BCE} = 2.\dfrac{1}{3}.1.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

* $V_{(H)} = V_{ADF.BCE} + V_{S.CDFE} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{6}$.

Câu 46. Xét các số phức $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-4-3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a+b$ khi $|z+1-3i| + |z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 10$. **B.** $P = 4$. **C.** $P = 6$. **D.** $P = 8$.

Lời giải

Chọn. A.

Cách 1

Ta có $|z-4-3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow (a-4)^2 + (b-3)^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 8a - 6b + 20 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 8a + 6b - 20$.

Mặt khác $M = |z+1-3i| + |z-1+i| = \sqrt{(a+1)^2 + (b-3)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2}$.

Suy ra $M^2 \le 2\left[(a+1)^2 + (b-3)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2\right]$

$\le 2\left[2(a^2+b^2) - 4b + 12\right]$

$\le 2(16a + 12b - 40 - 4b + 12)$

$\le 2(16a + 8b - 28) = 8(4a + b - 7)$.

Khi đó: $\dfrac{M^2}{8} \le 4a + b - 7 \Leftrightarrow \dfrac{M^2}{8} + 7 \le 4a + b$.

Ta có $4a + 2b = 4(a-4) + 2(b-3) + 22$

Nên $4a + 2b - 22 = 4(a-4) + 2(b-3) \le \sqrt{(4^2+2^2)\left[(a-4)^2 + (b-3)^2\right]}$

$\Rightarrow 4a + 2b - 22 \le 10$

$\Rightarrow 4a+2b\le 32\Rightarrow \dfrac{M^2}{8}\le 25\Rightarrow M^2\le 200\Rightarrow M\le 10\sqrt{2}$.

Vậy $M_{\max}=10\sqrt{2}$ khi $\begin{cases}4a+2b=32\\2a-4b=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\b=4\end{cases}$.

Khi đó $P=a+b=10$.

Cách 2

Ta có $\left|z-4-3i\right|=\sqrt{5}\Leftrightarrow (a-4)^2+(b-3)^2=5$

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{5}\sin\alpha+4\\b=\sqrt{5}\cos\alpha+3\end{cases}$.

Khi đó $M=\left|z+1-3i\right|+\left|z-1+i\right|=\sqrt{(a+1)^2+(b-3)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}$

$=\sqrt{10\sqrt{5}\sin\alpha+30}+\sqrt{6\sqrt{5}\sin\alpha+8\sqrt{5}\cos\alpha+30}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopski

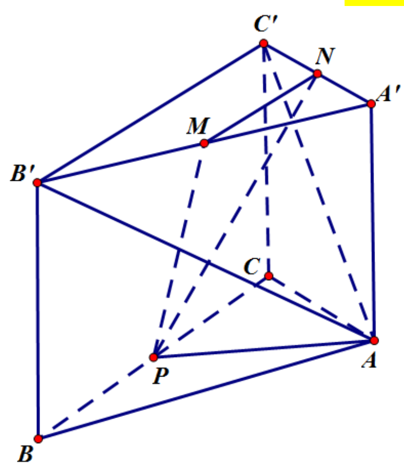
$M\le\sqrt{2\left(16\sqrt{5}\sin\alpha+8\sqrt{5}\cos\alpha+60\right)}=\sqrt{2\left[8\sqrt{5}\left(2\sin\alpha+\cos\alpha\right)+60\right]}\le 10\sqrt{2}$.

Nên $M_{\max}=10\sqrt{2}$ khi $\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{5}\sin\alpha+4=6\\b=\sqrt{5}\cos\alpha+3=4\end{cases}$.

Vậy $P=a+b=10$.

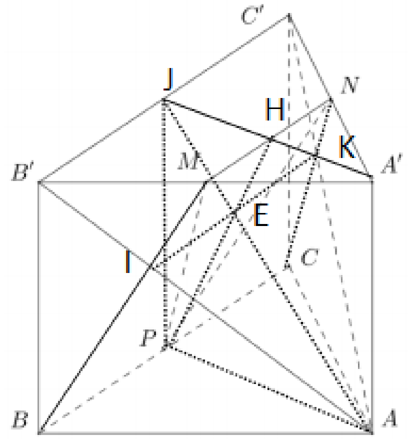
Câu 47. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=2\sqrt{3}$ và $AA'=2$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B',A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng

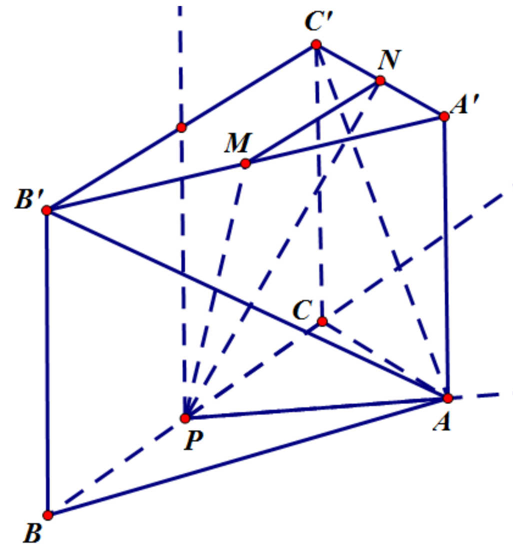
A. $\dfrac{6\sqrt{13}}{65}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{13}}{65}$. **C.** $\dfrac{17\sqrt{13}}{65}$. **D.** $\dfrac{18\sqrt{13}}{65}$.



Lời giải

Chọn. **B.**





Ta có: Lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ nên tam giác ABC đều khi đó $AP = 2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3$.

Mặt khác: $AA' \perp (ABC)$.

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O \equiv P$; tia PA trùng với tia Ox, tia PC trùng với tia Oy, tia Pz vuông góc với (ABC) Khi đó:

$P(0;0;0)$, $M\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};2\right)$, $N\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};2\right)$, $A(3;0;0)$, $B'\left(0;-\sqrt{3};2\right)$, $C'\left(0;-\sqrt{3};2\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{PM}\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};2\right)$; $\overrightarrow{PN}\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};2\right)$. Do đó vecto pháp tuyến của (MNP) là

$\vec{n}_1 = \left(-2\sqrt{3};0;\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Ta lại có: $\overrightarrow{AB'} = \left(-3;-\sqrt{3};2\right)$; $\overrightarrow{AC'} = \left(-3;\sqrt{3};2\right)$. Do đó vecto pháp tuyến của $(AB'C')$ là

$\vec{n}_2 = \left(-4\sqrt{3};0;-6\sqrt{3}\right)$.

Gọi α góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP). Khi đó: $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{13}}{65}$.

Cách khác:

Mặt phẳng (MNP) chính là mặt phẳng $(MNBC)$. Dễ dàng xác định được giao tuyến của $(MNBC)$ và $(AB'C')$ là IK (như hình vẽ).

Ta có $\begin{cases} AJ \perp IK \\ PH \perp IK \end{cases} \Rightarrow \left((MNBC),(AB'C')\right) = (AJ, PH)$.

Xét hình chữ nhật $AA'JP$, dùng tính chất trong hình phẳng ta tính $cos\widehat{PEA} = \frac{\sqrt{13}}{65}$.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1), B(3;-1;1)$ và $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A, bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B, C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1),(S_2),(S_3)$?

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn. **B.**

Cách 1:

Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2\neq 0$ là VTPT của mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1),(S_2),(S_3)$; M là trung điểm $BC\Rightarrow M(1;-1;1)$; $\overrightarrow{BC}=(-4;0;0)$.

TH1: (P) đi qua trung điểm M của BC $\Rightarrow (P):a(x-1)+b(y+1)+c(z-1)=0$ hay $(P):ax+by+cz-a+b-c=0$.

Ta có: $$\begin{cases} d(A;(P))=2 \\ d(B;(P))=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3b|=2\sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ |2a|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |3b|=2|2a| \\ 4a^2=a^2+b^2+c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=\dfrac{4a}{3} \\ c^2=\dfrac{11a^2}{9} \end{cases} (1) \\ \begin{cases} b=-\dfrac{4a}{3} \\ c^2=\dfrac{11a^2}{9} \end{cases} (2) \end{array}\right.$$

Hệ (1) có 2 nghiệm, hệ (2) có 2 nghiệm và các nghiệm đó không trùng nhau. Vậy trường hợp này có 4 mặt phẳng (P).

TH2: (P) song song với BC $\Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow a=0\Rightarrow (P):\mathrm{by}+\mathrm{cz}+\mathrm{d}=0$.

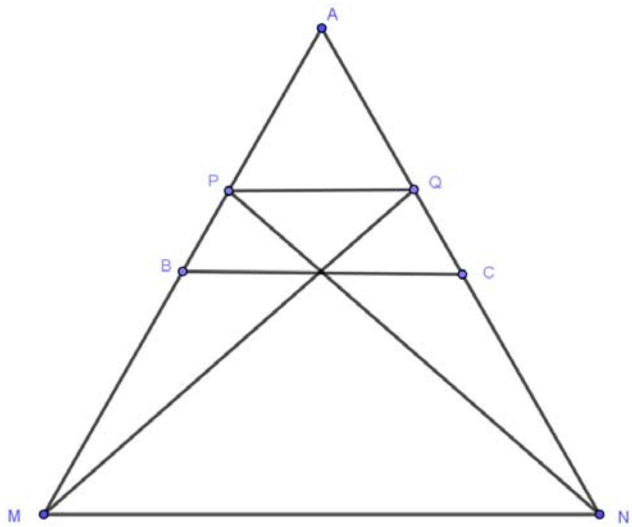
Ta có: $$\begin{cases} d(A;(P))=2 \\ d(B;(P))=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c+d|=2\sqrt{b^2+c^2} \\ |-b+c+d|=\sqrt{b^2+c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |2b+c+d|=2|-b+c+d| \\ (-b+c+d)^2=b^2+c^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} d=4b-c \\ (-b+c+d)^2=b^2+c^2 \end{cases} \\ \begin{cases} d=-c \\ (-b+c+d)^2=b^2+c^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} d=4b-c \\ c^2=8b^2 \end{cases} (3) \\ \begin{cases} d=-c \\ c=0 \\ b\neq 0 \end{cases} (4) \end{array}\right..$$

Hệ (3) có 2 nghiệm, hệ (4) có 1 nghiệm và các nghiệm này không trùng nhau. Vậy trường hợp này có 3 mặt phẳng (P).

Vậy có tất cả 7 mặt phẳng (P).

Cách 2:



Ta có $AB = AC = \sqrt{13}, BC = 4, d\left(A; BC\right) = 3$. Do $R_1 = 2R_2 = 2R_3$ nên các khoảng cách từ các điểm A đến $\left(P\right)$ sẽ gấp đôi các khoảng cách từ các điểm B, C đến $\left(P\right)$. Gọi M, N lần lượt là điểm đối xứng của A qua B, C và P, Q là điểm trên cạnh AB, AC sao cho $AP = 2BP, AQ = 2QC$. Bài toán quy về tìm các mặt phẳng $\left(P\right)$ chính là các mặt phẳng đi qua MN, MQ, NP, PQ sao cho $d\left(A; \left(P\right)\right) = 2$ là xong.

TH1: Ta có $d\left(A; PQ\right) = 2$ nên chỉ có duy nhất một mặt phẳng $\left(P\right)$ qua PQ sao cho $d\left(A; \left(P\right)\right) = 2$.

TH2: $d\left(A; MN\right), d\left(A; MQ\right); d\left(A; NP\right)$ đều lớn hơn 2 nên mỗi trường hợp sẽ có đúng hai mặt phẳng qua các cạnh MN, MQ, NP sao cho khoảng cách từ A đến nó bằng 2.

Vậy có tất cả 7 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu.

Câu 49. Xếp ngẫu nhiên 10 học sinh gồm 2 học sinh lớp $12A$, 3 học sinh lớp $12B$, 5 học sinh lớp $12C$ thành một hàng ngang. Xác suất để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau bằng

A. $\frac{11}{630}$. **B.** $\frac{1}{126}$. **C.** $\frac{1}{105}$. **D.** $\frac{1}{42}$.

Lời giải

Chọn A

Không gian mẫu: Xếp 10 học sinh thành hàng ngang

$\Rightarrow \left|\Omega\right| = 10!$ cách xếp.

Gọi A là biến cố: "để trong 10 học sinh trên không có 2 học sinh cùng lớp đứng cạnh nhau".

Ta có cách xếp như sau:

- Đầu tiên xếp 5 học sinh của lớp $12C$, có $5!$ cách xếp.

- Khi đó, giữa 5 học sinh của lớp $12C$ có tất cả 6 chỗ trống (gồm 4 chỗ trống ở giữa và 2 chỗ trống trước, sau). Do 2 học sinh của lớp $12C$ không thể đứng gần nhau nên buộc phải có 4 người (của lớp $12A$ và $12B$)

- Ta xét hai trường hợp sau :

+ TH1 : Có 1 học sinh A hoặc B ở phía ngoài (trước hàng hoặc sau hàng), 4 học sinh còn lại xếp vào 4 chỗ trống ở giữa các bạn C, có $2.5!$ cách xếp.

A	C	B	C	A	C	B	C	B	C	

+ TH2 : có một cặp học sinh A và B **vào một chỗ trống,** 3 **học sinh còn lại xếp vào** 3 vị trí còn lại, có $2.3.2.4.3!$ cách xếp.

	C	AB	C	A	C	B	C	B	C	

- Vậy $|A| = 5!(2.5! + 2.3.2.4.3!)$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5!(2.5! + 2.3.2.4.3!)}{10!} = \frac{11}{630}.$$

Câu 50. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$. Tính $\int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Xét $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} x^3 f(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -\frac{1}{3} \int_0^1 x^3 f'(x) dx$ (vì $f(1) = 0$)

$\Rightarrow \int_0^1 x^3 f'(x) dx = -3 \int_0^1 x^2 f(x) dx = -1$

Ta lại có $\begin{cases} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = 7 \\ \int_0^1 14x^3 f'(x) dx = -14 \\ \int_0^1 49x^6 dx = 7x^7 \Big|_0^1 = 7 \end{cases}$

$\Rightarrow \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + \int_0^1 14x^3 f'(x) dx + \int_0^1 49x^6 dx = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1 [f'(x) + 7x^3]^2 dx = 0$

Mà $\int_0^1 \left[f'(x) + 7x^3 \right]^2 dx \ge 0$

Nên đẳng thức xãy ra khi chỉ khi $f'(x) + 7x^3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -7x^3$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C$

Ta có $f(1) = 0 \Leftrightarrow C = \frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{7}{4}(1 - x^4)$

$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \frac{7}{4}\int_0^1 (1 - x^4)dx = \frac{7}{4}\left(x - \frac{x^5}{5} \right)\Big|_0^1 = \frac{7}{4}\left(1 - \frac{1}{5} \right) = \frac{7}{5}$

---HẾT---