

LƯ' SĨ PHÁP

Giáo Viên Trường THPT Tuy Phong

HÌNH HỌC 12



CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP

TỌA ĐỘ TRONG

KHÔNG GIAN

0939989966 - 0916620899

LỜI NÓI ĐẦU

Quý đọc giả, quý thầy cô và các em học sinh thân mến!

Nhằm giúp các em học sinh có tài liệu tự học môn Toán, tôi biên soạn cuốn giải toán trọng tâm của lớp 12.

Nội dung của cuốn tài liệu bám sát chương trình chuẩn và chương trình nâng cao về môn Toán đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định.

NỘI DUNG

1. Lí thuyết cần nắm ở mỗi bài học
2. Bài tập có hướng dẫn giải và bài tập tự luyện
3. Bài tập trắc nghiệm
4. Bổ sung đầy đủ các dạng toán, câu hỏi trong đề thi THPTQG

Cuốn tài liệu được xây dựng sẽ còn có những khiếm khuyết. Rất mong nhận được sự góp ý, đóng góp của quý đồng nghiệp và các em học sinh để lần sau cuốn bài tập hoàn chỉnh hơn.

Mọi góp ý xin gọi về số 0355.334.679 – 0916 620 899

Website: <https://toanmath.com/>

Email: lsp02071980@gmail.com

Chân thành cảm ơn.

Lư Sĩ Pháp

MỤC LỤC

I. PHẦN TỰ LUẬN

§1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	01 – 08
§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG	09 – 23
§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG	24 – 43
ÔN TẬP CHƯƠNG III	44 – 69

II. PHẦN BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	70 – 73
PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG	74 – 83
PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG	84 – 93
MẶT CẦU	94 – 99
ÔN TẬP CHƯƠNG III	100 – 129
ÔN TẬP THI THPT	130 – 148
ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM	149 – 152

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

---000---

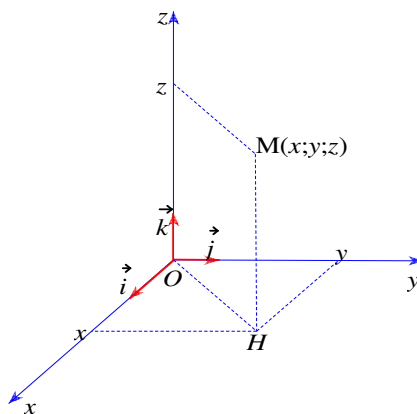
§1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Cho ba trục Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vector đơn vị tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz . Hệ gồm ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc $Oxyz$ trong không gian hay đơn giản được gọi là hệ tọa độ $Oxyz$.

- ♦ Điểm O được gọi là gốc tọa độ
- ♦ Trục Ox gọi là trục hoành
- ♦ Trục Oy gọi là trục tung
- ♦ Trục Oz gọi là trục cao
- ♦ Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.



Chú ý: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

2. Tọa độ của một điểm

$M(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, (x : hoành độ; y : tung độ; z : cao độ)

Chú ý:

- ♦ $M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0; M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0; M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$
- ♦ $M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0; M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0; M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$

3. Tọa độ của vector

$\vec{a} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, (x : hoành độ; y : tung độ; z : cao độ)

Chú ý: $\vec{0} = (0; 0; 0), \vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$

Tính chất: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

$$\begin{aligned} & \bullet \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3) \quad \bullet k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3), k \in \mathbb{R} \quad \bullet \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases} \end{aligned}$$

4. Liên hệ giữa tọa độ điểm và tọa độ vector

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C), D(x_D; y_D; z_D)$

$$\bullet \vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

$$\bullet M \text{ chia đoạn thẳng } AB \text{ theo tỉ số } k (k \neq -1) \Leftrightarrow \vec{MA} = k\vec{MB}$$

$$\text{Khi đó: } M\left(\frac{x_A - kx_B}{1 - k}; \frac{y_A - ky_B}{1 - k}; \frac{z_A - kz_B}{1 - k}\right)$$

$$\bullet M \text{ trung điểm đoạn thẳng } AB: M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

- ♦ G là trọng tâm của tam giác ABC : $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$
- ♦ G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$
- ♦ Cho ΔABC , gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Gọi a, b, c là độ dài các cạnh. Khi đó ta có $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$

5. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng và các ứng dụng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:

- ♦ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ♦ $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ ♦ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- ♦ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- ♦ $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$
- ♦ Khoảng cách giữa hai điểm A và B : $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- ♦ Góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, (\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})$

6. Phương trình mặt cầu

a) Phương trình chính tắc

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ bán kính r có phương trình là:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Đặc biệt phương trình mặt cầu tâm $O(0; 0; 0)$ bán kính r : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

b) Phương trình tổng quát

Trong không gian $Oxyz$, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là

phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ bán kính $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

Ngược lại: Phương trình dạng: $x^2 + y^2 + z^2 + 2Ax + 2By + 2Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 - D > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(-A; -B; -C)$ bán kính $r = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - D}$

B. BÀI TẬP

Vấn đề 1. Tìm tọa độ của một vector và các yếu tố liên quan đến vector thỏa mãn một số điều kiện cho trước

Phương pháp: Sử dụng định nghĩa và khái niệm có liên quan đến vector: Tọa độ các vector; độ dài của vector; tổng hiệu của hai vector; tính các tọa độ trung điểm của đoạn thẳng; trọng tâm của tam giác; ...

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (5; 7; 2)$, $\vec{b} = (3; 0; 4)$, $\vec{c} = (-6; 1; -1)$. Hãy tìm tọa độ các vector sau:

a) $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$

b) $\vec{n} = 5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c}$

HD & Giải

a) Ta có:
$$\begin{cases} 3\vec{a} = (15; 21; 6) \\ -2\vec{b} = (-6; 0; -8) \\ \vec{c} = (-6; 1; -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = (3; 22; -3)$$

b) Tương tự: $\vec{n} = 5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c} = (19; 39; 30)$

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (2; -5; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (1; 7; 2)$. Hãy tìm tọa độ các vector sau:

a) $\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$

b) $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$

HD & Giải

a) $\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c} = \left(11; \frac{1}{3}; \frac{55}{3}\right)$

b) $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c} = (0; -27; 3)$

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; -2)$, $B(2; 1; -1)$, $C(1; -2; 2)$.

a) Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC

b) Tìm tọa độ trung điểm của các cạnh của tam giác ABC

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

HD & Giải

a) Ta có: $\overline{AB} = (1; 1; 1)$, $\overline{BC} = (-1; -3; 3)$, $\overline{CA} = (0; 2; -4)$. Do đó: $AB = |\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$;

$BC = |\overline{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{19}$ $CA = |\overline{CA}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$

b) Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA . Ta có:

$$\begin{cases} x_D = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2} \\ y_D = \frac{y_A + y_B}{2} = -\frac{3}{2} \\ z_D = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \cdot \text{Vậy } D\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right). \text{ Tương tự: } E\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), F(1; -1; 0)$$

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Ta có:
$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{4}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = -\frac{1}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases} \cdot \text{Vậy } G\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết $A(1;0;1), B(2;1;2), D(1;-1;1), C'(4;5;-5)$. Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

HD Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;1;1), \overrightarrow{AD} = (0;-1;0)$. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (1;0;1)$

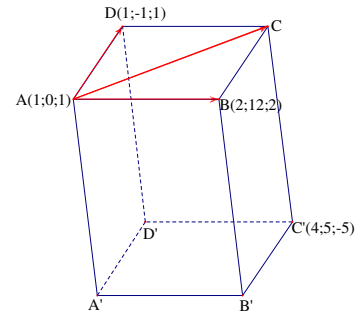
Suy ra: $C(2;0;2)$ và $\overrightarrow{CC'} = (2;5;-7)$

Ta lại có: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = (2;5;-7)$

Vì: $\overrightarrow{AA'} = (2;5;-7) \Rightarrow A'(3;5;-6)$

$\overrightarrow{BB'} = (2;5;-7) \Rightarrow B'(4;6;-5)$

$\overrightarrow{DD'} = (2;5;-7) \Rightarrow D'(3;4;-6)$



Vấn đề 2. Tích vô hướng và các ứng dụng của tích vô hướng

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa tích vô hướng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ và biểu thức tọa độ của tích vô hướng: Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

- Sử dụng các công thức tính khoảng cách giữa hai điểm, tính góc giữa hai vectơ

♦ Khoảng cách giữa hai điểm: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

♦ Góc giữa hai vectơ: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, (\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})$

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 120° .

Tìm $|\vec{a} + \vec{b}|$ và $|\vec{a} - \vec{b}|$, biết $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5$

HD Giải

a) Ta có: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 9 + 25 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 19$. Vậy $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$

b) Ta có: $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$. Vậy $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$. Tính:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ với $\vec{a} = (3;0;-6), \vec{b} = (2;-4;0)$

b) $\vec{c} \cdot \vec{d}$ với $\vec{c} = (1;-5;2), \vec{d} = (4;3;-5)$

HD Giải

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) + (-6) \cdot 0 = 6$

b) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 1 \cdot 4 + (-5) \cdot 3 + 2 \cdot (-5) = -21$

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$. Cho ba điểm $A(-1;-2;3), B(0;3;1), C(4;2;2)$

a) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) Tính cosin của góc $\widehat{BAC}$

HD Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;5;-2), \overrightarrow{AC} = (5;4;-1)$. Do đó: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) = 27$

$$b) \cos \widehat{BAC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{27}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{42}} = \frac{9}{2\sqrt{35}} \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 40^\circ 28' 46''$$

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$. Cho ba điểm $A(1;2;1), B(5;3;4), C(8;-3;2)$

- Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác vuông
- Tính diện tích tam giác ABC
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC

HD & Giải

$$a) \text{ Ta có: } \overline{AB} = (4;1;3) \Rightarrow AB = \sqrt{26}, \overline{AC} = (7;-5;1) \Rightarrow AC = 5\sqrt{3}, \overline{BC} = (3;-6;-2) \Rightarrow BC = 7$$

Nhận xét: $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 4 \cdot 3 + 1 \cdot (-6) + 3 \cdot (-2) = 0 \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{BC}$. Hay tam giác ABC vuông tại B

$$b) \text{ Gọi } S \text{ là diện tích tam giác } ABC, \text{ ta có: } S = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot 7 = \frac{7\sqrt{26}}{2}$$

c) Gọi p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Ta có:

$$p = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = \frac{1}{2}(\sqrt{26} + 5\sqrt{3} + 7). \text{ Từ } S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{7\sqrt{26}}{\sqrt{26} + 5\sqrt{3} + 7}$$

Vấn đề 3. Lập phương trình mặt cầu – Xác định tâm và bán kính mặt cầu có phương trình cho trước
Để viết phương trình mặt cầu (S), ta cần xác định tâm và bán kính mặt cầu.

♦ Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ bán kính r có phương trình là:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

♦ Đặc biệt phương trình mặt cầu tâm $O(0;0;0)$ bán kính r : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

♦ Trong không gian $Oxyz$, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ bán kính $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

Bài 9. Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu có phương trình:

$$a) x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 5 = 0$$

$$b) x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$$

$$c) 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 8y + 15z - 3 = 0$$

$$d) 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 3y + 15z - 2 = 0$$

HD & Giải

$$a) \text{ Ta có: } x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 5 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 9$$

Vậy mặt cầu đã cho có tâm $I(-2;1;-3)$ và bán kính $r = 3$.

$$b) x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0. \text{ Phương trình mặt cầu có dạng: } x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

$$\text{Ta có: } a = \frac{-8}{-2} = 4; b = \frac{-2}{-2} = 1; c = \frac{0}{-2} = 0; d = 1$$

Vậy mặt cầu đã cho có tâm $I(4;1;0)$ và bán kính $r = \sqrt{4^2 + 1^2 + 0^2 - 1} = 4$.

$$c) 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 8y + 15z - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + \frac{8}{3}y + 5z - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{361}{36} = \frac{19^2}{6^2}$$

Vậy mặt cầu đã cho có tâm $I\left(1; -\frac{4}{3}; -\frac{5}{2}\right)$ và bán kính $r = \frac{19}{6}$.

$$d) \text{ Mặt cầu đã cho có tâm } I\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right) \text{ và bán kính } r = \frac{7\sqrt{6}}{6}.$$

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$. Hãy lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:

- a) Có tâm $I(5; -3; 7)$ và có bán kính $r = 2$
 $J(3; -3; 1)$
- b) Đi qua điểm $M(5; -2; 1)$ và có tâm
- c) Có tâm là điểm $C(4; -4; 2)$ và đi qua gốc tọa độ
 $A(4; -3; 7), B(2; 1; 3)$
- d) Có đường kính AB với

HD Giải

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$, có tâm $I(a; b; c)$ và có bán kính r.

- a) Mặt cầu (S) tâm $I(5; -3; 7)$ và bán kính $r = 2$ có phương trình: $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 4$

- b) Mặt cầu (S) tâm $J(3; -3; 1)$ và đi qua điểm $M(5; -2; 1)$ nên có bán kính $r = JM = \sqrt{5}$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình: $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 5$

- c) Mặt cầu (S) tâm $C(4; -4; 2)$ và đi qua điểm $O(0; 0; 0)$ nên có bán kính $r = OC = 6$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình: $(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 36$

- d) Mặt cầu (S) có tâm là trung điểm K của đoạn AB

Ta có: $K(3; -1; 5)$ và bán kính $r = \frac{|\overline{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2}}{2} = \frac{36}{2} = 3$ (hay $r = IA = IB$)

Vậy mặt cầu (S) có phương trình: $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 9$

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$. Hãy lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:

- a) Đi qua bốn điểm $A(1;0;0), B(0;-2;0), C(0;0;4)$ và gốc tọa độ O
 b) Đi qua bốn điểm $A(1;1;1), B(1;2;1), C(1;1;2), D(2;2;1)$
 c) Đi qua ba điểm $A(1;2;-4), B(1;-3;1), C(2;2;3)$ và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy)
 d) Đi qua hai điểm $A(3;-1;2), B(1;1;-2)$ và có tâm nằm trên trục Oz

HD Giải

- a) Phương trình mặt cầu (S) cần tìm có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì $A \in (S)$ nên ta có: $1 - 2a + d = 0$ (1)

$$B \in (S) \text{ nên ta có: } 4 + 4b + d = 0 \quad (2)$$
$$C \in (S) \text{ nên ta có: } 16 - 8c + d = 0 \quad (3)$$
$$O \in (S) \text{ nên ta có: } d = 0 \quad (4)$$

Giải hệ 4 phương trình trên, ta có: $a = \frac{1}{2}, b = -1, c = 2, d = 0$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z = 0$

- b) Phương trình mặt cầu (S) cần tìm có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì $A \in (S)$ nên ta có: $3 - 2a - 2b - 2c + d = 0$ (1)

$B \in (S)$ nên ta có: $6 - 2a - 4b - 2c + d = 0$ (2)

$$C \in (S) \text{ nên ta có: } 6 - 2a - 2b - 4c + d = 0 \quad (3)$$
$$D \in (S) \text{ nên ta có: } 9 - 4a - 4b - 2c + d = 0 \quad (4)$$

Giải hệ 4 phương trình trên, ta có: $a = b = c = \frac{3}{2}, d = 6$

Vây mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$

- c) Phương trình mặt cầu (S) cần tìm có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì $A \in (S)$ nên ta có: $21 - 2a - 4b + 8c + d = 0$ (1)

$B \in (S)$ nên ta có: $11 - 2a + 6b - 2c + d = 0$ (2)

$C \in (S)$ nên ta có: $17 - 4a - 4b - 6c + d = 0$ (3)

Tâm $I \in (Oxy)$ nên ta có: $c = 0$ (4)

Giải hệ 4 phương trình trên, ta có: $a = -2, b = 1, c = 0, d = -21$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 21 = 0$

d) Phương trình mặt cầu (S) cần tìm có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Vì $A \in (S)$ nên ta có: $14 - 6a + 2b - 4c + d = 0$ (1)

$B \in (S)$ nên ta có: $6 - 2a - 2b + 4c + d = 0$ (2)

Tâm $I \in Oz$ nên ta có: $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ (3)

Giải hệ 3 phương trình trên, ta có: $a = 0, b = 0, c = 1, d = -10$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 10 = 0$

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$. Hãy lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:

a) Đi qua ba điểm $A(0; 8; 0), B(4; 6; 2), C(0; 12; 4)$ và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oyz)

b) Có bán kính $r = 2$, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên trục Ox

c) Có tâm $I(1; 2; 3)$ và tiếp xúc với mp (Oyz)

HD & Giải

a) Phương trình mặt cầu (S) cần tìm có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Tâm $I \in (Oyz) \Rightarrow I(0; b; c)$

Vì $A \in (S)$ nên ta có: $64 - 16b + d = 0$ (1)

$B \in (S)$ nên ta có: $56 - 8a - 12b - 4c + d = 0$ (2)

$C \in (S)$ nên ta có: $160 - 24b - 8c + d = 0$ (3)

Tâm $I \in (Oyz)$ nên ta có: $a = 0$ (4)

Giải hệ 4 phương trình trên, ta có: $a = 0, b = 7, c = 5, d = 48$

Vậy mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 14y - 10z + 48 = 0$

b) Tâm $I \in Ox \Rightarrow I(a; 0; 0)$. Vì tâm I nằm trên trục Ox và mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) nên điểm tiếp xúc phải là O .

Do đó bán kính mặt cầu là $r = IO = 2$ và $I(2; 0; 0)$

Vậy mặt cầu có phương trình: $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 4$

c) Vì mặt cầu có tâm $I(1; 2; 3)$ và tiếp xúc với mp (Oyz) nên bán kính r của mặt cầu bằng khoảng cách từ I đến mp (Oyz) . Do đó: $r = 1$. Vậy mặt cầu có phương trình: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (2; -1; 2), \vec{b} = (3; 0; 1), \vec{c} = (-4; 1; -1)$. Hãy tìm tọa độ các vectơ sau: a) $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c}$

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -1; 1), B(0; 1; 2), C(1; 0; 1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 1; -1), B(4; 1; -3), C(3; 7; 0)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm M của cạnh BC

b) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

c) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng của A qua M

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ tạo với nhau một góc 60° .

Tìm $|\vec{a} + \vec{b}|$ và $|\vec{a} - \vec{b}|$, biết $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 8$

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-4; -2; 0), B(-1; -2; 4), C(3; -2; 1)$. Tìm góc giữa hai vectơ $\vec{AB}$ và $\vec{AC}$

Bài 6. Tìm tâm và bán kính của các mặt cầu có phương trình:

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2z + 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 6z + 4 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 12z + 27 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8x - 4y - 12z - 100 = 0$

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$. Hãy lập phương trình mặt cầu trong các trường hợp sau:

a) Đi qua điểm $A(2; -1; -3)$ và có tâm $C(3; -2; 1)$

b) Có đường kính AB với $A(-1; 2; 1), B(0; 2; 3)$

c) Có tâm là điểm $I(2; -1; 3)$ và tiếp xúc với mp(Oxy)

d) Có tâm là điểm $I(2; -1; 3)$ và tiếp xúc với mp(Oxz)

e) Có tâm là điểm $I(2; -1; 3)$ và tiếp xúc với mp(Oyz)

Kết quả:

Bài 1. a) $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = (-4; -2; 3)$, b) $\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c} = (-9; 2; 1)$

Bài 2. $G\left(\frac{2}{3}; 0; \frac{4}{3}\right)$

Bài 3. a) $M\left(\frac{7}{2}; 4; -\frac{3}{2}\right)$, b) $G\left(3; 3; -\frac{4}{3}\right)$, c) $A'(5; 7; -2)$

Bài 4. $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129}, |\vec{a} - \vec{b}| = 7$

Bài 5. $\widehat{(AB, AC)} = 45^\circ$

Bài 6. a) $I(-3; 0; 1), r = 3$, b) $I(4; -2; -3), r = 5$, c) $I(1; -2; 3), r = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d) $I(-2; 1; 3), r = 8$

Bài 7. a) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 18$ b) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = \frac{5}{4}$

c) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 9$

d) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 1$

e) $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$

§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Tích có hướng của hai vector

a. Định nghĩa: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Tích có hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$ hoặc $\vec{a} \wedge \vec{b}$, được xác định bởi:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2; a_3 b_1 - a_1 b_3; a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Chú ý: $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$

b. Tính chất

- ♦ Nếu $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ thì $\begin{cases} \vec{c} \perp \vec{a} \\ \vec{c} \perp \vec{b} \end{cases}$
- ♦ $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$
- ♦ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$
- ♦ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$

c. Ứng dụng của tích có hướng

- ♦ Diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}|$
- ♦ Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$
- ♦ Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AA'}|$
- ♦ Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|$

2. Vector pháp tuyến của mặt phẳng

a. Định nghĩa:

- ♦ Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) nếu giá của nó vuông góc với (α) , viết tắt là: $\vec{n} \perp (\alpha)$
- ♦ Nếu hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ không cùng phương và giá của chúng song song với một mp (α) (hoặc nằm trên (α)) thì $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ là một vector pháp tuyến của mp (α) .

b. Chú ý:

- ♦ Nếu $\vec{n}$ là vector pháp tuyến của một mặt phẳng thì $k\vec{n}, k \neq 0$ cũng là vector pháp tuyến của mặt phẳng đó
- ♦ Mặt phẳng (ABC) có vector pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

3. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

a. Định nghĩa: Phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C, D không đồng thời bằng 0 được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng hay còn gọi là phương trình mặt phẳng.

b. Nhận xét:

- ♦ Nếu mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$
- ♦ Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nhận vector $\vec{n} = (A; B; C)$ khác $\vec{0}$ làm vector pháp tuyến có phương trình: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

c. Các trường hợp riêng của phương trình tổng quát

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (α)	Đặc điểm của mặt phẳng (α)
$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$	(α) đi qua gốc tọa độ O

$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	$(\alpha) // Ox$ hoặc $(\alpha) \supset Ox$
$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$	$(\alpha) // Oy$ hoặc $(\alpha) \supset Oy$
$C = 0$	$Ax + By + D = 0$	$(\alpha) // Oz$ hoặc $(\alpha) \supset Oz$
$A = B = 0$	$Cz + D = 0$	$(\alpha) // (Oxy)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxy)$
$A = C = 0$	$By + D = 0$	$(\alpha) // (Oxz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxz)$
$B = C = 0$	$Ax + D = 0$	$(\alpha) // (Oyz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oyz)$

Chú ý:

- ♦ Mặt phẳng (Oxy) có phương trình: $z = 0$ và có vector pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$
- ♦ Mặt phẳng (Oxz) có phương trình: $y = 0$ và có vector pháp tuyến $\vec{j} = (0; 1; 0)$
- ♦ Mặt phẳng (Oyz) có phương trình: $x = 0$ và có vector pháp tuyến $\vec{i} = (1; 0; 0)$

4. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

Mặt phẳng (α) không đi qua gốc O , cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm

$A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ (với $a, b, c \neq 0$) thì có phương trình: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Phương trình này gọi là phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (α)

5. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) có phương trình:

$(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; (\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Khi đó (α_1) và (α_2) có hai vector pháp tuyến là: $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1), \vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$

- ♦ $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$
- ♦ $(\alpha_1) // (\alpha_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
- ♦ (α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$
- ♦ $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

6. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm

$M_0(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) , kí hiệu $d(M_0, (\alpha))$, được tính bởi công thức:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

B. BÀI TẬP

Vấn đề 1. Tích có hướng của hai vector và các ứng dụng

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa của tích có hướng của hai vector và các tính chất của tích có hướng
- Sử dụng các công thức tính diện tích, thể tích.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$. Cho ba điểm $A(1; 2; 3), B(0; 1; 1), C(1; 0; 0)$. Tính $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}$

HD & Giải

Ta có: $\overrightarrow{AC} = (0; -2; -3), \overrightarrow{BC} = (1; -1; -1)$. $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC} = \left(\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-1; -3; 2)$

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$. Cho ba điểm $A(1; -1; 2), B(-1; 0; 3), C(0; 2; 1)$.

- a) Chứng minh A, B, C tạo thành một tam giác
b) Tính diện tích tam giác ABC . Suy ra chiều cao AH của tam giác ABC .

HD & Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 1; 1), \overrightarrow{AC} = (-1; 3; -1)$. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-4; 3; -5) \neq \vec{0}$

Vậy $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng $\Rightarrow A, B, C$ tạo thành một tam giác.

b) Ta có: Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 9 + 25} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Mặt khác: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Rightarrow AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$. Cho bốn điểm $A(1; 0; 1), B(-1; 1; 2), C(-1; 1; 0), D(2; -1; -2)$.

- a) Chứng minh 4 điểm A, B, C, D tạo thành một tứ diện
b) Tính diện tích của tam giác BCD
c) Tính thể tích tứ diện $ABCD$. Suy ra chiều cao AH của tứ diện $ABCD$

HD & Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{BA} = (2; -1; -1), \overrightarrow{BC} = (0; 0; -2), \overrightarrow{BD} = (3; -2; -4)$.

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = \left(\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (-4; -6; 0)$$

$$(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA} = (-4) \cdot 2 + (-6) \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) = -2 \neq 0$$

Vậy $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}$ không đồng phẳng $\Rightarrow A, B, C, D$ tạo thành một tứ diện.

b) $S_{BCD} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}| = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36} = \frac{\sqrt{52}}{2} = \sqrt{13}$

c) $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA}| = \frac{1}{6} \sqrt{4} = \frac{1}{3}$. Mặt khác: $V_{ABCD} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{BCD} \Rightarrow AH = \frac{3V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \frac{\sqrt{13}}{13}$

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ biết điểm $A(0; 0; 1), B(0; 2; 1), D(3; 0; 1), A'(0; 0; 0)$. Tính thể tích của khối hộp đã cho.

HD & Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0; 2; 0), \overrightarrow{AD} = (3; 0; 0), \overrightarrow{AA'} = (0; 0; -1)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0; 0; -6), (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AA'} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-6) \cdot (-1) = 6$$

Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AA'}| = 6$

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$. Cho bốn điểm $A(0; 1; 1), B(-1; 0; 2), C(-1; 1; 0), D(2; 1; -2)$.

- a) Chứng minh rằng bốn điểm đó không đồng phẳng.
b) Tính độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác đó.
c) Tính góc $\widehat{CBD}$ và góc giữa hai đường thẳng AB và CD .
d) Tính thể tích tứ diện $ABCD$ và độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ đỉnh D .

HD Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{BA} = (1; 1; -1), \overrightarrow{BC} = (0; 1; -2), \overrightarrow{BD} = (3; 1; -4)$

$$\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1; 2; 1), (\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD} = (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) = -5 \neq 0$$

Suy ra: $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ không đồng phẳng hay bốn điểm đã cho không đồng phẳng.

b) Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Gọi AH là đường cao kẻ từ A của tam giác ABC , ta có: $AH = \frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{6}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC và p là nửa chu vi của tam giác ABC

Ta có: $S_{\Delta ABC} = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}}$, với $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{2}}{2}$

c) Ta có: $\cos \widehat{CBD} = \cos \left(\widehat{BC, BD} \right) = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{9}{\sqrt{130}} \Rightarrow \widehat{CBD} \approx 37^\circ 52'$

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

Ta có: $\cos \alpha = \left| \cos \left(\widehat{AB, CD} \right) \right| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{5}{\sqrt{39}} \Rightarrow \alpha \approx 36^\circ 49'$

d) Thể tích tứ diện $ABCD$ là: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| (\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BD} \right| = \frac{5}{6}$

Nếu DK là đường cao của tứ diện kẻ từ D thì ta có: $DK = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$

Vấn đề 2. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng

Phương pháp: có 4 loại cơ bản

Loại 1. Viết phương trình mặt phẳng (α) khi biết vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ và một điểm

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ thuộc (α) .

♦ Phương trình (α) có dạng: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

♦ Khai triển, rút gọn đưa về dạng tổng quát: $Ax + By + Cz + D = 0$ với $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$

Lưu ý: Nếu hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ không cùng phương và giá của chúng song song với một mp (α) (hoặc nằm trên (α)) thì $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ là một vector pháp tuyến của mp (α) .

Loại 2. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa ba điểm A, B, C không thẳng hàng (hay đi qua ba điểm A, B, C)

♦ Tìm vector pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

♦ Mặt phẳng (α) qua điểm A (hay B hay C) và có vector pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha$ (**loại 1**)

Lưu ý: Mặt phẳng (α) không đi qua gốc O , cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm

$A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ (với $a, b, c \neq 0$) thì có phương trình: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Loại 3. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$.

♦ Phương trình (α) có dạng: $Ax + By + Cz + D' = 0$ (1)

♦ Thay tọa độ điểm M_0 vào (1) tìm được D'

Loại 4. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa hai điểm M, N và vuông góc với mặt phẳng

$(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$

♦ Tìm vector pháp tuyến $\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{MN} \wedge \vec{n}_\beta$

♦ Mặt phẳng (α) qua điểm M (hay N) và có vector pháp tuyến là $\vec{n}_\alpha$ (**loại 1**)

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

a) Đi qua điểm $A(2; 5; -7)$ và song song với giá của hai vector $\vec{a} = (1; -2; 3), \vec{b} = (3; 0; 5)$

b) Đi qua ba điểm $B(2; -1; 3), C(4; 0; 1), D(-10; 5; 3)$

c) Đi qua điểm $E(0; 2; 0)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): 2x + 3y - 4z - 2 = 0$

d) Đi qua OE và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x + 3y - 4z - 2 = 0$

e) Đi qua ba điểm $M(1; 0; 0), N(0; -2; 0), P(0; 0; -3)$

HD & Giải

a) Ta có: $\vec{a} \wedge \vec{b} = (-10; 4; 6)$. Mặt phẳng $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } A(2; 5; -7) \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = (-10; 4; 6) \end{cases}$

có phương trình: $-10(x - 2) + 4(y - 5) + 6(z + 7) = 0 \Leftrightarrow 5x - 2y - 3z - 21 = 0$

b) Ta có: $\overrightarrow{BC} = (2; 1; -2), \overrightarrow{BD} = (-12; 6; 0)$. $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = (12; 24; 24)$

Mặt phẳng $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } B(2; -1; 3) \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = (12; 24; 24) \end{cases}$

có phương trình: $12(x - 2) + 24(y + 1) + 24(z - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 6 = 0$

c) Vì mặt phẳng (α) song song với $(\beta): 2x + 3y - 4z - 2 = 0$ nên phương trình của mặt phẳng $(\alpha):$

$2x + 3y - 4z + D = 0, (D \neq -2)$. Điểm $E \in (\alpha)$, ta có: $2.0 + 3.2 - 4.0 + D = 0 \Leftrightarrow D = -6$

Vậy phương trình của mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y - 4z - 6 = 0$

d) Ta có: $\overrightarrow{OE} = (0; 2; 0), \vec{n}_\beta = (2; 3; -4)$. $\overrightarrow{OE} \wedge \vec{n}_\beta = (-8; 0; -4)$.

Mặt phẳng $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } O(0; 0; 0) \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = (-8; 0; -4) \end{cases}$

có phương trình: $-8(x - 0) + 0(y - 0) - 4(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x + z = 0$

e) Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

Ta được phương trình (α) có dạng: $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-3} = 1 \Leftrightarrow 6x - 3y - 2z - 6 = 0$

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

a) Đi qua điểm $A(1; -2; 4)$ và nhận $\vec{n} = (2; 3; 5)$ làm vector pháp tuyến

b) Đi qua điểm $B(0; -1; 2)$ và song song với giá của hai vector $\vec{u} = (3; 2; 1), \vec{v} = (-3; 0; 1)$

c) Đi qua điểm $C(2; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 3z + 4 = 0$

d) Đi qua hai điểm $D(1;0;1), E(5;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\gamma): 2x - y + z - 7 = 0$

e) Đi qua ba điểm $M(-3;0;0), N(0;-2;0), P(0;0;-1)$

HD Giải

a) Mặt phẳng $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } A(1;-2;4) \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = (2;3;5) \end{cases}$

có phương trình: $2(x-1) + 3(y+2) + 5(z-4) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 5z - 16 = 0$

b) Ta có: $\vec{u} \wedge \vec{v} = (2;-6;6)$. Mặt phẳng $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } B(0;-1;2) \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = (2;-6;6) \end{cases}$

có phương trình: $2(x-0) - 6(y+1) + 6(z-2) = 0 \Leftrightarrow x - 3y + 3z - 9 = 0$

c) Vì mặt phẳng (α) song song với $(\beta): 2x - y + 3z + 4 = 0$ nên phương trình của mặt phẳng (α) :

$2x - y + 3z + D = 0, (D \neq 4)$. Điểm $C \in (\alpha)$, ta có: $2.2 - 1.(-1) + 3.2 + D = 0 \Leftrightarrow D = -11$

Vậy phương trình của mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 3z - 11 = 0$

d) Ta có: $\vec{DE} = (4;2;2), \vec{n}_\beta = (2;-1;1), \vec{DE} \wedge \vec{n}_\beta = (1;0;-2)$.

Mặt phẳng $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } D(1;0;1) \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = (1;0;-2) \end{cases}$

có phương trình: $1(x-1) + 0(y-0) - 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2z + 1 = 0$

e) Phương trình mặt phẳng (α) theo đoạn chắn: $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-1} = 1 \Leftrightarrow 2x + 3y + 6z + 6 = 0$

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB , biết:

a) $A(2;3;7), B(4;1;3)$

b) $A(1;-2;4), B(3;6;2)$

HD Giải

Lưu ý: Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB qua trung điểm I của AB và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$

a) Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB . Đoạn thẳng AB có trung điểm $I(3;2;5)$,

$\overrightarrow{AB} = (2;-2;-4)$ Như vậy, mặt phẳng $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } I(3;2;5) \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (2;-2;-4) \end{cases}$

có phương trình: $2(x-3) - 2(y-2) - 4(z-5) = 0 \Leftrightarrow x - y - 2z + 9 = 0$

b) Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB . Đoạn thẳng AB có trung điểm $J(2;2;3), \overrightarrow{AB} = (1;4;-1)$

Như vậy, mặt phẳng $(\alpha): \begin{cases} \text{qua } J(2;2;3) \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (1;4;-1) \end{cases}$

có phương trình: $2(x-2) + 4(y-2) - 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 4y - z - 7 = 0$

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

a) Chứa trục Ox và điểm $A(4;-1;2)$

b) Chứa trục Oy và điểm $B(1;4;-3)$

c) Chứa trục Oz và điểm $C(3;-4;7)$

d) Đi qua $D(2;6;-3)$ và song song mp (Ozx)

HD Giải

a) Mặt phẳng (α) chứa điểm $A(4; -1; 2)$ và trục Ox , suy ra (α) song song hoặc chứa hai vector

$$\vec{i} = (1; 0; 0), \vec{OA} = (4; -1; 2). \text{ Ta có: } \vec{i} \wedge \vec{OA} = (0; -2; -1)$$

Vậy, mặt phẳng (α) : $\begin{cases} \text{qua } A(4; -1; 2) \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = (0; -2; -1) \end{cases}$

$$\text{có phương trình: } 0(x-4) - 2(y+1) - 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow 2y + z = 0$$

b) Mặt phẳng (α) chứa điểm $B(1; 4; -3)$ và trục Oy , suy ra (α) song song hoặc chứa hai vector

$$\vec{j} = (0; 1; 0), \vec{OB} = (1; 4; -3). \text{ Ta có: } \vec{j} \wedge \vec{OB} = (-3; 0; -1)$$

Vậy, mặt phẳng (α) : $\begin{cases} \text{qua } B(1; 4; -3) \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = (-3; 0; -1) \end{cases}$

$$\text{có phương trình: } -3(x-1) + 0(y-4) - 1(z+3) = 0 \Leftrightarrow 3x + z = 0$$

c) Mặt phẳng (α) chứa điểm $C(3; -4; 7)$ và trục Oz , suy ra (α) song song hoặc chứa hai vector

$$\vec{k} = (0; 0; 1), \vec{OC} = (3; -4; 7). \text{ Ta có: } \vec{k} \wedge \vec{OC} = (4; 3; 0)$$

Vậy, mặt phẳng (α) : $\begin{cases} \text{qua } C(3; -4; 7) \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = (4; 3; 0) \end{cases}$

$$\text{có phương trình: } 4(x-3) + 3(y+4) + 0(z-7) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y = 0$$

d) Phương trình mp(Ozx) là: $y = 0$

Vì mặt phẳng (α) song song với (Ozx) : $y = 0$ nên phương trình của mặt phẳng (α) : $y + D = 0, (D \neq 0)$.

Điểm $D \in (\alpha)$, ta có: $1.6 + D = 0 \Leftrightarrow D = -6$. Vậy phương trình của mặt phẳng (α) : $y - 6 = 0$

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

a) Đi qua $A(3; -1; -5)$ đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(\beta): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và

$$(\gamma): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$$

b) Đi qua các hình chiếu của điểm $B(2; 3; 4)$ trên các trục tọa độ.

c) Đi qua điểm $M(2; -1; 2)$, song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng $(\chi): 2x - y + 3z + 4 = 0$

HD & Giải

a) Mặt phẳng (β) có $\vec{n}_\beta = (3; -2; 2)$ và mp(γ) có $\vec{n}_\gamma = (5; -4; 3)$

Mặt phẳng (α) vuông góc với hai mặt phẳng $(\beta), (\gamma)$, do đó hai vector có giá song song hoặc nằm trên (α)

là $\vec{n}_\beta$ và $\vec{n}_\gamma$. Suy ra mp(α) có VTPT: $\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta \wedge \vec{n}_\gamma = (2; 1; -2)$

Vậy, mặt phẳng (α) : $\begin{cases} \text{qua } A(3; -1; -5) \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = (2; 1; -2) \end{cases}$

$$\text{có phương trình: } 2(x-3) + 1(y+1) - 2(z+5) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 2z - 15 = 0$$

b) Hình chiếu của điểm $B(2; 3; 4)$ trên các trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $C(2; 0; 0), D(0; 3; 0), E(0; 0; 4)$

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (\alpha) \text{ theo đoạn chắn: } \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 6x + 4y + 3z - 12 = 0$$

c) Mặt phẳng (α) song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng $(\chi): 2x - y + 3z + 4 = 0$

Do đó hai vectơ có giá song song hoặc nằm trên (α) là $\vec{j}(0;1;0)$ và $\vec{n}_x = (2;-1;3)$.

Suy ra mp (α) có VTPT: $\vec{n}_\alpha = \vec{j} \wedge \vec{n}_x = (3;0;-2)$

Vậy, mặt phẳng (α) : $\begin{cases} \text{qua } M(2;-1;2) \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = (3;0;-2) \end{cases}$

có phương trình: $3(x-2)+0(y+1)-2(z-2)=0 \Leftrightarrow 3x-2z-2=0$

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$. Cho tứ diện có các đỉnh $A(5;1;3), B(1;6;2), C(5;0;4), D(4;0;6)$

a) Hãy viết phương trình các mặt phẳng (ACD) và (BCD)

b) Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD .

HD & Giải

a) Ta có: $\vec{AC} = (0;-1;1), \vec{AD} = (-1;-1;3)$. $\vec{AC} \wedge \vec{AD} = (-2;-1;-1)$

Vậy, mặt phẳng (ACD) : $\begin{cases} \text{qua } A(5;1;3) \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = (-2;-1;-1) \end{cases}$

có phương trình: $-2(x-5)-1(y-1)-1(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x+y+z-14=0$

Tương tự, phương trình mặt phẳng (BCD) : $6x+5y+3z-42=0$

b) Ta có: $\vec{AB} = (-4;5;-1), \vec{CD} = (-1;0;2)$. Mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD nên $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{CD} = (10;9;5)$

Vậy, mặt phẳng (α) : $\begin{cases} \text{qua } A(5;1;3) \\ \text{có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = (10;9;5) \end{cases}$

có phương trình: $10(x-5)+9(y-1)+5(z-3)=0 \Leftrightarrow 10x+9y+5z-74=0$

Bài 12. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

a) Đi qua điểm $G(1;2;3)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC

b) Đi qua điểm $H(2;1;1)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho H là trực tâm của tam giác ABC

c) Đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt ba tia tại Ox, Oy, Oz các điểm A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất

HD & Giải

a) Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$. Vì $G(1;2;3)$ là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\begin{cases} \frac{a+0+0}{3}=1 \\ \frac{0+b+0}{3}=2 \\ \frac{0+0+c}{3}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=6 \\ c=9 \end{cases} \text{ . Phương trình mặt phẳng } (\alpha) \text{ theo đoạn chắn : } \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1$$

b) Nếu mặt phẳng (α) đi qua $H(2;1;1)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C thì tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc.

H là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $OH \perp (ABC)$

Vậy mp(α) đi qua H và có vector pháp tuyến là $\overrightarrow{OH} = (2; 1; 1)$ nên có phương trình: $2x + y + z - 6 = 0$

c) Gọi giao điểm của (α) với ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt là $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$, $a, b, c > 0$

Mặt phẳng (α) có phương trình theo đoạn chắn: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Do (α) qua $M(1; 2; 3)$ nên ta có: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$

Thể tích của tứ diện $OABC$ là $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}OA.OB.OC = \frac{1}{6}abc$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Rightarrow 1 \geq \frac{27.6}{abc} \Rightarrow abc \geq 27.6 \Rightarrow V \geq 27$

Khi đó: V đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow V = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$

Phương trình mặt phẳng (α) theo đoạn chắn: $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 18 = 0$

Vấn đề 3. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) có phương trình:

(α_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$; (α_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Khi đó (α_1) và (α_2) có hai vector pháp tuyến là: $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1), \overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$

♦ (α_1) $\equiv$ (α_2) $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

♦ (α_1) $//$ (α_2) $\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

♦ (α_1) cắt (α_2) $\Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$

♦ (α_1) $\perp$ (α_2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Bài 13. Trong không gian $Oxyz$. Xét vị trí tương đối của các cặp mặt phẳng cho bởi các phương trình tổng quát sau:

a) (α_1): $x + 2y + 3z + 4 = 0, (\beta_1): x + 5y - z - 9 = 0$

b) (α_2): $x + y + z + 5 = 0, (\beta_2): 2x + 2y + 2z + 6 = 0$

c) (α_3): $x + 2y + 3z + 1 = 0, (\beta_1): 3x + 6y + 9z + 3 = 0$

HD & Giải

a) Hai mặt phẳng (α_1) và (β_1) có hai vector pháp tuyến là: $\overrightarrow{n_\alpha} = (1; 2; 3), \overrightarrow{n_\beta} = (1; 5; -1)$

Ta có: $\frac{1}{1} \neq \frac{2}{5} \neq \frac{3}{-1} \Rightarrow (\alpha_1)$ cắt (β_1)

b) Hai mặt phẳng (α_2) và (β_2) có hai vector pháp tuyến là: $\overrightarrow{n_\alpha} = (1; 1; 1), \overrightarrow{n_\beta} = (2; 2; 2)$

Ta có: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{5}{6} \Rightarrow (\alpha_2)$ song song với (β_2)

c) Hai mặt phẳng (α_3) và (β_3) có hai vector pháp tuyến là: $\overrightarrow{n_\alpha} = (1; 2; 3), \overrightarrow{n_\beta} = (3; 6; 9)$

Ta có: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} \Rightarrow (\alpha_3)$ trùng với (β_3)

Bài 14. Trong không gian $Oxyz$. Xác định m để cặp mặt phẳng sau đây vuông góc

(α): $2x + my + 2mz - 9 = 0, (\beta): 6x - y - z - 10 = 0$

HD & Giải

Hai mặt phẳng (α) và (β) có hai vectơ pháp tuyến là: $\vec{n}_\alpha = (2; m; 2m), \vec{n}_\beta = (6; -1; -1)$

Ta có: $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0 \Leftrightarrow 12 - m - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 4$

Bài 15. Trong không gian $Oxyz$. Xác định m và n để cặp mặt phẳng sau đây song song với nhau:

a) $(\alpha): 2x + my + 3z - 5 = 0, (\beta): nx - 8y - 6z + 2 = 0$

b) $(\alpha): 3x - 5y + mz - 3 = 0, (\beta): 2x + ny - 3z + 1 = 0$

HD & Giải

a) Ta có: $(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{2}{n} = \frac{m}{-8} = \frac{3}{-6} \neq \frac{-5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n = -12 \\ -6m = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ n = -4 \end{cases}$

b) Ta có: $(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{-5}{n} = \frac{m}{-3} \neq \frac{-3}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n = -10 \\ 2m = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{10}{3} \\ n = -\frac{9}{2} \end{cases}$

Vấn đề 4. Khoảng cách và góc

Phương pháp:

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) , kí hiệu $d(M_0, (\alpha))$, được tính bởi công thức:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Nhận xét: Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α) thì $d(M, (\alpha)) = MH$

Chú ý:

♦ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia: Cho $(\alpha) // (\beta)$, $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\alpha)), M \in (\beta)$ hay $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta)), M \in (\alpha)$

♦ Khoảng cách giữa một đường thẳng song song với một mặt phẳng là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng đến mặt phẳng.

2. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0, (\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$, gọi $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ lần lượt là hai vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) , ta có: $\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$

Chú ý: ♦ $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ ♦ $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0$

Bài 16. Trong không gian $Oxyz$. Cho $A(1; -1; 2), B(3; 4; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z - 10 = 0$. Tính khoảng cách từ điểm A, B đến mặt phẳng (α) .

HD & Giải

Ta có: $d(A, (\alpha)) = \frac{|x_A + 2y_A + 2z_A - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|1 - 2 + 4 - 10|}{3} = \frac{7}{3}$

$$d(B, (\alpha)) = \frac{|x_B + 2y_B + 2z_B - 10|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|3 + 8 + 2 - 10|}{3} = 1$$

Bài 17. Trong không gian $Oxyz$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) cho bởi phương trình sau: $(\alpha): x + 2y + 2z + 11 = 0, (\beta): x + 2y + 2z + 2 = 0$.

HD & Giải

Ta lấy điểm $M(0; 0; -1) \in (\beta)$. $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\alpha)) = \frac{|x_M + 2y_M + 2z_M + 11|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 11|}{3} = 3$

Bài 18. Trong không gian $Oxyz$. Tìm trên trục Oz điểm M cách đều điểm $A(2; 3; 4)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y + z - 17 = 0$

HD & Giải

Điểm $M \in Oz \Rightarrow M(0; 0; z)$

Ta có: M cách đều điểm A và mp $(\alpha) \Leftrightarrow AM = d(M, (\alpha)) \Leftrightarrow \sqrt{4 + 9 + (z - 4)^2} = \frac{|z - 17|}{\sqrt{4 + 9 + 1}}$
 $\Leftrightarrow 13 + (z - 4)^2 = \frac{(z - 17)^2}{14} \Leftrightarrow z^2 - 6z + 9 = 0 \Leftrightarrow z = 3$.

Vậy điểm $M(0; 0; 3)$ là điểm cần tìm.

Bài 19. Trong không gian $Oxyz$. Tìm trên trục Oy điểm cách đều hai mặt phẳng: $(\alpha): x + y - z + 1 = 0$ và $(\beta): x - y + z - 5 = 0$

HD & Giải

Gọi $M \in Oy \Rightarrow M(0; y_0; 0)$. Theo giả thiết, ta có:

$d(M, (\alpha)) = d(M, (\beta)) \Leftrightarrow \frac{|0 + y_0 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|0 - y_0 + 0 - 5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \Leftrightarrow |y_0 - 1| = |y_0 - 5| \Leftrightarrow y_0 = -3$

Vậy điểm $M(0; -3; 0)$ là điểm cần tìm.

Bài 20. Trong không gian $Oxyz$. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 3 = 0$ và $(\beta): x - y + z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (γ) vuông góc với (α) và (β) sao cho khoảng cách từ O đến mp (γ) bằng 2.

HD & Giải

Gọi phương trình mp $(\gamma): Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$

Hai mặt phẳng (α) và (β) lần lượt có VTPT là $\vec{n}_\alpha = (1; 1; 1)$ và $\vec{n}_\beta = (1; -1; 1)$

Khi đó mặt phẳng (γ) có VTPT: $\vec{n}_\gamma = \vec{n}_\alpha \wedge \vec{n}_\beta = (2; 0; -2) = 2(1; 0; -1)$

Phương trình mp $(\gamma): x - z + D = 0$

Mặt khác: $d(O, (\gamma)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|D|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 2\sqrt{2} \\ D = -2\sqrt{2} \end{cases}$

Vậy, phương trình mặt phẳng $(\gamma): x - z + 2\sqrt{2} = 0$ hoặc $x - z - 2\sqrt{2} = 0$

Bài 21. Trong không gian $Oxyz$.

a) Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa trục Oz và tạo với mp (β) có phương trình $2x + y - \sqrt{5}z = 0$ một góc 60°

b) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(3; 0; 0), B(0; 0; 1)$ và tạo với mp (Oxy) một góc 60°

HD & Giải

a) Mặt phẳng (α) chứa trục Oz nên có dạng: $Ax + By = 0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (A; B; 0)$

Mặt phẳng (β) có VTPT $\vec{n}_\beta = (2; 1; \sqrt{5})$. Theo giả thiết, ta có:

$$\left| \cos(\widehat{n_\alpha, n_\beta}) \right| = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{|2A + B|}{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{4 + 1 + 5}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|2A + B| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{A^2 + B^2} \Leftrightarrow 6A^2 + 16AB - 6B^2 = 0$$

Chọn $B = 1$, ta có: $6A^2 + 16A - 6 = 0 \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}$ hoặc $A = -3$

Vậy, phương trình mặt phẳng (α) : $\frac{1}{3}x + y = 0$ hoặc $-3x + y = 0$

b) Mặt phẳng (α) đi qua A, B và tạo với mp(Oxy) một góc 60° nên mp(α) cắt trục Oy tại điểm $C(0; b; 0) \neq O(0; 0; 0) \Rightarrow b \neq 0$

Khi đó phương trình của mp(α): $\frac{x}{3} + \frac{y}{b} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow bx + 3y + 3bz - 3b = 0$

mp(α) và mp(Oxy) lần lượt có VTPT là: $\vec{n}_\alpha = (b; 3; 3b), \vec{k} = (0; 0; 1)$

Theo giả thiết, ta có:

$$\left| \cos(\widehat{n_\alpha, k}) \right| = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{|3b|}{\sqrt{b^2 + 9 + 9b^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |6b| = \sqrt{10b^2 + 9} \Leftrightarrow b^2 = \frac{9}{26} \Leftrightarrow b = \pm \frac{3}{\sqrt{26}}$$

Vậy, phương trình mặt phẳng (α) : $x - \sqrt{26}y + 3x - 3 = 0$ hoặc $x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$

Vấn đề 5. Bài toán liên hệ giữa mặt phẳng và mặt cầu

- ♦ Viết phương trình mặt cầu, xác định tâm và bán kính của mặt cầu (S)
- ♦ Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu
- ♦ Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) có tâm I bán kính $r \Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = r$

Bài 22. Trong không gian $Oxyz$. Lập phương trình mặt cầu tâm $I(1; 1; 5)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): 2x + 2y + z + 6 = 0$

HD & Giải

Mặt cầu tiếp xúc với mp(α) nên có bán kính $r = d(I, (\alpha)) = \frac{|2 + 2 + 5 + 6|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 5$

Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 5)^2 = 25$

Bài 23. Trong không gian $Oxyz$. Lập phương trình mặt cầu đi qua ba điểm

$A(1; 2; -4), B(1; -3; 1), C(2; 2; 3)$ và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

HD & Giải

Gọi phương trình mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Phương trình mặt phẳng (Oxy) : $z = 0$

Ta có: $I \in (Oxy) \Rightarrow c = 0$. Mặt khác: $A, B, C \in (S)$.

$$\text{Do đó, ta có hệ phương trình: } \begin{cases} -2a - 4b + 8c + d = -21 \\ -2a + 6b - 2c + d = -11 \\ -4a - 4b - 6c + d = -17 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d = -21 \end{cases}$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 21 = 0$

Bài 24. Trong không gian $Oxyz$. Lập phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $A(2;0;1), B(1;0;0), C(1;1;1)$ và có tâm nằm trên mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 2 = 0$.

HD & Giải

Gọi phương trình mặt cầu (S) tâm $I(a;b;c)$ có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Phương trình mặt phẳng: $(\alpha): x + y + z - 2 = 0$

Ta có: $I \in (\alpha) \Rightarrow a + b + c = 2$. Mặt khác: $A, B, C \in (S)$.

$$\text{Do đó, ta có hệ phương trình: } \begin{cases} -4a - 2c + d = -5 \\ -2a + d = -1 \\ -2a - 2b - 2c + d = -3 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

Vậy, phương trình mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$

Bài 24. Trong không gian $Oxyz$. Lập phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(\beta): x + y + 2z + 1 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 8 = 0$.

HD & Giải

Mặt phẳng $(\alpha) // (\beta): x + y + 2z + 1 = 0 \Rightarrow (\alpha): x + y + 2z + D = 0, (D \neq 1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $r = \sqrt{6}$

$$\text{Mặt phẳng } (\alpha) \text{ tiếp xúc với mặt cầu } (S) \Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = r \Leftrightarrow \frac{|1 - 2 + 6 + D|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Leftrightarrow |D + 5| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 1 \\ D = -11 \end{cases}$$

Vậy mặt phẳng $(\alpha): x + y + 2z - 11 = 0$

Bài 25. Trong không gian $Oxyz$. Lập phương trình tiếp diện của mặt cầu (S) :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z + 5 = 0 \text{ tại điểm } M(4;3;0)$$

HD & Giải

Gọi (α) là tiếp diện cần tìm. Mặt cầu (S) có tâm $I(3;1;-2)$ và $M \in (S)$

(α) đi qua điểm $M(4;3;0)$ và có VTPT là $\vec{n} = \overrightarrow{IM} = (1;2;2)$ nên có phương trình:

$$1(x-4) + 2(y-3) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2z - 10 = 0$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Xét sự đồng phẳng của ba vector $\vec{u}, \vec{v}$ và $\vec{w}$ trong mỗi trường hợp sau:

- a) $\vec{u} = (4;3;4), \vec{v} = (2;-1;2), \vec{w} = (1;2;1)$ b) $\vec{u} = (1;-1;1), \vec{v} = (0;1;2), \vec{w} = (4;2;3)$
 c) $\vec{u} = (4;2;5), \vec{v} = (3;1;3), \vec{w} = (2;0;1)$ d) $\vec{u} = (-3;1;-2), \vec{v} = (1;1;1), \vec{w} = (-2;10;1)$

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$. Cho ba điểm $A(1;0;0), B(0;0;1), C(2;1;1)$.

- a) Chứng minh rằng A, B, C không thẳng hàng
 b) Tính chu vi và diện tích tam giác ABC
 c) Tính độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A
 d) Tính các góc của tam giác ABC

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

- a) Đi qua điểm $A(2;0;1)$ và nhận $\vec{n} = (1;1;1)$ làm vector pháp tuyến

b) Đi qua điểm $B(1;0;0)$ và song song với giá của hai vectơ $\vec{u} = (0;1;1), \vec{v} = (-1;0;2)$

c) Đi qua ba điểm $M(1;1;1), N(4;3;2), P(5;2;1)$

d) Đi qua gốc tọa độ O và song song với mặt phẳng $(\beta): x + y + 2z - 7 = 0$

e) Đi qua hai điểm $A(0;1;0), B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x + 2y - z = 0$

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$. Cho tứ diện có các đỉnh $A(5;1;3), B(1;6;2), C(5;0;4), D(4;0;6)$

a) Hãy viết phương trình mặt phẳng (ABC)

b) Hãy viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua cạnh BD và song song với mặt phẳng (ABC) .

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

a) Đi qua ba điểm $M(2;0;-1), N(1;-2;3), P(0;1;2)$

b) Đi qua điểm $A(1;1;-1), B(5;2;1)$ và song song với trục Oz

c) Đi qua điểm $C(3;2;-1)$ song song với mặt phẳng $(\beta): x - 5y + z = 0$

d) Đi qua hai điểm $A(0;1;1), B(-1;0;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x - y + z + 1 = 0$

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

a) Đi qua ba điểm $A(-1;2;3), B(2;-4;3), C(4;5;6)$

b) Đi qua điểm $D(1;3;-2)$ và vuông góc với trục Oy

c) Đi qua điểm $D(1;3;-2)$ và vuông góc với đường thẳng MN , với $M(0;2;-3), N(1;-4;1)$

d) Đi qua điểm $D(1;3;-2)$ song song với mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 3z + 4 = 0$

e) Đi qua hai điểm $P(3;1;-1), Q(2;-1;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 3z + 4 = 0$

f) Đi qua điểm $K(2;-1;2)$ song song với trục Oy và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x - y + 3z + 4 = 0$

g) Đi qua điểm $H(-2;3;1)$ và vuông góc với hai mặt phẳng

$(\beta): 2x + y + 2z + 5 = 0, (\beta'): 3x + 2y + z - 3 = 0$

Bài 7. Đi qua điểm $M(1;1;1)$ và cắt ba tia tại Ox, Oy, Oz các điểm A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất

Bài 8. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 5z + 14 = 0, (\beta): x + my - 2mz + 5 = 0$. Tìm m để $(\alpha) \perp (\beta)$

Bài 9. Xác định m và n để cặp mặt phẳng sau đây song song với nhau:

a) $(\alpha): 2x + ny + 2z + 3 = 0, (\beta): mx + 2y - 4z + 7 = 0$

b) $(\alpha): 2x + y + mz - 2 = 0, (\beta): x + ny + 2z + 8 = 0$

Bài 10. Cho hai mặt phẳng có phương trình là $2x - my + 3z - 6 + m = 0$ và

$(m+3)x - 2y + (5m+1)z - 10 = 0$, Với giá trị nào của m thì:

a) Hai mặt phẳng đó song song

b) Hai mặt phẳng đó trùng nhau

c) Hai mặt phẳng đó cắt nhau

d) Hai mặt phẳng đó vuông góc

Bài 11. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;2;0)$ lần lượt đến các mặt phẳng sau:

a) $(\alpha): x + 2y - 2z + 1 = 0$

b) $(\beta): 3x + 4z + 25 = 0$

c) $(\gamma): z + 5 = 0$

Bài 12. Tính khoảng cách từ điểm $M(2;4;-3)$ lần lượt đến các mặt phẳng sau:

a) $(\alpha): 2x - y + 2z - 9 = 0$

b) $(\beta): 12x - 5z + 5 = 0$

c) $(\gamma): x = 0$

Bài 13. Lập phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 2z + 12 = 0$

Bài 14.

a) Cho mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z + 5 = 0$ và điểm $M_0(4; 3; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại điểm M_0 .

b) Viết phương trình mặt cầu có tâm $I(-2; 1; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 2z + 5 = 0$

c) Cho bốn điểm $A(3; -2; -2), B(3; 2; 0), C(0; 2; 1), D(-1; 1; 2)$. Viết phương trình mặt cầu tâm A, tiếp xúc với mặt phẳng (BCD)

d) Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1)$ và có tâm nằm trên mặt phẳng $x + y + z - 3 = 0$

Kết quả:

Bài 1. a) $\vec{u}, \vec{v}$ và $\vec{w}$ đồng phẳng; b) $\vec{u}, \vec{v}$ và $\vec{w}$: không đồng phẳng;

c) $\vec{u}, \vec{v}$ và $\vec{w}$: đồng phẳng; d) $\vec{u}, \vec{v}$ và $\vec{w}$: đồng phẳng

Bài 2. a) $\overline{BA} = (1; 0; -1), \overline{BC} = (2; 1; 0) \Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng

b) $AB = \sqrt{2}, BC = \sqrt{5}, AC = \sqrt{3}. \Delta ABC \perp A, p = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}, S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $h_a = \frac{\sqrt{30}}{5}, d) \cos B = \frac{\sqrt{10}}{5}, \cos C = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Bài 3. a) $x + y + z - 3 = 0$; b) $2x - y + z - 2 = 0$; c) $x - 4y + 5z - 2 = 0$;

d) $x + y + 2z = 0$; e) $4x - 3y - 2z + 3 = 0$

Bài 4. a) $x + y + z - 9 = 0$; b) $x + y + z - 10 = 0$

Bài 5. a) $2x + y + z - 3 = 0$; b) $x - 4y + 3 = 0$; c) $x - 5y + z + 8 = 0$; d) $y + z - 2 = 0$

Bài 6. a) $6x + 3y - 13z + 39 = 0$; b) $y - 3 = 0$; c) $x - 6y + 4z + 25 = 0$; d) $2x - y + 3z + 7 = 0$

e) $x - 13y - 5z + 5 = 0$; f) $3x - 2z - 2 = 0$; g) $3x - 4y - z + 19 = 0$

Bài 7. $V_{OABC} \geq \frac{27}{6} = \frac{9}{2}, a = b = c = 3. x + y + z - 3 = 0$

Bài 8. $m = -\frac{2}{11}$

Bài 9. a) $m = -4; n = -1$; b) $m = 4; n = \frac{1}{2}$

Bài 10. a) Không có giá trị m ; b) $m = 1$; c) $m \neq 1$; d) $m = -\frac{9}{19}$

Bài 11. a) $d(M, (\alpha)) = 2$ b) $d(M, (\beta)) = \frac{28}{5}$, c) $d(M, (\gamma)) = 5$

Bài 12. a) $d(M, (\alpha)) = 5$ b) $d(M, (\beta)) = \frac{44}{13}$, c) $d(M, (\gamma)) = 2$

Bài 13. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$

Bài 14. a) $x + 2y + 2z - 10 = 0$; b) $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$

c) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 14$; d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng

1. Phương trình tham số

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \neq \vec{0}$ làm vector chỉ phương.

Δ có phương trình tham số là:
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$
, trong đó t là tham số.

2. Phương trình chính tắc

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ với $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ làm vector chỉ

phương. Δ có phương trình chính tắc là:
$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

II. Điều kiện để hai đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau

Cho hai đường thẳng d và d' lần lượt đi qua hai điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$ và có vector chỉ

phương lần lượt $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{a}' = (a'_1; a'_2; a'_3)$. Đặt $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}'$, ta có các điều kiện sau:

- $d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \notin d' \end{cases}$
- $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \in d' \end{cases}$
- d cắt $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} = 0 \end{cases}$
- d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} \neq 0$
- $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{a}' = 0$

III. Điều kiện để một đường thẳng song song, cắt hoặc vuông góc với mặt phẳng

Cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vector chỉ phương là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, mặt phẳng (α)

có phương trình: $Ax + By + Cz + D = 0$. Gọi $\vec{n} = (A; B; C)$ là vector pháp tuyến của (α) . Ta có các điều kiện:

- $d // (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ M_0 \notin (\alpha) \end{cases}$
- $d \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ M_0 \in (\alpha) \end{cases}$
- d cắt $(\alpha) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{n} \neq 0$
- $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{n} = k\vec{a}$, với mọi k là số thực

IV. Tính khoảng cách

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, có vector chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và điểm M

$$\text{Khi đó: } d(M, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{M_0 M} \wedge \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

Cách khác: Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ , ta thực hiện các bước sau:

B1. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa M và vuông góc với Δ

B2. Tìm giao điểm H của Δ và (α)

B3. Khoảng cách từ M đến Δ chính là khoảng cách giữa hai điểm M và H : $d(M, \Delta) = MH$

2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Để tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ song song với một mặt phẳng (α) , ta thực hiện các bước:

B1. Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ tùy ý trên Δ

B2. Khoảng cách giữa Δ và (α) chính là khoảng cách từ điểm M_0 đến (α) : $d(\Delta, (\alpha)) = d(M_0, (\alpha))$ và

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ'

- ♦ Δ qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$
- ♦ Δ' qua điểm B và có vectơ chỉ phương $\vec{b}$

$$\text{Khi đó: } d(\Delta, \Delta') = \frac{|(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|}$$

Cách khác: Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' , ta thực hiện các bước:

B1. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với Δ'

B2. Lấy một điểm $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$ tùy ý trên Δ'

B3. Khoảng cách giữa Δ và Δ' chính là khoảng cách từ điểm M'_0 đến (α) : $d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha))$

B. BÀI TẬP

Vấn đề 1. Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ

Phương pháp:

Bước 1. Xác định một điểm cố định $M_0(x_0; y_0; z_0)$ thuộc Δ

Bước 2. Xác định một vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ của Δ

Bước 3. Phương trình tham số của Δ :
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$
 phương trình chính tắc của Δ :

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Chú ý:

- ♦ Nếu đường thẳng Δ đi qua hai điểm A và B thì Δ có VTCP là $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$
- ♦ Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) thì Δ có VTCP là $\vec{a} = \vec{n}_\alpha$

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua điểm $M_0(1; 2; 3)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (1; -4; -5)$

b) Đi qua hai điểm $A(1; -2; 3), B(3; 0; 0)$

c) Đi qua điểm $C(3; 2; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 5y + 4 = 0$

d) Đi qua $D(-2; 1; 2)$ và song song với trục Oz

HD & Giải

a) Phương trình tham số của Δ : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - 5t \end{cases}$; phương trình chính tắc của Δ : $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{-5}$

b) Đường thẳng Δ qua hai điểm A và B nên có VTCP là $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (2; 2; -3)$

Phương trình tham số của Δ : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$; phương trình chính tắc của Δ : $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-3}$

c) Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - 5y + 4 = 0$ nên có VTCP là $\vec{a} = \vec{n}_\alpha = (2; -5; 0)$

Phương trình tham số của Δ : $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 1 \end{cases}$; không có phương trình chính tắc của Δ .

d) Đường thẳng Δ song song với trục Oz nên có VTCP là $\vec{a} = \vec{k} = (0; 0; 1)$

Phương trình tham số của Δ : $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 + t \end{cases}$; không có phương trình chính tắc của Δ .

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua điểm $M(4; 3; 1)$ và song song với đường thẳng Δ' : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

b) Đi qua điểm $N(-2; 3; 1)$ và song song với đường thẳng Δ' : $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{x+2}{3}$

c) Đi qua điểm $P(2; -1; 1)$ và vuông góc với hai đường thẳng lần lượt có vector chỉ phương là $\vec{u} = (-1; 1; -2), \vec{u}' = (1; -2; 0)$

d) Nằm trong mặt phẳng $(\alpha): y + 2z = 0$ và cắt hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 4 \end{cases}$

HD & Giải

a) Đường thẳng Δ song song với đường thẳng Δ' : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ nên có VTCP là $\vec{a} = \vec{a}' = (2; -3; 2)$

Phương trình tham số của Δ : $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$; phương trình chính tắc của Δ : $\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-1}{2}$

b) Đường thẳng Δ song song với đường thẳng Δ' : $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{x+2}{3}$ nên có VTCP là $\vec{a} = \vec{a}' = (2; 1; 3)$

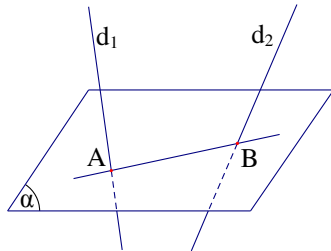
Phương trình tham số của Δ : $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$; phương trình chính tắc của Δ : $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{3}$

c) Đường thẳng Δ vuông góc với hai đường thẳng lần lượt có vectơ chỉ phương là

$\vec{u} = (-1; 1; -2), \vec{u}' = (1; -2; 0)$ nên có VTCP là $\vec{a} = \vec{u} \wedge \vec{u}' = (-4; -2; 1)$

Phương trình tham số của Δ :
$$\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$
 ; phương trình chính tắc của Δ :
$$\frac{x+2}{-4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$$

d)



Gọi A và B lần lượt là giao điểm của d_1 và d_2 với (α) . Đường thẳng Δ cần tìm chính là đường thẳng AB

Ta có: $A \in d_1 \Rightarrow A(1-t; t; 4t)$. Mặt khác: $A \in (\alpha) \Leftrightarrow t + 4 \cdot (2t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$.

Vậy $A(1; 0; 0)$

$B \in d_2 \Rightarrow B(2-t'; 4+2t'; 4)$. Mặt khác: $B \in (\alpha) \Leftrightarrow 4 + 2t' + 8 = 0 \Leftrightarrow t' = -6$

Vậy $B(8; -8; 4)$

Vậy, đường thẳng Δ qua hai điểm A và B nên có VTCP là $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (7; -8; 4)$

Phương trình tham số của Δ :
$$\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = -8t \\ z = 4t \end{cases}$$
 ; phương trình chính tắc của Δ :
$$\frac{x-1}{7} = \frac{y}{-8} = \frac{z}{4}$$

Bài 3. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng

$d: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ trên các mặt phẳng tọa độ.

Áp dụng: Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$ trên các mặt phẳng tọa độ

HD & Giải

$$d: \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$
 Đường thẳng d qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có $\vec{a} = (a; b; c)$.

Với mỗi điểm $M(x; y; z) \in d$ có hình chiếu trên mp(Oxy) là điểm $M'(x; y; 0) \in d'$ với d' là hình chiếu của d trên (Oxy).

Vậy d' có phương trình tham số là:
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = 0 \end{cases}$$

Tương tự, ta có phương trình hình chiếu của d trên mp(Oxz), mp(Oyz) lần lượt là:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = 0 \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Áp dụng: Đường thẳng d có phương trình tham số:
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$$
 Với mỗi điểm $M(x; y; z) \in d$ có hình

chiếu trên mp(Oxy) là điểm $M'(x; y; 0) \in d'$ với d' là hình chiếu của d trên (Oxy).

Vậy d' có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 0 \end{cases}$. Tương tự trên $(Oxz), (Oyz)$: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 3 + t \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 + 3t \\ z = 3 + t \end{cases}$

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 8 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 7 = 0$

- Tìm một vector chỉ phương của d và một điểm nằm trên d
- Viết phương trình mặt phẳng đi qua d và vuông góc với $mp(\alpha)$
- Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên $mp(\alpha)$

HD & Giải

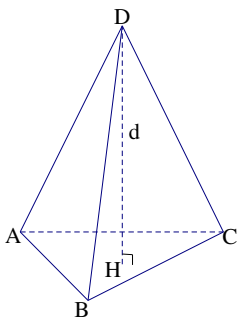
- Một vector chỉ phương của d là $\vec{a} = (1; 4; 2)$ và một điểm nằm trên d là $M_0(0; 8; 3)$
- Gọi (β) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với $mp(\alpha)$ nên $mp(\beta)$ qua điểm $M_0(0; 8; 3)$ và có vector pháp tuyến là $\vec{n}_\beta = \vec{n}_\alpha \wedge \vec{a} = (2; 1; -3)$
 Vậy $mp(\beta)$ có phương trình: $2(x-0) + 1(y-8) - 3(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3z + 1 = 0$
- Vì d không vuông góc với (α) nên hình chiếu của d trên (α) là đường thẳng d' là giao của (α) và (β) .

Vậy d' có phương trình là: $\begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 15 - 5t \\ z = t \end{cases}$

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$. Cho tứ diện $ABCD$ với $A(0; 0; 2), B(3; 0; 5), C(1; 1; 0), D(4; 1; 2)$

- Viết phương trình tham số của đường cao tứ diện $ABCD$ hạ từ D
- Tìm tọa độ hình chiếu H của D trên $mp(ABC)$

HD & Giải



- Ta có: $\vec{AB} = (3; 0; 3), \vec{AC} = (1; 1; -2)$. $\vec{n}_{ABC} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = (-3; 9; 3)$
 Đường cao d hạ từ điểm D của tứ diện $ABCD$ đi qua điểm D và vuông góc với $mp(ABC)$ nên có VPCP là $\vec{a} = \vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$

Vậy đường thẳng d có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 1 + 9t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

- Mặt phẳng (ABC) có VTPT $\vec{n}_{ABC} = (-3; 9; 3) = -3(1; -3; -1)$ và đi qua điểm $A(0; 0; 2)$ nên có phương trình:

$$1(x-0) - 3(y-0) - 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - z + 2 = 0$$

Hình chiếu H của D trên $mp(ABC)$ là giao điểm của đường thẳng d và $mp(ABC)$

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = 4 - 3t & (1) \\ y = 1 + 9t & (2) \\ z = 2 + 3t & (3) \\ x - 3y - z + 2 = 0 & (4) \end{cases}$

Thay (1), (2), (3) vào (4), ta có: $4 - 3t - 3(1 + 9t) - (2 + 3t) + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{33}$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} x = 4 - 3\left(\frac{1}{33}\right) = \frac{43}{11} \\ y = 1 + 9\left(\frac{1}{33}\right) = \frac{14}{11} \\ z = 2 + 3\left(\frac{1}{33}\right) = \frac{23}{11} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{43}{11}; \frac{14}{11}; \frac{23}{11}\right)$$

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$. Cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình là $d_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 4t \\ z = 6 + 6t \end{cases}$ và $d_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{x+2}{-5}$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua $M(1; -1; 2)$, vuông góc với d_1 và d_2 .

HD & Giải

Các đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có VTCP là: $\vec{a}_1 = (1; -4; 6), \vec{a}_2 = (2; 1; -5)$

Đường thẳng d vuông góc với d_1 và d_2 nên có VTCP là: $\vec{a} = \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 = (14; 17; 9)$

Vậy d có phương trình chính tắc là: $\frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{17} = \frac{z-2}{9}$

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$. Cho hai đường thẳng $d : \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$ và $d' : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 3 - 2t' \\ z = 1 \end{cases}$. Lập phương trình đường vuông góc chung của d và d' .

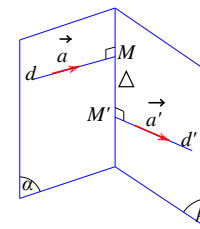
HD & Giải

Đường thẳng d và d' lần lượt có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1; 2; 3)$ và $\vec{a}' = (1; -2; 0)$

Xét điểm $M(1-t; 2+2t; 3t) \in d$ và $M'(1+t'; 3-2t'; 1) \in d'$. Ta có: $\overrightarrow{MM'} = (t' + t; 1 - 2t' - 2t; 1 - 3t)$

MM' là đường vuông góc chung của d và $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{a}' = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -t' - t + 2 - 4t' - 4t + 3 - 9t = 0 \\ t' + t - 2 + 4t' + 4t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t' + 14t = 5 \\ 5t' + 5t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t' = \frac{1}{15} \end{cases}$$



Thay giá trị t và t' vào ta được tọa độ của $M\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}; 1\right)$ và $M'\left(\frac{16}{15}; \frac{43}{15}; 1\right)$

Ta lại có: $\overrightarrow{MM'} = \left(\frac{6}{15}; \frac{3}{15}; 0\right) = \frac{1}{15}(2; 1; 0)$. Vậy đường thẳng vuông chung Δ của d và d' đi qua điểm

$$M\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}; 1\right) \text{ và có VTCP } \vec{u} = (2; 1; 0) \text{ có phương trình tham số là: } \begin{cases} x = \frac{2}{3} + 2t \\ y = \frac{8}{3} + t \\ z = 1 \end{cases}$$

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$. Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + z - 1 = 0$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ Gọi M là giao điểm của d và (α) , hãy viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua M vuông góc với d và nằm trong (α) .

HD & Giải

Phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = -2 - 3t \end{cases} \quad (I)$

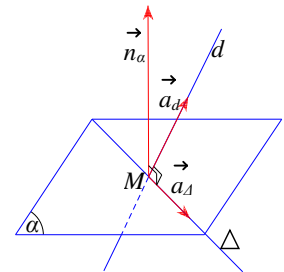
$M = d \cap (\alpha)$. Thay x, y, z trong (I) vào phương trình mặt phẳng (α) ,

ta được: $2(1+2t) + t - 2 - 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(2; \frac{1}{2}; -\frac{7}{2}\right)$

Mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n}_\alpha = (2; 1; 1)$ và đường thẳng d có VTCP $\vec{a} = (2; 1; -3)$

Gọi $\vec{a}_\Delta$ là VTCP của đường thẳng Δ , ta có $\vec{a}_\Delta \perp \vec{n}_\alpha$ và $\vec{a}_\Delta \perp \vec{a}$. Suy ra $\vec{a}_\Delta = \vec{n}_\alpha \wedge \vec{a} = (-4; 8; 0)$

Phương trình tham số của đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = \frac{1}{2} + 8t \\ z = -\frac{7}{2} \end{cases}$



Vấn đề 2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng trong không gian

Phương pháp:

Bước 1. Xác định điểm cố định $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ của d . Xác định điểm cố định

$M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$ và VTCP $\vec{a}' = (a'_1; a'_2; a'_3)$ của d' .

Bước 2. Tính $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}'$

Bước 3. Dùng các dấu hiệu sau để xét vị trí tương đối giữa d và d'

1. $d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \notin d' \end{cases}$
2. $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \in d' \end{cases}$
3. d cắt $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} = 0 \end{cases}$
4. d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} \neq 0$
5. $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{a}' = 0$

Bài 9. Trong không gian $Oxyz$. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$. Xét vị trí tương đối của đường thẳng d lần lượt với các đường thẳng sau:

- a) $d_1: \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-6}{2}$
- b) $d_2: \frac{x-4}{6} = \frac{y-1}{9} = \frac{z-3}{3}$
- c) $d_3: \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-6}{5}$
- d) $d_4: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2}$

HD & Giải

Ta có đường thẳng d đi qua $M_0(1; -1; 5)$ và có VTCP là $\vec{a} = (2; 3; 1)$

a) Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(3; 2; 6)$ và có VTCP là $\vec{a}_1 = (4; 6; 2)$

Ta có: $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}_1 = (0; 0; 0) = \vec{0}$ và $M_1 \in d$. Vậy $d \equiv d_1$

b) Đường thẳng d_2 đi qua $M_2(4; 1; 3)$ và có VTCP là $\vec{a}_2 = (6; 9; 3)$

Ta có: $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}_2 = (0; 0; 0) = \vec{0}$ và $M_2 \notin d$. Vậy $d // d_2$

c) Đường thẳng d_3 đi qua $M_3(3; 2; 6)$ và có VTCP là $\vec{a}_3 = (4; 3; 5)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}_3 = (12; -6; -6) \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{M_0 M_3} = (2; 3; 1) \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M_3} = 24 - 16 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow d \text{ cắt } d_3$$

d) Đường thẳng d_4 đi qua $M_4(1; -2; -1)$ và có VTCP là $\vec{a}_4 = (3; 2; 2)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}_4 = (4; -1; -5) \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{M_0 M_4} = (0; -1; -6) \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M_4} = 0 + 1 + 30 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow d \text{ và } d_4 \text{ là hai đường thẳng chéo nhau.}$$

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$. Cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ và $d': \begin{cases} x = 3-t \\ y = 2t \\ z = -1+t \end{cases}$

a) Hãy xét vị trí tương đối giữa d và d' b) Tìm giao điểm nếu có của d và d'

HD & Giải

a) Phương trình tham số của d : $\begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = -t' \end{cases}$

Xét hệ phương trình (I): $\begin{cases} 3-t = 1+2t' & (1) \\ 2t = -1+t' & (2) \\ -1+t = -t' & (3) \end{cases}$. Giải hệ (1) và (2), ta được: $\begin{cases} t+2t' = 2 \\ 2t-t' = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t' = 1 \end{cases}$

Các giá trị t, t' thỏa mãn (3). Do đó hệ phương trình (I) có một nghiệm. Vậy d cắt d'

b) Thay $t = 0$ vào phương trình tham số của d' ta được giao điểm $M(3; 0; -1)$

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$. Tìm a để hai đường thẳng sau đây cắt nhau

$$d: \begin{cases} x = 1 + at \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$$

HD & Giải

Hai đường thẳng d và d' cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau đối với t và t' có nghiệm:

$$\begin{cases} 1 + at = 1 - t' & (1) \\ t = 2 + 2t' & (2) \\ -1 + 2t = 3 - t' & (3) \end{cases} \quad \text{Từ (2) và (3) ta suy ra: } \begin{cases} t = 2 \\ t' = 0 \end{cases} \quad \text{thay vào (1), ta được: } 1 + 2a = 1 \Leftrightarrow a = 0$$

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau khi và chỉ khi $a = 0$.

Vấn đề 3. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng
Phương pháp:

Cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, cho mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát $Ax + By + Cz + D = 0$.

Gọi $\vec{n} = (A; B; C)$ là VTPT của $\text{mp}(\alpha)$. Để xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và $\text{mp}(\alpha)$ ta có các cách:

Cách 1. Xét tính vô hướng $\vec{n} \cdot \vec{a}$ và thay tọa độ M_0 vào phương trình của (α) để kiểm tra, ta có các trường hợp:

♦ Trường hợp 1. $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \\ M_0 \notin (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow d \text{ song song với } \text{mp}(\alpha)$

♦ Trường hợp 2. $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \\ M_0 \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow d \text{ nằm trong } \text{mp}(\alpha)$

♦ Trường hợp 3. $\vec{n} \cdot \vec{a} \neq 0 \Leftrightarrow d \text{ cắt } \text{mp}(\alpha)$

♦ Trường hợp 4. $\vec{n} = k\vec{a} \Leftrightarrow d \text{ vuông góc } \text{mp}(\alpha)$

Cách 2. Viết phương trình tham số của đường thẳng d : $\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$

Thay x, y, z ở phương trình tham số trên vào phương trình tổng quát của $\text{mp}(\alpha)$: $Ax + By + Cz + D = 0$, ta được: $A(x_0 + a_1 t) + B(y_0 + a_2 t) + C(z_0 + a_3 t) + D = 0$ hay $mt + n = 0$ (1)

Xét số nghiệm t của phương trình (1), ta có các trường hợp sau:

♦ Trường hợp 1. Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow d$ song song với $\text{mp}(\alpha)$

♦ Trường hợp 2. (1) có một nghiệm $t = t_0 \Leftrightarrow d$ cắt $\text{mp}(\alpha)$ tại một điểm $M(x_0 + a_1 t_0; y_0 + a_2 t_0; z_0 + a_3 t_0)$

♦ Trường hợp 3. Phương trình (1) vô số nghiệm $\Leftrightarrow d$ nằm trong $\text{mp}(\alpha)$

♦ Trường hợp 4. $(A; B; C) = k(a_1; a_2; a_3) \Leftrightarrow d$ vuông góc $\text{mp}(\alpha)$

Bài 12. Trong không gian $Oxyz$. Xét vị trí tương đối của đường thẳng d : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}$ lần lượt với các mặt

phẳng sau:

a) $(\alpha_1): x + y + z + 2 = 0$

b) $(\alpha_2): 4x + 8y + 2z - 7 = 0$

c) $(\alpha_3): x - y + 2z + 5 = 0$

d) $(\alpha_4): 2x - 2y + 4z - 10 = 0$

HD & Giải

Ta có đường thẳng d đi qua $M_0(1; 2; 3)$ và có VTCP là $\vec{a} = (2; 4; 1)$

a) Mặt phẳng (α_1) có VTPT $\vec{n}_1 = (1; 1; 1)$. Ta có: $\vec{n}_1 \cdot \vec{a} = 2 + 4 + 1 = 7 \neq 0$. Vậy đường thẳng d cắt $\text{mp}(\alpha_1)$.

b) Mặt phẳng (α_2) có VTPT $\vec{n}_2 = (4; 8; 2)$. Ta có: $\vec{n}_2 = (4; 8; 2) = 2(2; 4; 1) = 2\vec{a}$.

Vậy đường thẳng d vuông góc với $\text{mp}(\alpha_2)$.

c) Mặt phẳng (α_3) có VTPT $\vec{n}_3 = (1; -1; 2)$. Ta có: $\begin{cases} \vec{n}_3 \cdot \vec{a} = 2 - 4 + 2 = 0 \\ M_0 \notin (\alpha_3) \text{ (Vì } 1 - 2 + 2 \cdot 3 = 5 \neq 0) \end{cases}$

Vậy đường thẳng d song song với $\text{mp}(\alpha_3)$.

d) Mặt phẳng (α_4) có VTPT $\vec{n}_4 = (2; -2; 4)$. Ta có:
$$\begin{cases} \vec{n}_4 \cdot \vec{a} = 4 - 8 + 4 = 0 \\ M_0 \in (\alpha_4) \text{ (Vì } 2.1 - 2.2 + 4.3 - 10 = 0) \end{cases}$$

Vậy đường thẳng d nằm trong mp (α_4) .

Bài 13. Trong không gian $Oxyz$. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + z - 1 = 0$ Chứng minh rằng d cắt (α) và tìm tọa độ giao điểm.

HD & Giải

Phương trình tham số của đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt mp (α) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm: $d: \begin{cases} x = 1 + 2t & (1) \\ y = -1 + t & (2) \\ z = -t & (3) \\ x + 2y + z - 1 = 0 & (4) \end{cases} (I)$

Thay (1), (2) và (3) vào (4) ta được: $(1 + 2t) + 2(-1 + t) + (-t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 3t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$

Với $t = \frac{2}{3}$ suy ra d cắt mp (α) tại điểm $M\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

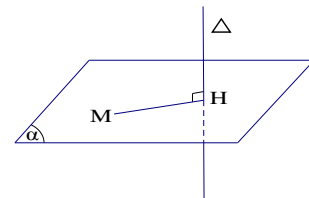
Vấn đề 4. Tính khoảng cách

Phương pháp:

Loại 1. Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ đến đường thẳng $\Delta: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$

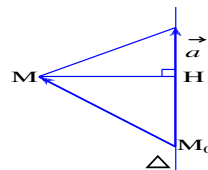
Cách 1.

- Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa điểm M và vuông góc với Δ
- Tìm giao điểm H của Δ và (α)
- Tính $d(M, \Delta) = MH$



Cách 2.

- Lấy điểm $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Delta$ ♦ Tính $\vec{a} \wedge \overrightarrow{M_0M}$
- $d(M, \Delta) = \frac{|\vec{a} \wedge \overrightarrow{M_0M}|}{|\vec{a}|}$

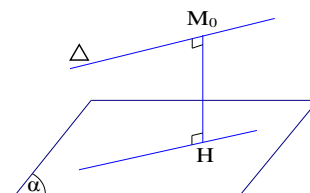


Loại 2. Khoảng cách giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ và mặt phẳng $(\alpha):$

$Ax + By + Cz + D = 0$ song song với Δ

- Lấy $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Delta$

- Tính $d(\Delta, (\alpha)) = d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$



Loại 3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

$$\Delta: \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3} \text{ và } \Delta': \frac{x-x'_0}{a'_1} = \frac{y-y'_0}{a'_2} = \frac{z-z'_0}{a'_3}$$

Cách 1.

♦ Lập phương trình mp(α) chứa đường thẳng Δ và song song với Δ' ta được (α): $Ax + By + Cz + D = 0$

♦ Lấy điểm $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0) \in \Delta'$

♦ $d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha)) = \frac{|Ax'_0 + By'_0 + Cz'_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Cách 2.

♦ Xác định $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Delta$ và $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0) \in \Delta'$

♦ Xác định hai vector $\vec{a}, \vec{a}'$ là hai vector chỉ phương của Δ và Δ'

♦ Tính $\vec{a} \wedge \vec{a}'$ và $(\vec{a} \wedge \vec{a}') \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0}$

♦ $d(\Delta, \Delta') = \frac{|(\vec{a} \wedge \vec{a}') \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0}|}{|\vec{a} \wedge \vec{a}'|}$

Bài 14. Trong không gian $Oxyz$. Tính khoảng cách từ điểm $A(1; 2; 1)$ đến đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$$

HD và Giải

Cách 1.

Gọi (α) là mặt phẳng qua điểm $A(1; 2; 1)$ và vuông góc với Δ . Ta có: $\vec{n}_\alpha = \vec{a}_\Delta = (1; 2; -2)$

Vậy phương trình của mp(α): $1(x-1) + 2(y-2) - 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2z - 3 = 0$

Phương trình tham số của Δ :
$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

Gọi H là giao điểm của Δ và mp(α)

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = -2 + t & (1) \\ y = 1 + 2t & (2) \\ z = -1 - 2t & (3) \\ x + 2y - 2z - 3 = 0 & (4) \end{cases}$$

Thay (1), (2) và (3) vào (4) ta được: $(-2 + t) + 2(1 + 2t) - 2(-1 - 2t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 9t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{9}$

Vậy (α) cắt Δ tại $H\left(-\frac{17}{9}; \frac{11}{9}; -\frac{11}{9}\right)$

Khi đó: $d(A, \Delta) = AH = \sqrt{\left(-\frac{17}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{11}{9} - 2\right)^2 + \left(-\frac{11}{9} - 1\right)^2} = \frac{15\sqrt{5}}{9} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$

Cách 2.

Đường thẳng Δ đi qua $M_0(-2; 1; -1)$ và có VTCP $\vec{a} = (1; 2; -2)$

Ta có: $\overrightarrow{M_0 A} = (3; 1; 2)$; $\overrightarrow{M_0 A} \wedge \vec{a} = (-6; 8; 5)$

$$\text{Khi đó: } d(A, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{M_0 A} \wedge \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{36+64+25}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

Bài 15. Trong không gian $Oxyz$.

a) Tính khoảng cách từ điểm $M(1; -1; 1)$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

b) Tính khoảng cách từ điểm $N(2; 3; 1)$ đến đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$

HD & Giải

a) Đường thẳng Δ đi qua $M_0(2; 0; 1)$ và có VTCP $\vec{a} = (1; 3; 1)$

Ta có: $\overrightarrow{M_0 M} = (-1; -1; 0)$; $\overrightarrow{M_0 M} \wedge \vec{a} = (1; -1; 2)$

$$\text{Khi đó: } d(M, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{M_0 M} \wedge \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{1+1+4}}{\sqrt{1+9+1}} = \frac{\sqrt{66}}{11}$$

b) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua điểm $N(2; 3; 1)$ và vuông góc với Δ . mp (α) có VTPT $\vec{n} = (1; 2; -2)$

Vậy (α) có phương trình: $x - 2 + 2(y - 3) - 2(z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2z - 6 = 0$

Gọi $H = \Delta \cap (\alpha) \Rightarrow H\left(-\frac{14}{9}; \frac{17}{9}; -\frac{17}{9}\right)$

Vậy $d(N, \Delta) = NH = \sqrt{\left(\frac{32}{9}\right)^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{26}{9}\right)^2} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$

Bài 16. Trong không gian $Oxyz$.

a) Tính khoảng cách từ điểm $A(1; 0; 1)$ đến đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$

b) Tính khoảng cách từ điểm $N(2; 3; -1)$ đến đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0\left(-\frac{1}{2}; 0; -\frac{3}{4}\right)$ và có VTCP $\vec{a} = (-4; 2; -1)$

HD & Giải

a) Đường thẳng Δ đi qua $M_0(1; 0; 0)$ và có VTCP $\vec{a} = (2; 2; 1)$

Ta có: $\overrightarrow{M_0 A} = (0; 0; 1)$; $\overrightarrow{M_0 A} \wedge \vec{a} = (2; -2; 0)$

$$\text{Khi đó: } d(A, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{M_0 A} \wedge \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{4+4+0}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

b) Đường thẳng Δ đi qua $N(2; 3; -1)$ và có VTCP $\vec{a} = (-4; 2; -1)$

Ta có: $\overrightarrow{M_0 N} = \left(\frac{5}{2}; 3; -\frac{1}{4}\right)$; $\overrightarrow{M_0 N} \wedge \vec{a} = \left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{2}; -17\right)$

$$\text{Khi đó: } d(N, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{M_0 N} \wedge \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2 + (-17)^2}}{\sqrt{16+4+1}} = \frac{\sqrt{2870}}{14}$$

Bài 17. Trong không gian $Oxyz$. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM

HD **Giải**

Điểm $M \in Ox \Rightarrow M(a; 0; 0)$.

Đường thẳng Δ đi qua $M_0(0; 1; 0)$ và có VTCP $\vec{a} = (2; 1; 2)$

Ta có: $\overrightarrow{M_0M} = (a; -1; 0)$; $\overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{a} = (-2; -2a; a+2)$.

$$\text{Khi đó: } d(M, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{5a^2 + 4a + 8}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{\sqrt{5a^2 + 4a + 8}}{3}$$

$$\text{Mặt khác: } d(M, \Delta) = OM \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5a^2 + 4a + 8}}{3} = |a| \Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Vậy có hai điểm M cần tìm: $M_1(-1; 0; 0)$ hoặc $M_2(2; 0; 0)$

Bài 18. Trong không gian $Oxyz$. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 3+t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ và $\Delta_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1.

HD **Giải**

Điểm $M \in \Delta_1 \Rightarrow M(3+t; t; t)$

Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $A(2; 1; 0)$ và có VTCP $\vec{a} = (2; 1; 2)$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (t+1; t-1; t)$; $\overrightarrow{AM} \wedge \vec{a} = (t-2; -2; -3-t)$

$$\text{Khi đó: } d(M, \Delta_2) = \frac{|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{2t^2 - 10t + 17}}{3}$$

$$\text{Theo giả thiết: } d(M, \Delta_2) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2t^2 - 10t + 17}}{3} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases}$$

Vậy có hai điểm M cần tìm: $M_1(4; 1; 1)$ hoặc $M_2(7; 4; 4)$

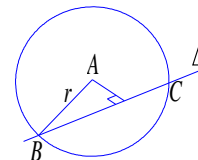
Bài 19. Trong không gian $Oxyz$. Cho điểm $A(0; 0; -2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ . Viết phương trình mặt cầu tâm A , cắt Δ tại hai điểm B, C sao cho $AB = 8$.

HD **Giải**

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-2; 2; -3)$ và có VTCP $\vec{a} = (2; 3; 2)$

Ta có: $\overrightarrow{MA} = (2; -2; 1)$; $\overrightarrow{MA} \wedge \vec{a} = (-7; -2; 10)$

$$\text{Khi đó: } d(A, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{49 + 4 + 100}}{\sqrt{4+9+4}} = 3$$



Gọi r là bán kính mặt cầu (S) cần tìm. Ta có: $r^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + d^2(A, \Delta) = 16 + 9 = 25$

Vậy mc(S) có tâm $A(0;0;-2)$ và bán kính $r=5$ có phương trình: $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$

Bài 20. Trong không gian $Oxyz$. Cho mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$$

a) Hãy chứng tỏ Δ song song với (α)

b) Tính khoảng cách giữa Δ và (α)

HD & Giải

a) Ta có: VTPT mp $(\alpha): \vec{n}_\alpha = (3; -2; -1)$, đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1; 7; 3)$ và có VTCP $\vec{a} = (2; 1; 4)$

$$\text{Mặt khác ta có: } \begin{cases} \vec{n}_\alpha \cdot \vec{a} = 6 - 2 - 4 = 0 \\ M_0 \notin (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \Delta // (\alpha)$$

$$\text{b) } d(\Delta, (\alpha)) = d(M_0, (\alpha)) = \frac{|3 \cdot 1 - 2 \cdot 7 - 1 \cdot 3 + 5|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{9\sqrt{14}}{14}$$

Bài 21. Trong không gian $Oxyz$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 3 = 0$

HD & Giải

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(-3; -1; -1)$ và có VTCP $\vec{a} = (2; 3; 2)$;

mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n}_\alpha = (2; -2; 1)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \vec{n}_\alpha \cdot \vec{a} = 4 - 6 + 2 = 0 \\ M_0 \notin (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \Delta // (\alpha)$$

$$\text{Do đó: } d(\Delta, (\alpha)) = d(M_0, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot (-3) - 2 \cdot (-1) - 1 + 3|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{2}{3}$$

Bài 22. Trong không gian $Oxyz$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$ và

$$\Delta': \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$$

HD & Giải

Cách 1.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa Δ và song song với Δ' . Hai vector có giá song song hoặc nằm trong (α) là

$$\vec{a} = (2; -; 0) \text{ và } \vec{a}' = (-1; 1; 1). \text{ Suy ta } (\alpha) \text{ có VTPT } \vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}' = (-1; -2; 1)$$

Mặt phẳng (α) chứa Δ nên đi qua điểm $M_0(1; -1; 1) \in \Delta$.

$$\text{Vậy phương trình mp } (\alpha): -(x-1) - 2(y+1) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z + 2 = 0$$

Đường thẳng Δ' đi qua điểm $M'_0(2; -2; 3)$

$$\text{Vậy } d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha)) = \frac{|2 - 4 - 3 + 2|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Cách 2.

Đường thẳng Δ và Δ' lần lượt đi qua $M_0(1; -1; 1)$, $M'_0(2; -2; 3)$ và có VTCP $\vec{a} = (2; -1; 0)$, $\vec{a}' = (-1; 1; 1)$

Ta có: $\vec{a} \wedge \vec{a}' = (-1; -2; 1)$; $\overrightarrow{M_0M'_0} = (1; -1; 2)$ và $(\vec{a} \wedge \vec{a}') \cdot \overrightarrow{M_0M'_0} = -1 + 2 + 2 = 3$

$$\text{Vậy: } d(\Delta, \Delta') = \frac{\left| (\vec{a} \wedge \vec{a}') \cdot \overrightarrow{M_0M'_0} \right|}{\left| \vec{a} \wedge \vec{a}' \right|} = \frac{|3|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Bài 23. Trong không gian $Oxyz$. Cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$ và $\Delta': \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$

a) Xét vị trí tương đối giữa Δ và Δ'

b) Tính khoảng cách giữa Δ và Δ'

HD & Giải

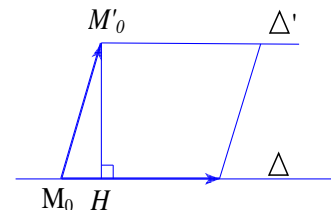
a) Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(1; -3; 4)$ và có VTCP $\vec{a} = (2; 1; -2)$

Đường thẳng Δ' đi qua điểm $M'_0(-2; 1; -1)$ và có VTCP $\vec{a}' = (-4; -2; 4)$

Ta có: $\begin{cases} \vec{a}' = 2\vec{a} \\ M_0 \notin \Delta' \end{cases} \Rightarrow \Delta // \Delta'$

b) Ta có: $\overrightarrow{M_0M'_0} = (-3; 4; -5)$; $\vec{a} = (2; 1; -2) \Rightarrow \overrightarrow{M_0M'_0} \wedge \vec{a} = (-3; -16; -11)$

$$\text{Vậy: } d(\Delta, \Delta') = \frac{\left| \overrightarrow{M_0M'_0} \wedge \vec{a} \right|}{\left| \vec{a} \right|} = \frac{\sqrt{9+256+121}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{\sqrt{386}}{3}$$



Bài 24. Trong không gian $Oxyz$. Cho điểm $A(1; 0; 0)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ

b) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng của A qua đường thẳng Δ

HD & Giải

a) **Cách 1.** H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ . Ta có: $\overrightarrow{AH} \perp \vec{a}_\Delta$

Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{a}_\Delta = (1; 2; 1)$. $H \in \Delta \Rightarrow H(2+t; 1+2t; t)$

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (1+t; 1+2t; t)$. $\overrightarrow{AH} \perp \vec{a}_\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{a}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 1+t+2(1+2t)+t=0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$. Vậy

$$H\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$$

Cách 2. Gọi $mp(\alpha)$ qua điểm A và vuông góc với đường thẳng Δ .

$mp(\alpha): \begin{cases} A(1; 0; 0) \\ VTPT \vec{n} = \vec{a}_\Delta = (1; 2; 1) \end{cases}$ có phương trình: $x + 2y + z - 1 = 0$

H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ nên $H = \Delta \cap (\alpha)$. Vậy $H\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$

b) A' đối xứng của A qua đường thẳng $\Delta \Rightarrow H$ là trung điểm của AA'

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2 \\ y_{A'} = 0 \\ z_{A'} = -1 \end{cases} \text{ . Vậy } A'(2; 0; -1)$$

Bài 25. Trong không gian $Oxyz$. Cho điểm $M(1; 4; 2)$ và đường thẳng $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$

- Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α)
- Tìm tọa độ điểm M' đối xứng của M qua mặt phẳng (α)
- Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α)

HD & Giải

a) Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và vuông góc với mặt phẳng (α) .

Mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = (1; 1; 1)$. Phương trình tham số đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$

H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α) nên $H = \Delta \cap (\alpha)$

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + t \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$. Giải hệ ta được $t = -2$. Vậy

$$H(-1; 2; 0)$$

b) M' đối xứng của M qua mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow H$ là trung điểm của MM'

Ta có: $\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = -3 \\ y_{M'} = 0 \\ z_{M'} = -2 \end{cases}$. Vậy $M'(-3; 0; -2)$

$$c) d(M, (\alpha)) = MH = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-4)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{3}$$

Bài 26. Trong không gian $Oxyz$. Cho điểm $M(1; 2; 4)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. Tìm điểm H thuộc

đường thẳng Δ sao cho đoạn thẳng MH nhỏ nhất

HD & Giải

$H \in \Delta \Rightarrow H(1+t; 2+t; 1+2t)$. MH nhỏ nhất $\Leftrightarrow H$ là hình chiếu của M trên Δ

H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng Δ . Ta có: $\overrightarrow{MH} \perp \vec{a}_\Delta$

Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{a}_\Delta = (1; 1; 2)$.

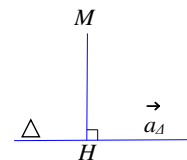
Ta có: $\overrightarrow{MH} = (t-1; t+1; 2t-3)$. $\overrightarrow{MH} \perp \vec{a}_\Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{a}_\Delta = 0 \Leftrightarrow t-1+t+1+2(2t-3) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Vậy $H(2; 3; 3)$

Cách khác: Gọi mp (α) qua điểm M và vuông góc với đường thẳng Δ .

mp $(\alpha): \begin{cases} M(1; 2; 4) \\ VTPT \vec{n} = \vec{a}_\Delta = (1; 1; 2) \end{cases}$ có phương trình: $x + y + 2z - 11 = 0$

H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ nên $H = \Delta \cap (\alpha)$.



$$\text{Tọa độ điểm H thỏa hệ: } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 1+2t \\ x+y+2z-11=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases} \text{ . Vậy } H(2;3;3)$$

Bài 27. Trong không gian $Oxyz$. Cho hai điểm $A(1;2;3), B(-1;2;-3)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = -1+t \end{cases}$. Tìm trên đường thẳng Δ điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

HD & Giải

Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(0;2;0)$

Xét $M \in \Delta$. Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MI}| = 2MI$

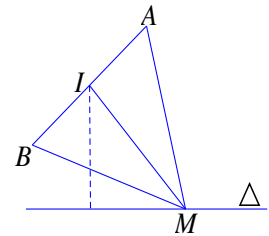
Như vậy: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên Δ

Gọi $\text{mp}(\alpha)$ qua điểm I và vuông góc với đường thẳng Δ .

$\text{mp}(\alpha): \begin{cases} I(0;2;0) \\ \text{VTPT } \vec{n} = \vec{a}_{\Delta} = (1;1;1) \end{cases}$ có phương trình: $x+y+z-2=0$

H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ nên $H = \Delta \cap (\alpha)$.

$$\text{Tọa độ điểm H thỏa hệ: } \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = -1+t \\ x+y+z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \text{ . Vậy } M(1;2;-1)$$



Bài 28. Trong không gian $Oxyz$.

- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M_0(1;-1;2)$ trên mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+12=0$
- Cho bốn điểm $A(4;1;4), B(3;3;1), C(1;5;5)$ và $D(1;1;1)$. Tìm tọa độ hình chiếu của D trên $\text{mp}(ABC)$
- Cho ba điểm $A(1;1;2), B(-2;1;-1), C(2;-2;-1)$. Tìm tọa độ hình chiếu của gốc O trên $\text{mp}(ABC)$

HD & Giải

a) Gọi Δ là đường thẳng qua $M_0(1;-1;2)$ và vuông góc với $\text{mp}(\alpha): 2x-y+2z+12=0$

$\text{mp}(\alpha)$ có VTPT $\vec{n}_{\alpha} = (2;-1;2)$. Vậy Δ qua M_0 và VTCP $\vec{a} = \vec{n}_{\alpha} = (2;-1;2)$ có phương trình tham số:

$$\Delta: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1-t \\ z = 2+2t \end{cases} \text{ . Gọi } M'_0(x;y;z) \text{ là hình chiếu của } M_0 \text{ trên } \text{mp}(\alpha) \text{ . Tọa độ của } M'_0 \text{ thỏa hệ phương trình:}$$

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1-t \\ z = 2+2t \\ 2x-y+2z+12=0 \end{cases} \Rightarrow t = -\frac{19}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{29}{9} \\ y = \frac{10}{9} \\ z = -\frac{20}{9} \end{cases} \text{ . Vậy } M'_0\left(-\frac{29}{9}; \frac{10}{9}; -\frac{20}{9}\right)$$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;2;-3), \overrightarrow{AC} = (-3;4;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (14;10;2) = 2(7;5;1)$

$\text{mp}(ABC)$ qua điểm A và có VTPT $\vec{n}_{ABC} = (7;5;1)$ có phương trình: $7x+5y+z-37=0$

Gọi Δ là đường thẳng qua $D(1;1;1)$ và vuông góc với mp(ABC): $7x + 5y + z - 37 = 0$

có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Gọi $D'(x; y; z)$ là hình chiếu của D trên mp(ABC).

$$\text{Tọa độ của } D' \text{ thỏa hệ phương trình: } \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + 5t \\ z = 1 + t \\ 7x + 5y + z - 37 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{81}{25} \\ y = \frac{13}{5} \\ z = \frac{33}{25} \end{cases}. \text{ Vậy } D' \left(\frac{81}{25}; \frac{13}{5}; \frac{33}{25} \right)$$

c) Giải tương tự câu b) $O' \left(\frac{3}{34}; \frac{2}{17}; -\frac{3}{34} \right)$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

- a) Đi qua điểm $M_0(5;4;1)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (2; -3; 1)$
- b) Đi qua hai điểm $A(1;2;3), B(5;4;4)$
- c) Đi qua điểm $C(2; -1; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 5 = 0$

d) Đi qua điểm $D(2;0;-3)$ và song song với đường thẳng $\Delta': \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$

Bài 2. Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình đường thẳng trong mỗi trường hợp sau:

- a) Đi qua điểm $A(2;0;-1)$ và có VTCP là $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$
- b) Đi qua điểm $B(3;5;2)$ và song song với trục Oy
- c) Đi qua hai điểm $M(2;3;-1)$ và $N(1;2;4)$
- d) Đi qua điểm $P(1;0;-1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + z + 9 = 0$
- e) Đi qua điểm $Q(-2;1;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): x + 2y - 2z + 1 = 0$

Bài 3. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình sau:

a) $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$ và $d': \frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-4}{2}$

b) $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 9 + 2t' \\ y = 8 + 2t' \\ z = 10 - 2t' \end{cases}$ c) $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \\ z = 5t \end{cases}$

d) $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 1 + 3t' \\ y = -2 + 2t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases}$ e) $d: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 4t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 9 + 2t' \\ y = 13 + 3t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$

f) $d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}$ g) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$

Bài 4. Trong không gian $Oxyz$. Tìm a để hai đường thẳng sau đây song song

$$d: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = at \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \text{và} \quad d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = a + 4t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$$

Bài 5. Trong không gian $Oxyz$. Tìm số giao điểm của đường thẳng d và mp(α) trong các trường hợp sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } d: \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{và } (\alpha): 3x + 5y - z - 2 = 0 & \quad \text{b) } d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{và } (\alpha): x + 3y + z + 1 = 0 \\ \text{c) } d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad \text{và } (\alpha): x + y + z - 4 = 0 & \quad \text{d) } d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{5} \quad \text{và } (\alpha): 2x + y + z - 8 = 0 \end{aligned}$$

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$. Tính khoảng cách từ điểm $A(2; 3; 1)$ đến đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$$

Bài 7. Trong không gian $Oxyz$. Tính khoảng cách từ điểm $M(1; 0; -3)$ đến đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

Bài 8. Trong không gian $Oxyz$. Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 3 = 0$ và đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{2}$$

a) Hãy chứng tỏ Δ song song với (α) b) Tính khoảng cách giữa Δ và (α)

Bài 9. Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng Δ và Δ' trong các trường hợp sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } \Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta': \begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = 3t' \end{cases} & \quad \text{b) } \Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 4 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta': \begin{cases} x = t' \\ y = 2 - 3t' \\ z = -3t' \end{cases} \\ \text{c) } \Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta': \begin{cases} x = 2 - 3t' \\ y = -2 + 3t' \\ z = 3 \end{cases} & \quad \text{d) } \Delta: \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{và} \quad \Delta': \begin{cases} x = -t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = -4 + 3t' \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 10. Trong không gian $Oxyz$. Cho điểm $M(2; -1; 1)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng Δ

b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng của M qua đường thẳng Δ

Bài 11. Trong không gian $Oxyz$. Cho điểm $M(1; -1; 2)$ và đường thẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 12 = 0$

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α)

b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng của M qua mặt phẳng (α)

Bài 12. Trong không gian $Oxyz$. Cho hai điểm $A(3; 1; 1), B(7; 3; 9)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z + 3 = 0$.

Tìm trên mp (α) điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 13. Trong không gian $Oxyz$.

a) Tìm tọa độ điểm đối xứng của $M_0(2; -3; 1)$ qua mặt phẳng $(\alpha): x + 3y - z + 2 = 0$

b) Tìm tọa độ điểm đối xứng của $A(0;0;1)$ qua mặt phẳng $(\alpha): 6x + 3y + 2z - 6 = 0$

c) Tìm tọa độ điểm đối xứng của $B(2;3;5)$ qua mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y + z - 17 = 0$

Kết quả:

Bài 1. a) $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$; c) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$; d) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$

Bài 2. a) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = -1 + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{5}$; b) $\begin{cases} x = 3 \\ y = 5 + t \\ z = 2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-5}$

d) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$; e) $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$

Bài 3. a) d và d' cắt nhau; b) d và d' song song; c) d và d' chéo nhau; d) d và d' chéo nhau
e) d và d' vuông góc với nhau; f) d và d' cắt nhau; d và d' song song.

Bài 4. Hai đường thẳng d và d' song song khi và chỉ khi $a = 2$

Bài 5. a) d và $\text{mp}(\alpha)$ có một điểm chung (d cắt (α)); b) d và $\text{mp}(\alpha)$ không có điểm chung ($d // (\alpha)$)

c) d và $\text{mp}(\alpha)$ có vô số điểm chung ($d \subset (\alpha)$); d) d và $\text{mp}(\alpha)$ có một điểm chung (d cắt (α))

Bài 6. $d(A, \Delta) = \frac{10\sqrt{2}}{3}$

Bài 7. $d(A, \Delta) = 2\sqrt{5}$

Bài 8. a) Ta có $\vec{n}_\alpha = (2; -2; 1)$, $\vec{a} = (2; 3; 2)$; $\vec{n}_\alpha \cdot \vec{a} = 4 - 6 + 2 = 0$ và $M_0(-3; -1; -1) \in \Delta, M_0 \notin (\alpha) \Rightarrow \Delta // (\alpha)$

b) $d(\Delta, (\alpha)) = d(M_0, (\alpha)) = \frac{2}{3}$

Bài 9. a) $d(\Delta, \Delta') = 2\sqrt{2}$; b) $d(\Delta, \Delta') = \frac{12}{\sqrt{110}}$; c) $d(\Delta, \Delta') = 2$; d) $d(\Delta, \Delta') = \frac{2\sqrt{110}}{55}$

Bài 10. a) $H\left(\frac{17}{9}; -\frac{13}{9}; \frac{8}{9}\right)$; b) $M'\left(\frac{16}{9}; -\frac{17}{9}; \frac{7}{9}\right)$

Bài 11. a) $H\left(-\frac{29}{9}; \frac{10}{9}; -\frac{20}{9}\right)$; b) $M'\left(-\frac{67}{9}; \frac{29}{9}; -\frac{58}{9}\right)$

Bài 12. $M(0; -3; 0)$

Bài 13. a) $M'\left(\frac{34}{11}; \frac{3}{11}; -\frac{1}{11}\right)$; b) $A'\left(\frac{48}{49}; \frac{24}{49}; \frac{65}{49}\right)$; c) $B'\left(\frac{12}{7}; \frac{18}{7}; \frac{34}{7}\right)$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. VECTƠ VÀ TỌA ĐỘ

1. Công thức :

1.1. Tọa độ của điểm : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{M} = (x; y; z)$

Tọa độ điểm đặc biệt:

* Điểm trên MP tọa độ: $M \in (Oxy) \Leftrightarrow M(x; y; 0), \quad N \in (Oyz) \Leftrightarrow N(0; y; z),$

$K \in (Oxz) \Leftrightarrow K(x; 0; z)$

* Điểm trên trục tọa độ : $M \in Ox \Leftrightarrow M(x; 0; 0), \quad N \in Oy \Leftrightarrow N(0; y; 0), \quad K \in Oz \Leftrightarrow K(0; 0; z)$

* M là trung điểm $AB \Rightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

* G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

* Cho $\triangle ABC$, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Gọi a, b, c là độ dài các cạnh. Khi đó ta có $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

1.2. Tọa độ của vectơ: $\vec{a} = a_1.\vec{i} + a_2.\vec{j} + a_3.\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

Tọa độ vectơ đặc biệt: $\vec{i} = (1; 0; 0), \quad \vec{j} = (0; 1; 0), \quad \vec{k} = (0; 0; 1)$ lần lượt là vectơ đơn vị đồng thời cũng là VTCP của trục Ox, Oy, Oz và là VTPT của các mặt phẳng $(Oyz), (Oxz), (Oxy)$

1.3. Phép toán vectơ: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3); \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$

* Cộng, trừ: $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3) \quad \blacklozenge \quad \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

* Nhân số với vectơ: $k.\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$

* Tích vô hướng: $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$

Ứng dụng: $\blacklozenge \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad \blacklozenge \quad AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$$\blacklozenge \quad \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

* Tích có hướng: $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; - \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$

Chú ý: $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases}$

1.4. Quan hệ vectơ: $\blacklozenge \quad \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases} \quad \blacklozenge \quad \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \vec{a} = k.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k.b_1 \\ a_2 = k.b_2 \\ a_3 = k.b_3 \end{cases}$

$\blacklozenge \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0 \quad \blacklozenge \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$

2. Các dạng toán

Dạng 1: Tìm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành

$\blacklozenge$ Chứng minh A, B, C không thẳng hàng

$\blacklozenge \quad ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Dạng 2: Chứng minh $ABCD$ là một tứ diện.

Viết phương trình mp(ABC) và chứng tỏ điểm $D \notin (ABC)$ (tọa độ điểm D không thỏa phương trình mp(ABC))

Dạng 3. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

II. MẶT PHẪNG

1. Tóm tắt lý thuyết

1.1. Vector pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng: Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ có giá vuông góc mp(α) gọi là VTPT của mp(α)

1.2. Phương trình: mp(α) qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ có phương trình dạng:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$$

Chú ý :

♦ Nếu mp(α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (2) thì mp(α) có 1 VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$

♦ Mặt phẳng đi qua $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ phương trình có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$)

♦ Phương trình các mặt phẳng tọa độ: $(Oyz): x = 0; (Oxz): y = 0; (Oxy): z = 0$

♦ Điều kiện để xác định vtpt của mặt phẳng:

① Dùng định nghĩa: $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với mp(α) $\Leftrightarrow \vec{n}$ là VTPT của mp(α)

② Nếu mp(α) song song hoặc chứa giá $\vec{a}, \vec{b}$ (không cùng phương) thì $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ là một VTPT của mp(α)

1.3. Vị trí tương đối của hai mp (α): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và (β): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

♦ $(\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 = k.D_2 \end{cases}$

♦ $(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 \neq k.D_2 \end{cases}$

♦ $(\alpha) \cap (\beta) = d \Leftrightarrow (A_1; B_1; C_1) \neq k(A_2; B_2; C_2)$

♦ $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

1.4. Khoảng cách từ $M(x_0; y_0; z_0)$ đến $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ là $d(M, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

1.5. Góc giữa hai mặt phẳng : $\cos(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}$

2. Các dạng toán

2.1. Lập phương trình mặt phẳng

Cách 1: (Xác định yếu tố: VTPT và điểm, như bảng dưới đây)

B1. Từ giả thiết, xác định các vector và các yếu tố khác (nếu cần)

B2. Xác định tọa độ VTPT và tọa độ một điểm của mặt phẳng

B3. Thay vào phương trình (1). Thu gọn và kết luận

Cách 2: (Xác định hệ số)

B1. Gọi PT mp đã cho có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0, (2)$

B2. Từ giả thiết, xác định 4 hệ số A, B, C, D (kiểm tra điều kiện, nếu có)

B3. Thay vào phương trình (2). Kết luận

Dạng	Tính chất của mp(α) (giả thiết cho)	Đi qua điểm	VTPT
1	mp(α) qua 3 điểm A, B, C	A, B, C	$\vec{n}_\alpha = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$
2	mp(α) là mặt phẳng trung trực đoạn AB	M là trung điểm AB	$\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{AB}$
3	mp(α) qua M và song song (β): $Ax + By + Cz + D = 0$	M	$\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = (A; B; C)$
4	mp(α) qua M và vuông góc đường thẳng (d)	M	$\vec{n}_\alpha = \vec{a}_d$
	mp(α) qua M và vuông góc đường thẳng AB	M	$\vec{n}_\alpha = \overrightarrow{AB}$

5	mp(α) qua A, B và song song (d)	A hoặc B	$\vec{n}_\alpha = [\vec{AB}, \vec{u}_d]$
	mp(α) qua A, B và song song CD	A hoặc B	$\vec{n}_\alpha = [\vec{AB}, \vec{CD}]$
	mp(α) chứa (d) và song song (d')	Lấy $M \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]$
	mp(α) chứa (d) và song song AB	Lấy $M \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{AB}]$
6	mp(α) qua 2 điểm M, N và vuông góc mp(β)	M hoặc N	$\vec{n}_\alpha = [\vec{MN}, \vec{n}_\beta]$
	mp(α) chứa (d) và vuông góc mp(β)	Lấy $M \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{n}_\beta]$
7	mp(α) qua điểm M và vuông góc 2 mp (β), (γ)	M	$\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma]$
8	mp(α) qua điểm M và song 2 đt $(d), (d')$	M	$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]$
9	mp(α) qua điểm M , vuông góc mp(β) và song đt (d)	M	$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{n}_\beta]$
10	mp(α) chứa (d) và đi qua $M \notin (d)$	M hoặc Lấy $N \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{MN}, \vec{u}_d]$

2.2. Tìm H là hình chiếu của M trên mp(α)

Cách 1. H là hình chiếu của M trên mp(α): $Ax + By + Cz + D = 0$

Ta có:
$$\begin{cases} H \in (\alpha) \\ \overrightarrow{MH}, \vec{n}_\alpha \text{ cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax_H + By_H + Cz_H + D = 0 \\ \frac{x_H - x_M}{A} = \frac{y_H - y_M}{B} = \frac{z_H - z_M}{C} \Rightarrow \text{tọa độ điểm } H. \end{cases}$$

Cách 2. Viết phương trình đường thẳng (d) qua M và vuông góc mp(α) $\Rightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình gồm phương trình của (d) và (α)

2.3. Tìm điểm M' đối xứng với M qua mp(α)

Tìm hình chiếu H của M trên mp(α) $\Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow$ Tọa độ điểm M'

III. ĐƯỜNG THẲNG

1. Tóm tắt lý thuyết

1.1. Vector chỉ phương (VTCP) của đường thẳng:

Định nghĩa: Vector $\vec{a} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng (d) gọi là VTCP của đường thẳng (d)

1.2. Phương trình: Đường thẳng d đi qua $M(x_o; y_o; z_o)$ và có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, có:

♦ Phương trình tham số:
$$\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_o + a_3 t \end{cases} \quad (1)$$

♦ Phương trình chính tắc:
$$\frac{x - x_o}{a_1} = \frac{y - y_o}{a_2} = \frac{z - z_o}{a_3}, (a_1, a_2, a_3 \neq 0) \quad (2)$$

Chú ý:

• Phương trình các trục tọa độ: $Ox: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} ; Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} ; Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

• Điều kiện để xác định VTCP của đường thẳng:

① Dùng định nghĩa: $\vec{u} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với $(d) \Leftrightarrow \vec{u}$ là VTCP của (d)

② Nếu (d) vuông góc giá $\vec{a}, \vec{b}$ (không cùng phương) thì $\vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ là một VTCP của (d)

1.3. Vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng : $(d): \begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases}$ và $(d'): \begin{cases} x = x'_o + a'_1 t' \\ y = y'_o + a'_2 t' \\ z = z'_o + a'_3 t' \end{cases}$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x_o + a_1 t = x'_o + a'_1 t' \\ y_o + a_2 t = y'_o + a'_2 t' \\ z_o + a_3 t = z'_o + a'_3 t' \end{cases} (*)$

- ♦ Nếu hệ (*) có nghiệm duy nhất thì d cắt d' tại một điểm
- ♦ Nếu hệ (*) có vô số nghiệm thì d trùng với d'
- ♦ Nếu hệ (*) vô nghiệm thì d và d' không có điểm chung

Khi đó:

- Nếu hai VTCP của d và d' cùng phương trình $d // d'$
- Nếu hai VTCP của d và d' không cùng phương trình d và d' chéo nhau.

1.4. Vị trí tương đối đường thẳng và mặt phẳng:

Cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases}$ và $mp(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Lập phương trình $A(x_o + a_1 t) + B(y_o + a_2 t) + C(z_o + a_3 t) + D = 0$ (*), (t là ẩn)

- (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow d // (\alpha)$
- (*) có đúng 1 nghiệm $t = t_0 \Leftrightarrow d \cap (\alpha) = M(x_o + a_1 t_0; y_o + a_2 t_0; z_o + a_3 t_0)$
- (*) vô số nghiệm $\Leftrightarrow d \subset (\alpha)$

2. Các dạng toán

2.1. Lập phương trình đường thẳng:

Phương pháp: (Xác định yếu tố: VTCP và điểm, như bảng dưới đây)

- B1) Từ giả thiết, xác định các vector và các yếu tố khác liên quan (nếu cần)
- B2) Xác định tọa độ VTCP và tọa độ một điểm của đường thẳng
- B3) Thay vào phương trình tham số hay phương trình chính tắc

Các dạng

Dạng	Tính chất của đường thẳng d (giả thiết cho)	Đi qua điểm	VTCP
1	Đường thẳng d đi qua A, B	A, B	$\vec{u}_d = \vec{AB}$
2	Đường thẳng d qua A và song song đt Δ	A	$\vec{u}_d = \vec{u}_\Delta$
3	Đường thẳng d qua A và vuông góc $mp(\alpha)$	A	$\vec{u}_d = \vec{n}_\alpha$
4	Đường thẳng d qua A và vuông góc 2 đt d_1, d_2	A	$\vec{u}_d = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}]$
5	Đường thẳng d qua A và song song $mp(\alpha), mp(\beta)$ (hay song song mp này và chứa trong mp còn lại)	A	$\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta]$
6	Đường thẳng d là giao tuyến của $mp(\alpha), mp(\beta)$	Lấy $I \in (\alpha) \cap (\beta)$	$\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta]$
7	Đường thẳng d qua A , vuông góc đường thẳng Δ và song song (hay chứa trong) $mp(\alpha)$	A	$\vec{u}_d = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_\alpha]$
8	Đường thẳng d qua A , vuông góc đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2	A	$\vec{u}_d = [\vec{u}_{d_1}, \vec{n}_\alpha]$ (Với $mp(\alpha)$ là mp qua A và d_2)
9	Đường thẳng d qua A , vuông góc và cắt đường thẳng Δ	A và B (Tìm B là h/chiếu của A lên Δ)	$\vec{u}_d = \vec{AB}$

10	Đường thẳng d là hình chiếu của đường thẳng Δ lên (α)	A' và B' (lần lượt là h/chiếu của A, B lên (α) ; lấy $A, B \in \Delta$)	$\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{A'B'}$
11	Đường thẳng d qua A và cắt 2 đường thẳng d_1, d_2	A	$\overrightarrow{u_d} = \left[\left[\overrightarrow{u_{d_1}}, \overrightarrow{AM} \right], \left[\overrightarrow{u_{d_2}}, \overrightarrow{AN} \right] \right]$ (Lấy $M \in d_1, N \in d_2$)

2.1. Tìm H là hình chiếu của M trên đường thẳng (d)

Cách 1. H là hình chiếu của M trên đường thẳng $(d) \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (d) \\ \overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{u_d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{tọa độ điểm } H \text{ thỏa mãn } (d) \\ \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình, tìm tọa độ điểm H .

Cách 2. Viết PT mp (α) qua M và vuông góc với $(d) \Rightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình gồm phương trình của (d) và (α) .

2.3. Tìm tọa độ điểm M' là đối xứng với M qua đường thẳng d :

Tìm hình chiếu H của M trên $(d) \Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow$ tọa độ điểm M'

IV. MẶT CẦU

1. Tóm tắt lý thuyết

1.1. Phương trình:

♦ Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ bán kính R có dạng: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ (1)

♦ Phương trình dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2) (với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$) là phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

1.2. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Cho $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ và $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Gọi $d = d(I, (P))$ là khoảng cách từ tâm I đến mp (α) :

- $d > R$: $(S) \cap (\alpha) = \emptyset$
- $d = R$: (α) tiếp xúc (S) tại H (H : tiếp điểm, (α) : tiếp diện)
- $d < R$: (α) cắt (S) theo đường tròn có tâm H là hình chiếu của I lên (α) và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

2. Các dạng toán

2.1. Lập phương trình mặt cầu:

Phương pháp lập phương trình mặt cầu:

Cách 1: (Xác định yếu tố: Tâm và bán kính, như bảng dưới đây)

B1) Từ giả thiết, xác định các vector và các yếu tố khác liên quan (nếu cần)

B2) Xác định tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu

B3) Thay vào PT (1).

Dạng	Tính chất của mặt cầu (giả thiết cho)	Tâm	Bán kính
1	Mặt cầu (S) tâm I đi qua A	I	$R = IA$
2	Mặt cầu (S) đường kính AB	I là trung điểm AB	$R = \frac{AB}{2}$
3	Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc mp (α)	I	$R = d(I, (\alpha))$
4	Mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc đường thẳng Δ	I	$R = d(I, \Delta)$

Cách 2 : (Xác định hệ số)

B1) Gọi mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, (2)

B2) Từ giả thiết lập hệ 4 phương trình gồm các ẩn a, b, c, d . Giải hệ đó, tìm a, b, c, d

B3) Thay vào phương trình (2)

Dạng 5: Mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ (hay đi qua 4 điểm A, B, C, D)

- Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2)
- $A, B, C, D \in (S) \Rightarrow$ tọa độ 3 điểm A, B, C, D thỏa mãn (2).
- Giải hệ tìm a, b, c, d

Dạng 6: Mặt cầu (S) đi qua 3 điểm A, B, C và tâm $I \in (\alpha)$

- Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2) $\Rightarrow$ tâm $I(a, b, c)$
- $A, B, C \in (S) \Rightarrow$ tọa độ 3 điểm A, B, C thỏa mãn PT(2) và tâm $I(a; b; c) \in (\alpha)$
- Giải hệ 4 phương trình trên tìm a, b, c, d

Dạng 7: Mặt cầu (S) đi qua 2 điểm A, B và tâm $I \in (d)$

Cách 1: Nếu đường thẳng (d) cho bởi phương trình chính tắc:

- Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2) $\Rightarrow$ tâm $I(a; b; c)$
- $A, B \in (S) \Rightarrow$ tọa độ điểm A, B thỏa mãn (2) và tâm $I(a; b; c) \in (d)$
- Giải hệ 4 phương trình trên tìm a, b, c, d

Cách 2: Nếu đường thẳng (d) cho bởi phương trình tham số

- $I \in (d) \Rightarrow I(x_0 + a_1t; y_0 + a_2t; z_0 + a_3t)$
- $A, B \in (S) \Leftrightarrow AI^2 = BI^2$. Ta được phương trình ẩn t , giải tìm t , tìm được tọa độ điểm I

2.2. Phương trình tiếp diện (α) của mặt cầu:

Dạng1: Mặt phẳng (α) tiếp xúc mặt cầu (S) tại $A \Rightarrow$ mp(α) qua A và có vtpt $\vec{n} = \overrightarrow{IA}$

Dạng 2: Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) và vuông góc đường thẳng Δ (có vtcp $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$)

- Mặt phẳng (α) vuông góc $\Delta \Rightarrow$ mp(α) nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm vtpt $\Rightarrow$ PT mp(α) có dạng: $a_1x + a_2y + a_3z + m = 0$ (m chưa biết)
- Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$

Dạng 3: Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) và song song với mp(β) (có vtpt $\vec{n} = (A; B; C)$)

- Mặt phẳng (α) song song (β) $\Rightarrow$ mp(α) nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm vtpt $\Rightarrow$ PT mp(α) có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ (D chưa biết)
- Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$. Tìm được D

Dạng 4: Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) và song song 2 đường thẳng (d_1), (d_2):

- Mặt phẳng (α) song song 2 đường thẳng (d_1) và (d_2) $\Rightarrow$ VTPT của mp(α) là $\vec{n} = [\overrightarrow{a_{d_1}}, \overrightarrow{a_{d_2}}]$
 $\Rightarrow$ PT mp(α) có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ (D chưa biết)
- Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$. Tìm được D

2.3. Tìm tiếp điểm H của mặt cầu (S) và mp(α) (Khi đó H là hình chiếu của tâm I trên mp(α))

Như dạng toán tìm hình chiếu của điểm lên mặt phẳng

2.4. Giao điểm của đường thẳng và mặt cầu:

$$\text{Cho đường thẳng } d: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases} \text{ (1) và mặt cầu } (S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (2)$$

- Thay phương trình đường thẳng d (1) vào phương trình mặt cầu (2), giải tìm t ,
- Thay t vào (1), tìm được tọa độ giao điểm

2.5. Tìm bán kính r và tâm H của đường tròn (C) (với (C) là thiết diện của mp(α) và mặt cầu (S))

- Bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(I, \alpha)}$ (với I là tâm và R là bán kính mặt cầu (S))
- Tìm tâm H là hình chiếu vuông góc của tâm I trên mp(α)

B. BÀI TẬPTrong không gian hệ tọa độ $Oxyz$

Bài	Nội dung	Kết quả
1	Cho hai điểm $A(1; -2; 1)$, $B(2; 1; 3)$ và $(P): x - y + 2z - 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB và tìm giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P)	♦ Ta có: $\overline{AB} = (1; 3; 2)$. Đường thẳng AB có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2}$. ♦ Gọi M là giao điểm cần tìm. Ta có: $M \in AB \Rightarrow M(1+t; -2+3t; 1+2t)$ và $M \in (P)$ nên $t = -1$. Vậy: $M(0; -5; -1)$
2	Cho hai điểm $A(2; 0; 0)$, $B(1; 1; -1)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB và phương trình mặt cầu tâm O , tiếp xúc với mp (P) .	♦ Gọi M là trung điểm của AB, ta có: $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Vì (P) là mặt phẳng trung trực của AB nên (P) đi qua M và có VTPT $\overline{AB} = (-1; 1; -1)$. $(P): 2x - 2y + 2z - 1 = 0$ ♦ Gọi (S) là mc cần viết phương trình. Ta có: $d(O, (P)) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. $(S): x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{12}$
3	Cho điểm $A(2; 1; -1)$; $B(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên (P) . Viết phương trình mặt phẳng chứa A, B và vuông góc với (P)	♦ Phương trình đường thẳng d qua A và vuông góc với (P) là: $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (P), ta có: $H \in d \Rightarrow H(2+t; 1+2t; -1-2t)$ và $H \in (P) \Rightarrow t = -1$. Vậy $H(1; -1; 1)$ ♦ Gọi (Q) là mp cần viết phương trình. Ta có $\overline{AB} = (-1; 1; 4)$ và VTPT của (P) là $\vec{n} = (1; 2; -2)$ Suy ra: $\overline{AB} \wedge \vec{n} = (-10; 2; -3)$. Mp$(Q)$ qua A và có VTPT là $\vec{n}_Q = (-10; 2; -3)$ có phương trình: $(Q): 10x - 2y + 3z - 15 = 0$
4	Cho mặt phẳng $(P): 6x + 3y - 2z - 1 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z - 11 = 0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C) . Tìm tọa độ tâm và bán kính của (C) .	♦ Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 1)$ và bán kính $R = 5$ Ta có: $d(I, (P)) = \frac{ 6 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1 }{\sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2}} = 3 < R$. Do đó (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C) ♦ Tâm của (C) là hình chiếu vuông góc H của I trên (P). Đường thẳng Δ qua I và vuông góc với (P) có phương trình: $\frac{x-3}{6} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-2}$. H là giao điểm của (P) và Δ. Vậy $H\left(\frac{3}{7}; \frac{5}{7}; \frac{13}{7}\right)$ và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = 4$
5	Cho điểm $A(1; 0; -1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với d . Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên d .	♦ Vector chỉ phương của d là $\vec{u} = (2; 2; -1)$ Mặt phẳng (P) cần viết phương trình là mặt phẳng qua A và nhận $\vec{u}$ làm vector pháp tuyến, nên $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ ♦ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d. $H = d \cap (P)$

		Tọa độ điểm H thỏa mãn hệ pt: $\begin{cases} 2x+2y-z-3=0 \\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1} \end{cases}$ Vậy: $H\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$
6	Cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z-1=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{3}$. Tìm giao điểm của d và (P). Viết phương trình mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P).	♦ Gọi M là giao điểm của d và (P). Tọa độ điểm M thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y-2z-1=0 \\ \frac{x-2}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{3} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; -3; \frac{3}{2}\right) \end{cases}$ ♦ Gọi (Q) là mặt phẳng cần viết phương trình Đường thẳng d qua điểm $A(2;0;-3)$ và có VTCP là $\vec{u}=(1;-2;3)$; mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n}=(2;1;-2)$ Mặt phẳng (Q) qua điểm A và có VTPT là $\vec{u} \wedge \vec{n}=(1;8;5)$ có phương trình: $x+8y+5z+13=0$
7	Cho điểm $A(1;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-1=0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng qua A và vuông góc với (P). Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho AM vuông góc với OA và độ dài đoạn AM bằng ba lần khoảng cách từ A đến (P).	♦ Gọi d là đường thẳng cần viết phương trình VTPT của mp(P) là $\vec{n}=(2;-2;1)$. Đường thẳng d qua A và có VTCP là $\vec{n}=(2;-2;1)$ có phương trình: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-2t, t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$ ♦ Gọi $M(a,b,c)$. Ta có: $M \in (P) \Leftrightarrow 2a-2b+c-1=0(1)$ $AM \perp OA \Leftrightarrow a-b=2(2)$. Thế (2) vào (1) ta được: $c=-3$ Ta lại có: $AM = \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2 + c^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2 + 9}$ và $d(A,(P))=1$ nên: $AM = 3d(A,(P)) \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ Vậy: $M(1;-1;-3)$
8	Cho điểm $M(-1;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+2z-3=0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng qua M và vuông góc với (P). Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm là gốc tọa độ và tiếp xúc với (P).	♦ Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n}=(1;2;2)$. Đường thẳng d qua M và có VTCP là $\vec{n}=(1;2;2)$ có phương trình: $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2+2t, t \in \mathbb{R} \\ z=1+2t \end{cases}$ ♦ Mặt cầu (S) có bán kính $R=d(O,(P))=1$. Phương trình mặt cầu (S) là: $x^2+y^2+z^2=1$
9	Cho điểm $A(-1;1;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ	♦ Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u}=(1;-2;1)$. Mặt phẳng (P) qua O và có VTPT là $\vec{u}=(1;-2;1)$ có phương trình: $x-2y+z=0$

	và vuông góc với d . Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho độ dài AM bằng $\sqrt{6}$	♦ Vì $M \in d \Rightarrow M(1+t; -2t; -1+t)$ $AM = \sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{(2+t)^2 + (-2t-1)^2 + (-1+t)^2} = \sqrt{6} \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = -1$ Vậy có hai điểm M thỏa YCBT là $M_1(1; 0; -1), M_2(0; 2; -2)$
10	Cho điểm $A(4; -1; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Tìm tọa độ điểm đối xứng của A qua d .	Gọi A' là đối xứng của A qua d và H là hình chiếu vuông góc của A trên d. Phương trình mp(P) qua A và vuông góc với d là: $2x - y + z - 12 = 0$. Tọa độ điểm $H(3; -2; 4)$ và $A'(2; -3; 5)$
11	Cho điểm $A(-1; 3; 2)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 5y + 4z - 36 = 0$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của A trên (P) . Viết phương trình mặt cầu tâm I và đi qua A .	♦ Do $AI \perp (P) \Rightarrow AI: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 5t \\ z = 2 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. I là giao điểm của đường thẳng AI và mp(P) $\Rightarrow I(1; -2; 6)$. ♦ Ta có: $AI = 3\sqrt{5}$. Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-6)^2 = 45$
12	Cho điểm $A(-1; -1; -2); B(0; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên (P) . Viết phương trình mặt phẳng đi qua A, B và vuông góc với (P)	♦ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (P). Đường thẳng Δ qua A và vuông góc với (P) có phương trình: $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$. $H = \Delta \cap (P) \Rightarrow H\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ ♦ Gọi (Q) là mặt phẳng cần viết phương trình Mặt phẳng (Q) qua A và có VTPT là $\vec{n}_Q = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{n}_P = (-1; 2; -1)$ có phương trình: $x - 2y + z + 1 = 0$
13	Cho điểm $A(-1; 3; -2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 5 = 0$. Tính khoảng cách từ A đến (P) . Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và song song với (P) .	♦ $d(A, (P)) = \frac{ (-1) - 2 \cdot 3 - 2(-2) + 5 }{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}$ ♦ Mặt phẳng (Q) qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình: $x - 2y - 2z + 3 = 0$
14	Cho điểm $A(3; 5; 0)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 3y - z - 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d qua A và vuông góc với (P) . Tìm tọa độ điểm đối xứng của A qua (P) .	♦ Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n} = (2; 3; -1)$. Đường thẳng d qua A và vuông góc với (P) có phương trình: $\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{-1}$ ♦ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (P). Suy ra: $H = d \cap (P) \Rightarrow H(1; 2; 1)$. A' là đối xứng của A qua (P) nên H là trung điểm của $AA' \Rightarrow A'(-1; -1; 2)$
15	Cho hai điểm $A(1; -1; 1), B(-1; 2; 3)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A , vuông góc với hai đường thẳng AB và Δ	Gọi d là đường thẳng cần viết phương trình Đường thẳng d qua A có VTCP là $\vec{u}_d = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}_\Delta = (7; 2; 4)$ có phương trình là: $\frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{4}$
16	Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ và điểm	♦ Phương trình mặt phẳng $(P): 3x + 2y - z - 14 = 0$ ♦ Điểm $M \in \Delta \Rightarrow M(6-3t; -1-2t; -2+t)$

	$A(1;7;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với Δ . Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho $AM = 2\sqrt{30}$	Ta có: $AM = 2\sqrt{30} \Leftrightarrow (5-3t)^2 + (-8-2t)^2 + (-5+t)^2 = 120$ $\Leftrightarrow 7t^2 - 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = -\frac{3}{7}$ Suy ra: $M(3; -3; -1)$ hoặc $M\left(\frac{51}{7}; -\frac{1}{7}; -\frac{17}{7}\right)$
17	Cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 11 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 8 = 0$. Chứng minh (P) tiếp xúc với (S) . Tìm tọa độ tiếp điểm của (P) và (S) .	♦ Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{14}$ Ta có: $d(I, (P)) = \frac{ 2 \cdot 1 + 3(-2) + 1 \cdot 1 - 11 }{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{14}} = R$. Do đó (P) tiếp xúc với (S). ♦ Gọi M là tiếp điểm của (P) và (S). Đường thẳng d qua I và vuông góc với (P) có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + t \end{cases}$ Khi đó $M = d \cap (P) \Rightarrow M(3; 1; 2)$
18	Cho $A(2; 2; 1), B(0; 2; 5)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 5 = 0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua A và B . Chứng minh rằng (P) tiếp xúc với mặt cầu có đường kính AB .	♦ Phương trình tham số của đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ♦ Mặt cầu (S) có đường kính AB nên có tâm $I(1; 2; 3)$ là trung điểm của AB và bán kính $R = IA = \sqrt{5}$ Ta có: $d(I, (P)) = \frac{ 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 5 }{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \sqrt{5} = R$. Vậy (P) tiếp xúc với mặt cầu có đường kính AB
19	Cho điểm $A(2; 1; 2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua O và A . Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A và đi qua O . Chứng minh Δ tiếp xúc với (S) .	♦ Phương trình đường thẳng $OA: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ ♦ Bán kính mặt cầu (S) là $R = OA = 3$. Phương trình mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$. Đường thẳng Δ qua điểm $B(1; 3; 0)$ và có VTCP là $\vec{u} = (2; 2; 1)$. Mặt khác: $\overrightarrow{BA} = (1; -2; 2) \Rightarrow \overrightarrow{BA} \wedge \vec{u} = (-6; 3; 6)$ $d(A, \Delta) = \frac{ \overrightarrow{BA} \wedge \vec{u} }{ \vec{u} } = \frac{\sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 6^2}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3 = R$ Vậy Δ tiếp xúc với (S)
20	Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ $d_2: \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 2 + 2s \\ z = -s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$. Chứng minh	♦ Xét hệ phương trình: $\begin{cases} t = 1 + 2s \\ 2t = 2 + 2s \\ 1 - t = -s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ s = 0 \end{cases} \Rightarrow d_1, d_2 \text{ cắt nhau}$ ♦ Đường thẳng d_1 có VTCP là $\vec{u}_1 = (1; 2; -1)$, đường thẳng d_2 có VTCP là $\vec{u}_2 = (2; 2; -1)$. Mặt phẳng (P) cần viết phương trình đi qua điểm $A(0; 0; 1) \in d_1$ và có VTPT

	d_1 và d_2 cắt nhau. Viết phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng d_1, d_2	là $\vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = (0; -1; -2)$ nên có phương trình: $y + 2z - 2 = 0$
21	Cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z = 0$. Đường thẳng Δ nằm trong (P) vuông góc với d tại giao điểm của d và (P) . Viết phương trình đường thẳng Δ .	♦ Gọi I là giao điểm của d và (P) . Ta có: $I(1; -2; 0)$ ♦ Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n} = (2; 1; -2)$, đường thẳng d có VTCP là $\vec{u} = (-1; -1; 1)$. Đường thẳng Δ qua điểm I và có VTCP là $\vec{u}_\Delta = \vec{n} \wedge \vec{u} = (-1; 0; -1)$ có phương trình: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
22	Cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 10 = 0$ và điểm $I(2; 1; 3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I cắt (P) theo một đường tròn có bán kính bằng 4.	Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) . Suy ra H là tâm của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) cần viết phương trình Ta có: $IH = d(I, (P)) = 3$, bán kính của mặt cầu (S) là $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Vậy $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$
23	Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1; -1; 2), B(2; -1; 0)$. Xác định tọa độ điểm M thuộc d sao cho tam giác AMB vuông tại M .	Do $M \in d \Rightarrow M(1+2t; -1-t; t)$. Ta có: $\vec{AM} = (2t; -t; t-2)$ và $\vec{BM} = (-1+2t; -1-t; t)$. Tam giác AMB vuông tại $M \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0 \Leftrightarrow t = 0$ hoặc $t = \frac{2}{3}$. Vậy: $M(1; -1; 0)$ hoặc $M(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3})$
24	Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2; 1; 0), B(-2; 3; 2)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d .	Gọi (S) là mặt cầu cần viết phương trình và I là tâm của mặt cầu. Do $I \in d \Rightarrow I(1+2t; t; -2t)$. Ta lại có: $A, B \in (S)$ nên $AI = BI \Leftrightarrow (2t-1)^2 + (t-1)^2 + 4t^2 = (2t+3)^2 + (t-3)^2 + (2t+2)^2$ $\Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(-1; -1; 2)$ và bán kính của (S) là $R = IA = \sqrt{17}$. Vậy $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 17$
25	Cho các điểm $A(0; 0; 3), M(1; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC có trọng tâm thuộc đường thẳng AM .	Ta có: $B \in Ox \Rightarrow B(b; 0; 0), C \in Oy \Rightarrow C(0; c; 0)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Suy ra: $G(\frac{b}{3}; \frac{c}{3}; 1)$ Đường thẳng AM có phương trình: $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$ Do $G \in AM$ nên $\frac{b}{3} = \frac{c}{6} = \frac{-2}{-3} \Rightarrow b = 2, c = 4$ Vậy $(P): \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$ hay $6x + 3y + 4z - 12 = 0$
26	Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ và điểm $I(0; 0; 3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I .	Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u} = (1; 2; 1)$. Gọi H là trung điểm của AB , ta có: $HI \perp AB$ và $H \in d \Rightarrow H(t-1; 2t; t+2). \vec{IH} = (t-1; 2t; t-1)$ $HI \perp AB \Leftrightarrow \vec{IH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow \vec{IH} = (-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{2}{3})$ Bán kính mặt cầu (S) là $R = \sqrt{2}IH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

		Vậy (S): $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{8}{3}$
27	Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng (P): $x + y - 2z + 5 = 0$ và điểm $A(1; -1; 2)$. Viết phương trình đường thẳng cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN .	Gọi Δ là đường thẳng cần viết phương trình. Ta có: $M \in d \Rightarrow M(2t-1; t; t+2)$. A là trung điểm của đoạn thẳng MN nên $N(3-2t; -2-t; 2-t)$. $N \in (P) \Rightarrow t=2 \Rightarrow M(3; 2; 4)$ Đường thẳng Δ đi qua A và M có phương trình: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$
28	Cho điểm $A(3; 1; 0)$ và mặt phẳng (P): $2x + 2y - z + 1 = 0$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P). Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc với (P). Xác định tọa độ hình chiếu của điểm A trên (P).	$d(A, (P)) = 3$ Mặt phẳng (Q): $2x + 2y - z - 8 = 0$ Tọa độ hình chiếu của điểm A trên (P) là $H(1; -1; 1)$
29	Cho ba điểm $A(0; 0; 3)$, $B(-1; -2; 1)$ và $C(-1; 0; 2)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC). Tính độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A	Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; -2; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; -1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (2; 1; -2)$ Mặt phẳng (ABC): $2x + y - 2z + 6 = 0$ Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}$. $BC = \sqrt{5}$. Gọi AH là đường cao của tam giác ABC thì $AH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$
30	Cho hai điểm $A(-1; 2; 3)$, $B(1; 0; -5)$ và mặt phẳng (P): $2x + y - 3z - 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho A, B, M thẳng hàng.	A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow M \in AB \Rightarrow M(-1+t; 2-t; 3-4t)$ Mặt khác: $M \in (P) \Rightarrow t=1$ Vậy: $M(0; 1; -1)$
31	Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{1}$. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1; 2; -3)$ và cắt d tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{26}$	Mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với d có phương trình: $4x - 3y + z + 5 = 0$. Gọi H là giao điểm của d và (P) $\Rightarrow H(-1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Gọi (S) là mặt cầu cần viết phương trình Bán kính của (S) là $R = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 5$ Vậy (S): $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$
32	Cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Ox .	Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d có phương trình: $2x + y - 2z + 2 = 0$. Gọi B là giao điểm của (P) và Ox . Ta có: $B \in Ox \Rightarrow B(b; 0; 0)$ và $B \in (P) \Rightarrow b = -1$. Vậy $B(-1; 0; 0)$ Đường thẳng Δ qua A, B có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 3t \end{cases}$
33	Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng (P): $2x - y + 2z = 0$.	Gọi I là tâm mặt cầu (S) cần viết phương trình. Ta có: $I \in \Delta \Rightarrow I(1+2t; 3+4t; t)$. Mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt

	Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng Δ , bán kính bằng 1 và tiếp xúc với mặt phẳng (P) .	phẳng $(P) \Leftrightarrow d(I, (P)) = R$ $\Leftrightarrow \frac{ 1(1+2t) - (3+4t) + 2t }{3} = 1 \Leftrightarrow t = 2 \text{ hoặc } t = -1$ Suy ra: $I(5; 11; 2)$ hoặc $I(-1; -1; -1)$ Vậy $(S): (x-5)^2 + (y-11)^2 + (z-2)^2 = 1$ hoặc $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$
34	Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Gọi I là giao điểm của Δ và (P) . Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MI vuông góc với Δ và $MI = 4\sqrt{14}$	Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1} \\ x+y+z-3=0 \end{cases} \Rightarrow I(1; 1; 1)$ Gọi $M(a; b; c)$ là điểm cần tìm. Ta có: $\begin{cases} M \in (P) \\ MI \perp \Delta \\ MI = 4\sqrt{14} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c-3=0 \\ a-2b-c-2=0 \\ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 224 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=9 \\ c=-11 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=-3 \\ b=-7 \\ c=13 \end{cases}$ Vậy: $M(5; 9; -11)$ hoặc $M(-3; -7; 13)$
35	Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{-2}$ và hai điểm $A(-2; 1; 1), B(-3; -1; 2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$	Điểm $M \in \Delta \Rightarrow M(-2; +t; 1+3t; -5-2t)$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; -2; 1), \overrightarrow{AM} = (t; 3t; -6-2t)$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = (-t-12; t+6; t)$ Ta có: $S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow (t+12)^2 + (t+6)^2 + t^2 = 180$ $\Leftrightarrow t = 0 \text{ hoặc } t = -12$ Vậy $M(-2; 1; -5)$ hoặc $M(-14; -35; 19)$
36	Cho hai điểm $A(2; 0; 1), B(0; -2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA = MB = 3$	Gọi $M(x; y; z)$. Ta có: $M \in (P)$ và $MA = MB = 3$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z + 4 = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9 \\ x^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z + 4 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \\ (x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 9 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y - 2 \\ z = 3y \\ 7y^2 - 11y + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0; 1; 3) \text{ hoặc } \left(-\frac{6}{7}; \frac{4}{7}; \frac{12}{7}\right)$ Vậy: $M(0; 1; 3)$ hoặc $M\left(-\frac{6}{7}; \frac{4}{7}; \frac{12}{7}\right)$

37	Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm $A(4; 4; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB), biết điểm B thuộc (S) và tam giác OAB đều.	Gọi (P) là mặt phẳng cần viết phương trình Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 2; 2)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$. Nhận thấy O, A thuộc (S). Tam giác OAB đều, có bán kính đường tròn ngoại tiếp $r = \frac{OA}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. $d(I, (P)) = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ Mặt phẳng (P) qua O có phương trình: $ax + by + cz = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 (*)$. $A \in (P) \Rightarrow 4a + 4b = 0 \Leftrightarrow b = -a$ Mặt khác: $d(I, (P)) = \frac{ 2(a+b+c) }{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{ 2c }{\sqrt{2a^2+c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $\Leftrightarrow 2a^2 + c^2 = 3c^2 \Leftrightarrow c = \pm a$ Theo $(*)$, phương trình của (P): $x - y + z = 0$ hoặc $x - y - z = 0$
38	Cho hai điểm $A(1; -2; 3), B(-1; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 4 = 0$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên (P). Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{AB}{6}$, có tâm thuộc đường thẳng AB và (S) tiếp xúc với (P).	♦ Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) $\Rightarrow H(-1; -4; 1)$ ♦ Gọi (S) là mặt cầu cần viết phương trình Ta có: $\overline{AB} = (-2; 2; -2)$, bán kính của (S) là $R = \frac{AB}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Phương trình đường thẳng AB: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + t \end{cases}$ Tâm của mặt cầu I thuộc $AB \Rightarrow I(1+t; -2-t; 3+t)$ Ta có: $d(I, (P)) = \frac{AB}{6} \Leftrightarrow \frac{ t+6 }{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t = -7 \end{cases}$ Với $t = -5 \Rightarrow I(-4; 3; -2)$. Mặt cầu có phương trình là $(S): (x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = \frac{1}{3}$ Với $t = -7 \Rightarrow I(-6; 5; -4)$. Mặt cầu có phương trình là $(S): (x+6)^2 + (y-5)^2 + (z+4)^2 = \frac{1}{3}$
39	Cho đường thẳng $d: \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P). Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho M cách đều gốc tọa độ O và mặt phẳng (P).	♦ Gọi (Q) là mặt phẳng cần viết phương trình Mặt phẳng (Q) đi qua $A(0; 1; 0) \in d$ có VTPT là $\overline{u_d} \wedge \overline{n_p} = (3; 6; 0)$ có phương trình: $x + 2y - 2 = 0$ ♦ Ta có: $M \in d \Rightarrow M(-2t; 1+t; t)$. $OM = d(M, (P))$ $\Leftrightarrow \sqrt{4t^2 + (t+1)^2 + t^2} = t+1 \Leftrightarrow 5t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$ Vậy: $M(0; 1; 0)$
40	Cho hai mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và $(Q): x - y + z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2.	Ta có VTPT của (P) và (Q) lần lượt là $\overline{n_p} = (1; 1; 1), \overline{n_q} = (1; -1; 1) \Rightarrow \overline{n_p} \wedge \overline{n_q} = (2; 0; -2)$ là VTPT của (R). Mặt phẳng $(R): x - z + D = 0$. Ta lại có: $d(O, (R)) = 2 \Leftrightarrow \frac{ D }{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow D = \pm 2\sqrt{2}$

		Vậy (R): $x - z \pm 2\sqrt{2} = 0$
41	Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ và}$ $\Delta_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}. \text{ Xác định tọa độ điểm } M \text{ thuộc } \Delta_1 \text{ sao cho khoảng cách từ } M \text{ đến } \Delta_2 \text{ bằng 1.}$	Ta có: $M \in \Delta_1 \Rightarrow M(3+t; t; t)$ Δ_2 qua điểm $A(2; 1; 0)$ và có VTCP là $\vec{u}_2 = (2; 1; 2)$ Do đó: $\vec{AM} = (t+1; t-1; t); \vec{u}_2 \wedge \vec{AM} = (2-t; 2; t-3)$ $d(M, \Delta_2) = \frac{ \vec{u}_2 \wedge \vec{AM} }{ \vec{u}_2 } = \frac{\sqrt{2t^2 - 10t + 17}}{3}$ Suy ra: $\frac{\sqrt{2t^2 - 10t + 17}}{3} = 1 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 4$ Vậy: $M(4; 1; 4)$ hoặc $M(7; 4; 4)$
42	Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM	Ta có: $M \in Ox \Rightarrow M(t; 0; 0)$. Đường thẳng Δ qua $A(0; 1; 0)$ có VTCP là $\vec{u} = (2; 1; 2)$. $\vec{AM} = (t; -1; 0)$ và $\vec{u} \wedge \vec{AM} = (2; 2t; -t-2)$. $d(M, \Delta) = \frac{ \vec{u} \wedge \vec{AM} }{ \vec{u} } = \frac{\sqrt{5t^2 + 4t + 8}}{3}$ Theo giả thuyết: $d(M, \Delta) = OM \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ hoặc } t = 2.$ Vậy: $M(-1; 0; 0)$ hoặc $M(2; 0; 0)$
43	Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + z = 0$. Gọi C là giao điểm của Δ và (P), M là điểm thuộc (P). Tính khoảng cách từ M đến (P), biết $MC = \sqrt{6}$	Đường thẳng Δ có VTCP là $\vec{u} = (2; 1; -1)$, mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n} = (1; -2; 1)$. Gọi H là hình chiếu của M trên (P), ta có: $\cos \widehat{HMC} = \left \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right$. Ta có: $d(M, (P)) = MH = MC \cos \widehat{HMC} = MC \cdot \left \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right $ $= \sqrt{6} \cdot \frac{ 2 - 2 - 1 }{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$
44	Cho điểm $A(0; 0; -2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến Δ. Viết phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B, C sao cho $BC = 8$	♦ Đường thẳng Δ qua $A(-2; 2; -3)$ có VTCP là $\vec{u} = (2; 3; 2)$ Ta có: $\vec{AM} = (2; -2; 1), \vec{u} \wedge \vec{AM} = (7; 2; -10)$ $d(A, \Delta) = \frac{ \vec{u} \wedge \vec{AM} }{ \vec{u} } = \frac{\sqrt{49 + 4 + 100}}{\sqrt{4 + 9 + 4}} = 3$ ♦ Gọi (S) là mặt cầu cần viết phương trình. Mặt cầu (S) có tâm $A(0; 0; -2)$ và bán kính $R = \sqrt{d^2(A, \Delta) + \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ Vậy $(S): x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$
45	Cho các mặt phẳng $(P_1): x + 2y + 3z + 4 = 0$ và $(P_2): 3x + 2y - z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm	(P_1) có VTPT là $\vec{n}_1 = (1; 2; 3)$; (P_2) có VTPT là $\vec{n}_2 = (3; 2; -1)$. $\vec{n} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = (4; -5; 2)$

	$A(1;1;1)$, vuông góc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2)	Mặt phẳng (P) qua A và có VTPT là $\vec{n} = (4; -5; 2)$ có phương trình: $4x - 5y + 2z - 1 = 0$
46	Cho tam giác ABC có $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$ và trọng tâm $G(0;2;-1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm C và vuông góc với mặt phẳng (ABC) .	G là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow C(-1;3;-4)$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;1;1)$, $\overrightarrow{AG} = (-1;1;-1)$. Mặt phẳng (ABC) có VTPT là $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AG} = (1;1;0)$. Phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
47	Cho các điểm $A(2;1;0)$, $B(1;2;2)$, $C(1;1;0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 20 = 0$. Xác định điểm D thuộc AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) .	Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;1;2)$. Phương trình đường thẳng AB : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$ $D \in AB \Rightarrow D(2-t; 1+t; 2t)$. Ta có: $\overrightarrow{CD} = (1-t; t; 2t)$, (P) có VTPT là $\vec{n} = (1;1;1)$ $CD // (P) \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow D\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$
48	Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ .	Gọi I là giao điểm của (P) và $\Delta \Rightarrow I(-3;1;1)$ (P) có VTPT là $\vec{n} = (1;2;-3)$, đường thẳng Δ có VTCP là $\vec{u} = (1;1;-1)$. Đường thẳng d qua điểm I và có VTCP là $\vec{v} = \vec{n} \wedge \vec{u} = (1;-2;-1)$ có phương trình: $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
49	Cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Chứng minh mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm và bán kính của đường tròn đó.	(S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 5$ $d(I, (P)) = \frac{ 2 - 4 - 3 - 4 }{3} = 3 < R$. Suy ra mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) . Gọi H, r lần lượt là tâm và bán kính của (C) . H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) nên $H(3;0;2)$ và bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = 4$
50	Cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}$, $\Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 và khoảng cách từ M đến (P) bằng nhau.	Ta có: $M \in \Delta_1 \Rightarrow M(-1+t; t; -9+6t)$. Δ_2 qua $A(1;3;-1)$ và có VTCP là $\vec{u}_2 = (2;1;-2)$. $\overrightarrow{MA} = (2-t; 3-t; 8-6t)$. Suy ra: $\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}_2 = (8t-14; 20-14t; t-4)$ $d(M, \Delta_2) = \frac{ \overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}_2 }{ \vec{u}_2 } = \sqrt{29t^2 - 88t + 68}$ $d(M, (P)) = \frac{ 11t - 20 }{3}$

		Khi đó: $\sqrt{29t^2 - 88t + 68} = \frac{ 11t - 20 }{3} \Leftrightarrow 35t^2 - 88t + 53 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = \frac{53}{35}$. Vậy: $M(0; 1; -3)$ hoặc $M\left(\frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35}\right)$
51	Cho $I(-1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 4x + y - z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) và tìm tọa độ tiếp điểm.	Mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2$ Tiếp điểm là $M\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right)$
52	Cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 9 = 0$. Chứng minh rằng (P) cắt (S) . Khi đó tìm tâm và bán kính của đường tròn thiết diện của (P) và (S) .	Mặt cầu (S) có tâm $I(3; -2; 1)$ và bán kính $R = 10$. $d(I, (P)) = 6 < R$ suy ra (P) cắt (S). Vậy thiết diện có tâm $J(-1; 2; 3)$ và bán kính $r = 8$
53	Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z + 170 = 0$ và song song với hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = -13 + 2t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = -7 + 3t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = 8 \end{cases}$	Mặt phẳng (P) có VTPT là $\vec{n} = \vec{u}_d \wedge \vec{u}_{d'} = (4; 6; 5)$ và có phương trình $4x + 6y + 5z + D = 0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(5; -1; -13)$ và bán kính $R = 5$. (P) tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow d(I, (P)) = R \Rightarrow D = 51 \pm 5\sqrt{77}$ Vậy: $(P): 4x + 6y + 5z + 51 \pm 5\sqrt{77} = 0$
54	Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxz) và cắt hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -4 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 1 - 2t' \\ y = -3 + t' \\ z = 4 - 5t' \end{cases}$	Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxz) có VTCP là $\vec{j} = (0; 1; 0)$. Gọi $M(t; -4+t; 3-t)$ và $M'(1-2t'; -3+t'; 4-5t')$ lần lượt là giao điểm của Δ với d và d'. Ta có: $\overline{MM'} = k\vec{j}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2t'-t=0 \\ 1+t'-t=k \\ 1-5t'+t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{3}{7} \\ t'=\frac{2}{7} \end{cases} \cdot \text{Điểm } M\left(\frac{3}{7}; -\frac{25}{7}; \frac{18}{7}\right).$ Vậy $\Delta: \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = -\frac{25}{7} + s, s \in \mathbb{R} \\ z = \frac{18}{7} \end{cases}$
55	a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm $K(1; -1; 2)$ trên mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 11 = 0$ b) Cho điểm $M(2; 1; 0)$ và mặt phẳng $(Q): x + 3y - z - 27 = 0$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (Q).	a) $H(-3; 1; -2)$ b) $M'(6; 13; -4)$ c) $A'(-3; 2; 1)$

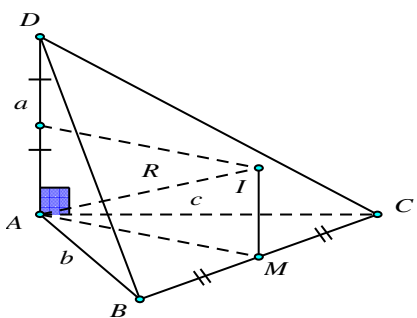
	c) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm $A(1; -2; -5)$ qua đường thẳng Δ có phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases}$	
56	Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad d': \begin{cases} x = t' \\ y = 1 + t' \\ z = -3 + 2t' \end{cases}$ Chứng minh d và d' cùng thuộc một mặt phẳng. Viết phương trình mặt phẳng đó.	♦ d và d' cắt nhau tại $M(2; 3; 1)$. Suy ra d và d' cùng thuộc một mặt phẳng. ♦ Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; 3; 1)$ và có VTPT là $\vec{n} = \vec{u}_d \wedge \vec{u}_{d'} = (6; -8; 1)$ có phương trình: $6x - 8y + z + 11 = 0$
57	Cho các điểm $A(3; -2; -2), B(3; 2; 0), C(0; 2; 1)$ và $D(-1; 1; 2)$ a) Viết phương trình mp(BCD). Suy ra $ABCD$ là một tứ diện b) Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với mp(BCD) c) Tìm tọa độ tiếp điểm H của (S) và mp(BCD).	a) Phương trình mp(BCD): $x + 2y + 3z - 7 = 0$ và $A \notin (BCD) \Rightarrow ABCD$ là một tứ diện b) Bán kính mặt cầu (S) là $R = d(A, (BCD)) = \sqrt{14}$ Mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 14$ c) Tiếp điểm là $H(4; 0; 1)$
58	Cho hai điểm $A(3; 2; 1), B\left(-\frac{7}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{11}{3}\right)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$. Chứng minh rằng mặt phẳng trung trực của đoạn AB tiếp xúc với mặt cầu (S), xác định tọa độ của tiếp điểm.	Phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB là: $2x + 2y - z - 9 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 2$. $d(I, (P)) = 2$ suy ra trung trực của đoạn AB tiếp xúc với mặt cầu (S). Tọa độ tiếp điểm $H\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{11}{3}\right)$
59	Cho điểm $M(1; -2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 7 = 0$. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (P). Viết phương trình mặt cầu có đường kính MM'	Điểm $M'\left(\frac{11}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{13}{3}\right)$ Mặt cầu $(S): \left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$
60	Cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm của mặt cầu (S) và vuông góc với (P). Xác định tọa độ giao điểm của d và (P).	Đường thẳng d đi qua tâm $I(5; 2; 2)$ của mặt cầu (S) và nhận VTPT $\vec{n} = (2; 2; -1)$ của (P) làm VTCP có phương trình: $\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Tọa độ giao điểm $M(3; 0; 3)$.
61	Cho bốn điểm $A(1; 0; 2), B(1; 1; 0), C(0; 0; 1)$ và $D(1; 1; 1)$ 1. Chứng minh A, B, C, D là bốn đỉnh của một khối tứ diện 2. Tính thể tích khối tứ diện	1. $\vec{CA} = (1; 0; 1), \vec{CB} = (1; 1; -1), \vec{CD} = (1; 1; 0)$ $\Rightarrow [\vec{CA}, \vec{CB}] = (-1; 2; 1) \Rightarrow [\vec{CA}, \vec{CB}] \cdot \vec{CD} = 1 \neq 0$ $\Rightarrow A, B, C, D$ không đồng phẳng hay A, B, C, D là bốn đỉnh của một khối tứ diện 2. $V = \frac{1}{6} [\vec{CA}, \vec{CB}] \cdot \vec{CD} = \frac{1}{6}$

	3. Viết phương trình đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D 4. Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ 5. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A 6. Xác định điểm A' là đối xứng của A qua $mp(BCD)$ 7. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD	3. VTCP của DH là VTPT của $mp(ABC)$ hay $[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}] = (-1; 2; 1)$. Phương trình $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$ 4. Mặt cầu: $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 3x + y - z = 0$ 5. Mặt cầu (S) có tâm $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và bán kính $R = \frac{\sqrt{11}}{2}$. Phương trình mặt phẳng: $x - y - 3z + 5 = 0$ 6. $(BCD): x - y = 0$, đường thẳng qua A và vuông góc với (BCD) là $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases}$ Gọi $K = d \cap (BCD) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right) \Rightarrow A'(0; 1; 2)$ 7. Ta có: $BD \parallel (xOz), AC \subset (xOz) \Rightarrow d(BD, AC) = d(B, (xOz)) = 1$
62	Cho $mp(P): x + 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = y+1 = z-3$ 1. Tìm tọa độ giao điểm A của d và (P) 2. Tính góc α giữa đường thẳng d và $mp(P)$ 3. Viết phương trình $mp(Q)$ chứa đường thẳng d và vuông góc với $mp(P)$ 4. Viết phương trình hình chiếu vuông góc d' của d trên $mp(P)$ 5. Viết phương trình đường thẳng nằm trong $mp(P)$ chứa A và vuông góc với đường thẳng d 6. Viết phương trình mặt cầu tâm I nằm trên đường thẳng d, tiếp xúc với $mp(P)$ và có bán kính $R = \sqrt{6}$	1. $A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right)$ 2. $\sin \alpha = \frac{ \overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{n_P} }{ \overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{n_P} } = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$ 3. $mp(Q): x - y - z + 3 = 0$ 4. d' chính là đường thẳng giao tuyến của (P) và (Q), có phương trình: $\begin{cases} x = -\frac{11}{3} + t \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = t \end{cases}$ 5. $\Delta: \frac{x+\frac{1}{3}}{-1} = \frac{y+\frac{2}{3}}{1} = \frac{z-\frac{10}{3}}{1}$ 6. $(S): \left(x - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{16}{3}\right)^2 = 6$ hay $(S): \left(x + \frac{13}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{4}{3}\right)^2 = 6$
63	Cho hai điểm $A(3; 3; 1), B(0; 2; 1)$ và $(P): x + y + z - 7 = 0$ 1. Viết phương trình đường thẳng AB 2. Viết phương trình hình chiếu của AB trên $mp(P)$ 3. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong $mp(P)$ mà mọi điểm của d cách đều hai điểm A và B. 4. Viết phương trình đường vuông góc chung của AB và d	1. $AB: \begin{cases} x = 3-3t \\ y = 3-t \\ z = 1 \end{cases}$ 2. Ta có: $A \in mp(P)$, gọi H là hình chiếu của B trên $mp(P)$. $BH: \begin{cases} x = t \\ y = 2+t \\ z = 1+t \end{cases}, H = BH \cap (P) = \left(\frac{4}{3}; \frac{10}{3}; \frac{7}{3}\right)$

	5. Tìm điểm K thuộc đường thẳng $AB, (K \neq B)$ sao cho $d(K, (P)) = d(B, (P))$ 6. Tìm điểm C trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.	$AH : \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$ 3. Gọi I là trung điểm AB. Suy ra $I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 1\right)$ d là giao tuyến của $mp(P)$ và mặt phẳng trung trực (R) của AB. $d : \begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$ 4. Ta có $AB \perp (R), d \subset mp(R)$, trong $mp(R)$ kẻ đường thẳng $IM \perp d, M \in d \Rightarrow IM$ là đường vuông góc chung $IM : \frac{x - \frac{3}{2}}{-1} = \frac{y - \frac{5}{2}}{3} = \frac{z - 1}{5}$ 5. $K(6; 4; 1)$ 6. $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CI$. C là hình chiếu của I trên d $C\left(\frac{17}{14}; \frac{47}{14}; \frac{34}{14}\right) \equiv M \text{ (ý 4)}$
64	Cho hai đường thẳng $d_1 : x = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2} \text{ và } d_2 : \frac{x+8}{2} = y-6 = \frac{z-10}{-1}$ 1. Chứng minh rằng d_1 và d_2 chéo nhau 2. Viết phương trình mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1 3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 4. Viết phương trình đường thẳng d song song với trục Ox, cắt d_1 tại M, cắt d_2 tại N. Tính tọa độ các điểm M, N 5. Gọi AB là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 ($A \in d_1, B \in d_2$). Hãy viết phương trình mặt cầu đường kính AB.	1. $d_1 : \begin{cases} M_1(0; 2; -4) \\ \vec{v}_{tcpu_1} = (1; -1; 2) \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} M_2(-8; 6; 10) \\ \vec{v}_{tcpu_2} = (2; 1; -1) \end{cases}$ Ta có: $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{M_1M_2} = 70 \neq 0$. Vậy d_1 và d_2 chéo nhau 2. $(\alpha) : \begin{cases} \text{chứa } d_2 \\ // d_1 \end{cases} \Rightarrow (\alpha) : x - 5y - 3z + 68 = 0$ 3. $d(d_1, d_2) = d(M_1, (\alpha)) = 2\sqrt{35}$ 4. $M \in d_1, N \in d_2, \vec{MN}, \vec{i} = (1; 0; 0)$ cùng phương $M(18; -16; 32), N(-52; -16; 32)$ $d : \begin{cases} x = 18 + t \\ y = -16 \\ z = 32 \end{cases}$ 5. $A \in d_1, B \in d_2, \vec{AB} \perp \vec{u}_1, \vec{AB} \perp \vec{u}_2$ và $A(2; 0; 0), B(0; 10; 6)$. $(S) : (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 35$
65	Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P) : x + y - z + 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ	Phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = -2 + 2t \end{cases}$. Giải phương trình $-1 + 2t - t - (-2 + 2t) + 1 = 0$ được $t = 2$. Suy ra giao điểm của Δ và (P) là $I(3; -2; 2)$.

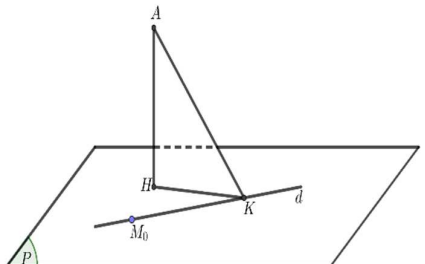
		Δ có VTCP là $\vec{u} = (2; -1; 2)$, (P) có VTPT là $\vec{n} = (1; 1; -1)$. Ta có $[\vec{n}, \vec{u}] = (1; -4; -3)$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ sẽ đi qua I và nhận $[\vec{n}, \vec{u}]$ làm một VTCP, do đó có phương trình là $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$
66	Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và đi qua điểm $A(5; -2; -1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng	Đặt $AB = a, AC = b, AD = c$ thì $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh A, nội tiếp mặt cầu (S). Khi đó $ABCD$ là tứ diện đặt ở góc A của hình hộp chữ nhật tương ứng có các cạnh AB, AC, AD vuông góc và đường chéo AA' là đường kính của cầu. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2$. Xét $V = V_{ABCD} = \frac{1}{6}abc \Leftrightarrow V^2 = \frac{1}{36}a^2b^2c^2$. Mà $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^3 \geq a^2b^2c^2$ $\Leftrightarrow \left(\frac{4R^2}{3}\right)^3 \geq 36.V^2 \Leftrightarrow V \leq R^3 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{27}$ Với $R = IA = 4\sqrt{3}$. Vậy $V_{\max} = \frac{256}{3}$.
67	Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A, vuông góc với d và cắt trục Ox.	Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và $B = \Delta \cap Ox \Rightarrow B(b; 0; 0)$ và $\overrightarrow{BA} = (1-b; 2; 3)$. Do $\Delta \perp d$, Δ qua A nên $\overrightarrow{BA} \cdot \vec{u}_d = 0$ $\Leftrightarrow 2(1-b) + 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow b = -1$. Từ đó Δ qua $B(-1; 0; 0)$, có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BA} = (2; 2; 3)$ nên có phương trình $\Delta: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$
68	Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $A(2; 3; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S), M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình nào?	Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; -1; -1)$ và bán kính $R = 3$. Ta tính được $AI = 5, AM = \sqrt{AI^2 - R^2} = 4$. Phương trình mặt cầu (S') tâm $A(2; 3; -1)$, bán kính $AM = 4$ là: $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$. M luôn thuộc mặt phẳng $(P) = (S) \cap (S')$ có phương trình: $3x + 4y - 2 = 0$.
69	Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; 2)$ và đi qua điểm $A(1; -2; -1)$. Xét các điểm B, C, D	Đặt $AB = a, AC = b, AD = c$ thì $ABCD$ là tứ diện vuông đỉnh A, nội tiếp mặt cầu (S). Khi đó $ABCD$ là tứ diện đặt ở góc A của hình hộp chữ nhật tương ứng có các cạnh AB, AC, AD vuông góc và

	thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất	đường chéo AA' là đường kính của cầu. Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2$. Xét $V = V_{ABCD} = \frac{1}{6}abc \Leftrightarrow V^2 = \frac{1}{36}a^2b^2c^2$. Mà $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Leftrightarrow \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^3 \geq a^2b^2c^2$ $\Leftrightarrow \left(\frac{4R^2}{3}\right)^3 \geq 36.V^2 \Leftrightarrow V \leq R^3 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{27}$ Với $R = IA = 3\sqrt{3}$. Vậy $V_{\max} = 36$.
70	Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(1;2;3)$ và có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (0; -7; -1)$. Viết phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ .	Ta lấy $M(6;7;3) \in (d)$, ta tìm được 2 điểm $N_1(1; -5; 2), N_2(1; 9; 4) \in (\Delta)$ để cho $\begin{cases} AM = AN_1 \\ AM = AN_2 \end{cases}$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN_1} < 0 \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN_2} > 0 \end{cases}$ vì vậy đường phân giác góc nhọn của hai đường thẳng cần tìm là đường thẳng đi qua A và trung điểm H của đoạn thẳng MN_2 . Ta tính $H\left(\frac{7}{2}; 8; \frac{7}{2}\right)$, $\overrightarrow{AH} = \left(\frac{5}{2}; 6; \frac{1}{2}\right)$, chọn vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{AH}} = (5; 12; 1)$, ta được $(AH): \begin{cases} x = 1+5t \\ y = 2+12t \\ z = 3+t \end{cases}$
71	Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 1+4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 2)$. Viết phương trình đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ	Phương trình tham số đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1+t' \\ y = 1-2t' \\ z = 1+2t' \end{cases}$ Chọn điểm $B(2; -1; 3) \in \Delta$, $AB = 3$. Điểm $C\left(\frac{14}{5}; \frac{17}{5}; 1\right)$ hoặc $C\left(-\frac{4}{5}; -\frac{7}{5}; 1\right)$ nằm trên d thỏa mãn $AC = AB$. Kiểm tra được điểm $C\left(-\frac{4}{5}; -\frac{7}{5}; 1\right)$ thỏa mãn $\widehat{BAC}$ nhọn. Trung điểm của BC là $I\left(\frac{3}{5}; -\frac{6}{5}; 2\right)$. Đường phân giác cần tìm là AI có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 11; -5)$ và có phương trình $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = -10+11t \\ z = 6-5t \end{cases}$
72	Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$ và đi qua điểm $A(0;1;1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi	Đặt: $AD = a, AB = b, AC = c$. Ta có: $R = IA = \sqrt{3}$. $AM = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{2}$; $IM = \frac{a}{2}$.

	một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất 	$\Rightarrow R^2 = IA^2 = \frac{b^2 + a^2 + c^2}{4} = 3$ AD BĐT Cosi: $b^2 + a^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{b^2 a^2 c^2}$ $\Rightarrow b^2 a^2 c^2 \leq \frac{(b^2 + a^2 + c^2)^3}{27} \Leftrightarrow abc \leq 8$ $\Rightarrow V = \frac{1}{6} abc \leq \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}.$
73	Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên (P).	Gọi đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của d trên (P) và $A = d \cap (P)$ thì $A \in \Delta$ Phương trình tham số của đường thẳng: $d: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$ Ta có: $A(t; -1 + 2t; 2 - t) \in (P)$ $\Rightarrow t + 2t - 1 + 2 - t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A(1; 1; 1)$ $B(0; -1; 2) \in d$. Gọi d' là đường thẳng đi qua B và vuông góc với (P). Suy ra phương trình đường thẳng $d': \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$. Gọi B' là hình chiếu của B lên (P) thì $B'(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{-2}{3})$. Đường thẳng Δ là đường thẳng đi qua A, B'. $\overrightarrow{AB'} = (\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{-5}{3})$ suy ra vector chỉ phương của Δ là $\vec{u} = (1; 4; -5)$. Phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$.
74	Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 4), B(-3; 3; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng bao nhiêu?	Gọi $I(x; y; z)$ thỏa $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ Ta tìm được điểm $I(-1; 1; 1)$. Xét $2MA^2 + 3MB^2 = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$ $= 5MI^2 + 2(2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{MI} + 2IA^2 + 3IB^2$ $= 5MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2$ Ta có: $IA = 3\sqrt{3}, IB = 2\sqrt{3}, d(I; (P)) = 3$ Lại có $MI \geq d(I; (P)) = 3$ nên $2MA^2 + 3MB^2 \geq 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot (3\sqrt{3})^2 + 3 \cdot (2\sqrt{3})^2 = 135.$

75	Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Viết phương trình của Δ	Mặt cầu có tâm $I(3;2;5)$, $R=6$, $IE = \sqrt{6} < R$ suy ra E nằm trong mặt cầu. Gọi $(C_{(I';r)}) = (P) \cap (S)$ suy ra I' là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (P). Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với (P) là $d: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 5 - t \end{cases}$. Ta có: $I' = d \cap (P) \Rightarrow I' \left(\frac{23}{9}; \frac{14}{9}; \frac{47}{9} \right) \Rightarrow \overrightarrow{I'E} = -\frac{5}{9}(1;1;4)$. Vì Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất nên Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và vuông góc với $I'E$ suy ra $\overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{I'E}] = 9(1;-1;0)$. Vậy phương trình của $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
76	Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tìm tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC	Ta có: $\overrightarrow{BA} = (-1;-3;4) \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \sqrt{26}$; $\overrightarrow{BC} = (-6;8;2) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = 2\sqrt{17}$ Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC Suy ra: $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DA} \Rightarrow D \left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1 \right)$.
77	Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;0;0)$, $B(3;2;4)$, $C(0;5;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ nhỏ nhất.	Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (1). Ta có (1) $\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = (4;12;12) \Leftrightarrow I(1;3;3)$. Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MI} = 4MI$. Do M thuộc mặt phẳng (Oxy) nên để $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ nhỏ nhất hay MI nhỏ nhất thì M là hình chiếu của $I(1;3;3)$ trên $(Oxy) \Leftrightarrow M(1;3;0)$.
78	Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-4)$, $B(-3;5;2)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.	Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;3;6) \Rightarrow$ một véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{u} = (-1;1;2)$. Phương trình của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = -t \\ y = 2 + t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$ Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I(-2;4;0)$.

		$MA^2 + 2MB^2 = (\overline{MI} + \overline{IA})^2 + 2(\overline{MI} + \overline{IB})^2$ $= IA^2 + 2IB^2 + 3MI^2 + 2\overline{MI}(\overline{IA} + 2\overline{IB})$ $= IA^2 + 2IB^2 + 3MI^2.$ Do A, B, I cố định nên $IA^2 + 2IB^2 + 3MI^2$ nhỏ nhất khi MI^2 nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên đường thẳng AB. Vì $M \in AB$ nên $M(-t; 2+t; 2t-4)$ $\Rightarrow \overline{IM} = (2-t; t-2; 2t-4)$ Ta có $IM \perp AB \Rightarrow \overline{IM} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow 2-t+t-2+4t-8=0$ $\Leftrightarrow t=2 \Rightarrow M(-2; 4; 0).$
79	Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 1), B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB)	Gọi $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB. Áp dụng bài toán trên cho $\triangle OAB$, ta được $AB \cdot \overline{IO} + OB \cdot \overline{IA} + OA \cdot \overline{IB} = \vec{0}$ (*). Ta có $OA=3, OB=4, AB=5$; $\overline{IO} = (-a; -b; -c), \overline{IA} = (2-a; 2-b; 1-c),$ $\overline{IB} = \left(-\frac{8}{3}-a; \frac{4}{3}-b; \frac{8}{3}-c\right).$ Từ (*) ta có $\begin{cases} -5a + 4(2-a) + 3\left(-\frac{8}{3}-a\right) = 0 \\ -5b + 4(2-b) + 3\left(\frac{4}{3}-b\right) = 0 \\ -5c + 4(1-c) + 3\left(\frac{8}{3}-c\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}.$ Do đó $I(0; 1; 1)$. Mặt khác, ta có: $[\overline{OA}, \overline{OB}] = (4; -8; 8)$. Suy ra vec tơ chỉ phương của đường thẳng cần tìm là $\vec{u} = (1; -2; 2)$. Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình là $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{2}$.
80	Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác O). Viết phương trình mặt phẳng (P) sao cho M là trực tâm của tam giác ABC.	Gọi $A(a; 0; 0), B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Vì $M(1; 2; 3) \in (P)$ nên ta có: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$. Điểm M là trực tâm của $\triangle ABC$ $\Leftrightarrow \begin{cases} AM \perp BC \\ BM \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AM} \cdot \overline{BC} = 0 \\ \overline{BM} \cdot \overline{AC} = 0 \end{cases}.$ Ta có: $\overline{AM} = (1-a; 2; 3), \overline{BC} = (0; -b; c),$ $\overline{BM} = (1; 2-b; 3), \overline{AC} = (-a; 0; c).$

		Từ đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} -2b+3c=0 \\ -a+3c=0 \\ \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{3}{2}c \\ a=3c \\ \frac{1}{3c}+\frac{2}{\frac{3}{2}c}+\frac{3}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=14 \\ b=7 \\ c=\frac{14}{3} \end{cases}$ Phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{x}{14}+\frac{y}{7}+\frac{3z}{14}=1$ $\Leftrightarrow x+2y+3z-14=0$.
81	Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(3;2;-1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất. 	+ d qua $M_0(0;0;1)$ có vector chỉ phương $\vec{u}=(1;1;1)$. + Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và d. Ta có: $d(A, (P)) = AH \leq AK$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv K$. Do đó $d(A, (P))_{\max} = AK$. Khi đó (P) đi $M_0(0;0;1)$ nhận $\overrightarrow{AK}$ làm vector pháp tuyến. + $K \in d$ nên $K(t, t, 1+t)$ và $\overrightarrow{AK}=(t-3; t-2; t+2)$. Ta có: $\overrightarrow{AK} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} \cdot \vec{u} = 0$ $\Leftrightarrow 1 \cdot (t-3) + 1 \cdot (t-2) + 1 \cdot (t+2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Suy ra: $\overrightarrow{AK} = (-2; -1; 3)$. Vậy $(P): -2(x-0) - 1(y-0) + 3(z-1) = 0$ $\Leftrightarrow 2x + y - 3z + 3 = 0$.
82	Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$, $d_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{-1}$ và $d_3: \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{6}$. Viết phương trình đường thẳng song song d_3, cắt d_1 và d_2.	Ta có $d_1: \begin{cases} x=3+2u \\ y=-1+u \\ z=2-2u \end{cases}, d_2: \begin{cases} x=-1+3v \\ y=-2v \\ z=-4-v \end{cases}$. Gọi d_4 là đường thẳng cần tìm. Gọi $A = d_4 \cap d_1 \Rightarrow A(3+2u; -1+u; 2-2u)$, $B = d_4 \cap d_2 \Rightarrow B(-1+3v; -2v; -4-v)$. $\overrightarrow{AB} = (-4+3v-2u; 1-2v-u; -6-v+2u)$. d_4 song song d_3 nên $\overrightarrow{AB} = k\vec{u}_3$ với $\vec{u}_3 = (4; -1; 6)$. $\overrightarrow{AB} = k\vec{u}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} -4+3v-2u=4k \\ 1-2v-u=-k \\ -6-v+2u=6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=0 \\ u=0 \\ k=-1 \end{cases}$. Đường thẳng d_4 đi qua $A(3; -1; 2)$ và có vtcp là $\vec{u}_3 = (4; -1; 6)$ nên $d_4: \frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}$.

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

---o0o---

§1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

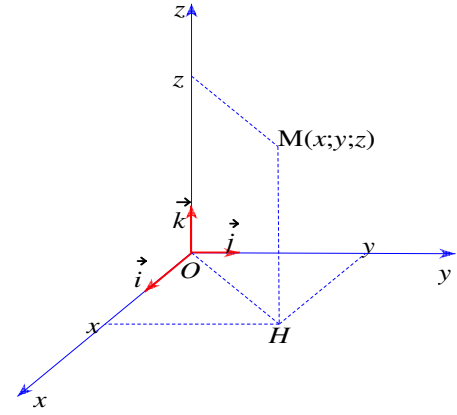
1. Hệ tọa độ

Cho ba trục Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các vector đơn vị tương ứng trên các trục Ox, Oy, Oz . Hệ gồm ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc $Oxyz$ trong không gian hay đơn giản được gọi là hệ tọa độ $Oxyz$.

- Điểm O được gọi là gốc tọa độ
- Trục Ox gọi là trục hoành
- Trục Oy gọi là trục tung
- Trục Oz gọi là trục cao
- Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Oxz)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng tọa độ.

Chú ý: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$



2. Tọa độ của một điểm

$M(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, (x : hoành độ; y : tung độ; z : cao độ)

Chú ý:

- $M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0; M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0; M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$
- Điểm thuộc mặt phẳng tọa độ: $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0), N \in (Oyz) \Rightarrow N(0; y; z),$

$P \in (Oxz) \Rightarrow P(x; 0; y)$

- $M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0; M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0; M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$
- Điểm trên trục tọa độ: $M \in Ox \Rightarrow M(x; 0; 0), N \in Oy \Rightarrow N(0; y; 0),$

$P \in Oz \Rightarrow P(0; 0; z)$

3. Tọa độ của vector

$\vec{a} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, (x : hoành độ; y : tung độ; z : cao độ)

Chú ý:

$\vec{0} = (0; 0; 0), \vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$

4. Liên hệ giữa tọa độ điểm và tọa độ vector

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C)$

• $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

• M chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k ($k \neq -1$) $\Leftrightarrow \vec{MA} = k\vec{MB}$. Khi đó: $M\left(\frac{x_A - kx_B}{1 - k}; \frac{y_A - ky_B}{1 - k}; \frac{z_A - kz_B}{1 - k}\right)$

• M trung điểm đoạn thẳng AB . Suy ra $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

• G là trọng tâm của tam giác ABC . Suy ra $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

- ♦ G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Suy ra $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}; \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}; \frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\right)$
- ♦ Cho ΔABC , gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Gọi a, b, c là độ dài các cạnh. Khi đó ta có $a\vec{IA}+b\vec{IB}+c\vec{IC}=\vec{0}$

5. Các phép toán trên vector

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3), \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Ta có:

- ♦ $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$
- ♦ $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3), k \in \mathbb{R}$
- ♦ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

6. Tích vô hướng và ứng dụng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3), \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Ta có:

- ♦ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- ♦ $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
- ♦ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- ♦ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$
- ♦ $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}, \vec{b} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$
- ♦ Khoảng cách giữa hai điểm: $AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- ♦ Góc giữa hai vector: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, (\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})$

7. Tích có hướng và ứng dụng

a. Định nghĩa: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vector $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3), \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Tích có hướng của hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$ hoặc $\vec{a} \wedge \vec{b}$, được xác định bởi:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

Chú ý: $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$

b. Tính chất

- ♦ Nếu $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ thì $\begin{cases} \vec{c} \perp \vec{a} \\ \vec{c} \perp \vec{b} \end{cases}$
- ♦ $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$
- ♦ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$
- ♦ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0$

c. Ứng dụng của tích có hướng

- ♦ Diện tích hình bình hành $ABCD$ là $S_{ABCD} = |\vec{AB} \wedge \vec{AD}|$
- ♦ Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}|$
- ♦ Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = |(\vec{AB} \wedge \vec{AD}) \cdot \vec{AA'}|$
- ♦ Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3), B(0; 3; 1), C(4; 2; 2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -7$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 27$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -1; 1), B(0; 1; 2), C(1; 0; 1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G\left(\frac{4}{3}; 0; \frac{2}{3}\right)$. B. $G\left(\frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}\right)$. C. $G\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$. D. $G\left(\frac{2}{3}; 0; \frac{4}{3}\right)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (5; 7; 2), \vec{b} = (3; 0; 4), \vec{c} = (-6; 1; -1)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{n}$ thỏa mãn $\vec{n} = 5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c}$.

- A. $\vec{n} = (-19; 39; 30)$. B. $\vec{n} = (19; 39; 30)$. C. $\vec{n} = (19; -39; 30)$. D. $\vec{n} = (19; 39; -30)$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $OADB$ có $\overrightarrow{OA} = (-1; 1; 0), \overrightarrow{OB} = (1; 1; 0)$ (O là gốc tọa độ). Tìm tọa độ tâm I của hình bình hành $OADB$.

- A. $I(1; 0; 0)$. B. $I(1; 0; 1)$. C. $I(0; 1; 0)$. D. $I(1; 1; 0)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(1; 0; 0), N(0; 0; 1), P(2; 1; 1)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác MNP .

- A. $H(1; 0; 0)$. B. $H(0; 2; -1)$. C. $H(-1; 2; 4)$. D. $H(2; -2; 1)$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1; 2; -1), C(3; 4; -1)$ và $I(2; 3; 0)$ là tâm của hình lập phương. Tìm tọa độ tâm K của hình vuông $A'B'C'D'$.

- A. $K(2; 3; 1)$. B. $K(2; 3; -1)$. C. $K(2; 3; 2)$. D. $K(1; 2; 3)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (-1; 1; 0), \vec{b} = (1; 1; 0), \vec{c} = (1; 1; 1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $\vec{b} \perp \vec{c}$. B. $\vec{a} \perp \vec{b}$. C. $|\vec{c}| = \sqrt{3}$. D. $|\vec{a}| = \sqrt{2}$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; -2), B(2; 1; -1), C(1; -2; 2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A. $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. B. $G\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. C. $G\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. D. $G(4; -1; -1)$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (2; -5; 3), \vec{b} = (0; 2; -1), \vec{c} = (1; 7; 2)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{e}$ thỏa mãn $\vec{e} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$.

- A. $\vec{e} = (-27; 0; 3)$. B. $\vec{e} = (2; 7; 3)$. C. $\vec{e} = (0; -27; 3)$. D. $\vec{e} = (0; 27; 3)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (-1; 1; 0), \vec{b} = (1; 1; 0), \vec{c} = (1; 1; 1)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương. B. $\cos(\vec{b}, \vec{c}) = \frac{2}{\sqrt{6}}$. C. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. D. $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 0; 0), B(0; 1; 0), C(0; 0; 1), D(1; 1; 1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. $AB \perp CD$. B. Bốn điểm A, B, C, D tạo thành một tứ diện.

C. Tam giác ABD là tam giác đều.

D. Tam giác BCD là tam giác vuông.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1), B(4;1;-3), C(3;7;0)$. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng của A qua trung điểm M của cạnh BC .

A. $A'(2;5;7)$.

B. $A'(5;7;2)$.

C. $A'(5;7;-2)$.

D. $A'(5;-2;7)$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1), D(1;1;1)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tìm tọa độ trung điểm I của MN .

A. $I\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

B. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

C. $I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

D. $I\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;0), B(0;0;1), C(2;1;1)$. Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

A. $H(1;1;0)$.

B. $H(0;3;1)$.

C. $H(2;1;-1)$.

D. $H(-1;2;3)$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;1), B(1;-1;0), C(1;0;2)$. Tính độ dài đường chéo của hình hộp nhận OA, OB, OC làm ba cạnh.

A. $\sqrt{2}$.

B. 3.

C. $\sqrt{5}$.

D. 5.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (2; -5; 3), \vec{b} = (0; 2; -1), \vec{c} = (1; 7; 2)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{d}$ thỏa mãn $\vec{d} = 4\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + 3\vec{c}$.

A. $\vec{d} = \left(11; \frac{1}{3}; \frac{55}{3}\right)$.

B. $\vec{d} = \left(\frac{1}{3}; 11; \frac{55}{3}\right)$.

C. $\vec{d} = (11; 1; 55)$.

D. $\vec{d} = \left(11; -\frac{1}{3}; 55\right)$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vector $\vec{a} = (5; 7; 2), \vec{b} = (3; 0; 4), \vec{c} = (-6; 1; -1)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{m}$ thỏa mãn $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

A. $\vec{m} = (-3; 22; -3)$.

B. $\vec{m} = (3; 22; -3)$.

C. $\vec{m} = (-3; 22; 3)$.

D. $\vec{m} = (3; -22; 3)$.

§2. MẶT PHẪNG

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Vector pháp tuyến của mặt phẳng

a. Định nghĩa:

♦ Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ được gọi là vector pháp tuyến của mặt phẳng (α) nếu giá của nó vuông góc với (α) , viết tắt là: $\vec{n} \perp (\alpha)$

♦ Nếu hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ không cùng phương và giá của chúng song song với một mp (α) (hoặc nằm trên (α)) thì $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ là một vector pháp tuyến của mp (α) .

b. Chú ý:

♦ Nếu $\vec{n}$ là vector pháp tuyến của một mặt phẳng thì $k\vec{n}, k \neq 0$ cũng là vector pháp tuyến của mặt phẳng đó

♦ Mặt phẳng (ABC) có vector pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

a. **Định nghĩa:** Phương trình có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$, trong đó A, B, C, D không đồng thời bằng 0 được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng hay còn gọi là phương trình mặt phẳng.

b. Nhận xét:

♦ Nếu mặt phẳng (α) có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0$ thì nó có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$

♦ Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nhận vector $\vec{n} = (A; B; C)$ khác $\vec{0}$ làm vector pháp tuyến có phương trình: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

c. Các trường hợp riêng của phương trình tổng quát

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (α)	Đặc điểm của mặt phẳng (α)
$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$	(α) đi qua gốc tọa độ O
$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	$(\alpha) \parallel Ox$ hoặc $(\alpha) \supset Ox$
$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$	$(\alpha) \parallel Oy$ hoặc $(\alpha) \supset Oy$
$C = 0$	$Ax + By + D = 0$	$(\alpha) \parallel Oz$ hoặc $(\alpha) \supset Oz$
$A = B = 0$	$Cz + D = 0$	$(\alpha) \parallel (Oxy)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxy)$
$A = C = 0$	$By + D = 0$	$(\alpha) \parallel (Oxz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxz)$
$B = C = 0$	$Ax + D = 0$	$(\alpha) \parallel (Oyz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oyz)$

Chú ý:

♦ Mặt phẳng (Oxy) có phương trình: $z = 0$ và có vector pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$

♦ Mặt phẳng (Oxz) có phương trình: $y = 0$ và có vector pháp tuyến $\vec{j} = (0; 1; 0)$

♦ Mặt phẳng (Oyz) có phương trình: $x = 0$ và có vector pháp tuyến $\vec{i} = (1; 0; 0)$

3. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

Mặt phẳng (α) không đi qua gốc O , cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm

$A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ (với $a, b, c \neq 0$) thì có phương trình: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Phương trình này gọi là phương trình theo đoạn chắn của mặt phẳng (α)

4. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) có phương trình:

$(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; (\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Khi đó (α_1) có vector pháp tuyến

$\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ và đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$; (α_2) có vector pháp tuyến là: $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$

- ♦ $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ ♦ $(\alpha_1) // (\alpha_2) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$
- ♦ (α_1) cắt $(\alpha_2) \Leftrightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$ ♦ $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$

Lưu ý:

- ♦ $\begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ M_0 \in (\alpha_2) \end{cases} \Rightarrow (\alpha_1) \equiv (\alpha_2)$ ♦ $\begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ M_0 \notin (\alpha_2) \end{cases} \Rightarrow (\alpha_1) // (\alpha_2)$ ♦ $\vec{n}_1 \neq k\vec{n}_2 \Rightarrow (\alpha_1) \cap (\alpha_2) = d$

5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm

$M_0(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) , kí hiệu $d(M_0, (\alpha))$, được tính bởi công

$$\text{thức: } d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

6. Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) :

$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}, \text{ với } \vec{n}_1, \vec{n}_2 \text{ là vectơ pháp tuyến của } (\alpha) \text{ và } (\beta).$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Lập phương trình mặt phẳng: Phương pháp

Cách 1: (Xác định yếu tố: vectơ pháp tuyến và điểm, như bảng dưới đây)

Bước 1. Từ giả thiết, xác định các vectơ và các yếu tố khác (nếu cần)

Bước 2. Xác định tọa độ vectơ pháp tuyến và tọa độ một điểm của mặt phẳng

Bước 3. Kết luận

Cách 2: (Xác định hệ số)

Bước 1. Gọi PT mp đã cho có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0, (2)$

Bước 2. Từ giả thiết, xác định 4 hệ số A, B, C, D (kiểm tra điều kiện, nếu có)

Bước 3. Kết luận

Dạng	Tính chất của mp(α) (giả thiết cho)	Đi qua điểm	VTPT
1	mp(α) qua 3 điểm A, B, C	A, B, C	$\vec{n}_\alpha = [\vec{AB}, \vec{AC}]$
2	mp(α) là mặt phẳng trung trực đoạn AB	M là trung điểm AB	$\vec{n}_\alpha = \vec{AB}$
3	mp(α) qua M và song song (β) : $Ax + By + Cz + D = 0$	M	$\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta$
4	mp(α) qua M và vuông góc đường thẳng (d)	M	$\vec{n}_\alpha = \vec{a}_d$
	mp(α) qua M và vuông góc đường thẳng AB	M	$\vec{n}_\alpha = \vec{AB}$
5	mp(α) qua A, B và song song (d)	A hoặc B	$\vec{n}_\alpha = [\vec{AB}, \vec{u}_d]$
	mp(α) qua A, B và song song CD	A hoặc B	$\vec{n}_\alpha = [\vec{AB}, \vec{CD}]$
	mp(α) chứa (d) và song song (d')	Lấy $M \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]$
	mp(α) chứa (d) và song song AB	Lấy $M \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{AB}]$
6	mp(α) qua 2 điểm M, N và vuông góc mp(β)	M hoặc N	$\vec{n}_\alpha = [\vec{MN}, \vec{n}_\beta]$
	mp(α) chứa (d) và vuông góc mp(β)	Lấy $M \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{n}_\beta]$
7	mp(α) qua điểm M và vuông góc 2 mp $(\beta), (\gamma)$	M	$\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_\gamma, \vec{n}_\beta]$
8	mp(α) qua điểm M và song song 2 đt $(d), (d')$	M	$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]$

9	mp(α) qua điểm M , vuông góc mp(β) và song dt (d)	M	$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{n}_\beta]$
10	mp(α) chứa (d) và đi qua $M \notin (d)$	M hoặc Lấy $N \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{MN}, \vec{u}_d]$

2. Tìm H là hình chiếu của M trên mp(α): Phương pháp

Cách 1. H là hình chiếu của M trên mp(α): $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} H \in (\alpha) \\ \overrightarrow{MH}, \vec{n}_\alpha \text{ cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax_H + By_H + Cz_H + D = 0 \\ \frac{x_H - x_M}{A} = \frac{y_H - y_M}{B} = \frac{z_H - z_M}{C} \Rightarrow \text{tọa độ điểm } H. \end{cases}$$

Cách 2. Viết phương trình đường thẳng (d) qua M và vuông góc mp(α) $\Rightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình gồm phương trình của (d) và (α)

3. Tìm điểm M' đối xứng với M qua mp(α): Phương pháp

Tìm hình chiếu H của M trên mp(α) $\Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow$ Tọa độ điểm M'

4. Xét vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng: Phương pháp

Với $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (α_1) và (α_2)

$$\begin{aligned} \diamond \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ M_0 \in (\alpha_2) \end{cases} &\Rightarrow (\alpha_1) \equiv (\alpha_2) & \diamond \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ M_0 \notin (\alpha_2) \end{cases} &\Rightarrow (\alpha_1) // (\alpha_2) \\ \diamond \vec{n}_1 \neq k\vec{n}_2 &\Rightarrow (\alpha_1) \cap (\alpha_2) = d & \diamond \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 &\Rightarrow (\alpha_1) \perp (\alpha_2) \end{aligned}$$

5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) , kí hiệu $d(M_0, (\alpha))$, được tính bởi công thức:

$$d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Nhận xét: Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α) thì $d(M, (\alpha)) = MH$

Chú ý:

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia: Cho $(\alpha) // (\beta)$, $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\alpha))$, $M \in (\beta)$ hay $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta))$, $M \in (\alpha)$
- Khoảng cách giữa một đường thẳng song song với một mặt phẳng là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng đến mặt phẳng.

6. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0, (\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$, gọi $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ lần lượt là hai vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng.

$$\text{Gọi } \varphi \text{ là góc giữa hai mặt phẳng } (\alpha) \text{ và } (\beta), \text{ ta có: } \cos \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|} = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -1; 2), B(-1; 0; 3), C(0; 2; 1)$. Tính diện tích S của tam giác ABC .

$$\text{A. } S = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \text{B. } S = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \quad \text{C. } S = \frac{5\sqrt{2}}{2}. \quad \text{D. } S = \frac{5}{2}.$$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; -2; 3)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): 2x - 3y + z + 5 = 0$.

A. $x+3y-z-7=0$. B. $2x-3y+z-11=0$. C. $x-3y+z+11=0$. D. $2x-3y+z-9=0$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+4y+2z+4=0$ và điểm $A(1;-2;3)$. Tìm khoảng cách d từ điểm A đến (P) .

A. $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$. B. $d = \frac{1}{\sqrt{29}}$. C. $d = \frac{\sqrt{29}}{5}$. D. $d = \frac{5}{\sqrt{129}}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua $D(2;6;-3)$ và song song mp (Ozx) . Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (α) ?

A. $x-2=0$. B. $y-6=0$. C. $z+3=0$. D. $y=0$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua $A(3;-1;-5)$ đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(\beta): 3x-2y+2z+7=0$ và $(\gamma): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (α) .

A. $2x+y-2z-15=0$. B. $2x+2y-z-15=0$. C. $x+2y-2z-15=0$. D. $x+2y-z-15=0$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Gọi (α) là mặt phẳng cắt ba trục tọa độ tại ba điểm $M(8;0;0)$, $N(0;-2;0)$, $P(0;0;4)$. Viết phương trình của (α) .

A. $\frac{x}{8} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{4} = 0$. B. $x-4y+2z-8=0$. C. $\frac{x}{4} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$. D. $x-4y+2z=0$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng tiếp xúc với (S) ?

A. $6x+2y+3z-55=0$. B. $6x+2y+3z+5=0$.
C. $2x+3y+6z-5=0$. D. $x+y+z-55=0$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-5y+mz-3=0$ và $(\beta): 2x+ny-3z+1=0$ (m, n là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của m và n để hai mặt phẳng đã cho song song với nhau.

A. $n=-10, m=-9$. B. $n=-\frac{10}{3}, m=-\frac{9}{2}$. C. $m=-\frac{1}{3}, n=-\frac{3}{2}$. D. $n=\frac{10}{3}, m=\frac{9}{2}$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3), B(0;1;1), C(1;0;0)$. Tính $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC} = (-1; 3; -2)$. B. $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC} = (-1; 3; 2)$.
C. $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC} = (1; -3; 2)$. D. $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC} = (-1; -3; 2)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình: $\frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$. Xét mặt phẳng $(P): 10x+2y+mz+11=0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả các giá trị của m để (P) song song với đường thẳng Δ .

A. $m=-2$. B. $m=52$. C. $m=2$. D. $m=-52$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(3;1;-1), B(2;-1;4)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x-y+3z-1=0$.

A. $x-y-z+5=0$. B. $x-13y-5z+5=0$. C. $5x-13y-z+5=0$. D. $x+13y+5z-5=0$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$ và $B(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB .

A. $x+y+2z-6=0$. B. $x+3y+4z-7=0$. C. $x+y+2z-3=0$. D. $x+3y+4z-26=0$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho ba mặt phẳng $(\alpha): x + y + 2z + 1 = 0$, $(\beta): x + y - z + 2 = 0$ và $(\gamma): x - y + 5 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. $(\alpha) // (\gamma)$. B. $(\alpha) \perp (\gamma)$. C. $(\alpha) \perp (\beta)$. D. $(\beta) \perp (\gamma)$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 1), B(4; 5; -2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x - 4y + 5z + 6 = 0$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (α) tại M . Tính tỉ số $\frac{MB}{MA}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. 2. C. 4. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z - 2 = 0$. Tìm tọa độ điểm O' đối xứng của gốc tọa độ O qua mặt phẳng (α) .

- A. $O'(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{2}{3})$. B. $O'(2; 4; -2)$. C. $O'(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3})$. D. $O'(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3})$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Lập phương trình tiếp diện của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z + 5 = 0$ tại điểm $M(4; 3; 0)$.

- A. $x + y + 2z - 10 = 0$. B. $2x + y + 2z - 10 = 0$. C. $x + 2y + z - 10 = 0$. D. $x + 2y + 2z - 10 = 0$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 3; 7), B(4; 1; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .

- A. $x - y - 2z - 9 = 0$. B. $x - y - 2z + 9 = 0$. C. $2x - y - z + 9 = 0$. D. $x - 2y - z - 9 = 0$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) chứa trục Ox và điểm $A(4; -1; 2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (α) ?

- A. $y + 2z = 0$. B. $2y + z = 0$. C. $2x + z = 0$. D. $2x + y = 0$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $D(1; 0; 1), E(5; 2; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\gamma): 2x - y + z - 7 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (α) ?

- A. $x - 2z + 1 = 0$. B. $x - 2y + 1 = 0$. C. $y - 2z + 1 = 0$. D. $z - 2x - 1 = 0$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; -1), B(2; -1; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .

- A. $2x + y + 2z - 3 = 0$. B. $x - y - 2z - 3 = 0$. C. $x - y + 2z - 3 = 0$. D. $x - 4y + 2z + 3 = 0$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) chứa trục Oz và điểm $C(3; -4; 7)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (α) ?

- A. $4x + 3y = 0$. B. $3x + 4y = 0$. C. $x + y = 0$. D. $4x + 3z = 0$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 2; 1), B(3; 0; 1), C(1; 0; 0)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (ABC) ?

- A. $2x - 3y - 4z + 2 = 0$. B. $2x + 3y - 4z - 2 = 0$. C. $2x - 3y - 4z + 1 = 0$. D. $4x + 6y - 8z + 2 = 0$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 0; 1), B(-1; 1; 2), C(-1; 1; 0), D(2; -1; -2)$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} = (-4; -6; 0)$. B. $S_{\triangle BCD} = \sqrt{13}$.
C. $V_{ABCD} = \frac{1}{3}$. D. Phương trình mặt phẳng $(BCD): 4x + 6y + z - 2 = 0$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(1;0;0), N(0;-2;0), P(0;0;-3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (α) ?

- A. $x-3y-2z-6=0$. B. $6x+3y-z-6=0$. C. $6x-3y-2z-6=0$. D. $x-y-z-6=0$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1), D(-2;1;-1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- A. Phương trình mặt phẳng $(BCD): x-2y-2z+2=0$. B. $d(A, (BCD))=1$.
C. $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BD} = (1; -2; -2)$. D. A, B, C, D là bốn đỉnh của một tứ diện.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-1=0$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng của M qua mặt phẳng (α) .

- A. $M'(3;0;2)$. B. $M'(-3;0;-2)$. C. $M'(-3;-2;0)$. D. $M'(0;-2;3)$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $H(2;1;1)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho H là trọng tâm của tam giác ABC . Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (α) ?

- A. $x+y+2z+6=0$. B. $x+2y+z-6=0$. C. $2x+y+z-6=0$. D. $2x+y+z-12=0$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng là $2x-my+3z-6+m=0$ và $(m+3)x-2y+(5m+1)z-10=0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của m để hai mặt phẳng đã cho cắt nhau.

- A. $m \neq -1$. B. $m=1$. C. $m \neq 1$. D. $m=-1$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua các hình chiếu của điểm $B(2;3;4)$ trên các trục tọa độ. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (α) ?

- A. $3x+2y+z-12=0$. B. $x+y+z-12=0$.
C. $6x+4y+3z-12=0$. D. $3x+4y+6z-12=0$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(5;1;3), B(1;6;2), C(5;0;4), D(4;0;6)$. Gọi mặt phẳng (α) đi qua cạnh AB và song song với cạnh CD . Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (α) ?

- A. $10x+9y+5z-74=0$. B. $10x+9y+5z-4=0$.
C. $5x+3y+2z-7=0$. D. $10x-9y+5z+74=0$.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x+my+2mz-9=0$ và $(\beta): 6x-y-z-10=0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của m để hai mặt phẳng đã cho vuông góc với nhau.

- A. $m=-2$. B. $m=-4$. C. $m=2$. D. $m=4$.

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-3=0$ và $(\beta): x-y+z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (γ) vuông góc với (α) và (β) sao cho khoảng cách từ O đến $mp(\gamma)$ bằng 2.

- A. $(\gamma): x-z \pm 3\sqrt{2}=0$. B. $(\gamma): x+z \pm \sqrt{2}=0$.
C. $(\gamma): y-z \pm 2=0$. D. $(\gamma): x-z \pm 2\sqrt{2}=0$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tìm trên trục Oz điểm M cách đều điểm $A(2;3;4)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y + z - 17 = 0$.

- A. $M(0;0;3)$. B. $M(0;0;4)$. C. $M(0;0;5)$. D. $M(0;0;6)$.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-1), B(2;0;1)$. Tìm tọa độ điểm M trong mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2 + MB^2$ đạt giá trị bé nhất.

- A. $M(0;2;1)$. B. $M(0;1;2)$. C. $M(1;1;0)$. D. $M(0;1;0)$.

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + my + 3z - 5 = 0$ và $(\beta): nx - 8y - 6z + 2 = 0$ (m, n là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của m và n để hai mặt phẳng đã cho song song với nhau.

- A. $m = \frac{1}{4}, n = \frac{1}{4}$. B. $m = -4, n = 4$. C. $m = \frac{1}{4}, n = -\frac{1}{4}$. D. $m = 4, n = -4$.

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(4;1;0)$ và $C(-1;4;-1)$. Mặt phẳng (α) nào dưới đây chứa đường thẳng AB mà khoảng cách từ điểm C đến (α) bằng $\sqrt{14}$.

- A. $(\alpha): x - 2y + 3z - 3 = 0$. B. $(\alpha): x - 2y + 3z - 2 = 0$.
C. $(\alpha): x - 2y + 3z - 5 = 0$. D. $(\alpha): x - 2y + 3z = 0$.

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 2z + 11 = 0$ và $(\beta): x + 2y + 2z + 2 = 0$. Tính khoảng cách d giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) .

- A. $d((\alpha), (\beta)) = 7$. B. $d((\alpha), (\beta)) = 4$. C. $d((\alpha), (\beta)) = 10$. D. $d((\alpha), (\beta)) = 3$.

Câu 38: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và

$d': \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = -2 + 5t' \\ z = -2t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa d' và song song với d .

- A. $5x - 11y - 7z + 32 = 0$. B. $11x + 5y + 7z - 32 = 0$.
C. $11x - 7y - 5z - 23 = 0$. D. $11x - 5y - 7z - 32 = 0$.

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $G(1;2;3)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C sao cho G là trọng tâm của tam giác ABC . Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (α) ?

- A. $\frac{x}{6} + \frac{y}{9} + \frac{z}{3} = 1$. B. $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$. C. $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1$. D. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;4), B(3;6;2)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .

- A. $x + 4y - z - 7 = 0$. B. $4x + y - z - 7 = 0$. C. $x + y - 4z + 7 = 0$. D. $x + 4y - z + 7 = 0$.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Lập phương trình mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng $(\beta): x + y + 2z + 1 = 0$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 8 = 0$.

- A. $(\alpha): x + y + 2z - 22 = 0$. B. $(\alpha): x + y + 2z - 1 = 0$.

C. $(\alpha): x + y + 2z - 11 = 0$.

D. $(\alpha): x + y + 2z - 2 = 0$.

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;2), B(-2;1;-1), C(2;-2;-1)$. Tìm tọa độ hình chiếu của gốc O trên mp(ABC).

A. $O' \left(\frac{1}{34}; \frac{2}{17}; -\frac{3}{34} \right)$. B. $O' \left(\frac{2}{17}; -\frac{3}{34}; \frac{3}{34} \right)$. C. $O' \left(\frac{3}{4}; \frac{2}{7}; \frac{3}{4} \right)$. D. $O' \left(\frac{3}{34}; \frac{2}{17}; -\frac{3}{34} \right)$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 3 = 0$. Tìm vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

A. $\vec{n} = (1; -2; 0)$.

B. $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

C. $\vec{n} = (1; 2; 0)$.

D. $\vec{n} = (1; 2; 3)$.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) chứa trục Oy và điểm $B(1;4;-3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (α) ?

A. $x + 3z = 0$.

B. $3y + z = 0$.

C. $3x + z = 0$.

D. $3x - y = 0$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(5;1;3), B(1;6;2), C(5;0;4), D(4;0;6)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = (-2; -1; -1)$.

B. Phương trình $(ACD): 2x + y + z - 14 = 0$.

C. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = (10; 6; 5)$.

D. Phương trình $(BCD): 6x + 5y + 3z - 42 = 0$.

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng là $2x - my + 3z - 6 + m = 0$ và $(m+3)x - 2y + (5m+1)z - 10 = 0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của m để hai mặt phẳng đã cho trùng nhau.

A. $m = 2$.

B. $m \neq 1$.

C. $m \neq 2$.

D. $m = 1$.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(4;1;4), B(3;3;1), C(1;5;5)$ và $D(1;1;1)$. Tìm tọa độ hình chiếu của D trên mp(ABC).

A. $D' \left(\frac{81}{25}; \frac{13}{5}; \frac{33}{25} \right)$. B. $D' \left(\frac{81}{25}; \frac{13}{25}; \frac{33}{25} \right)$. C. $D' \left(\frac{1}{25}; \frac{1}{5}; \frac{3}{25} \right)$. D. $D' \left(\frac{13}{25}; \frac{33}{5}; \frac{81}{25} \right)$.

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 8 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(\alpha): x + y + z - 7 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) đi qua d và vuông góc với mp(α).

A. $(\beta): x + 2y - 3z - 1 = 0$.

B. $(\beta): 2x + y + 3z + 1 = 0$.

C. $(\beta): x + 2y - 3z + 1 = 0$.

D. $(\beta): 2x + y - 3z + 1 = 0$.

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tìm trên trục Oy điểm M cách đều hai mặt phẳng: $(\alpha): x + y - z + 1 = 0$ và $(\beta): x - y + z - 5 = 0$.

A. $M(0; -4; 0)$.

B. $M(0; -5; 0)$.

C. $M(0; -6; 0)$.

D. $M(0; -3; 0)$.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $M_0(1; -1; 2)$ trên mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 12 = 0$.

A. $M'_0 \left(-\frac{29}{9}; \frac{10}{9}; -\frac{20}{9} \right)$.

B. $M'_0 \left(\frac{29}{9}; \frac{10}{9}; \frac{20}{9} \right)$.

C. $M'_0 \left(-\frac{20}{9}; \frac{10}{9}; -\frac{29}{9} \right)$.

D. $M'_0 \left(-\frac{2}{9}; \frac{1}{9}; -\frac{2}{9} \right)$.

Câu 51: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng là $2x - my + 3z - 6 + m = 0$ và $(m+3)x - 2y + (5m+1)z - 10 = 0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của m để hai mặt phẳng đã cho vuông góc với nhau.

- A. $m = -\frac{19}{9}$. B. $m = -\frac{9}{19}$. C. $m = \frac{9}{19}$. D. $m = \frac{19}{9}$.

Câu 52: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 5z + 14 = 0$ và $(\beta): x + my - 2mz + 5 = 0$ (m là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của m để hai mặt phẳng đã cho vuông góc với nhau.

- A. $m = -\frac{11}{2}$. B. $m = \frac{11}{2}$. C. $m = -\frac{2}{11}$. D. $m = \frac{2}{11}$.

Câu 53: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + ny + 2z + 3 = 0$ và $(\beta): mx + 2y - 4z + 7 = 0$ (m, n là tham số thực). Tìm tất cả giá trị của m và n để hai mặt phẳng đã cho song song với nhau.

- A. $m = 4; n = -1$. B. $m = -4; n = -1$. C. $m = -4; n = 1$. D. $m = 4; n = 1$.

Câu 54: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(0; 0; -1)$ và song song với giá của hai vectơ $\vec{a} = (1; -2; 3)$ và $\vec{b} = (3; 0; 5)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) .

- A. $5x - 2y - 3z + 21 = 0$. B. $-5x + 2y + 3z + 3 = 0$.
C. $10x - 4y - 6z + 21 = 0$. D. $5x - 2y - 3z - 21 = 0$.

Câu 55: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và

$d': \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = -2 + 5t' \\ z = -2t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$. Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa d và song song với d' .

- A. $7x - 11y - 5z - 30 = 0$. B. $11x - 5y - 7z + 30 = 0$.
C. $11x + 5y + 7z + 30 = 0$. D. $11x - 7y - 5z + 20 = 0$.

Câu 56: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2; 5; -7)$ và song song với giá của hai vectơ $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (3; 0; 5)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (α) ?

- A. $5x - 2y - 3z - 11 = 0$. B. $5x + 2y + 3z + 21 = 0$.
C. $5x - 2y - 3z + 11 = 0$. D. $5x - 2y - 3z - 21 = 0$.

Câu 57: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $E(0; 2; 0)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): 2x + 3y - 4z - 2 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (α) ?

- A. $2x + 3y - 4z - 12 = 0$. B. $2x + 3y - 4z - 21 = 0$.
C. $2x + 3y - 4z - 6 = 0$. D. $2x + 3y - 4z + 22 = 0$.

Câu 58: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 4x + y - 2 = 0$. Vectơ nào trong các vectơ sau đây có giá vuông góc với mặt phẳng (α) .

- A. $\vec{n} = (-1; 4; 0)$. B. $\vec{n} = (1; 4; 0)$. C. $\vec{n} = (-8; -2; 0)$. D. $\vec{n} = (4; 1; 1)$.

Câu 59: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$.Viết phương trình mặt phẳng qua ba điểm $A(0;2;1), B(3;0;1), C(1;0;0)$.

- A. $2x+3y+4z-2=0$. B. $2x+3y-4z+2=0$. C. $2x-3y-4z+1=0$. D. $2x+3y-4z-2=0$.

Câu 60: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $M(8;-2;4)$ lên các trục Ox, Oy, Oz . Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .

- A. $x-4y+2z-8=0$. B. $x+4y-2z-8=0$. C. $x+4y+2z-8=0$. D. $2x-y+2z-8=0$.

Câu 61: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $B(2;-1;3), C(4;0;1), D(-10;5;3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (α) ?

- A. $2x+2y+z-6=0$. B. $x+2y+2z+6=0$. C. $x+2y+2z-6=0$. D. $2x+y+2z-6=0$.

Câu 62: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua OE và vuông góc với mặt phẳng $(\beta): 2x+3y-4z-2=0$, với $E(0;2;0)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (α) ?

- A. $2x+y+z=0$. B. $2x+z=0$. C. $2y+z=0$. D. $2x+y=0$.

Câu 63: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;-2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 7x-y+2z-1=0$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (α) .

- A. $d(A,(\alpha))=\frac{3}{\sqrt{54}}$. B. $d(A,(\alpha))=\frac{3}{54}$. C. $d(A,(\alpha))=\frac{5}{\sqrt{54}}$. D. $d(A,(\alpha))=\frac{\sqrt{54}}{54}$.

Câu 64: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0), B(0;-1;1), C(2;1;-1), D(3;1;4)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?

- A. 7 mặt phẳng. B. 1 mặt phẳng. C. 4 mặt phẳng. D. Vô số mặt phẳng.

Câu 65: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;4;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-1=0$. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α) .

- A. $H(-1;2;0)$. B. $H(1;2;0)$. C. $H(2;-1;0)$. D. $H(2;1;0)$.

§3. ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng

1. Phương trình tham số

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \neq \vec{0}$ làm vector chỉ phương.

Δ có phương trình tham số là:
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$
, trong đó t là tham số.

2. Phương trình chính tắc

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và nhận vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ với $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ làm vector chỉ

phương. Δ có phương trình chính tắc là:
$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Lưu ý:

Phương trình các trục tọa độ: $Ox: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; $Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$; $Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

Điều kiện để xác định vector chỉ phương của đường thẳng:

① Dùng định nghĩa: $\vec{u} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với $(d) \Leftrightarrow \vec{u}$ là VTCP của (d)

② Nếu (d) vuông góc giá $\vec{a}, \vec{b}$ (không cùng phương) thì $\vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ là một VTCP của (d)

II. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng d và d' lần lượt đi qua hai điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$ và có vector chỉ

phương lần lượt $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{a}' = (a'_1; a'_2; a'_3)$. Đặt $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{a}'$, ta có các điều kiện sau:

- $d // d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \notin d' \end{cases}$
- $d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} = \vec{0} \\ M_0 \in d' \end{cases}$
- d cắt $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} = 0 \end{cases}$
- d và d' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0 M'_0} \neq 0$
- $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{a}' = 0$

Cách khác:

Vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng: $(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$ và $(d'): \begin{cases} x = x'_0 + a'_1 t' \\ y = y'_0 + a'_2 t' \\ z = z'_0 + a'_3 t' \end{cases}$

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} x_0 + a_1 t = x'_0 + a'_1 t' \\ y_0 + a_2 t = y'_0 + a'_2 t' \\ z_0 + a_3 t = z'_0 + a'_3 t' \end{cases} \quad (*)$$

- ♦ Nếu hệ (*) có nghiệm duy nhất thì d cắt d' tại một điểm
- ♦ Nếu hệ (*) có vô số nghiệm thì d trùng với d'
- ♦ Nếu hệ (*) vô nghiệm thì d và d' không có điểm chung

Khi đó:

- Nếu hai vector chỉ phương của d và d' cùng phương trình $d // d'$
- Nếu hai vector chỉ phương của d và d' không cùng phương trình d và d' chéo nhau.

III. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, mặt phẳng (α) có phương trình: $Ax + By + Cz + D = 0$. Gọi $\vec{n} = (A; B; C)$ là vectơ pháp tuyến của (α) . Ta có các điều kiện:

1. $d // (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ M_0 \notin (\alpha) \end{cases}$
2. $d \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \\ M_0 \in (\alpha) \end{cases}$
3. d cắt $(\alpha) \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{n} \neq 0$
4. $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{n} = k\vec{a}$, với mọi k là số thực

Cách khác

Cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$ và mp $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Lập phương trình $A(x_0 + a_1t) + B(y_0 + a_2t) + C(z_0 + a_3t) + D = 0$ (*), (t là ẩn)

- ♦ (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow d // (\alpha)$
- ♦ (*) có đúng 1 nghiệm $t = t_0 \Leftrightarrow d \cap (\alpha) = M(x_0 + a_1t_0; y_0 + a_2t_0; z_0 + a_3t_0)$
- ♦ (*) vô số nghiệm $\Leftrightarrow d \subset (\alpha)$

IV. Tính khoảng cách

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và điểm M

$$\text{Khi đó: } d(M, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

Cách khác: Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ , ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa M và vuông góc với Δ

Bước 2. Tìm giao điểm H của Δ và (α)

Bước 3. Khoảng cách từ M đến Δ chính là khoảng cách giữa hai điểm M và H : $d(M, \Delta) = MH$

2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Để tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ song song với một mặt phẳng (α) , ta thực hiện các bước:

Bước 1. Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ tùy ý trên Δ

Bước 2. Khoảng cách giữa Δ và (α) chính là khoảng cách từ điểm M_0 đến (α) : $d(\Delta, (\alpha)) = d(M_0, (\alpha))$

$$\text{và } d(M_0, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ'

- ♦ Δ qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$
- ♦ Δ' qua điểm B và có vectơ chỉ phương $\vec{b}$

$$\text{Khi đó: } d(\Delta, \Delta') = \frac{|(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\vec{a} \wedge \vec{b}|}$$

Cách khác: Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' , ta thực hiện các bước:

Bước 1. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với Δ'

Bước 2. Lấy một điểm $M'_0(x_0; y_0; z_0)$ tùy ý trên Δ'

Bước 3. Khoảng cách giữa Δ và Δ' chính là khoảng cách từ điểm M'_0 đến $(\alpha): d(\Delta, \Delta') = d(M'_0, (\alpha))$

B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Lập phương trình đường thẳng:

Phương pháp: (Xác định yếu tố: vectơ chỉ phương và điểm thuộc đường thẳng, như bảng dưới đây)

Bước 1. Từ giả thiết, xác định các vectơ và các yếu tố khác liên quan (nếu cần)

Bước 2. Xác định tọa độ vectơ chỉ phương và tọa độ một điểm của đường thẳng

Bước 3. Thay vào phương trình tham số hay phương trình chính tắc

Các dạng

Dạng	Tính chất của đường thẳng d (giả thiết cho)	Đi qua điểm	VTCP
1	Đường thẳng d đi qua A, B	A, B	$\vec{u}_d = \vec{AB}$
2	Đường thẳng d qua A và song song đt Δ	A	$\vec{u}_d = \vec{u}_\Delta$
3	Đường thẳng d qua A và vuông góc mp(α)	A	$\vec{u}_d = \vec{n}_\alpha$
4	Đường thẳng d qua A và vuông góc 2 đt d_1, d_2	A	$\vec{u}_d = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}]$
5	Đường thẳng d qua A và song song mp(α), mp(β) (hay song mp này và chứa trong mp còn lại)	A	$\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta]$
6	Đường thẳng d là giao tuyến của mp(α), mp(β)	Lấy $I \in (\alpha) \cap (\beta)$	$\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta]$
7	Đường thẳng d qua A , vuông góc đường thẳng Δ và song (hay chứa trong) mp(α)	A	$\vec{u}_d = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_\alpha]$
8	Đường thẳng d qua A , vuông góc đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2	A	$\vec{u}_d = [\vec{u}_{d_1}, \vec{n}_\alpha]$ (Với mp(α) là mp qua A và d_2)
9	Đường thẳng d qua A , vuông góc và cắt đường thẳng Δ	A và B (Tìm B là h/chiều của A lên Δ)	$\vec{u}_d = \vec{AB}$
10	Đường thẳng d là hình chiếu của đường thẳng Δ lên (α)	A' và B' (lần lượt là h/chiều của A, B lên (α) ; lấy $A, B \in \Delta$)	$\vec{u}_d = \vec{A'B'}$
11	Đường thẳng d qua A và cắt 2 đường thẳng d_1, d_2	A	$\vec{u}_d = [[\vec{u}_{d_1}, \vec{AM}], [\vec{u}_{d_2}, \vec{AN}]]$ (Lấy $M \in d_1, N \in d_2$)

2. Tìm H là hình chiếu của M trên đường thẳng (d)

Cách 1. H là hình chiếu của M trên đường thẳng $(d) \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (d) \\ \vec{MH} \perp \vec{u}_d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{tọa độ điểm } H \text{ thỏa mãn } (d) \\ \vec{MH} \cdot \vec{u}_d = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình, tìm tọa độ điểm H .

Cách 2. Viết phương trình mp(α) qua M và vuông góc với $(d) \Rightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình gồm phương trình của (d) và (α) .

3. Tìm tọa độ điểm M' là đối xứng với M qua đường thẳng d :

Tìm hình chiếu H của M trên $(d) \Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow$ tọa độ điểm M'

4. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng: Phương pháp (xem nội dung II)

5. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng: Phương pháp (xem nội dung III)

6. Tính khoảng cách: Phương pháp (xem nội dung IV)

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(-1;2;-3)$ và đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}. \text{ Tìm trên đường thẳng } \Delta \text{ điểm } M \text{ sao cho } |\overline{MA} + \overline{MB}| \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

- A. $M(-1;2;-1)$. B. $M(1;2;-1)$. C. $M(1;2;1)$. D. $M(2;1;1)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;0)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$.

Tìm tọa độ điểm A' đối xứng của A qua đường thẳng Δ .

- A. $A'(2;0;1)$. B. $A'(-1;0;2)$. C. $A'(2;0;-1)$. D. $A'(2;1;0)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tính khoảng cách từ điểm $M(1;-1;1)$ đến đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- A. $d(M, \Delta) = \frac{\sqrt{66}}{11}$. B. $d(M, \Delta) = \frac{6\sqrt{11}}{11}$. C. $d(M, \Delta) = \frac{\sqrt{11}}{11}$. D. $d(M, \Delta) = \frac{2\sqrt{11}}{11}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 8 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(\alpha): x + y + z - 7 = 0$. Viết phương trình d' là hình chiếu vuông góc của d trên mp (α) .

- A. $d': \begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 15 - 5t \\ z = t \end{cases}$. B. $d': \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 5 - 5t \\ z = -t \end{cases}$. C. $d': \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$. D. $d': \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 5 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ x = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và

$(\alpha): 11x - 5y - 7z - 32 = 0$. Tìm khoảng cách d giữa Δ và (α) .

- A. $d = \sqrt{195}$. B. $d = \frac{62\sqrt{195}}{5}$. C. $d = \frac{62}{\sqrt{195}}$. D. $d = \frac{\sqrt{62}}{100}$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho đường thẳng $\Delta: x = y = z$. Tìm tọa độ điểm M' là đối xứng của $M(1;2;-1)$ qua đường thẳng Δ .

- A. $M'\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$. B. $M'\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$. C. $M'\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$. D. $M'(1;-2;7)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng

$$(\alpha): y + 2z = 0 \text{ và cắt hai đường thẳng } d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 4 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

$$\text{A. } \Delta: \begin{cases} x = -8 + 7t \\ y = 8 - 8t \\ z = -4 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{B. } \Delta: \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = -8 + t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{C. } \Delta: \frac{x+8}{7} = \frac{y-8}{-8} = \frac{z+4}{4}.$$

$$\text{D. } \Delta: \frac{x-1}{7} = \frac{y}{-8} = \frac{z}{4}.$$

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;2;3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 7z + 1 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình tham số của d .

$$\text{A. } \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = -2 + 3t \\ z = -3 - 7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - 7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = -2 + 6t \\ z = -3 - 14t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 - 7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + z - 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$. Gọi M là giao điểm của d và (α) , hãy viết phương trình của đường thẳng Δ đi qua M vuông góc với d và nằm trong (α) .

$$\text{A. } \Delta: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = \frac{1}{2} + 8t \\ z = -\frac{7}{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{B. } \Delta: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 1 + 8t \\ z = -7 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{C. } \Delta: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = \frac{1}{2} - 8t \\ z = \frac{7}{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{D. } \Delta: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = \frac{1}{2} + 3t \\ z = -\frac{7}{2} + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z + 5 = 0$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. d cắt mặt phẳng (α) .

B. d song song với mặt phẳng (α) .

C. d vuông góc với mặt phẳng (α) .

D. d nằm trong mặt phẳng (α) .

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + 3z + 1 = 0$ và đường thẳng d

có phương trình tham số: $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $d // (\alpha)$.

B. $d \perp (\alpha)$.

C. d cắt (α) .

D. $d \subset (\alpha)$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tìm a để hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = at \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và

$d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = a + 4t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$ song song.

A. $a = 4$.

B. $a = 1$.

C. $a = 3$.

D. $a = 2$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0;0;2), B(3;0;5), C(1;1;0), D(4;1;2)$. Tìm tọa độ hình chiếu H của D trên mp (ABC) .

A. $H\left(\frac{43}{11}; \frac{23}{11}; \frac{14}{11}\right)$. B. $H\left(\frac{14}{11}; \frac{43}{11}; \frac{23}{11}\right)$. C. $H\left(\frac{43}{11}; \frac{14}{11}; \frac{23}{11}\right)$. D. $H\left(\frac{23}{11}; \frac{43}{11}; \frac{14}{11}\right)$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y - z - 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua $A(1;1;-2)$, vuông góc với d và song song với (P) .

A. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{-3}$. B. $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z+2}{-3}$.
C. $\Delta: \frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{5}$. D. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0;0;2), B(3;0;5), C(1;1;0), D(4;1;2)$. Viết phương trình tham số của đường cao tứ diện $ABCD$ hạ từ D .

A. $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. B. $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 1 + 9t \\ z = 2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. C. $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. D. $\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 1 + 9t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tìm khoảng cách d giữa đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z + 3 = 0$.

A. $d(\Delta, (\alpha)) = \frac{2}{5}$. B. $d(\Delta, (\alpha)) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $d(\Delta, (\alpha)) = \frac{2}{3}$. D. $d(\Delta, (\alpha)) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;1)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$. Tìm khoảng cách d từ điểm A đến đường thẳng Δ .

A. $d(A, \Delta) = \frac{5\sqrt{5}}{3}$. B. $d(A, \Delta) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. C. $d(A, \Delta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. D. $d(A, \Delta) = \frac{5\sqrt{5}}{9}$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$. Tính khoảng cách d giữa Δ và (α) .

A. $d(\Delta, (\alpha)) = \frac{\sqrt{14}}{9}$. B. $d(\Delta, (\alpha)) = \frac{9\sqrt{17}}{17}$. C. $d(\Delta, (\alpha)) = \frac{9\sqrt{14}}{14}$. D. $d(\Delta, (\alpha)) = \frac{9\sqrt{11}}{11}$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tính khoảng cách từ điểm $N(2;3;1)$ đến đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$.

A. $d(N, \Delta) = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. B. $d(N, \Delta) = \frac{3\sqrt{2}}{3}$. C. $d(N, \Delta) = \frac{10\sqrt{2}}{3}$. D. $d(N, \Delta) = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 3t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = 3 + 4t' \\ y = 5 + 6t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 7 + 8t' \end{cases}. \text{ Mệnh đề nào dưới đây đúng?}$$

- A. $d_1 \perp d_2$. B. $d_1 // d_2$. C. $d_1 \equiv d_2$. D. d_1 và d_2 chéo nhau.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + z - 1 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm M của d và (α) .

- A. $M\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$. B. $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}\right)$. C. $M\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right)$. D. $M\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho phương trình tham số của $\Delta: \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - 3t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Đường thẳng Δ có phương trình chính tắc là $\frac{x+4}{2} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+1}{2}$.
 B. Đường thẳng Δ qua điểm $M(4; 3; 1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-2; 3; -2)$.
 C. Đường thẳng Δ qua điểm $M(4; 3; 1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -3; 2)$.
 D. Đường thẳng Δ qua điểm $M(4; 3; 1)$ và song song với đường thẳng $\Delta': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -3t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 2t' \end{cases}$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = -1 \\ y = -1, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}; d': \begin{cases} x = 1 \\ y = 1, t' \in \mathbb{R} \\ z = t' \end{cases}$$

- A. $d = 2\sqrt{2}$. B. $d = \sqrt{2}$. C. $d = 2$. D. $d = 4$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}$ và

$$d': \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2}. \text{ Khẳng định nào dưới đây đúng?}$$

- A. d và d' là hai đường thẳng trùng nhau.
 B. d và d' là hai đường thẳng chéo nhau.
 C. d và d' là hai đường thẳng cắt nhau.
 D. d và d' là hai đường thẳng song song với nhau.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM .

- A. $M(-1; 0; 0)$ hoặc $M(2; 0; 0)$. B. $M(1; 0; 0)$ hoặc $M(-2; 0; 0)$.

C. $M(-1;0;0)$ hoặc $M(4;0;0)$.

D. $M(-2;0;0)$ hoặc $M(2;0;0)$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{1}$. Vector nào trong các vector dưới đây có giá song song với đường thẳng Δ .

A. $\vec{u} = (2; -1; 1)$.

B. $\vec{u} = (6; -4; 2)$.

C. $\vec{u} = (-2; 1; -1)$.

D. $\vec{u} = (-2; 3; 1)$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho đường thẳng $\Delta: x = y = z$. Tìm tọa độ điểm M' là đối xứng của $M(1;2;3)$ qua đường thẳng Δ .

A. $M'(1;2;3)$.

B. $M'\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$.

C. $M'(3;2;1)$.

D. $M'(3;1;2)$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $C(3;2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - 5y + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (α) .

A. $\Delta: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 \\ z = 1 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

B. $\Delta: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

C. $\Delta: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 - 5t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

D. $\Delta: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + 5t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$

và $\Delta': \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$.

A. $d(\Delta, \Delta') = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

B. $d(\Delta, \Delta') = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $d(\Delta, \Delta') = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

D. $d(\Delta, \Delta') = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$, $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{6}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. d_1, d_2 trùng nhau.

B. d_1, d_2 chéo nhau.

C. d_1, d_2 song song.

D. d_1, d_2 cắt nhau.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

A. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$.

B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

C. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$.

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ và

$\Delta_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1.

A. $M(4;1;1)$ hoặc $M(4;7;7)$.

B. $M(4;1;1)$ hoặc $M(7;4;4)$.

C. $M(1;4;1)$ hoặc $M(4;7;4)$.

D. $M(1;1;4)$ hoặc $M(4;4;7)$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;4)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases}$. Tìm

điểm H thuộc đường thẳng Δ sao cho đoạn thẳng MH nhỏ nhất.

- A. $H(2;3;3)$. B. $H(3;2;3)$. C. $H(3;3;2)$. D. $H(3;3;3)$.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=3 \\ y=7 \\ z=5-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Vector nào trong các

vector dưới đây có giá song song với đường thẳng Δ .

- A. $\vec{u} = (0;2;1)$. B. $\vec{u} = (2;1;3)$. C. $\vec{u} = (1;0;-1)$. D. $\vec{u} = (0;0;-2)$.

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng

$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$ và $\Delta': \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{4}$.

- A. $d(\Delta, \Delta') = \frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $d(\Delta, \Delta') = \frac{\sqrt{386}}{3}$. C. $d(\Delta, \Delta') = \frac{\sqrt{683}}{3}$. D. $d(\Delta, \Delta') = \frac{\sqrt{386}}{5}$.

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2;0;-1)$ và có vector chỉ phương $\vec{a} = (4;-6;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình tham số của Δ .

- A. $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-6t \\ z=1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. B. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. C. $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. D. $\begin{cases} x=-4+2t \\ y=-6-3t \\ z=2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+4t \\ z=3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và mặt

phẳng $(\alpha): 4x+8y+2z-7=0$. Khẳng định nào dưới đây đúng ?

- A. d cắt mặt phẳng (α) . B. d nằm trong mặt phẳng (α) .
C. d song song với mặt phẳng (α) . D. d vuông góc với mặt phẳng (α) .

Câu 38: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Phương trình nào dưới đây cũng là phương trình của d ?

- A. $\begin{cases} x=3+4t \\ y=1-2t \\ z=4+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. B. $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. C. $\begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. D. $\begin{cases} x=3+4t \\ y=1+2t \\ z=4-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;3), B(3;0;0)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A và B .

- A. $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-2t \\ z=3+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. B. $\Delta: \frac{x+3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$. C. $\Delta: \begin{cases} x=3+2t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. D. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;0)$ và đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t, t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$.

Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ .

- A. $H\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$. B. $H\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$. C. $H(3; 0; -1)$. D. $H(3; 0; 1)$.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(0;1;2)$, $N(1;0;1)$ và $P(2;1;-2)$. Viết phương trình đường thẳng d qua M và song song với đường thẳng NP .

- A. $d: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$. B. $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-3}$. C. $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$. D. $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-3}$.

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tìm a để hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+at \\ y=t \\ z=-1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ cắt

$$d': \begin{cases} x=1-t' \\ y=2+2t' \\ z=3-t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

- A. $a=1$. B. $a=0$. C. $a=2$. D. $a=3$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ và

$$d': \begin{cases} x=3-t \\ y=2t \\ z=-1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \text{ Tìm giao điểm } M \text{ nếu có của } d \text{ và } d'.$$

- A. $M(-1; 1; 0)$. B. $M(-1; 0; 3)$. C. $M(3; 0; -1)$. D. $M(0; -1; 3)$.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt có phương trình là

$$d_1: \begin{cases} x=t \\ y=-1-4t \\ z=6+6t \end{cases} \text{ và } d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{x+2}{-5}. \text{ Viết phương trình chính tắc của đường thẳng } d \text{ đi qua}$$

$M(1; -1; 2)$, vuông góc với d_1 và d_2 .

- A. $d: \frac{x+1}{14} = \frac{y-1}{17} = \frac{z+2}{9}$. B. $d: \frac{x+1}{9} = \frac{y-1}{17} = \frac{z+2}{14}$.
C. $d: \frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{17} = \frac{z-2}{9}$. D. $d: \frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{14} = \frac{z-2}{17}$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $D(-2; 1; 2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua D và song song với trục Oz .

- A. $\Delta: \begin{cases} x=-2 \\ y=1+t, t \in \mathbb{R} \\ z=2+t \end{cases}$. B. $\Delta: \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. C. $\Delta: \begin{cases} x=-2+t \\ y=1 \\ z=2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. D. $\Delta: \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \\ z=2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

§4. MẶT CẦU

A. KIẾN THỨC CẦN NĂM

1. Phương trình chính tắc

Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ bán kính R có phương trình

$$\text{là: } (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \quad (1)$$

Đặc biệt phương trình mặt cầu tâm $O(0; 0; 0)$ bán kính R : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

2. Phương trình tổng quát

Trong không gian $Oxyz$, phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2) với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

là phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ bán kính $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

3. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, cho $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Gọi $d = d(I, (\alpha))$ là khoảng cách từ tâm I đến mp(α). Ta có:

- ♦ $d > R \Rightarrow (S)$ và (α) không có điểm chung
- ♦ $d = R \Rightarrow (\alpha)$ tiếp xúc (S) tại H (H : tiếp điểm, (α) : mặt phẳng tiếp diện)
- ♦ $d < R \Rightarrow (\alpha)$ cắt (S) theo một đường tròn lớn (C) có tâm H là hình chiếu của I lên mp(α) và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

4. Các dạng toán thường gặp khi viết phương trình mặt cầu

Lưu ý: Viết phương trình mặt cầu (S): $\begin{cases} \text{Tâm } I(a; b; c) \\ \text{bán kính } R \end{cases}$

4.1. Lập phương trình mặt cầu:

Phương pháp lập phương trình mặt cầu:

Cách 1: (Xác định yếu tố: Tâm và bán kính, như bảng dưới đây)

Bước 1. Từ giả thiết, xác định các vectơ và các yếu tố khác liên quan (nếu cần)

Bước 2. Xác định tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu

Bước 3. Viết được phương trình mặt cầu (S).

Dạng	Tính chất của mặt cầu (giả thiết cho)	Tâm	Bán kính
1	Mặt cầu (S) tâm I đi qua M	I	$R = MI$
2	Mặt cầu (S) đường kính AB	I là trung điểm AB	$R = \frac{AB}{2} = IA = IB$
3	Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc mp(α)	I	$R = d(I, (\alpha))$
4	Mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc đường thẳng Δ	I	$R = d(I, \Delta)$

Cách 2 : (Xác định hệ số)

Bước 1. Gọi mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, (2)

Bước 2. Từ giả thiết lập hệ 4 phương trình gồm các ẩn a, b, c, d . Giải hệ đó, tìm a, b, c, d

Bước 3. Thay vào phương trình (2)

Dạng 5: Mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ (hay đi qua 4 điểm A, B, C, D)

♦ Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2)

♦ $A, B, C, D \in (S) \Rightarrow$ tọa độ 3 điểm A, B, C, D thỏa mãn (2).

♦ Giải hệ tìm a, b, c, d

Dạng 6: Mặt cầu (S) đi qua 3 điểm A, B, C và tâm $I \in (\alpha)$

♦ Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2) $\Rightarrow$ tâm $I(a, b, c)$

♦ $A, B, C \in (S) \Rightarrow$ tọa độ 3 điểm A, B, C thỏa mãn PT(2) và tâm $I(a; b; c) \in (\alpha)$

♦ Giải hệ 4 phương trình trên tìm a, b, c, d

Dạng 7: Mặt cầu (S) đi qua 2 điểm A, B và tâm $I \in (d)$

Cách 1: Nếu đường thẳng (d) cho bởi phương trình chính tắc:

- ♦ Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2) $\Rightarrow$ tâm $I(a; b; c)$
- ♦ $A, B \in (S) \Rightarrow$ tọa độ điểm A, B thỏa mãn (2) và tâm $I(a; b; c) \in (d)$

♦ Giải hệ 4 phương trình trên tìm a, b, c, d

Cách 2: Nếu đường thẳng (d) cho bởi phương trình tham số

- ♦ $I \in (d) \Rightarrow I(x_0 + a_1t; y_0 + a_2t; z_0 + a_3t)$
- ♦ $A, B \in (S) \Leftrightarrow AI^2 = BI^2$. Ta được phương trình ẩn t , giải tìm t , tìm được tọa độ điểm I

4.2. Phương trình tiếp diện (α) của mặt cầu:

Dạng 1: Mặt phẳng (α) tiếp xúc mặt cầu (S) tại $A \Rightarrow mp(\alpha)$ qua A và có vtpt $\vec{n} = \vec{IA}$

Dạng 2: Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) và vuông góc đường thẳng Δ (có vtcp $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$)

- ♦ Mặt phẳng (α) vuông góc $\Delta \Rightarrow mp(\alpha)$ nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm vtpt $\Rightarrow$ PT $mp(\alpha)$ có dạng: $a_1x + a_2y + a_3z + m = 0$ (m chưa biết)
- ♦ Mặt phẳng (α) tiếp xúc $(S) \Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$

Dạng 3: Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) và song song với $mp(\beta)$ (có vtpt $\vec{n} = (A; B; C)$)

- ♦ Mặt phẳng (α) song song $(\beta) \Rightarrow mp(\alpha)$ nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm vtpt $\Rightarrow$ PT $mp(\alpha)$ có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ (D chưa biết)
- ♦ Mặt phẳng (α) tiếp xúc $(S) \Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$. Tìm được D

Dạng 4: Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) và song song 2 đường thẳng $(d_1), (d_2)$:

- ♦ Mặt phẳng (α) song song 2 đường thẳng (d_1) và $(d_2) \Rightarrow$ VTPT của $mp(\alpha)$ là $\vec{n} = [\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}]$
 $\Rightarrow$ Phương trình $mp(\alpha)$ có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ (D chưa biết)
- ♦ Mặt phẳng (α) tiếp xúc $(S) \Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$. Tìm được D

4.3. Tìm tiếp điểm H của mặt cầu (S) và $mp(\alpha)$ (Khi đó H là hình chiếu của tâm I trên $mp(\alpha)$)

Tìm H là hình chiếu của I trên $mp(\alpha)$

Cách 1. H là hình chiếu của M trên $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} H \in (\alpha) \\ \overline{MH}, \vec{n}_\alpha \text{ cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \frac{x_H - x_M}{A} = \frac{y_H - y_M}{B} = \frac{z_H - z_M}{C} \end{cases} \text{ Suy ra tọa độ điểm } H.$$

Cách 2. Viết phương trình đường thẳng (d) qua I và vuông góc $mp(\alpha) \Rightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình gồm phương trình của (d) và (α)

4.4. Giao điểm của đường thẳng và mặt cầu:

$$\text{Cho đường thẳng } d: \begin{cases} x = x_o + a_1t \\ y = y_o + a_2t \\ z = z_o + a_3t \end{cases} \text{ (1) và mặt cầu } (S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \text{ (2)}$$

- ♦ Thay phương trình đường thẳng d (1) vào phương trình mặt cầu (2), giải tìm t ,
- ♦ Thay t vào (1), tìm được tọa độ giao điểm

4.5. Tìm bán kính r và tâm H của đường tròn (C) (với (C) là thiết diện của $mp(\alpha)$ và mặt cầu (S))

- ♦ Bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(I, \alpha)}$ (với I là tâm và R là bán kính mặt cầu (S))
- ♦ Tìm tâm H là hình chiếu vuông góc của tâm I trên $mp(\alpha)$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S) .

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$.

B. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$.

C. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$.

D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x - 3y + 15z - 2 = 0$. Xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $I\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right), R = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.

B. $I\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right), R = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

C. $I\left(1; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right), R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

D. $I\left(\frac{1}{2}; 1; -\frac{5}{2}\right), R = \sqrt{6}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(5;-3;7)$ và bán kính $R = 2$. Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $(x+5)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2 = 2$.

B. $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 2$.

C. $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 4$.

D. $(x+5)^2 + (y-3)^2 + (z+7)^2 = 4$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 5 = 0$. Xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $I(-2;1;-3), R = 9$.

B. $I(2;1;3), R = 3$.

C. $I(-2;1;-3), R = 3$.

D. $I(2;-1;3), R = 3$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm $A(2;0;1), B(1;0;0), C(1;1;1)$ và có tâm nằm trên mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 2 = 0$.

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z + 1 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và tiếp xúc với mp (Oyz) . Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 100$.

B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 14$.

C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 1$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z + 3 = 0$. Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $I(-1;2;1), R = \sqrt{3}$.

B. $I(1;-2;-1), R = \sqrt{3}$.

C. $I(1;-2;-1), R = 3$.

D. $I(-1;2;1), R = 3$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua ba điểm $A(1;2;-4), B(1;-3;1), C(2;2;3)$ và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) . Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 21 = 0$.

B. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$.

C. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 26$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 21 = 0$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0), B(0;-2;0), C(0;0;4)$ và gốc tọa độ O . Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, O .

A. $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z + 16 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z + 4 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z = 0$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) qua điểm $M(5; -2; 1)$ và có tâm $J(3; -3; 1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 6y + 2z + 14 = 0$.

B. $(x+3)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 5$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 2z + 14 = 0$.

D. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 25$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho (S) là mặt cầu tâm $I(2; 1; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y - z + 3 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$.

B. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = \frac{4}{9}$.

C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \frac{4}{9}$.

D. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 1; 1), B(1; 2; 1), C(1; 1; 2), D(2; 2; 1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D .

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 3y + 3z + 6 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + 1 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 3y + 3z - 6 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua ba điểm $A(0; 8; 0), B(4; 6; 2), C(0; 12; 4)$ và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oyz) . Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 7y - 5z + 48 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 14y - 10z + 18 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 - 14y - 10z + 48 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 + 14y + 10z + 28 = 0$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 2y + 1 = 0$. Xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $I(0; 1; 4), R = 4$.

B. $I(4; 1; 0), R = 2$.

C. $I(1; 0; 4), R = 2$.

D. $I(4; 1; 0), R = 4$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(3; -1; 2), B(1; 1; -2)$ và có tâm nằm trên trục Oz . Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 10 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 10 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 11$.

D. $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm là điểm $C(4; -4; 2)$ và đi qua gốc tọa độ. Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 36$.

B. $(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z-2)^2 = 6$.

C. $(x+4)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2 = 36$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 8y - 4z = 10$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho (S) là mặt cầu tâm $I(2; 1; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y - z + 3 = 0$. Tìm bán kính R của (S) .

A. $R = 2$.

B. $R = \frac{4}{3}$.

C. $R = \frac{2}{9}$.

D. $R = \frac{2}{3}$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0; 0; -2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm A , cắt Δ tại hai điểm B, C sao cho $BC = 8$.

A. $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$.

B. $x^2 + (y+2)^2 + z^2 = 25$.

C. $(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 25$.

D. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 25$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1), D(-2;1;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCD) .

A. $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$.

B. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

C. $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(4;-3;7), B(2;1;3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y + 10z + 26 = 0$.

B. $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z+5)^2 = 3$.

C. $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-5)^2 = 4$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 10z + 26 = 0$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Lập phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm $A(1;2;-4), B(1;-3;1), C(2;2;3)$ và có tâm nằm trên mặt phẳng (Oxy) .

A. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y - 21 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 21 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2z - 21 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 2z - 21 = 0$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $I(-1;2;1), R=9$. B. $I(-1;2;1), R=3$. C. $I(1;-2;-1), R=3$. D. $I(1;-2;-1), R=9$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 8y + 15z - 3 = 0$. Xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

A. $I\left(1; -\frac{4}{3}; -\frac{5}{2}\right), R = \sqrt{19}$.

B. $I\left(1; -\frac{4}{3}; -\frac{5}{2}\right), R = \frac{19}{6}$.

C. $I\left(1; \frac{4}{3}; \frac{5}{2}\right), R = \frac{19}{6}$.

D. $I\left(1; -\frac{4}{3}; -\frac{5}{2}\right), R = \frac{16}{9}$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1), D(1;1;1)$. Tìm bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R = \sqrt{3}$.

B. $R = \sqrt{2}$.

C. $R = \frac{3}{4}$.

D. $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ và điểm $M(0;-1;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại M .

A. $x - y - 2z - 1 = 0$.

B. $2x + y - z + 1 = 0$.

C. $x + y + z + 1 = 0$

D. $x = 0$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 4z - 1 = 0$. Mặt cầu nào trong các mặt cầu sau đây cắt mặt phẳng (P) ?

A. $(x+3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$.

B. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 1$.

C. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 1$.

D. $x^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 1$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 2z + 1 = 0$ và điểm $I(0;-2;1)$. Tìm bán kính R của hình cầu tâm I tiếp xúc với (α) .

A. $R = \frac{7}{\sqrt{29}}$.

B. $R = \frac{5}{\sqrt{29}}$.

C. $R = \frac{3}{\sqrt{29}}$.

D. $R = 29$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có bán kính $R = 2$, tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) và có tâm nằm trên trục Ox . Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

B. $(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 4$.

C. $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 16$.

D. $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$.

GV. Lư Sĩ Pháp

ÔN TẬP CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. VECTO VÀ TỌA ĐỘ

1. Công thức :

1.1. Tọa độ của điểm : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{M} = (x; y; z)$

Tọa độ điểm đặc biệt:

* Điểm trên MP tọa độ: $M \in (Oxy) \Leftrightarrow M(x; y; 0), \quad N \in (Oyz) \Leftrightarrow N(0; y; z),$

$K \in (Oxz) \Leftrightarrow K(x; 0; z)$

* Điểm trên trục tọa độ : $M \in Ox \Leftrightarrow M(x; 0; 0), \quad N \in Oy \Leftrightarrow N(0; y; 0), \quad K \in Oz \Leftrightarrow K(0; 0; z)$

* M là trung điểm $AB \Rightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

* G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$

1.2. Tọa độ của vector: $\vec{a} = a_1.\vec{i} + a_2.\vec{j} + a_3.\vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

Tọa độ vector đặc biệt: $\vec{i} = (1; 0; 0), \quad \vec{j} = (0; 1; 0), \quad \vec{k} = (0; 0; 1)$ lần lượt là vector đơn vị đồng thời cũng là VTCP của trục Ox, Oy, Oz và là VTPT của các mặt phẳng $(Oyz), (Oxz), (Oxy)$

1.3. Phép toán vector: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3); \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$

* Cộng, trừ: $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3) \quad \blacklozenge \quad \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

* Nhân số với vector: $k.\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$

* Tích vô hướng: $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$

Ứng dụng:

$$\blacklozenge |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad \blacklozenge AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\blacklozenge \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

* Tích có hướng: $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; - \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$

Chú ý: $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases}$

1.4. Quan hệ vector: $\blacklozenge \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases} \quad \blacklozenge \vec{a}, \vec{b} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \vec{a} = k.\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = k.b_1 \\ a_2 = k.b_2 \\ a_3 = k.b_3 \end{cases}$

$\blacklozenge \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}].\vec{c} = 0 \quad \blacklozenge \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = 0$

2. Các dạng toán

Dạng 1: Tìm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành

$\blacklozenge$ Chứng minh A, B, C không thẳng hàng

$\blacklozenge ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Dạng 2: Chứng minh $ABCD$ là một tứ diện.

Viết phương trình mp(ABC) và chứng tỏ điểm $D \notin (ABC)$ (tọa độ điểm D không thỏa phương trình mp(ABC))

II. MẶT PHẪNG

1. Tóm tắt lý thuyết

1.1. Vector pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng: Vector $\vec{n} \neq \vec{0}$ có giá vuông góc $mp(\alpha)$ gọi là VTPT của $mp(\alpha)$

1.2. Phương trình: $mp(\alpha)$ qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ có phương trình dạng:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$$

Chú ý :

♦ Nếu $mp(\alpha)$ có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ (2) thì $mp(\alpha)$ có 1 VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$

♦ Mặt phẳng đi qua $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ phương trình có dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$$

♦ Phương trình các mặt phẳng tọa độ: $(Oyz): x = 0; (Oxz): y = 0; (Oxy): z = 0$

♦ Điều kiện để xác định vtpt của mặt phẳng:

① Dùng định nghĩa: $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với $mp(\alpha) \Leftrightarrow \vec{n}$ là VTPT của $mp(\alpha)$

② Nếu $mp(\alpha)$ song song hoặc chứa giá $\vec{a}, \vec{b}$ (không cùng phương) thì $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ là một VTPT của $mp(\alpha)$

1.3. Vị trí tương đối của hai mp $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

♦ $(\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 = k.D_2 \end{cases}$ ♦ $(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1; B_1; C_1) = k(A_2; B_2; C_2) \\ D_1 \neq k.D_2 \end{cases}$

♦ $(\alpha) \cap (\beta) = d \Leftrightarrow (A_1; B_1; C_1) \neq k(A_2; B_2; C_2)$ ♦ $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

1.4. Khoảng cách từ $M(x_0; y_0; z_0)$ đến $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$d(M, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1.5. Góc giữa hai mặt phẳng : $\cos(\alpha, \beta) = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}$

2. Các dạng toán

2.1. Lập phương trình mặt phẳng

Cách 1: (Xác định yếu tố: VTPT và điểm, như bảng dưới đây)

B1. Từ giả thiết, xác định các vector và các yếu tố khác (nếu cần)

B2. Xác định tọa độ VTPT và tọa độ một điểm của mặt phẳng

B3. Thay vào phương trình (1). Thu gọn và kết luận

Cách 2: (Xác định hệ số)

B1. Gọi PT mp đã cho có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0, (2)$

B2. Từ giả thiết, xác định 4 hệ số A, B, C, D (kiểm tra điều kiện, nếu có)

B3. Thay vào phương trình (2). Kết luận

Dạng	Tính chất của $mp(\alpha)$ (giả thiết cho)	Đi qua điểm	VTPT
1	$mp(\alpha)$ qua 3 điểm A, B, C	A, B, C	$\vec{n}_\alpha = [\vec{AB}, \vec{AC}]$
2	$mp(\alpha)$ là mặt phẳng trung trực đoạn AB	M là trung điểm AB	$\vec{n}_\alpha = \vec{AB}$
3	$mp(\alpha)$ qua M và song song $(\beta): Ax + By + Cz + D = 0$	M	$\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = (A; B; C)$
4	$mp(\alpha)$ qua M và vuông góc đường thẳng (d)	M	$\vec{n}_\alpha = \vec{a}_d$
	$mp(\alpha)$ qua M và vuông góc đường thẳng AB	M	$\vec{n}_\alpha = \vec{AB}$
5	$mp(\alpha)$ qua A, B và song song (d)	A hoặc B	$\vec{n}_\alpha = [\vec{AB}, \vec{u}_d]$

	mp(α) qua A, B và song song CD	A hoặc B	$\vec{n}_\alpha = [\vec{AB}, \vec{CD}]$
	mp(α) chứa (d) và song song (d')	Lấy $M \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]$
	mp(α) chứa (d) và song song AB	Lấy $M \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{AB}]$
6	mp(α) qua 2 điểm M, N và vuông góc mp(β)	M hoặc N	$\vec{n}_\alpha = [\vec{MN}, \vec{n}_\beta]$
	mp(α) chứa (d) và vuông góc mp(β)	Lấy $M \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{n}_\beta]$
7	mp(α) qua điểm M và vuông góc 2 mp (β), (γ)	M	$\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_\beta, \vec{n}_\gamma]$
8	mp(α) qua điểm M và song 2 đt $(d), (d')$	M	$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]$
9	mp(α) qua điểm M , vuông góc mp(β) và song đt (d)	M	$\vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d, \vec{n}_\beta]$
10	mp(α) chứa (d) và đi qua $M \notin (d)$	M hoặc Lấy $N \in (d)$	$\vec{n}_\alpha = [\vec{MN}, \vec{u}_d]$

2.2. Tìm H là hình chiếu của M trên mp(α)

Cách 1. H là hình chiếu của M trên mp(α): $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} H \in (\alpha) \\ \overrightarrow{MH}, \vec{n}_\alpha \text{ cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax_H + By_H + Cz_H + D = 0 \\ \frac{x_H - x_M}{A} = \frac{y_H - y_M}{B} = \frac{z_H - z_M}{C} \Rightarrow \text{tọa độ điểm } H. \end{cases}$$

Cách 2. Viết phương trình đường thẳng (d) qua M và vuông góc mp(α) $\Rightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình gồm phương trình của (d) và (α)

2.3. Tìm điểm M' đối xứng với M qua mp(α)

Tìm hình chiếu H của M trên mp(α) $\Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow$ Tọa độ điểm M'

III. ĐƯỜNG THẲNG

1. Tóm tắt lý thuyết

1.1. Vectơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng:

Định nghĩa: Vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng (d) gọi là VTCP của đường thẳng (d)

1.2. Phương trình: Đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, có:

$$\begin{aligned} \diamond \text{ Phương trình tham số: } & \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (1) \\ \diamond \text{ Phương trình chính tắc } & \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}, (a_1, a_2, a_3 \neq 0) \quad (2) \end{aligned}$$

Chú ý:

$$\bullet \text{ Phương trình các trục tọa độ: } Ox: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \quad Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}; \quad Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

• Điều kiện để xác định VTCP của đường thẳng:

① Dùng định nghĩa: $\vec{u} \neq \vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với $(d) \Leftrightarrow \vec{u}$ là VTCP của (d)

② Nếu (d) vuông góc giá $\vec{a}, \vec{b}$ (không cùng phương) thì $\vec{u} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ là một VTCP của (d)

1.3. Vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng : $(d): \begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases}$ và $(d'): \begin{cases} x = x'_o + a'_1 t' \\ y = y'_o + a'_2 t' \\ z = z'_o + a'_3 t' \end{cases}$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x_o + a_1 t = x'_o + a'_1 t' \\ y_o + a_2 t = y'_o + a'_2 t' \\ z_o + a_3 t = z'_o + a'_3 t' \end{cases} (*)$

♦ Nếu hệ (*) có nghiệm duy nhất thì d cắt d' tại một điểm

♦ Nếu hệ (*) có vô số nghiệm thì d trùng với d'

♦ Nếu hệ (*) vô nghiệm thì d và d' không có điểm chung

Khi đó:

• Nếu hai VTCP của d và d' cùng phương trình $d // d'$

• Nếu hai VTCP của d và d' không cùng phương trình d và d' chéo nhau.

1.4. Vị trí tương đối đường thẳng và mặt phẳng:

Cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases}$ và $mp(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Lập phương trình $A(x_o + a_1 t) + B(y_o + a_2 t) + C(z_o + a_3 t) + D = 0 (*)$, (t là ẩn)

▪ (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow d // (\alpha)$

▪ (*) có đúng 1 nghiệm $t = t_0 \Leftrightarrow d \cap (\alpha) = M(x_o + a_1 t_0; y_o + a_2 t_0; z_o + a_3 t_0)$

▪ (*) vô số nghiệm $\Leftrightarrow d \subset (\alpha)$

2. Các dạng toán

2.1. Lập phương trình đường thẳng:

Phương pháp: (Xác định yếu tố: VTCP và điểm, như bảng dưới đây)

B1) Từ giả thiết, xác định các vectơ và các yếu tố khác liên quan (nếu cần)

B2) Xác định tọa độ VTCP và tọa độ một điểm của đường thẳng

B3) Thay vào phương trình tham số hay phương trình chính tắc

Các dạng

Dạng	Tính chất của đường thẳng d (giả thiết cho)	Đi qua điểm	VTCP
1	Đường thẳng d đi qua A, B	A, B	$\vec{u}_d = \vec{AB}$
2	Đường thẳng d qua A và song song đt Δ	A	$\vec{u}_d = \vec{u}_\Delta$
3	Đường thẳng d qua A và vuông góc $mp(\alpha)$	A	$\vec{u}_d = \vec{n}_\alpha$
4	Đường thẳng d qua A và vuông góc 2 đt d_1, d_2	A	$\vec{u}_d = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}]$
5	Đường thẳng d qua A và song song $mp(\alpha), mp(\beta)$ (hay song song mp này và chứa trong mp còn lại)	A	$\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta]$
6	Đường thẳng d là giao tuyến của $mp(\alpha), mp(\beta)$	Lấy $I \in (\alpha) \cap (\beta)$	$\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta]$
7	Đường thẳng d qua A , vuông góc đường thẳng Δ và song song (hay chứa trong) $mp(\alpha)$	A	$\vec{u}_d = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_\alpha]$
8	Đường thẳng d qua A , vuông góc đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2	A	$\vec{u}_d = [\vec{u}_{d_1}, \vec{n}_\alpha]$ (Với $mp(\alpha)$ là mp qua A và d_2)
9	Đường thẳng d qua A , vuông góc và cắt đường thẳng Δ	A và B (Tìm B là h/chiếu của A)	$\vec{u}_d = \vec{AB}$

		lên Δ)	
10	Đường thẳng d là hình chiếu của đường thẳng Δ lên (α)	A' và B' (lần lượt là h/chiều của A, B lên (α) ; lấy $A, B \in \Delta$)	$\vec{u}_d = \vec{A'B'}$
11	Đường thẳng d qua A và cắt 2 đường thẳng d_1, d_2	A	$\vec{u}_d = [\vec{u}_{d_1}, \vec{AM}], [\vec{u}_{d_2}, \vec{AN}]$ (Lấy $M \in d_1, N \in d_2$)

2.1. Tìm H là hình chiếu của M trên đường thẳng (d)

Cách 1. H là hình chiếu của M trên đường thẳng $(d) \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (d) \\ \overline{MH} \perp \vec{u}_d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{tọa độ điểm } H \text{ thỏa mãn } (d) \\ \overline{MH} \cdot \vec{u}_d = 0 \end{cases}$

Giải hệ phương trình, tìm tọa độ điểm H .

Cách 2. Viết PT mp(α) qua M và vuông góc với $(d) \Rightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình gồm phương trình của (d) và (α) .

2.3. Tìm tọa độ điểm M' là đối xứng với M qua đường thẳng d :

Tìm hình chiếu H của M trên $(d) \Rightarrow H$ là trung điểm của $MM' \Rightarrow$ tọa độ điểm M'

IV. MẶT CẦU

1. Tóm tắt lý thuyết

1.1. Phương trình:

♦ Phương trình mặt cầu tâm $I(a; b; c)$ bán kính R có dạng: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ (1)

♦ Phương trình dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2) (với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$) là phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

1.2. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Cho $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ và $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Gọi $d = d(I, (P))$ là khoảng cách từ tâm I đến mp(α):

- $d > R$: $(S) \cap (\alpha) = \emptyset$
- $d = R$: (α) tiếp xúc (S) tại H (H : tiếp điểm, (α) : tiếp diện)
- $d < R$: (α) cắt (S) theo đường tròn có tâm H là hình chiếu của I lên (α) và bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

2. Các dạng toán

2.1. Lập phương trình mặt cầu:

Phương pháp lập phương trình mặt cầu:

Cách 1: (Xác định yếu tố: Tâm và bán kính, như bảng dưới đây)

B1) Từ giả thiết, xác định các vector và các yếu tố khác liên quan (nếu cần)

B2) Xác định tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu

B3) Thay vào PT (1).

Dạng	Tính chất của mặt cầu (giả thiết cho)	Tâm	Bán kính
1	Mặt cầu (S) tâm I đi qua A	I	$R = IA$
2	Mặt cầu (S) đường kính AB	I là trung điểm AB	$R = \frac{AB}{2}$
3	Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc mp(α)	I	$R = d(I, (\alpha))$
4	Mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc đường thẳng Δ	I	$R = d(I, \Delta)$

Cách 2 : (Xác định hệ số)

B1) Gọi mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, (2)

B2) Từ giả thiết lập hệ 4 phương trình gồm các ẩn a, b, c, d . Giải hệ đó, tìm a, b, c, d

B3) Thay vào phương trình (2)

Dạng 5: Mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD (hay đi qua 4 điểm A, B, C, D)

• Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2)

• $A, B, C, D \in (S) \Rightarrow$ tọa độ 3 điểm A, B, C, D thỏa mãn (2).

• Giải hệ tìm a, b, c, d

Dạng 6: Mặt cầu (S) đi qua 3 điểm A, B, C và tâm $I \in (\alpha)$

• Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2) $\Rightarrow$ tâm $I(a, b, c)$

• $A, B, C \in (S) \Rightarrow$ tọa độ 3 điểm A, B, C thỏa mãn PT(2) và tâm $I(a; b; c) \in (\alpha)$

• Giải hệ 4 phương trình trên tìm a, b, c, d

Dạng 7: Mặt cầu (S) đi qua 2 điểm A, B và tâm $I \in (d)$

Cách 1: Nếu đường thẳng (d) cho bởi phương trình chính tắc:

• Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2) $\Rightarrow$ tâm $I(a; b; c)$

• $A, B \in (S) \Rightarrow$ tọa độ điểm A, B thỏa mãn (2) và tâm $I(a; b; c) \in (d)$

• Giải hệ 4 phương trình trên tìm a, b, c, d

Cách 2: Nếu đường thẳng (d) cho bởi phương trình tham số

• $I \in (d) \Rightarrow I(x_0 + a_1t; y_0 + a_2t; z_0 + a_3t)$

• $A, B \in (S) \Leftrightarrow AI^2 = BI^2$. Ta được phương trình ẩn t , giải tìm t , tìm được tọa độ điểm I

2.2. Phương trình tiếp diện (α) của mặt cầu:

Dạng 1: Mặt phẳng (α) tiếp xúc mặt cầu (S) tại A $\Rightarrow$ mp(α) qua A và có vtpt $\vec{n} = \overrightarrow{IA}$

Dạng 2: Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) và vuông góc đường thẳng Δ (có vtcp $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$)

• Mặt phẳng (α) vuông góc $\Delta \Rightarrow$ mp(α) nhận $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ làm vtpt $\Rightarrow$ PT mp(α) có dạng: $a_1x + a_2y + a_3z + m = 0$ (m chưa biết)

• Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$

Dạng 3: Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) và song song với mp(β) (có vtpt $\vec{n} = (A; B; C)$)

• Mặt phẳng (α) song song $(\beta) \Rightarrow$ mp(α) nhận $\vec{n} = (A; B; C)$ làm vtpt $\Rightarrow$ PT mp(α) có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ (D chưa biết)

• Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$. Tìm được D

Dạng 4: Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) và song song 2 đường thẳng $(d_1), (d_2)$:

• Mặt phẳng (α) song song 2 đường thẳng (d_1) và $(d_2) \Rightarrow$ VTPT của mp(α) là $\vec{n} = [\overrightarrow{a_{d_1}}, \overrightarrow{a_{d_2}}]$

$\Rightarrow$ PT mp(α) có dạng: $Ax + By + Cz + D = 0$ (D chưa biết)

• Mặt phẳng (α) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow d(I, (\alpha)) = R$. Tìm được D

2.3. Tìm tiếp điểm H của mặt cầu (S) và mp(α) (Khi đó H là hình chiếu của tâm I trên mp(α))

Như dạng toán tìm hình chiếu của điểm lên mặt phẳng

2.4. Giao điểm của đường thẳng và mặt cầu:

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$ (1) và mặt cầu (S): $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ (2)

• Thay phương trình đường thẳng d (1) vào phương trình mặt cầu (2), giải tìm t ,

• Thay t vào (1), tìm được tọa độ giao điểm

2.5. Tìm bán kính r và tâm H của đường tròn (C) (với (C) là thiết diện của $mp(\alpha)$ và mặt cầu (S))

- Bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(I, \alpha)}$ (với I là tâm và R là bán kính mặt cầu (S))
- Tìm tâm H là hình chiếu vuông góc của tâm I trên $mp(\alpha)$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và điểm $A(1; -1; 2)$. Viết phương trình đường thẳng cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN .

A. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{1}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{2}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{2}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(\alpha): x + y - z + 5 = 0$ và $(\beta): 2x + 2y - 2z + 3 = 0$. Tìm khoảng cách d giữa (α) và (β) .

A. $d((\alpha), (\beta)) = \frac{7\sqrt{3}}{6}$.

B. $d((\alpha), (\beta)) = 2$.

C. $d((\alpha), (\beta)) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

D. $d((\alpha), (\beta)) = \frac{7}{2}$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4z + 12 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $mp(P)$ cắt (S) theo một đường tròn.

B. $mp(P)$ không cắt (S) .

C. $mp(P)$ đi qua tâm của mặt cầu (S) .

D. $mp(P)$ tiếp xúc mặt cầu (S) .

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-2}$ và hai điểm $A(-2; 1; 1), B(-3; -1; 2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$.

A. $M(-2; 1; -5)$ hoặc $M(-14; -35; 19)$.

B. $M(-2; 1; -5)$ hoặc $M(-14; 35; 19)$.

C. $M(2; 1; 5)$ hoặc $M(14; 35; 19)$.

D. $M(2; 1; -5)$ hoặc $M(-14; -35; 19)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(5; 1; 3), B(-5; 1; -1), C(1; -3; 0), D(3; -6; 2)$. Tìm tọa độ của điểm A' đối xứng với A qua $mp(BCD)$.

A. $A'(1; 7; 5)$.

B. $A'(-1; 7; 5)$.

C. $A'(1; -7; -5)$.

D. $A'(1; -7; 5)$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y - z + 5 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{3}$. Gọi (β) là mặt phẳng chứa Δ và song song với (α) . Tính khoảng cách d giữa (α) và (β) .

A. $d((\alpha), (\beta)) = \frac{3}{14}$.

B. $d((\alpha), (\beta)) = \frac{9}{\sqrt{14}}$.

C. $d((\alpha), (\beta)) = \frac{3}{\sqrt{14}}$.

D. $d((\alpha), (\beta)) = \frac{9}{14}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có diện tích bằng 6 nằm trong mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y + z + 5 = 0$. Tính thể tích V hình chóp $S.ABC$ với $S(1; 1; 1)$.

A. $V = 12\sqrt{2}$.

B. $V = 8$.

C. $V = 4$.

D. $V = 3\sqrt{6}$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tính khoảng cách d từ điểm $M(2; 0; 1)$ đến đường thẳng

$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$.

- A. $d(M, d) = \sqrt{3}$. B. $d(M, d) = \sqrt{12}$. C. $d(M, d) = \sqrt{2}$. D. $d(M, d) = 2\sqrt{6}$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và mặt

phẳng $(P): x + y + 2z - 1 = 0$. Khẳng định nào dưới đây đúng ?

- A. d song song với (P) . B. d nằm trong (P) .
C. d vuông góc với (P) . D. Góc giữa d và (P) bằng 45° .

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(2; -1; -1)$ đến mặt phẳng $(\alpha): 16x - 12y - 15z - 4 = 0$. Tính độ dài của đoạn AH .

- A. $AH = 55$. B. $AH = \frac{22}{5}$. C. $AH = \frac{11}{5}$. D. $AH = \frac{11}{25}$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 1; -1), B(-1; 0; 4), C(0; -2; -1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC ?

- A. $x - 2y + 5z - 5 = 0$. B. $x - 2y - 5z = 0$. C. $x - 2y - 5z + 5 = 0$. D. $x - 2y - 5z - 5 = 0$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 5)$ và $B(0; 0; 1)$. Mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với Oy có phương trình nào dưới đây ?

- A. $4x + y - z + 1 = 0$. B. $4x - z + 1 = 0$. C. $2x + z - 5 = 0$. D. $y + 4z - 1 = 0$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-2; -4; 3)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z - 3 = 0$. Tìm khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (α) .

- A. $d(M, (\alpha)) = 1$. B. $d(M, (\alpha)) = 3$. C. $d(M, (\alpha)) = 11$. D. $d(M, (\alpha)) = 2$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 1; -1), B(3; 0; 1), C(2; -1; 3)$, điểm D thuộc trục Oy và thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tìm tọa độ đỉnh D .

- A. $D(0; -7; 0)$. B. $D(0; -7; 0)$ hoặc $D(0; 8; 0)$.
C. $D(0; 8; 0)$. D. $D(0; 7; 0)$ hoặc $D(0; -8; 0)$.

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3-t \end{cases}$ và

$d_2: \begin{cases} x = 1+2t' \\ y = -1+2t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 2-2t' \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng ?

- A. d_1, d_2 chéo nhau. B. d_1, d_2 trùng nhau. C. $d_1 // d_2$. D. d_1, d_2 cắt nhau.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1+3t \\ y = 1+2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3-2t \end{cases}$ và

$d': \begin{cases} x = t' \\ y = 1+t', t' \in \mathbb{R} \\ z = -3+2t' \end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng chứa d và d' .

- A. $6x + 8y - z + 11 = 0$. B. $6x - 8y + z + 11 = 0$. C. $6x - 8y + z + 13 = 0$. D. $6x - 8y + z - 13 = 0$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): mx + y + (n-2)z + m + 2 = 0$. Với mọi số thực m, n mặt phẳng (α) luôn đi qua điểm cố định có tọa độ là điểm nào dưới đây ?

- A. $N(2;1;0)$. B. $M(1;2;0)$. C. $Q(0;1;-2)$. D. $P(-1;-2;0)$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x + 3y - 2z - 1 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z - 11 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C) . Tìm tọa độ tâm H và bán kính r của (C) .

- A. Tâm $H(3;2;1)$, bán kính $r = 5$. B. Tâm $H\left(\frac{3}{7}; \frac{5}{7}; \frac{13}{7}\right)$, bán kính $r = 4$.
C. Tâm $H\left(\frac{3}{7}; \frac{5}{7}; \frac{3}{7}\right)$, bán kính $r = 4$. D. Tâm $H\left(\frac{3}{7}; \frac{5}{7}; \frac{1}{7}\right)$, bán kính $r = 5$.

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2y + z = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. $(\alpha) // Ox$. B. $(\alpha) // Oy$. C. $(\alpha) // (yOz)$. D. $Ox \subset (\alpha)$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \text{ . Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của } d ?$$

- A. $x - 2 = y - 1 = z - 1$. B. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$. C. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$. D. $x + 2 = y + 1 = z + 1$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = -5 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và

$$d': \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - 2t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 5 + 3t' \end{cases} \text{ . Viết phương trình đường vuông góc chung của } d \text{ và } d'.$$

- A. $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. B. $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. C. $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{2}$. D. $\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{2}$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;0), B(1;1;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB và phương trình mặt cầu (S) có tâm O , tiếp xúc với mp (P) .

- A. $(P): 2x + 2y + 2z - 7 = 0, (S): x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{9}$.
B. $(P): 2x + 2y + 2z - 1 = 0, (S): x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
C. $(P): x - y + z - 1 = 0, (S): x^2 + y^2 + z^2 = 2$.
D. $(P): 2x - 2y + 2z - 1 = 0, (S): x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{12}$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = t \\ y = -t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases} \text{ . Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm } A(0;1;1), \text{ vuông góc với } d_1 \text{ và cắt } d_2.$$

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$. B. $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{4}$. C. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$. D. $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=1-t, t \in \mathbb{R} \\ z=1+2t \end{cases}$ và

$d_2: \begin{cases} x=1-2t' \\ y=2t' \\ z=3-4t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. d_1 và d_2 chéo nhau. B. d_1 và d_2 cắt nhau.
C. d_1 và d_2 trùng nhau. D. d_1 và d_2 song song.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;a), B(b;0;0), C(0;c;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .

A. $\frac{x}{a} + \frac{y}{c} + \frac{z}{b} = 1$. B. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. C. $\frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{a} = 1$. D. $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=3+4t \\ y=-1-t, t \in \mathbb{R} \\ z=4+2t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P): x+2y-z+3=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. d cắt (P) . B. d vuông góc với (P) .
C. d song song với (P) . D. d nằm trên (P) .

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ và

$d_2: \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Viết phương trình đường thẳng d qua $A(6;1;-4)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 .

A. $d: \frac{x-2}{-4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{4}$. B. $d: \frac{x}{-4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$.
C. $d: \frac{x-2}{-4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{4}$. D. $d: \frac{x-2}{-4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{4}$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;0;1), B(0;2;3), C(2;1;0)$. Tìm độ dài đường cao h của tam giác kẻ từ C .

A. $h = \frac{\sqrt{26}}{3}$. B. $h = \frac{\sqrt{26}}{2}$. C. $h = \sqrt{26}$. D. $h = 26$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua O và M và viết phương trình mặt cầu (S) tâm A và đi qua O .

A. $OA: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}, (S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$.
B. $OA: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}, (S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 9$.
C. $OA: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}, (S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$.
D. $OA: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}, (S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 4$.

Câu 30: Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc M' của điểm $M(2;0;1)$ trên đường thẳng

$$\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}.$$

- A. $M'(0;-2;1)$. B. $M'(1;0;2)$. C. $M'(-1;4;0)$. D. $M'(2;2;3)$.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+2z-3=0$. Viết phương trình tham số của đường thẳng d qua M và vuông góc với (P) và phương trình mặt cầu (S) có tâm là gốc tọa độ và tiếp xúc với (P) .

- A. $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t, t \in \mathbb{R}, (S): x^2+y^2+z^2=0. \end{cases}$ B. $d: \begin{cases} x=1-t \\ y=-1+2t, t \in \mathbb{R}, (S): x^2+y^2+z^2=4. \end{cases}$
 C. $d: \begin{cases} x=-1+t \\ y=2+2t, t \in \mathbb{R}, (S): x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$ D. $d: \begin{cases} x=t \\ y=2t, t \in \mathbb{R}, (S): x^2+y^2+z^2=2. \end{cases}$
 $z=1+2t$

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-4z-1=0$. Mặt cầu nào trong các mặt cầu sau đây tiếp xúc với mặt phẳng (P) .

- A. $x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=1$. B. $(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=1$.
 C. $(x-1)^2+(y-3)^2+z^2=1$. D. $x^2+(y-3)^2+(z-1)^2=1$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-3y+z-1=0$. Mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm có tọa độ nào dưới đây ?

- A. $(1;0;0), (0;0;1)$. B. $\left(0; \frac{1}{3}; 0\right), (0;0;1)$.
 C. $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), \left(0; -\frac{1}{3}; 0\right), (0;0;1)$. D. $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right), \left(0; -\frac{1}{3}; 0\right)$.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=2t, t \in \mathbb{R} \\ z=1-t \end{cases}$,

$d_2: \begin{cases} x=1+2s \\ y=2+2s, s \in \mathbb{R} \\ z=-s \end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng d_1, d_2 .

- A. $y+2z-2=0$. B. $x+2y-2=0$. C. $x+2z-2=0$. D. $x+y+2z-2=0$.

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$, mp $(\alpha): x+y-z+3=0$ và điểm $A(1;2;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua A , cắt d và song song với mp (α) có phương trình nào dưới đây ?

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$. B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.
 C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$.

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2t \end{cases}$ và

$d_2: \begin{cases} x = 2 - 2t' \\ y = 3 \\ z = t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$. Viết phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 .

- A. $x - 5y + 2z - 12 = 0$. B. $x + 5y + 2z + 12 = 0$. C. $x + 5y - 2z - 12 = 0$. D. $x + 5y + 2z - 12 = 0$.

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 4 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. d cắt (α) . B. $d // (\alpha)$. C. $d \subset (\alpha)$. D. $d \perp (\alpha)$.

Câu 38: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 9$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua tâm của mặt cầu (S) và vuông góc với (P) và xác định tọa độ giao điểm M của d và (P) .

- A. $d: \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{1}, M(3; 1; 3)$. B. $d: \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{-1}, M(3; 0; 3)$.
C. $d: \frac{x+5}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{-1}, M(3; 3; 3)$. D. $d: \frac{x-5}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}, M(3; 0; 3)$.

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - y - 1 = 0$. Điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O trên mặt phẳng (Q) . Tìm góc φ giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

- A. $\varphi = 30^\circ$. B. $\varphi = 90^\circ$. C. $\varphi = 45^\circ$. D. $\varphi = 60^\circ$.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chữ nhật có hai đỉnh $A(-2; 3; 0), B(2; 3; 0)$ và một cạnh nằm trên trục Ox . Khối tròn xoay sinh bởi hình chữ nhật đó khi quay quanh trục Oy có thể tích V ?

- A. $V = 12\pi$. B. $V = 12\pi^2$. C. $V = 6\pi$. D. $V = \frac{4\pi}{3}$.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -5)$. Gọi M, N, P là hình chiếu của A trên ba trục Ox, Oy, Oz . Viết phương trình mặt phẳng (MNP) .

- A. $x + \frac{y}{2} - \frac{z}{5} = 1$. B. $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{5} = 1$. C. $x + \frac{y}{2} - \frac{z}{5} = 0$. D. $x + \frac{y}{2} - \frac{z}{5} + 1 = 0$.

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$ và

$d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 4t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 6t \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. d_1, d_2 chéo nhau. B. d_1, d_2 cắt nhau. C. d_1, d_2 trùng nhau. D. $d_1 // d_2$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -\frac{9}{5} - t \\ y = 5t \\ z = \frac{7}{5} + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và mặt phẳng

$(P): 3x - 2y + 3z - 1 = 0$. Gọi d' là hình chiếu của d trên (P) . Trong các vector sau, vector nào không phải là vector chỉ phương của d' ?

- A. $\vec{a} = (5; 51; 39)$. B. $\vec{b} = (5; -51; -39)$. C. $\vec{d} = (-5; 51; 39)$. D. $\vec{c} = (10; -105; -78)$.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (γ) là mặt phẳng đi qua điểm $M(3; -1; -5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0, (\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Viết phương trình của mặt phẳng (γ) .

- A. $2x + y - 2z - 15 = 0$. B. $2x + y - 2z - 16 = 0$. C. $x + y + z + 3 = 0$. D. $2x + y - 2z + 15 = 0$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1; -1; -2); B(0; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của A trên (P) và viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A, B và vuông góc với (P) .

- A. $H\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right), (Q): 2x - 2y + 2z + 1 = 0$. B. $H\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right), (Q): x - 2y - z - 1 = 0$.

- B. $H\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right), (Q): x - 2y + z + 1 = 0$.

- C. $H\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right), (Q): x - y + z + 1 = 0$.

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$. Mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P) có phương trình nào dưới đây?

- A. $2x + y - 2z - 8 = 0$. B. $2x - 2y + z + 8 = 0$. C. $2x + 2y + z - 8 = 0$. D. $2x - 2y + z - 8 = 0$.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} = z + 3$. Viết phương trình mặt phẳng (A, d) .

- A. $23x + 17y + z - 60 = 0$. B. $23x + 17y - z + 14 = 0$.
C. $23x - 17y - z + 14 = 0$. D. $23x - 17y + z - 14 = 0$.

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 1; 3), B(-1; 3; 2), C(-1; 2; 3)$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O tới $mp(ABC)$.

- A. $d = \sqrt{3}$. B. $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $d = \frac{3}{2}$. D. $d = 3$.

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 1; 1), B(1; 3; 5), C(1; 1; 4), D(2; 3; 2)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD . Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. AB, CD có chung trung điểm. B. $CD \perp IJ$.
C. $AB \perp IJ$. D. $IJ \perp (ABC)$.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; -1); B(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của A trên (P) và viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với (P) .

- A. $H(1; 1; 1), (Q): 10x + 2y + 3z - 15 = 0$. B. $H(1; -1; 1), (Q): 10x - 2y + 3z - 15 = 0$.

C. $H(-1;1;1), (Q): 4x-2y+z+5=0.$

D. $H(1;-1;-1), (Q): x-y+z-1=0.$

Câu 51: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3+2t \\ y = -2+3t, t \in \mathbb{R} \\ z = 6+4t \end{cases}$ và

$d': \begin{cases} x = 5+t' \\ y = -1-4t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 20+t' \end{cases}$. Tìm tọa độ giao điểm M của d và d' .

A. $M(5;-1;20).$

B. $M(3;7;18).$

C. $M(3;-2;1).$

D. $M(-3;-2;6).$

Câu 52: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng qua $M(0;0;-1)$ và song

song với hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{3}, d_2: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2 \\ z = -1+5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

A. $5x-2y-3z-3=0.$

B. $5x-2y-3z-21=0.$

C. $5x-2y-3z+3=0.$

D. $5x-2y-3z+21=0.$

Câu 53: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 6-4t \\ y = -2-t, t \in \mathbb{R} \\ z = -1+2t \end{cases}$.

Tìm tọa độ hình chiếu của A trên đường thẳng d là điểm nào dưới đây ?

A. $Q(-2;3;1).$

B. $M(2;-3;-1).$

C. $P(2;3;1).$

D. $N(2;-3;1).$

Câu 54: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình tham số:

$\begin{cases} x = 2+2t \\ y = -3t \\ z = -3+5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của d ?

A. $x+2=y=z-3.$ **B.** $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}.$ **C.** $x-2=y=z+3.$ **D.** $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}.$

Câu 55: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc M' của điểm

$M(2;0;1)$ trên đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}.$

A. $M'(2;2;3).$

B. $M'(1;0;2).$

C. $M'(0;-2;1).$

D. $M'(-1;-4;0).$

Câu 56: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình của đường thẳng là giao tuyến hai mặt phẳng $(P): 2x+y-z-3=0$ và $(Q): x+y+z-1=0.$

A. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{1}.$

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{1}.$

C. $\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-1}.$

D. $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{1}.$

Câu 57: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Cho điểm $M(1;-2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+z-7=0$. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (P) . Viết phương trình mặt cầu có đường kính MM' .

A. $\left(x-\frac{7}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{11}{3}\right)^2 = 8.$

B. $\left(x-\frac{7}{3}\right)^2 + \left(y+\frac{4}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}.$

C. $\left(x + \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{10}{3}$.

D. $\left(x + \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{5}{8}$.

Câu 58: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Viết phương trình

đường vuông góc chung của d và trục Ox .

A. $\begin{cases} x=0 \\ y=t, t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=0 \\ y=2t, t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=0 \\ y=2-t, t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=t \\ y=t, t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$.

Câu 59: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;0;1), B(-1;-2;0), C(2;1;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với $mp(ABC)$ có phương trình nào dưới đây ?

A. $\begin{cases} x=\frac{1}{3}-5t \\ y=-\frac{1}{3}-4t, t \in \mathbb{R} \\ z=3t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=\frac{1}{3}+5t \\ y=-\frac{1}{3}+4t, t \in \mathbb{R} \\ z=3t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=\frac{1}{3}+5t \\ y=-\frac{1}{3}-4t, t \in \mathbb{R} \\ z=3t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=\frac{1}{3}-5t \\ y=-\frac{1}{3}-4t, t \in \mathbb{R} \\ z=-3t \end{cases}$.

Câu 60: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;-1;3)$ và đường thẳng

$d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2 \\ z=-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Tìm khoảng cách d từ điểm A đến đường thẳng d .

A. $d = \sqrt{8}$.

B. $d = \sqrt{3}$.

C. $d = \sqrt{6}$.

D. $d = \sqrt{14}$.

Câu 61: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z = 0$. Đường thẳng Δ nằm trong (P) vuông góc với d tại giao điểm của d và (P) . Viết phương trình đường thẳng Δ .

A. $\Delta: \begin{cases} x=t \\ y=-2+t, t \in \mathbb{R} \\ z=1-t \end{cases}$.

B. $\Delta: \begin{cases} x=1-t \\ y=2 \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

C. $\Delta: \begin{cases} x=1+t \\ y=2 \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

D. $\Delta: \begin{cases} x=1-t \\ y=-2 \\ z=-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Câu 62: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) - 22 = 0$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 6z + 14 = 0$. Tìm khoảng cách d từ tâm I của mặt cầu (S) tới mặt phẳng (P) .

A. $d = 3$.

B. $d = 4$.

C. $d = 2$.

D. $d = 1$.

Câu 63: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Trong ba điểm $O(0;0;0), M(1;2;3), N(2;-1;-1)$ có bao nhiêu điểm thuộc mặt cầu (S) ?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Câu 64: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với a, b, c là những số dương thay đổi sao cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$. Mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định có tọa độ là điểm nào dưới đây ?

A. $J(2;2;2)$.

B. $I(1;1;1)$.

C. $K\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

D. $H\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 65: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vector $\vec{u} = (1; 0; 2)$ và $\vec{v} = (0; -1; 1)$. Trong các vector sau, vector nào cùng phương với $[\vec{u}, \vec{v}]$?

- A. $\vec{a} = (-2; 1; 1)$. B. $\vec{b} = (1; 1; 1)$ C. $\vec{c} = (0; 1; -1)$. D. $\vec{d} = (2; 2; -1)$.

Câu 66: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tìm một vector chỉ phương của giao tuyến hai mặt phẳng $(P): 3x + 2y - z - 1 = 0$ và $(Q): x + 4y - 3z + 2 = 0$.

- A. $\vec{u} = (5; 4; 1)$. B. $\vec{u} = (-1; -4; 5)$. C. $\vec{u} = (1; 4; 5)$. D. $\vec{u} = (1; -4; -5)$.

Câu 67: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và

$d_2: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + t \end{cases}$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc với d_1 và

cắt d_2 .

- A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+3}{-5}$. B. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.
C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$. D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$.

Câu 68: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; -1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng tọa độ (Oyz) . Viết phương trình mặt cầu (S) .

- A. $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 4$. B. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2$.
C. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$. D. $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$.

Câu 69: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; -1; 6), B(-3; -1; -4), C(5; -1; 0), D(1; 2; 1)$. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

- A. $V = 50$. B. $V = 30$. C. $V = 40$. D. $V = 60$.

Câu 70: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu tâm $I(4; 2; -2)$ bán kính R tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 12x - 5z - 19 = 0$. Tìm bán kính R .

- A. $R = 13$. B. $R = 39$. C. $R = \frac{39}{\sqrt{13}}$. D. $R = 3$.

Câu 71: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2), D(2; 2; 2)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính R bằng bao nhiêu ?

- A. $R = 3$. B. $R = \frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $R = \sqrt{3}$. D. $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 72: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) cắt ba trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C ; trọng tâm tam giác ABC là $G(-1; -3; 2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) .

- A. $x + y - z - 5 = 0$. B. $2x - 3y - z - 1 = 0$. C. $x + 3y - 2z + 1 = 0$. D. $6x + 2y - 3z + 18 = 0$.

Câu 73: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3 - t \end{cases}$ và

$d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A. d chéo với d' . B. $d \equiv d'$. C. $d // d'$. D. d cắt d' .

Câu 74: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(2;6;-3)$ và các mặt phẳng $(\alpha): x-2=0, (\beta): y-6=0, (\gamma): z+3=0$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

- A. $(\alpha) \perp (\beta)$. B. (α) đi qua I . C. $(\beta) // (xOz)$. D. $(\gamma) // Oz$.

Câu 75: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại điểm $A(3;4;3)$ có phương trình nào dưới đây ?

- A. $2x + 2y + z - 17 = 0$. B. $2x + 4y + z - 17 = 0$.
C. $2x + 2y + 2z - 17 = 0$. D. $x + y + z - 17 = 0$.

Câu 76: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$ và

$d': \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$. Tính khoảng cách h giữa d và d' .

- A. $h = \frac{\sqrt{6}}{6}$. B. $h = \sqrt{2}$. C. $h = \frac{\sqrt{14}}{2}$. D. $h = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 77: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;5;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 3y - z - 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d qua A và vuông góc với (P) và tìm tọa độ điểm đối xứng A' của A qua (P) .

- A. $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z}{1}, A'(-1;1;2)$. B. $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{-1}, A'(-1;-1;2)$.
C. $d: \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z}{1}, A'(1;1;2)$. D. $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}, A'(1;-1;2)$.

Câu 78: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;0;2), B(3;0;5), C(1;1;0), D(4;1;2)$. Tìm độ dài đường cao h của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) .

- A. $h = \sqrt{11}$. B. $h = \frac{\sqrt{11}}{11}$. C. $h = 1$. D. $h = 11$.

Câu 79: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;3;1), N(5;6;-2)$. Đường thẳng MN cắt $mp(Oxz)$ tại điểm A . Điểm A chia đoạn MN theo tỉ số k là bao nhiêu ?

- A. $k = \frac{1}{2}$. B. $k = 2$. C. $k = -2$. D. $k = -\frac{1}{2}$.

Câu 80: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và $(Q): x - y + z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2.

- A. $y - z - 2\sqrt{2} = 0$. B. $x - z + 2\sqrt{2} = 0$. C. $x - z \pm 2\sqrt{2} = 0$. D. $x - y \pm 2\sqrt{2} = 0$.

Câu 81: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ và điểm $I(0;0;3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I .

- A. $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{8}{3}$. B. $(S): x^2 + y^2 + z^2 = \frac{8}{3}$.
C. $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8$. D. $(S): x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 2$.

Câu 82: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): 2x + y + z + 3 = 0$, $(Q): x - y - z - 1 = 0$ và $(R): y - z + 2 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $(P) \perp (R)$.

B. Không có điểm nào cùng thuộc ba mặt phẳng trên.

C. $(Q) \perp (R)$.

D. $(P) \perp (Q)$.

Câu 83: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$, $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng qua gốc tọa độ O , đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) .

A. $2x + y - 2z = 0$.

B. $2x + y - 2z + 1 = 0$.

C. $2x - y - 2z = 0$.

D. $2x - y + 2z = 0$.

Câu 84: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM .

A. $M(-1; 0; 0)$ hoặc $M(0; 2; 0)$.

B. $M(1; 0; 0)$ hoặc $M(2; 0; 0)$.

C. $M(-1; 0; 0)$ hoặc $M(2; 0; 0)$.

D. $M(2; 1; 0)$ hoặc $M(1; 2; 0)$.

Câu 85: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(3; 0; 0)$, $B(0; -6; 0)$, $C(0; 0; 6)$ và $mp(\alpha): x + y + z - 4 = 0$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của trọng tâm tam giác ABC trên $mp(\alpha)$ là điểm nào dưới đây?

A. $K(2; -1; -3)$.

B. $N(-2; -1; 3)$.

C. $H(2; -1; 3)$.

D. $M(2; 1; 3)$.

Câu 86: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + mt \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và

$d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để d cắt d' .

A. $m = -1$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 0$.

Câu 87: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho (α) là mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và song song với mặt phẳng $(\beta): x - 4y + z + 12 = 0$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng (α) ?

A. $x - 4y + z + 3 = 0$.

B. $x - 4y + z + 4 = 0$.

C. $x - 4y + z - 4 = 0$.

D. $x - 4y + z - 12 = 0$.

Câu 88: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 2)$, $B(1; -2; -1)$, $C(1; -1; 1)$. Gọi (S) là quỹ tích điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 - MC^2 = 9$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. (S) là một đường thẳng.

B. (S) là mặt cầu tâm O bán kính bằng 3.

C. (S) là một mặt phẳng.

D. (S) là mặt cầu tâm O bán kính bằng 1.

Câu 89: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; 1; 1)$, $B(1; 2; 1)$, $C(1; 1; 2)$ và $D(2; 2; 1)$. Tìm tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $I(3; 3; 3)$.

B. $I(3; -3; 3)$.

C. $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

D. $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 90: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}$, $\Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 và khoảng cách từ M đến (P) bằng nhau.

A. $M(0; 1; 3)$ hoặc $M\left(\frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35}\right)$.

B. $M(0; 1; -3)$ hoặc $M\left(\frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35}\right)$.

C. $M(0; 1; -3)$ hoặc $M\left(\frac{8}{35}; \frac{53}{35}; \frac{13}{35}\right)$.

D. $M(1; 1; 3)$ hoặc $M\left(\frac{1}{35}; \frac{5}{35}; \frac{3}{35}\right)$.

Câu 91: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;4;2), B(-1;2;4)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ mà $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

- A. $M(1;0;4)$. B. $M(0;-1;4)$. C. $M(-1;0;4)$. D. $M(1;0;-4)$.

Câu 92: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;1), B(-1;2;3)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A , vuông góc với hai đường thẳng AB và Δ .

- A. $\frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-4}$. B. $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{4}$.
C. $\frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{4}$. D. $\frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{4}$.

Câu 93: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1 \\ y=1+t \\ z=-1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và hai mặt phẳng

$(P): x-y+z+1=0$ và $(Q): 2x+y-z-4=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $d \perp (P), d \perp (Q)$. B. $d // (P)$. C. $d // (Q)$. D. $d = (P) \cap (Q)$.

Câu 94: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ và

$d_2: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$. Viết phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2 .

- A. $\frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{4}$. B. $\frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-9}{4}$.
C. $\frac{x-7}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{-4}$. D. $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-4}$.

Câu 95: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) chứa trục Oz và điểm $A(2;-3;5)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) .

- A. $3x+2y=0$. B. $2x+3y=0$. C. $3x-2y+z=0$. D. $2x-3y=0$.

Câu 96: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $|\vec{u}|=2, |\vec{v}|=5, (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$. Tìm độ dài d của vector $[\vec{u}, \vec{v}]$.

- A. $d=5$. B. $d=8$. C. $d=5\sqrt{3}$. D. $d=10$.

Câu 97: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Phương trình nào

dưới đây cũng là phương trình của d ?

- A. $\begin{cases} x=3+4t \\ y=1-2t \\ z=4+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. B. $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. C. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=3-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. D. $\begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Câu 98: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình $mp(P)$ chứa trục Oy và điểm $M(1;-1;1)$.

- A. $x+z=0$. B. $x-y=0$. C. $x+y=0$. D. $x-z=0$.

Câu 99: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x-2y+z=0$. Gọi C là giao điểm của Δ và (P) , M là điểm thuộc (P) . Tính khoảng cách từ M đến (P) , biết $MC = \sqrt{6}$.

- A. $d(M, (P)) = \frac{\sqrt{6}}{6}$. B. $d(M, (P)) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $d(M, (P)) = \frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $d(M, (P)) = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

Câu 100: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và

$\Delta_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1.

- A. $M(4;1;4)$ hoặc $M(1;4;4)$. B. $M(7;4;4)$ hoặc $M(1;1;7)$.
C. $M(4;1;4)$ hoặc $M(7;4;4)$. D. $M(4;7;4)$ hoặc $M(7;4;4)$.

Câu 101: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;3), B(-1;-2;1)$ và $C(-1;0;2)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và tính độ dài đường cao h của tam giác ABC kẻ từ đỉnh

- A. $(ABC): 2x+y-2z+6=0, h = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. B. $(ABC): 2x-y-2z+6=0, h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.
C. $(ABC): x+y-2z+6=0, h = \frac{3}{5}$. D. $(ABC): x+y+2z+6=0, h = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 102: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+4y+5z+8=0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y+1=0$ và $(\beta): x-2z-3=0$. Tìm φ là góc giữa đường thẳng d và $mp(P)$.

- A. $\varphi = 45^\circ$. B. $\varphi = 90^\circ$. C. $\varphi = 60^\circ$. D. $\varphi = 30^\circ$.

Câu 103: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;1), B(2;1;3)$ và $(P): x-y+2z-3=0$. Viết phương trình đường thẳng AB và tìm giao điểm M của đường thẳng AB với mặt phẳng (P) .

- A. $AB: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2}, M(0;-5;-1)$. B. $AB: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2}, M(0;-5;1)$.
C. $AB: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}, M(0;5;-1)$. D. $AB: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}, M(1;0;-5)$.

Câu 104: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;-1;2), B(2;-1;0)$. Xác định tọa độ điểm M thuộc d sao cho tam giác AMB vuông tại M .

- A. $M(1;1;0)$ hoặc $M\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$. B. $M(1;-1;0)$ hoặc $M\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.
C. $M(1;-1;0)$ hoặc $M\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$. D. $M(1;-1;1)$ hoặc $M\left(\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Câu 105: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y-3z+14=0$ và điểm $M(1;-1;1)$. Tìm tọa độ của điểm M' đối xứng với M qua $mp(P)$.

- A. $M'(1;-3;7)$. B. $M'(2;-1;1)$. C. $M'(-1;3;7)$. D. $M'(2;-3;-2)$.

Câu 106: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;2;1)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x+4y-6z-5=0, (Q): x+2y-3z=0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $mp(Q)$ không đi qua A và song song với $mp(P)$.

B. $mp(Q)$ không đi qua A và không song song với $mp(P)$.

C. $mp(Q)$ đi qua A và song song với $mp(P)$.

D. $mp(Q)$ đi qua A và không song song với $mp(P)$.

Câu 107: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;-1)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d . Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của A trên d .

A. $(P): x+2y-z+3=0, H\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

B. $(P): 2x+2y+z-3=0, H\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

C. $(P): 2x+2y-z-3=0, H\left(\frac{5}{3};-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

D. $(P): x+y-z-3=0, H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Câu 108: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;3;1), B(0;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-7=0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trên $mp(P)$ sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B .

A. $\begin{cases} x=2t \\ y=7-3t, t \in \mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=t \\ y=7-3t, t \in \mathbb{R} \\ z=2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=-t \\ y=7-3t, t \in \mathbb{R} \\ z=2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=t \\ y=7+3t, t \in \mathbb{R} \\ z=3t \end{cases}$

Câu 109: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;0;3), M(1;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC có trọng tâm thuộc đường thẳng AM .

A. $3x+4y+5z-6=0$.

B. $2x+3y+4z-12=0$.

C. $6x+3y+4z-12=0$.

D. $6x-3y-4z+12=0$.

Câu 110: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3), B(3;-1;1)$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua hai điểm A và B .

A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$.

B. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

C. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{4}$.

Câu 111: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4;-1;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Tìm tọa độ điểm đối xứng A' của A qua d .

A. $A'(2;-3;5)$.

B. $A'(2;3;5)$.

C. $A'(1;2;3)$.

D. $A'(3;5;2)$.

Câu 112: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2)$ và mặt phẳng $(P): 2x-5y+4z-36=0$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của A trên (P) . Viết phương trình mặt cầu tâm I và đi qua

A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-6)^2 = 45$.

B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+6)^2 = 20$.

C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-6)^2 = 4$.

D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+6)^2 = 9$.

Câu 113: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1;2;-3)$. Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là điểm đối xứng của M qua các mặt phẳng $(Oxy), (Oxz), (Oyz)$. Viết phương trình mặt phẳng $(M_1M_2M_3)$.

A. $6x-2y+3z+6=0$. **B.** $6x+2y+3z+6=0$. **C.** $6x-3y-2z+6=0$. **D.** $6x-3y+2z+6=0$.

Câu 114: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng chứa trục Oy và điểm $Q(1;4;-3)$.

A. $x+3z=0$.

B. $3x+y=0$.

C. $3x+z=0$.

D. $3x-z=0$.

Câu 115: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với (α) .

A. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$ hoặc $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.

B. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

C. $4x + 3y - 12z - 78 = 0$ hoặc $4x + 3y - 12z + 26 = 0$.

D. $4x + 3y - 12z + 26 = 0$.

Câu 116: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 3y + z + 1 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. d cắt (α) .

B. $d // (\alpha)$.

C. $d \subset (\alpha)$.

D. $d \perp (\alpha)$.

Câu 117: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ và điểm $A(1;7;3)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho $AM = 2\sqrt{30}$.

A. $M(3; -3; -1)$ hoặc $M\left(\frac{51}{7}; -\frac{1}{7}; -\frac{17}{7}\right)$.

B. $M(3; -3; -1)$.

C. $M\left(\frac{51}{7}; -\frac{1}{7}; -\frac{17}{7}\right)$.

D. $M(3; 3; 1)$ hoặc $M\left(\frac{51}{7}; -\frac{1}{7}; \frac{17}{7}\right)$.

Câu 118: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 11 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 8 = 0$. Tìm tọa độ tiếp điểm M của (P) và (S) .

A. $M(3; 1; 2)$.

B. $M(1; 2; 3)$.

C. $M(2; 1; 3)$.

D. $M(3; 2; 1)$.

Câu 119: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) có phương trình nào dưới đây?

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t, t \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t, t \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t, t \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} x=0 \\ y=-1-t, t \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases}$

Câu 120: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 3), B(-1; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 4 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{AB}{6}$, có tâm thuộc đường thẳng AB và (S) tiếp xúc với (P) .

A. $(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = \frac{1}{3}$.

B. $(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = \frac{1}{3}$ hoặc $(x+6)^2 + (y-5)^2 + (z+4)^2 = \frac{1}{3}$.

C. $(x+2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = \frac{1}{3}$ hoặc $(x-6)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 = \frac{1}{3}$.

D. $(x+6)^2 + (y-5)^2 + (z+4)^2 = \frac{1}{3}$.

Câu 121: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z = 0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng Δ , bán kính bằng 1 và tiếp xúc với mặt phẳng (P) .

- A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$.
 B. $(x-5)^2 + (y-11)^2 + (z-2)^2 = 1$ hoặc $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 1$.
 C. $(x-5)^2 + (y-11)^2 + (z-2)^2 = 1$.
 D. $(x+5)^2 + (y+11)^2 + (z+2)^2 = 1$ hoặc $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Câu 122: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tìm khoảng cách d giữa hai đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases} \text{ và } d': \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}.$$

- A. $d(d, d') = \frac{1}{\sqrt{6}}$. B. $d(d, d') = \sqrt{2}$. C. $d(d, d') = \sqrt{6}$. D. $d(d, d') = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 123: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 10 = 0$ và điểm $I(2; 1; 3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I cắt (P) theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

- A. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$. B. $(S): (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 16$.
 C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 16$. D. $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 25$.

Câu 124: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + z + 1 = 0$ và điểm $A(1; 0; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với (P) và khoảng cách từ điểm A đến (Q) bằng $\sqrt{6}$.

- A. $x + 2y + z - 10 = 0$. B. $x + 2y + z - 2 = 0$.
 C. $x + 2y + z + 10 = 0$ và $x + 2y + z - 2 = 0$. D. $x + 2y + z - 10 = 0$ và $x + 2y + z + 2 = 0$.

Câu 125: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2; 1; 0), B(-2; 3; 2)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d .

- A. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 17$. B. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$.
 C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 19$. D. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 18$.

Câu 126: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2; 3; 5)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y + z - 17 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm H của (d) với Oz .

- A. $H(0; 0; 1)$. B. $H(0; 0; 4)$. C. $H(1; 3; 2)$. D. $H(4; 0; -2)$.

Câu 127: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Gọi d là đường thẳng đi qua gốc tọa độ O , vuông góc

với trục Ox và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 3t \end{cases}$. Viết phương trình của đường thẳng d .

- A. $\begin{cases} x = t \\ y = -3t, t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$. B. $\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$. C. $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = t \\ y = 3t, t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases}$.

Câu 128: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;0), B(1;2;2), C(1;1;0)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-20=0$. Xác định điểm D thuộc AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) .

- A. $D(5;2;-1)$. B. $D\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. C. $D\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};-1\right)$. D. $D\left(\frac{5}{2};-\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 129: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;3), B(1;0;-5)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-3z-4=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho A, B, M thẳng hàng.

- A. $M(0;1;-1)$. B. $M(0;1;1)$. C. $M(1;1;1)$. D. $M(0;1;0)$.

Câu 130: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(6;3;-4)$. Tìm bán kính R của mặt cầu (S) tiếp xúc với trục Ox .

- A. $R=5$. B. $R=2\sqrt{3}$. C. $R=4\sqrt{3}$. D. $R=4$.

Câu 131: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+3y+z+1=0$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=2-3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \text{ Tìm tọa độ giao điểm } A \text{ của } d \text{ và } (\alpha).$$

- A. $A(3;0;-4)$. B. $A(-3;0;4)$. C. $A(3;-4;0)$. D. $A(3;0;4)$.

Câu 132: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng

$$d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}. \text{ Viết phương trình đường thẳng } \Delta \text{ đi qua } A, \text{ vuông góc với } d \text{ và cắt trục } Ox.$$

- A. $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+2t \\ z=1-3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. B. $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2t \\ z=3+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. C. $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3+3t \\ z=2+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. D. $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+2t \\ z=3+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Câu 133: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=2t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Phương trình nào sau đây cũng là phương trình của đường thẳng d ?

- A. $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-t \\ z=3+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. B. $\begin{cases} x=4-2t \\ y=-1+t \\ z=4-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. C. $\begin{cases} x=2t \\ y=1+t \\ z=2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. D. $\begin{cases} x=4+2t \\ y=1-t \\ z=4+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Câu 134: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Gọi I là giao điểm của Δ và (P) . Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MI vuông góc với Δ và $MI=4\sqrt{14}$.

- A. $M(5;9;-11)$ hoặc $M(3;7;13)$. B. $M(5;9;11)$ hoặc $M(-3;-7;13)$.
C. $M(5;9;-11)$ hoặc $M(-3;-7;13)$. D. $M(5;-9;11)$ hoặc $M(3;7;-13)$.

Câu 135: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;-4)$ và $B(-1;2;2)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB .

- A. $4x+2y+12z-17=0$. B. $4x-2y-12z-17=0$.
C. $4x-2y+12z+17=0$. D. $4x+2y-12z-17=0$.

Câu 136: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;1), B(0;-2;3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-z+4=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA=MB=3$.

A. $M(0;1;3)$ hoặc $M\left(-\frac{6}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right)$.

B. $M(0;1;3)$ hoặc $M\left(\frac{6}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right)$.

C. $M(1;0;3)$ hoặc $M\left(-\frac{6}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right)$.

D. $M(3;0;1)$ hoặc $M\left(\frac{2}{7};\frac{3}{7};\frac{4}{7}\right)$.

Câu 137: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): m^2x - y + (m^2 - 2)z + 2 = 0$ và $(\beta): 2x + m^2y - 2z + 1 = 0$ (m là tham số thực). Tìm các giá trị của m để $mp(\alpha)$ vuông góc với $mp(\beta)$.

A. $|m| = \sqrt{3}$.

B. $|m| = 2$.

C. $|m| = 1$.

D. $|m| = \sqrt{2}$.

Câu 138: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và

$d_2: \begin{cases} x = 9 - 2t' \\ y = t' \\ z = -2 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$. Viết phương trình mặt phẳng chứa cả hai đường thẳng d_1, d_2 .

A. $3x + 5y + z - 25 = 0$. B. $3x - 5y + z - 25 = 0$. C. $3x - 5y - z + 25 = 0$. D. $x + y + z - 2 = 0$.

Câu 139: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(-1; -2; 4), B(-4; -2; 0), C(3; -2; 1)$ và $D(1; 1; 1)$. Tìm độ dài đường cao h của tứ diện $ABCD$ kẻ từ đỉnh D .

A. $h = 5$.

B. $h = 2$.

C. $h = \frac{1}{2}$.

D. $h = 3$.

Câu 140: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ .

A. $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. B. $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. C. $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. D. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Câu 141: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{1}$. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1; 2; -3)$ và cắt d tại hai điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{26}$.

A. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 169$.

B. $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 81$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 49$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 25$.

Câu 142: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0; 0; -2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{2}$. Viết phương trình mặt cầu tâm A , cắt Δ tại hai điểm B, C sao cho $BC = 8$.

A. $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25$.

B. $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16$.

C. $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 36$.

D. $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 9$.

Câu 143: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P_1): x + 2y + 3z + 4 = 0$ và $(P_2): 3x + 2y - z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; 1; 1)$, vuông góc với hai mặt phẳng (P_1) và (P_2) .

A. $4x - 5y + 2z - 1 = 0$. B. $4x + 5y + 2z - 3 = 0$. C. $4x - 5y - z + 1 = 0$. D. $2x - 3y + 2z - 5 = 0$.

Câu 144: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;2;1), B\left(-\frac{7}{3};-\frac{10}{3};\frac{11}{3}\right)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$. Xác định tọa độ của tiếp điểm H của mặt phẳng trung trực của đoạn AB và mặt cầu (S) .

- A. $H\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{11}{3}\right)$. B. $H\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{11}{3}\right)$. C. $H\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{11}{3}\right)$. D. $H\left(-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};-\frac{11}{3}\right)$.

Câu 145: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1)$ và $D(-2;1;-1)$. Tính thể tích V của tứ diện $ABCD$.

- A. $V = 2$. B. $V = \frac{1}{2}$. C. $V = 1$. D. $V = \frac{1}{3}$.

Câu 146: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và điểm

$A(3;-2;5)$. Hình chiếu vuông góc của A trên d là điểm nào dưới đây ?

- A. $K(-4;-1;3)$. B. $H(4;-1;3)$. C. $J(4;-1;-3)$. D. $I(-4;1;-3)$.

Câu 147: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tọa độ tâm H và bán kính r của đường tròn đó.

- A. Tâm $H(2;1;2)$, bán kính $r = 3$. B. Tâm $H(1;0;2)$, bán kính $r = 4$.
C. Tâm $H(3;0;2)$, bán kính $r = 5$. D. Tâm $H(3;0;2)$, bán kính $r = 4$.

Câu 148: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu

$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z + 170 = 0$ và song song với hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = -13 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$,

$d': \begin{cases} x = -7 + 3t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = 8 \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$.

- A. $4x + 6y + 5z + 51 \pm 5\sqrt{77} = 0$. B. $4x + 6y + 5z + 51 + 5\sqrt{77} = 0$.
C. $4x + 6y + 5z + 51 - 5\sqrt{77} = 0$. D. $4x + 6y + 5z \pm 51 + 5\sqrt{77} = 0$.

Câu 149: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3;3;-4)$ và tiếp xúc với trục Oy . Tìm bán kính R của mặt cầu (S) .

- A. $R = \frac{5}{2}$. B. $R = 4$. C. $R = \sqrt{5}$. D. $R = 5$.

Câu 150: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;0;0), B(0;2;0), C(0;0;3)$. Phương trình nào sau đây không phải là phương trình mặt phẳng (ABC) ?

- A. $12x + 6y + 4z - 12 = 0$. B. $6x + 3y + 2z - 6 = 0$. C. $6x + 3y + 2z + 6 = 0$. D. $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

Câu 151: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 1 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{3}$. Tìm giao điểm M của d và (P) . Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và vuông góc với (P) .

A. $M(7;3;2)$, $(Q): x+y+z+1=0$. B. $M\left(\frac{7}{2};3;\frac{3}{2}\right)$, $(Q): x-8y+5z+13=0$.

C. $M\left(\frac{1}{2};-3;\frac{1}{2}\right)$, $(Q): x+8y+5z-3=0$. D. $M\left(\frac{7}{2};-3;\frac{3}{2}\right)$, $(Q): x+8y+5z+13=0$.

Câu 152: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3;-2;-2)$, $B(3;2;0)$, $C(0;2;1)$ và $D(-1;1;2)$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm A và tiếp xúc với mp(BCD).

A. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=16$. B. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=15$.
C. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=14$. D. $(x-3)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=17$.

Câu 153: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x+5y-z-2=0$.

A. $M(1;0;1)$. B. $M(12;9;1)$. C. $M(1;1;6)$. D. $M(0;0;-2)$.

Câu 154: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và mặt phẳng $(Q): x+3y-z-27=0$. Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (Q) .

A. $M'(13;6;-4)$. B. $M'(6;13;-4)$. C. $M'(13;-4;6)$. D. $M'(6;3;4)$.

Câu 155: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm $A(1;-2;-5)$ qua

đường thẳng Δ có phương trình:
$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t, t \in \mathbb{R}. \\ z=2t \end{cases}$$

A. $A'(-3;2;1)$. B. $A'(1;2;-3)$. C. $A'(3;-2;1)$. D. $A'(1;3;2)$.

Câu 156: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $|\vec{u}|=2, |\vec{v}|=1, (\vec{u}, \vec{v})=\frac{\pi}{3}$. Tính góc φ giữa vector $\vec{v}$ và vector $\vec{u}-\vec{v}$.

A. $\varphi=30^\circ$. B. $\varphi=90^\circ$. C. $\varphi=60^\circ$. D. $\varphi=45^\circ$.

Câu 157: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $G(1;1;1)$. Mặt phẳng qua G và vuông góc với đường thẳng OG có phương trình là phương trình nào dưới đây ?

A. $x+y-z-3=0$. B. $x+y+z=0$. C. $x+y+z-3=0$. D. $x-y+z+3=0$.

Câu 158: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-2)^2=1$ và hai mặt phẳng $(P): 3x+4z-12=0$, $(Q): 3x+12y+4z-12=0$. Mặt phẳng cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=\frac{3}{5}$ là mặt phẳng nào dưới đây ?

A. mp(P). B. mp(Q).
C. mp(P) và mp(Q). D. Không có mặt phẳng nào.

Câu 159: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): (1+m)x+\sqrt{2}y+(m-1)z+2m=0$ (m là tham số thực) và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=1$. Tìm tất cả giá trị tham số m để mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) .

A. $m=\sqrt{2}$ hoặc $m=-\sqrt{2}$. B. $m=1$ hoặc $m=-1$.
C. $m=\sqrt{2}$. D. $m=-1$.

Câu 160: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) đi qua hai điểm $A(4;-1;1)$, $B(3;1;-1)$ và chứa trục Ox . Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng (α) ?

A. $x + z = 0$.

B. $y + z = 0$.

C. $x + y = 0$.

D. $x + y + z = 0$.

Câu 161: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$,

$d_2: \begin{cases} x=1+2s \\ y=2+2s \\ z=-s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$. Xét vị trí tương đối giữa d_1 và d_2 . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. d_1 và d_2 vuông góc nhau.

B. d_1 và d_2 chéo nhau.

C. d_1 và d_2 song song nhau.

D. d_1 và d_2 cắt nhau.

Câu 162: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ và

$d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$. Tìm khoảng cách d giữa d_1 và d_2 .

A. $d = \frac{4}{3}$.

B. $d = \frac{4\sqrt{3}}{2}$.

C. $d = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

D. $d = 4\sqrt{2}$.

Câu 163: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho biết ba đỉnh của một hình bình hành có tọa độ là $(1;1;1), (2;3;4), (6;5;2)$. Tính diện tích S của hình bình hành.

A. $S = 83$.

B. $S = \sqrt{83}$.

C. $S = \frac{\sqrt{83}}{2}$.

D. $S = 2\sqrt{83}$.

Câu 164: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và hai mặt phẳng

$(P): x + 2y + 2z + 3 = 0$, $(Q): x + 2y + 2z + 7 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc (d) và tiếp xúc với (P) , (Q) .

A. $(S): (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{9}$.

B. $(S): (x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$.

C. $(S): (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{9}$.

D. $(S): (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{9}$.

Câu 165: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tìm bán kính R của mặt cầu tâm $I(1;3;5)$ và tiếp xúc

với đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=-1-t \\ z=2-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

A. $R = \sqrt{7}$.

B. $R = 14$.

C. $R = 7$.

D. $R = \sqrt{14}$.

Câu 166: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;1;0)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{1}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc d sao cho độ dài AM bằng $\sqrt{6}$.

A. $M(1;0;1)$ hay $M(2;0;2)$.

B. $M(1;0;-1)$ hay $M(0;2;-2)$.

C. $M(1;1;0)$ hay $M(0;2;2)$.

D. $M(-1;0;-1)$ hay $M(-2;0;-2)$.

Câu 167: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình các mặt phẳng chứa hai điểm

$A(1;0;0), B(0;-2;3)$ và cách điểm $M(1;1;1)$ một khoảng bằng $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

A. $x + y + z - 1 = 0$ và $23x - 37y - 17z - 23 = 0$. **B.** $x + y + z - 1 = 0$ và $2x - 3y - 7z - 23 = 0$.

C. $x + 2y + z - 1 = 0$ và $23x - 37y - 17z - 23 = 0$. **D.** $2x + 3y + z + 1 = 0$ và $3x - y + z - 3 = 0$.

Câu 168: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2;0;0), N(0;-3;0), P(0;0;4)$. Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành, tìm tọa độ điểm Q .

A. $Q(3;2;4)$. **B.** $Q(4;3;2)$. **C.** $Q(-2;-3;4)$. **D.** $Q(2;3;4)$.

Câu 169: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;-2)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - 2z + 5 = 0$. Tính khoảng cách từ A đến (P) và viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P) .

A. $d(A, (P)) = 2, (Q): x - 2y + 2z + 3 = 0$. **B.** $d(A, (P)) = \frac{2}{3}, (Q): x - 2y - 2z + 3 = 0$.

C. $d(A, (P)) = \frac{1}{3}, (Q): x + 2y - 2z + 3 = 0$. **D.** $d(A, (P)) = \frac{4}{3}, (Q): x - y - z + 3 = 0$.

Câu 170: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 49$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

A. $x + 2y + 2z - 7 = 0$. **B.** $6x + 2y + 3z - 55 = 0$.

C. $6x + 2y + 3z = 0$. **D.** $2x + 3y + 6z - 5 = 0$.

Câu 171: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 4x + y - 2 = 0$. Đường thẳng nào trong các đường thẳng sau vuông góc với mặt phẳng (P) ?

A. $\Delta: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + t \\ z = -4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

B. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

C. $\Delta: \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$.

D. $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = 7 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Câu 172: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 4z - 1 = 0$. Mặt cầu nào trong các mặt cầu sau đây không cắt mặt phẳng (P) ?

A. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 1$. **B.** $(x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = \frac{4}{25}$.

C. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = \frac{1}{25}$. **D.** $x^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 5$.

Câu 173: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường

thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - \frac{3}{2}t \\ y = t \\ z = -2 - \frac{1}{2}mt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ nằm trong mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 2z - 6 = 0$.

A. $m = 4$. **B.** $m = -4$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 4$ và $m = -2$.

Câu 174: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 100$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 9 = 0$. Biết rằng (P) cắt (S) . Tìm tâm và bán kính của đường tròn thiết diện của (P) và (S) .

A. Tâm $J(1;2;3)$, bán kính $r = 7$. **B.** Tâm $J(-1;2;3)$, bán kính $r = 8$.

C. Tâm $J(-1;2;3)$, bán kính $r = 2\sqrt{2}$. **D.** Tâm $J(1;-2;-3)$, bán kính $r = 4$.

Câu 175: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$ và trọng tâm $G(0;2;-1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm C và vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

A.
$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = 3+t, t \in \mathbb{R}. \\ z = -4 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = 3-t, t \in \mathbb{R}. \\ z = -4 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} x = -1+t \\ y = 3+t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 3+t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 4t \end{cases}$$

GV. Lư Sĩ Pháp

ÔN TẬP THI THPT

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;1), B\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Đường thẳng qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là:

A. $\frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-\frac{5}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{11}{6}}{2}$.

B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z-4}{2}$.

C. $\frac{x+\frac{2}{9}}{1} = \frac{y-\frac{2}{9}}{-2} = \frac{z+\frac{5}{9}}{2}$.

D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P): 4x - z + 3 = 0$. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của đường thẳng d ?

A. $\vec{u} = (4; 1; 3)$.

B. $\vec{u} = (4; 1; -1)$.

C. $\vec{u} = (4; -1; 3)$.

D. $\vec{u} = (4; 0; -1)$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A. $x + y - z + 1 = 0$.

B. $x + y - z = 0$.

C. $x + y - z - 2 = 0$.

D. $-x + 2y + z + 5 = 0$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M(3; 0; 0)$.

B. $N(0; -1; 1)$.

C. $Q(0; 0; 1)$.

D. $P(0; -1; 0)$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 1), B(-1; 2; 0), C(2; -3; 2)$. Tập hợp tất cả các điểm M cách đều ba điểm A, B, C là một đường thẳng d . Phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = t \\ z = 15 - 7t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = t \\ z = 15 + 7t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -8 - 3t \\ y = t \\ z = 15 + 7t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -8 + 3t \\ y = -t \\ z = -15 - 7t \end{cases}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 3 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là:

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, a > 0$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (Oxy) theo một đường tròn (C) . Xác định tâm và bán kính của (C) .

A. Tâm $O(0; 0; 0)$ và bán kính $r = 2a$.

B. Tâm $I(1; 1; 0)$ và bán kính $r = 2a$.

C. Tâm $J(0; 1; 1)$ và bán kính $r = a$.

D. Tâm $H(1; 1; 1)$ và bán kính $r = 4a$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 1; 2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

A. 3 mặt phẳng.

B. 4 mặt phẳng.

C. 8 mặt phẳng.

D. 1 mặt phẳng.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2; 1; -3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q): x + y + 3z = 0, (R): 2x - y + z = 0$ là

A. $4x + 5y - 3z + 22 = 0$.

B. $4x - 5y - 3z - 12 = 0$.

C. $2x + y - 3z - 14 = 0$.

D. $4x + 5y - 3z - 22 = 0$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 4), B(-3; 3; -1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 8 = 0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P) , giá trị nhỏ nhất của $2MA^2 + 3MB^2$ bằng

A. 145.

B. 108.

C. 135.

D. 105.

Câu 11: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vec tơ $\vec{a}(1; -2; 0)$ và $\vec{b}(-2; 3; 1)$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $|\vec{b}| = 14$.

B. $2\vec{a} = (2; -4; 0)$.

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -8$.

D. $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 1; -1)$.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 2; -4), B(-3; 5; 2)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho biểu thức $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-2; 4; 0)$.

B. $M(-1; 3; -2)$.

C. $M(-3; 7; -2)$.

D. $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; -1\right)$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 1; 2)$ và đi qua điểm $A(1; -2; -1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 36.

B. 216.

C. 108.

D. 72.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - z + 2 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

A. $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$.

B. $\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$.

C. $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$.

D. $\vec{n}_4 = (-1; 0; -1)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, Cho hai điểm $A(5; -4; 2)$ và $B(1; 2; 4)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là

A. $2x - 3y - z + 8 = 0$.

B. $3x - y + 3z - 13 = 0$.

C. $3x - y + 3z - 25 = 0$.

D. $2x - 3y - z - 20 = 0$.

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến (P) .

A. $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

B. $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$.

C. $d = \frac{5}{9}$.

D. $d = \frac{5}{29}$.

Câu 17: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (1; -2; 3)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{b}$ biết rằng vectơ $\vec{b}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$.

A. $\vec{b} = (2; -2; 3)$.

B. $\vec{b} = (-2; 4; -6)$.

C. $\vec{b} = (2; -4; 6)$.

D. $\vec{b} = (-2; -2; 3)$.

Câu 18: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 16 = 0$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 2 = 0$. Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính là:

A. $r = \sqrt{6}$.

B. $r = 4$.

C. $r = 2\sqrt{3}$.

D. $r = 2\sqrt{2}$.

Câu 19: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; -3), B(-3; -2; -5)$. Biết rằng tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $AM^2 + BM^2 = 30$ là một mặt cầu (S) . Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(-1; -1; -4); R = \frac{\sqrt{30}}{2}$.

B. $I(-1; -1; -4); R = \sqrt{6}$.

C. $I(-2; -2; -8); R = 3$.

D. $I(-1; -1; -4); R = 3$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+3t \\ y=1+4t \\ z=1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm

$A(1;1;1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

- A.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=1+4t \\ z=1-5t \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-10+11t \\ z=-6-5t \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-10+11t \\ z=6-5t \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x=1+7t \\ y=1+t \\ z=1+5t \end{cases}$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$ có bán kính bằng

- A.** 3. **B.** 9. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x+2y+3z-5=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là

- A.** $\vec{n}_3 = (-1; 2; 3)$. **B.** $\vec{n}_2 = (1; 2; 3)$. **C.** $\vec{n}_4 = (1; 2; -3)$. **D.** $\vec{n}_1 = (3; 2; 1)$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox , Oy , Oz lần lượt tại các điểm A , B , C (khác O). Viết phương trình mặt phẳng (P) sao cho M là trọng tâm của tam giác ABC .

- A.** $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 3$. **B.** $6x+3y-2z-6=0$. **C.** $x+2y+3z-14=0$. **D.** $x+2y+3z-11=0$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vector nào dưới đây là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) ?

- A.** $\vec{m} = (1;1;1)$. **B.** $\vec{j} = (0;1;0)$. **C.** $\vec{i} = (1;0;0)$. **D.** $\vec{k} = (0;0;1)$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;1); B(3;3;-1)$. Mặt phẳng (α) là trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

- A.** $(\alpha): x+2y-z-4=0$. **B.** $(\alpha): x+2y-z+2=0$.
C. $(\alpha): x+2y+z-4=0$. **D.** $(\alpha): x+2y-z-3=0$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

- A.** $P(1;2;3)$. **B.** $N(-2;1;-2)$. **C.** $M(-1;-2;-3)$. **D.** $Q(2;-1;2)$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, cho hai vector $\vec{a} = (2;-1;4)$ và $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{k}$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

- A.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -13$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$. **C.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -11$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm A , B với $\vec{OA} = (2;-1;3)$, $\vec{OB} = (5;2;-1)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{AB}$.

- A.** $\vec{AB} = (2;-1;3)$. **B.** $\vec{AB} = (7;1;2)$. **C.** $\vec{AB} = (3;3;-4)$. **D.** $\vec{AB} = (-3;-3;4)$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+3t \\ y=1+4t \\ z=1 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm

$A(1;1;1)$ và có vector chỉ phương $\vec{u} = (-2;1;2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là.

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = -11 - 10t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = 1 + 27t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \\ \text{C. } \begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = 11 - 10t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 17t \\ z = 1 + 10t \end{cases} \end{array}$$

Câu 30: Phương trình đường thẳng song song với đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ và cắt hai đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$; $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$ là:

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1} & \text{B. } \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1} \\ \text{C. } \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} & \text{D. } \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1} \end{array}$$

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$ và điểm $A(-1; -1; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) . M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là

$$\text{A. } 3x + 4y - 2 = 0. \quad \text{B. } 3x + 4y + 2 = 0. \quad \text{C. } 6x + 8y + 11 = 0. \quad \text{D. } 6x + 8y - 11 = 0.$$

Câu 32: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P): 2x - z - 4 = 0$, $(Q): x - 2y - 2 = 0$ là

$$\begin{array}{ll} \text{A. } (S): (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 5. & \text{B. } (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{5}. \\ \text{C. } (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5. & \text{D. } (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3. \end{array}$$

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình mặt cầu.

$$\text{A. } m > 6. \quad \text{B. } m \leq 6. \quad \text{C. } m < 6. \quad \text{D. } m \geq 6.$$

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $A(2; 3; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình

$$\text{A. } 3x + 4y + 2 = 0. \quad \text{B. } 3x + 4y - 2 = 0. \quad \text{C. } 6x + 8y + 11 = 0. \quad \text{D. } 6x + 8y - 11 = 0.$$

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Tọa độ điểm A là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (Oyz) là

$$\text{A. } A(1; -2; 3). \quad \text{B. } A(1; 0; 3). \quad \text{C. } A(0; -2; 3). \quad \text{D. } A(1; -2; 0).$$

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1; 3; -2)$, cắt các tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho $\frac{OA}{1} = \frac{OB}{2} = \frac{OC}{4}$.

$$\text{A. } 4x + 2y + z + 1 = 0. \quad \text{B. } 4x + 2y + z - 8 = 0. \quad \text{C. } 2x - y - z - 1 = 0. \quad \text{D. } x + 2y + 4z + 1 = 0.$$

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc M của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) .

$$\text{A. } M(1; 0; 3). \quad \text{B. } M(1; -2; 0). \quad \text{C. } M(1; 0; 0). \quad \text{D. } M(0; -2; 3).$$

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \end{array}$$

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (S) .

$$\text{A. } I(-1; 2; 1), R = 3. \quad \text{B. } I(1; -2; -1), R = 3. \quad \text{C. } I(-1; 2; 1), R = 9. \quad \text{D. } I(1; -2; -1), R = 9.$$

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}. & \text{B. } \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}. \\ \text{C. } \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{5}. & \text{D. } \frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+5}{1}. \end{array}$$

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$, $A(2; 1; 4)$. Gọi $H(a; b; c)$ là điểm thuộc d sao cho AH có độ dài nhỏ nhất. Tính $T = a^3 + b^3 + c^3$.

$$\text{A. } T = 8. \quad \text{B. } T = \sqrt{5}. \quad \text{C. } T = 13. \quad \text{D. } T = 62.$$

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$ và điểm $A(2; 3; 4)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

$$\begin{array}{ll} \text{A. } x + y + z - 7 = 0. & \text{B. } 2x + 2y + 2z + 15 = 0. \\ \text{C. } 2x + 2y + 2z - 15 = 0. & \text{D. } x + y + z + 7 = 0. \end{array}$$

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 1; 1)$, $B(2; 1; 0)$ và $C(1; -1; 2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

$$\text{A. } x + 2y - 2z + 1 = 0. \quad \text{B. } x + 2z - 1 = 0. \quad \text{C. } x + 2y - 2z - 1 = 0. \quad \text{D. } 3x + 2z + 1 = 0.$$

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z + 2 = 0$ có phương trình là

$$\text{A. } 2x - y - 3z + 11 = 0. \quad \text{B. } 2x - y + 3z - 9 = 0. \quad \text{C. } 2x - y + 3z - 11 = 0. \quad \text{D. } 2x - y + 3z + 11 = 0.$$

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 \end{cases}$, $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$

và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - 3z = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P) , đồng thời vuông góc với d_2 ?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } 2x - y + 2z + 13 = 0. & \text{B. } 2x - y + 2z + 22 = 0. \\ \text{C. } 2x + y + 2z - 22 = 0. & \text{D. } 2x - y + 2z - 13 = 0. \end{array}$$

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2; 1; 3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \end{array}$$

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(3;1;1)$. B. $(3;3;-1)$. C. $(-1;-1;-3)$. D. $(1;1;3)$.

Câu 48: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;2)$, $B(-2;1;3)$, $C(3;2;4)$, $D(6;9;-5)$. Tọa độ trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là

- A. $G(2;-3;1)$. B. $G(2;3;1)$. C. $G(2;3;-1)$. D. $G(-2;3;1)$.

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+z-5=0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

- A. $K(-5;0;0)$. B. $J(2;-1;5)$. C. $I(1;1;6)$. D. $H(0;0;-5)$.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và hai mặt phẳng $(P): x+y+z+1=0$, $(Q): x-y+z-2=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A , song song với (P) và (Q) ?

- A. $\begin{cases} x=-1+t \\ y=2 \\ z=-3-t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2 \\ z=3-t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=3-2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2 \\ z=3+2t \end{cases}$.

Câu 51: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=9$, điểm $M(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-4=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M , thuộc (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho AB nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vector chỉ phương là $\vec{u}=(1;a;b)$, tính $T=a-b$.

- A. $T=0$. B. $T=-2$. C. $T=1$. D. $T=-1$.

Câu 52: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+9=0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu là

- A. $I(1;-2;3)$ và $R=5$. B. $I(-1;2;-3)$ và $R=\sqrt{5}$.
C. $I(1;-2;3)$ và $R=\sqrt{5}$. D. $I(-1;2;-3)$ và $R=5$.

Câu 53: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-1=0$ có một vector pháp tuyến là

- A. $\vec{n}_3=(1;3;2)$. B. $\vec{n}_2=(-1;3;2)$. C. $\vec{n}_1=(2;3;-1)$. D. $\vec{n}_4=(2;3;1)$.

Câu 54: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$. Tính diện tích mặt cầu (S) .

- A. 9π . B. 42π . C. 36π . D. 12π .

Câu 55: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=2$ và điểm $A(1;2;3)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

- A. $2x+2y+2z-15=0$. B. $x+y+z+7=0$.
C. $2x+2y+2z+15=0$. D. $x+y+z-7=0$.

Câu 56: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x=1-t \\ y=5+t \\ z=2+3t \end{cases}$?

- A. $Q(-1;1;3)$. B. $M(1;1;3)$. C. $P(1;2;5)$. D. $N(1;5;2)$.

Câu 57: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+9=0$, đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$ và điểm $A(1;2;-1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A cắt d và song

song với mặt phẳng (P) .

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Câu 58: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(3; -1; 1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$?

A. $x-2y+3z+3=0$. B. $3x-2y+z-12=0$. C. $3x+2y+z-8=0$. D. $3x-2y+z+12=0$.

Câu 59: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 1)$, $B(1; 0; 4)$ và $C(0; -2; -1)$. Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC là

A. $x-2y+3z-7=0$. B. $x+2y+5z+5=0$. C. $x+2y+5z-5=0$. D. $2x+y+2z-5=0$.

Câu 60: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại H . Tìm tọa độ điểm H .

A. $H(1; -1; 0)$. B. $H(-1; 4; 4)$. C. $H(-3; 0; -2)$. D. $H(3; 0; 2)$.

Câu 61: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 1)$ và $C(-1; -1; 1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu có tâm A , bán kính bằng 2; (S_2) và (S_3) là hai mặt cầu có tâm lần lượt là B , C và bán kính đều bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu (S_1) , (S_2) , (S_3) .

A. 6 mặt phẳng. B. 8 mặt phẳng. C. 7 mặt phẳng. D. 5 mặt phẳng.

Câu 62: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+3t \\ y=-3 \\ z=5+4t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm

$A(1; -3; 5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1; 2; -2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-5t \\ z=6+11t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=1-t \\ y=-3 \\ z=5+7t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=1+7t \\ y=-3+5t \\ z=5+t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-5t \\ z=-6+11t \end{cases}$.

Câu 63: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, điểm thuộc trục Ox và cách đều hai điểm $A(4; 2; -1)$ và $B(2; 1; 0)$ là

A. $M(4; 0; 0)$. B. $M(5; 0; 0)$. C. $M(-4; 0; 0)$. D. $M(-5; 0; 0)$.

Câu 64: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 8$. Tìm bán kính R của (S) .

A. $R=4$. B. $R=8$. C. $R=64$. D. $R=2\sqrt{2}$.

Câu 65: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Tính độ dài của đoạn thẳng OA .

A. $OA=5$. B. $OA=9$. C. $OA=\sqrt{5}$. D. $OA=3$.

Câu 66: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(-1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a; b; c)$ thuộc d sao cho $MA^2 + MB^2 = 28$, biết $c < 0$.

A. $M\left(\frac{1}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$. B. $M(-1; 0; -3)$. C. $M(2; 3; 3)$. D. $M\left(-\frac{1}{6}; -\frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$.

Câu 67: Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, cho điểm $M(0; -1; 2)$ và hai đường thẳng

$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$, $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{4}$. Phương trình đường thẳng đi qua M , cắt cả d_1 và d_2 là

- A. $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{4}$. B. $\frac{x}{9} = \frac{y+1}{-9} = \frac{z-2}{16}$. C. $\frac{x}{-9} = \frac{y+1}{9} = \frac{z-2}{16}$. D. $\frac{x}{-\frac{9}{2}} = \frac{y+1}{\frac{9}{2}} = \frac{z+3}{8}$.

Câu 68: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-4y+3z-2=0$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

- A. $\vec{n}_2 = (1; 4; 3)$. B. $\vec{n}_3 = (-1; 4; -3)$. C. $\vec{n}_1 = (0; -4; 3)$. D. $\vec{n}_4 = (-4; 3; -2)$.

Câu 69: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và vuông góc với d có phương trình là

- A. $(P): x-y+2z=0$. B. $(P): 2x-z=0$.
C. $(P): x-y+2z+2=0$. D. $(P): x-y-2z=0$.

Câu 70: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $OABC$ (O là gốc tọa độ), $A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$ và mặt phẳng (ABC) có phương trình: $6x+3y+2z-12=0$. Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng

- A. 14. B. 3. C. 1. D. 8.

Câu 71: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$. Tìm tâm I và bán kính R của (S) .

- A. $I(-5; -1; 2), R=3$. B. $I(5; 1; -2), R=9$. C. $I(5; 1; -2), R=3$. D. $I(-5; -1; 2), R=9$.

Câu 72: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

- A. $y=0$. B. $x+y+z=0$. C. $z=0$. D. $x=0$.

Câu 73: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

- A. $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$. B. $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$. C. $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$. D. $(-2; 11; 1)$.

Câu 74: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 1)$, $B\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là

- A. $\frac{x+\frac{2}{9}}{1} = \frac{y-\frac{2}{9}}{-2} = \frac{z+\frac{5}{9}}{2}$. B. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z-4}{2}$.
C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}$. D. $\frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-\frac{5}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{11}{6}}{2}$.

Câu 75: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và đi qua điểm $A(5; -2; -1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

- A. 128. B. $\frac{256}{3}$. C. 256. D. $\frac{128}{3}$.

Câu 76: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây nằm trên mặt phẳng $(P): 2x-y+z-2=0$.

- A. $Q(1; -2; 2)$. B. $P(2; -1; -1)$. C. $M(1; 1; -1)$. D. $N(1; -1; -1)$.

Câu 77: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B . Biết $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$ và $D(a;b;c)$. Hình thang $ABCD$ có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a+b+c=6$. B. $a+b+c=5$. C. $a+b+c=8$. D. $a+b+c=7$.

Câu 78: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;-1;3)$, $B(1;0;1)$ và $C(-1;1;2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng BC ?

- A. $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$. B. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. C. $x-2y+z=0$. D. $\begin{cases} x=-2t \\ y=-1+t \\ z=3+t \end{cases}$

Câu 79: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ và $(Q): x+2y+2z-3=0$ bằng

- A. $\frac{8}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{7}{3}$. D. 3.

Câu 80: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 20$.

- A. $I(-1;2;-4), R=5\sqrt{2}$. B. $I(1;-2;4), R=20$.
C. $I(-1;2;-4), R=2\sqrt{5}$. D. $I(1;-2;4), R=2\sqrt{5}$.

Câu 81: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2$. Trong các điểm cho dưới đây, điểm nào nằm ngoài mặt cầu (S) ?

- A. $M(1;1;1)$. B. $Q(1;1;0)$. C. $P(1;0;1)$. D. $N(0;1;0)$.

Câu 82: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $(P): x-y-z-1=0$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;1;-2)$, song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d là

- A. $\Delta: \frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{3}$. B. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$.
C. $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-3}$. D. $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{3}$.

Câu 83: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;1)$ và $B(1;2;3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với AB .

- A. $(P): x+3y+4z-26=0$. B. $(P): x+y+2z-6=0$.
C. $(P): x+3y+4z-3=0$. D. $(P): x+y+2z-3=0$.

Câu 84: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ΔABC biết $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(1;1;3)$. Gọi $H(x_0; y_0; z_0)$ là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống BC . Tính $S = x_0 + y_0 + z_0$.

- A. $S = \frac{11}{34}$. B. $S = \frac{30}{11}$. C. $S = \frac{34}{11}$. D. $S = \frac{38}{9}$.

Câu 85: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \begin{cases} x=4-2t \\ y=t \\ z=3 \end{cases}$,

$d_2: \begin{cases} x=1 \\ y=t' \\ z=-t' \end{cases}$. Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng trên là

A. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \frac{3}{2}$.

B. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z+2)^2 = \frac{9}{4}$.

C. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{3}{2}$.

D. $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \frac{9}{4}$.

Câu 86: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3;2;8)$, $N(0;1;3)$ và $P(2;m;4)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

A. $m=4$.

B. $m=-10$.

C. $m=-1$.

D. $m=25$.

Câu 87: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

A. $A'(3;5;-6)$.

B. $A'(2;0;2)$.

C. $A'(4;6;-5)$.

D. $A'(3;4;-6)$.

Câu 88: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 25$.

B. $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 34$.

C. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 34$.

D. $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$.

Câu 89: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) qua ba điểm A , B , C lần lượt là hình chiếu của điểm $M(2;3;-5)$ xuống các trục Ox , Oy , Oz .

A. $15x-10y-6z-30=0$.

B. $15x-10y-6z+30=0$.

C. $15x+10y-6z+30=0$.

D. $15x+10y-6z-30=0$.

Câu 90: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;-2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích là 2π . Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 1$.

B. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 2$.

C. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 3$.

D. $(S): x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 3$.

Câu 91: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2}$ có một vector chỉ phương là

A. $\vec{u}_1 = (3;-1;5)$.

B. $\vec{u}_4 = (1;-1;2)$.

C. $\vec{u}_3 = (1;-1;-2)$.

D. $\vec{u}_2 = (-3;1;5)$.

Câu 92: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1;0;2)$ và đi qua điểm $A(0;1;1)$. Xét các điểm B , C , D thuộc (S) sao cho AB , AC , AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. 8.

B. $\frac{8}{3}$.

C. 4.

D. $\frac{4}{3}$.

Câu 93: Mặt phẳng cắt mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 6z - 1 = 0$ có phương trình là

A. $2x+3y-z-16=0$.

B. $2x+3y-z+10=0$.

C. $2x+3y-z-18=0$.

D. $2x+3y-z+12=0$.

Câu 94: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là

- A. $(2; -1; 5)$. B. $(1; 3; 2)$. C. $(4; -2; 10)$. D. $(2; 6; 4)$.

Câu 95: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 1; 2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ lần lượt tại điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC \neq 0$?

- A. 3. B. 1. C. 4. D. 8.

Câu 96: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(-1; 0; 0)$, $B(0; 0; 2)$, $C(0; -3; 0)$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là

- A. $\frac{\sqrt{14}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{14}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{14}}{2}$. D. $\sqrt{14}$.

Câu 97: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -1)$ và $B(2; 3; 2)$. Vector $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

- A. $(-1; -2; 3)$. B. $(1; 2; 3)$. C. $(3; 5; 1)$. D. $(3; 4; 1)$.

Câu 98: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho $A(1; 0; -3)$, $B(3; 2; 1)$. Mặt phẳng trung trực đoạn AB có phương trình là

- A. $2x + y - z + 1 = 0$. B. $x + y + 2z - 1 = 0$. C. $x + y + 2z + 1 = 0$. D. $2x + y - z - 1 = 0$.

Câu 99: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 5)$. Số mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox , Oy , Oz tại A, B, C sao cho $OA = OB = OC$ (A, B, C không trùng với gốc tọa độ O) là

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 8.

Câu 100: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 10 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại M và N sao cho $A(1; 3; 2)$ là trung điểm MN . Tính độ dài đoạn MN .

- A. $MN = 2\sqrt{26}$. B. $MN = 2\sqrt{33}$. C. $MN = 4\sqrt{33}$. D. $MN = 2\sqrt{66}$.

Câu 101: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào được cho dưới đây là phương trình mặt phẳng (Oyz) ?

- A. $y + z = 0$. B. $x = y + z$. C. $x = 0$. D. $y - z = 0$.

Câu 102: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -1; 0)$, $P(0; 0; 2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là:

- A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 0$. B. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$. C. $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = -1$. D. $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1$.

Câu 103: Trong không gian $Oxyz$, cho biểu diễn của vector $\vec{a}$ qua các vector đơn vị là $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{k} - 3\vec{j}$. Tọa độ của vector $\vec{a}$ là

- A. $(1; -3; 2)$. B. $(2; 1; -3)$. C. $(2; -3; 1)$. D. $(1; 2; -3)$.

Câu 104: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 4; 2)$ và có thể tích bằng $\frac{256\pi}{3}$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

- A. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 4$. B. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 4$.
C. $(x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 16$. D. $(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 4$.

Câu 105: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 1 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là

$$\begin{array}{llll} \text{A. } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases} & \text{B. } \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -4t \\ z = -3t \end{cases} & \text{C. } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases} & \text{D. } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + 6t \\ z = 2 + t \end{cases} \end{array}$$

Câu 106: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và điểm $A(3;2;0)$. Điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là

$$\text{A. } (-1;0;4). \quad \text{B. } (7;1;-1). \quad \text{C. } (2;1;-2). \quad \text{D. } (0;2;-5).$$

Câu 107: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;0;-1)$, $B(2;3;-1)$, $C(-2;1;1)$. Phương trình đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-5}{5}. & \text{B. } \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{5}. \\ \text{C. } \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}. & \text{D. } \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{5}. \end{array}$$

Câu 108: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$. Xét mặt phẳng $(P): 10x + 2y + mz + 11 = 0$, m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) vuông góc với Δ .

$$\text{A. } m = 52. \quad \text{B. } m = -52. \quad \text{C. } m = 2. \quad \text{D. } m = -2.$$

Câu 109: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;3)$, $B(-1;2;5)$, $C(1;0;1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC ?

$$\text{A. } G(-1;0;3). \quad \text{B. } G(0;0;-1). \quad \text{C. } G(1;0;3). \quad \text{D. } G(3;0;1).$$

Câu 110: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y - z - 2 = 0$. Trong các đường thẳng dưới đây, đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (α) , đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d ?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \Delta_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{3}. & \text{B. } \Delta_4: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}. \\ \text{C. } \Delta_3: \frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-5}{1}. & \text{D. } \Delta_1: \frac{x+2}{-3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+4}{-1}. \end{array}$$

Câu 111: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vector chỉ phương là

$$\text{A. } \vec{u}_3 = (2;1;1). \quad \text{B. } \vec{u}_1 = (-1;2;1). \quad \text{C. } \vec{u}_4 = (-1;2;0). \quad \text{D. } \vec{u}_2 = (2;1;0).$$

Câu 112: Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$; $d_2: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 5 = 0$. Đường thẳng vuông góc với (P) , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3}. & \text{B. } \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}. \\ \text{C. } \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3}. & \text{D. } \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}. \end{array}$$

Câu 113: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(a;b;1)$ thuộc mặt phẳng

(P): $2x - y + z - 3 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $2a - b = 3$. B. $2a - b = 2$. C. $2a - b = -2$. D. $2a - b = 4$.

Câu 114: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 1)$ và $B(2; 1; 0)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB có phương trình là

- A. $x + 3y + z - 6 = 0$. B. $3x - y - z + 6 = 0$. C. $x + 3y + z - 5 = 0$. D. $3x - y - z - 6 = 0$.

Câu 115: Trong hệ tọa độ $Oxyz$ cho $I(1; 1; 1)$ và mặt phẳng (P): $2x + y + 2z + 4 = 0$. Mặt cầu (S) tâm I cắt (P) theo một đường tròn bán kính $r = 4$. Phương trình của (S) là

- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$. B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$.
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 16$. D. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 5$.

Câu 116: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 3t (t \in \mathbb{R}) \\ z = 5 - t \end{cases}$. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của đường thẳng d .

- A. $\vec{b} = (1; 3; -1)$. B. $\vec{c} = (0; 3; -1)$. C. $\vec{a} = (1; -3; -1)$. D. $\vec{d} = (1; 2; 5)$.

Câu 117: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P): $2x + y + 3z - 1 = 0$ có một vector pháp tuyến là:

- A. $\vec{n}_3 = (2; 1; 3)$. B. $\vec{n}_2 = (-1; 3; 2)$. C. $\vec{n}_1 = (3; 1; 2)$. D. $\vec{n}_4 = (1; 3; 2)$.

Câu 118: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 0; 0)$, $B(3; 2; 4)$, $C(0; 5; 4)$.

Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất.

- A. $M(1; -3; 0)$. B. $M(1; 3; 0)$. C. $M(3; 1; 0)$. D. $M(2; 6; 0)$.

Câu 119: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $x + 3 = 0$?

- A. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 - t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$

Câu 120: Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$, $d_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{-1}$

và $d_3: \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{6}$. Đường thẳng song song d_3 , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

- A. $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{6}$. B. $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}$.
C. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{6}$. D. $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{6}$.

Câu 121: Đường thẳng $(\Delta): \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{-1}$ không đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $(-1; -3; 1)$. B. $A(-1; 2; 0)$. C. $(3; -1; -1)$. D. $(1; -2; 0)$.

Câu 122: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(2; 3; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P): $x + 3y - z + 5 = 0$?

- A. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$

Câu 123: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$. Gọi I là hình chiếu của M trên trục Ox . Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu tâm I , bán kính IM ?

- A. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 13$. B. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 13$.
C. $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{13}$. D. $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 17$.

Câu 124: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng d có phương trình $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm M , cắt và vuông góc với đường thẳng d là:

- A. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{2}$. B. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{2}$. C. $\frac{x-2}{-3} = \frac{-y+1}{-4} = \frac{z}{-2}$. D. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

Câu 125: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là.

- A. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 3t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$.

Câu 126: Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là

- A. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 1)$. B. $\vec{u}_3 = (2; 1; 3)$. C. $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$. D. $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$.

Câu 127: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 0)$, $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$. C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$.

Câu 128: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz) ?

- A. $y - z = 0$. B. $y = 0$. C. $x = 0$. D. $z = 0$.

Câu 129: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -3)$, $B(-1; 4; 1)$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn AB và song song với d ?

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$. B. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}$. C. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$. D. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Câu 130: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm A, B nằm trên mặt cầu có phương trình $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 9$. Biết rằng AB song song với OI , trong đó O là gốc tọa độ và I là tâm mặt cầu. Viết phương trình mặt phẳng trung trực AB .

- A. $2x + y + z - 4 = 0$. B. $2x - y - z - 6 = 0$. C. $2x + y + z + 4 = 0$. D. $2x - y - z - 12 = 0$.

Câu 131: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4; 0; 1)$ và $B(-2; 2; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB ?

- A. $3x - y - z = 0$. B. $3x + y + z - 6 = 0$. C. $3x - y - z + 1 = 0$. D. $6x - 2y - 2z - 1 = 0$.

Câu 132: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2; 3; 3)$, $N(2; -1; -1)$, $P(-2; -1; 3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y - z + 2 = 0$.

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 10 = 0$.

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 2 = 0$.

D. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 2 = 0$.

Câu 133: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; -1; 2)$; $B(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) có phương trình là:

A. $-x + y = 0$.

B. $x + y + z - 2 = 0$.

C. $3x - 2y - z + 3 = 0$.

D. $3x - 2y - z - 3 = 0$.

Câu 134: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4; 6; 2)$, $B(2; -2; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z = 0$. Xét đường thẳng d thay đổi thuộc (P) và đi qua B , gọi H hình chiếu vuông góc của A trên d . Biết rằng khi d thay đổi thì H thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính R của đường tròn đó.

A. $R = \sqrt{6}$.

B. $R = 2$.

C. $R = 1$.

D. $R = \sqrt{3}$.

Câu 135: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và đi qua điểm $A(1; 0; -1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{64}{3}$.

B. $\frac{32}{3}$.

C. 32.

D. 64.

Câu 136: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 1; 3)$ và hai đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta': \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M , vuông góc với Δ và Δ' ?

A. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

Câu 137: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua M , cắt và vuông góc với Δ là

A. $d: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$.

B. $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 4t \\ z = -2t \end{cases}$.

C. $d: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$.

D. $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 4t \\ z = 2t \end{cases}$.

Câu 138: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$, $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$.

A. $(P): 2y - 2z + 1 = 0$. B. $(P): 2x - 2z + 1 = 0$. C. $(P): 2y - 2z - 1 = 0$. D. $(P): 2x - 2y + 1 = 0$.

Câu 139: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$ và $C(3; 1; 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

A. $A. D(12; 0; 0)$ hoặc $D(6; 0; 0)$.

B. $A. D(-2; 0; 0)$ hoặc $D(-4; 0; 0)$.

C. $D(0; 0; 0)$ hoặc $D(6; 0; 0)$.

D. $A. D(0; 0; 0)$ hoặc $D(-6; 0; 0)$.

Câu 140: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; -2)$ và vuông góc với đường thẳng

$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{3}$ có phương trình là

A. $2x + y + 3z - 2 = 0$.

B. $x + 2y + 3z + 1 = 0$.

C. $3x + 2y + z - 5 = 0$.

D. $2x + y + 3z + 2 = 0$.

Câu 141: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ và

$d': \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d' , đồng thời cách đều hai đường thẳng đó?

A. $\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-2}$.

B. $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+2}{-2}$.

C. $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-2}$.

D. $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-2}$.

Câu 142: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 6), B(0; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 3$.

B. $T = 5$.

C. $T = 2$.

D. $T = 4$.

Câu 143: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 2x + 3y + 4z - 12 = 0$ cắt trục Oy tại điểm có tọa độ là

A. $(0; 4; 0)$.

B. $(0; 6; 0)$.

C. $(0; 3; 0)$.

D. $(0; -4; 0)$.

Câu 144: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(3; 2; -1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$. Viết

phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất.

A. $x + 2y - z - 1 = 0$.

B. $2x - y - 3z + 3 = 0$.

C. $3x + 2y - z + 1 = 0$.

D. $2x + y - 3z + 3 = 0$.

Câu 145: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 3; -1), N(-1; 1; 1)$ và $P(1; m-1; 2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N .

A. $m = -6$.

B. $m = -4$.

C. $m = 2$.

D. $m = 0$.

Câu 146: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy . Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 .

A. $\vec{u}_2 = (1; 2; 0)$.

B. $\vec{u}_1 = (0; 2; 0)$.

C. $\vec{u}_4 = (-1; 2; 0)$.

D. $\vec{u}_2 = (1; 0; 0)$.

Câu 147: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; -1)$ và đi qua điểm $A(2; 1; 2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A ?

A. $x + y - 3z - 8 = 0$.

B. $x + y - 3z + 3 = 0$.

C. $x - y - 3z + 3 = 0$.

D. $x + y + 3z - 9 = 0$.

Câu 148: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{a} = (-1; -2; 3)$. Tìm tọa độ của vector $\vec{b} = (2; y; z)$, biết rằng vector $\vec{b}$ cùng phương với vector $\vec{a}$.

A. $\vec{b} = (2; 4; 6)$.

B. $\vec{b} = (2; 4; -6)$.

C. $\vec{b} = (2; -3; 3)$.

D. $\vec{b} = (2; -4; 6)$.

Câu 149: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0), B(0; -2; 0)$ và $C(0; 0; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (ABC) ?

A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1$.

B. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{1} = 1$.

C. $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$.

D. $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$.

Câu 150: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0), B(0; -2; 0), C(0; 0; -2)$. Gọi D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc với nhau và $I(a, b, c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = -1$.

B. $S = -2$.

C. $S = -3$.

D. $S = -4$.

Câu 151: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 2$. Xác định tọa độ tâm

của mặt cầu (S) .

A. $I(-3;1;-1)$.

B. $I(3;-1;1)$.

C. $I(3;1;-1)$.

D. $I(-3;-1;1)$.

Câu 152: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3 \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua

$A(1;2;3)$ và có vec tơ chỉ phương $\vec{u}=(0;-7;-1)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A. $d: \begin{cases} x=1+6t \\ y=2+11t \\ z=3+8t \end{cases}$.

B. $d: \begin{cases} x=1+5t \\ y=2-2t \\ z=3-t \end{cases}$.

C. $d: \begin{cases} x=-4+5t \\ y=-10+12t \\ z=-2+t \end{cases}$.

D. $d: \begin{cases} x=-4+5t \\ y=-10+12t \\ z=2+t \end{cases}$.

Câu 153: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): 3x+2y+z-4=0$ có một vector pháp tuyến là

A. $\vec{n}_4=(1;2;-3)$.

B. $\vec{n}_2=(3;2;1)$.

C. $\vec{n}_1=(1;2;3)$.

D. $\vec{n}_3=(-1;2;3)$.

Câu 154: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;2;-1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y-2z-8=0$?

A. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=3$.

B. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=3$.

C. $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$.

D. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$.

Câu 155: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, Cho hai điểm $A(1;1;0)$ và $B(0;1;2)$. Vector nào dưới đây là một vector chỉ phương của đường thẳng AB ?

A. $\vec{a}=(-1;0;-2)$.

B. $\vec{b}=(-1;0;2)$.

C. $\vec{d}=(-1;1;2)$.

D. $\vec{c}=(1;2;2)$.

Câu 156: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z+2=0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình mặt cầu (S) .

A. $(S): (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=10$.

B. $(S): (x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=8$.

C. $(S): (x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=10$.

D. $(S): (x+2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=8$.

Câu 157: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;3)$ và $B(-1;2;5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

A. $I(1;0;4)$.

B. $I(-2;2;1)$.

C. $I(2;0;8)$.

D. $I(4;0;1)$.

Câu 158: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $H(2;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua H và cắt các trục tọa độ tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC . Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $2x+y+z+6=0$.

B. $2x+y+z-6=0$.

C. $x+2y+2z-6=0$.

D. $x+2y+z-6=0$.

Câu 159: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$?

A. $P(1;1;2)$.

B. $M(-2;-2;1)$.

C. $N(2;-1;2)$.

D. $Q(-2;1;-2)$.

Câu 160: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x+y-2z+5=0$ và $A(1;-1;2)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN . Một vector chỉ phương của Δ là

A. $\vec{u}=(4;5;-13)$.

B. $\vec{u}=(-3;5;1)$.

C. $\vec{u}=(2;3;2)$.

D. $\vec{u}=(1;-1;2)$.

Câu 161: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x-3y+2z+6=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. d song song với (P) .

B. d vuông góc với (P) .

C. d cắt và không vuông góc với (P) .

D. d nằm trong (P) .

Câu 162: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;3;1)$ và $B(5;-6;-2)$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại điểm M . Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$.

B. $\frac{AM}{BM} = 2$.

C. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$.

D. $\frac{AM}{BM} = 3$.

Câu 163: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2$ và hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ và $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với (S) , song song với d và Δ ?

A. $y+z+3=0$.

B. $x+z-1=0$.

C. $x+z+1=0$.

D. $x+y+1=0$.

Câu 164: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ viết phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-2;3;4)$ biết mặt cầu (S) cắt mặt phẳng tọa độ (Oxz) theo một hình tròn giao tuyến có diện tích bằng 16π .

A. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 5$.

B. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 25$.

C. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 16$.

D. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 9$.

Câu 165: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của

đường thẳng $d: \begin{cases} x=1+2t \\ y=3t \\ z=-2+t \end{cases}$?

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$.

B. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-2}$.

D. $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$.

Câu 166: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1;2;-3)$ và có một vector pháp tuyến $\vec{n} = (1;-2;3)$?

A. $x-2y-3z-6=0$.

B. $x-2y+3z-12=0$.

C. $x-2y+3z+12=0$.

D. $x-2y-3z+6=0$.

Câu 167: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0$. Điểm nào dưới đây không thuộc (α) ?

A. $N(1;2;3)$.

B. $M(3;3;0)$.

C. $H(1;-1;1)$.

D. $K(2;2;2)$.

Câu 168: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;-1;-2)$ và mặt phẳng $(\alpha): 3x-y+2z+4=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (α) ?

A. $3x-y+2z+6=0$.

B. $3x-y-2z+6=0$.

C. $3x-y+2z-6=0$.

D. $3x+y-2z-14=0$.

Câu 169: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 6x-2y+z-35=0$ và điểm $A(-1;3;6)$. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P) , tính OA' .

A. $OA' = \sqrt{186}$.

B. $OA' = \sqrt{46}$.

C. $OA' = 5\sqrt{3}$.

D. $OA' = 3\sqrt{26}$.

Câu 170: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, a > 0$. Tính diện tích S của mặt cầu (S) và thể tích V của khối cầu.

A. $S = \pi a^2, V = \frac{4\pi a^3}{3}$.

B. $S = 64\pi a^2, V = \frac{256\pi a^3}{3}$.

C. $S = 8\pi a^2, V = \frac{16\pi a^3}{3}$.

D. $S = 16\pi a^2, V = \frac{32\pi a^3}{3}$.

Câu 171: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, a > 0$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (Oxy) theo một đường tròn (C) . Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình trụ nhận (C) làm

đáy và có chiều cao là $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối trụ tương ứng.

A. $S_{xq} = 4\pi a^2\sqrt{3}, V = 8\pi a^3\sqrt{3}$.

B. $S_{xq} = 16\pi a^2\sqrt{3}, V = 16\pi a^3\sqrt{3}$.

C. $S_{xq} = 2\pi a^2\sqrt{3}, V = 4\pi a^3\sqrt{3}$.

D. $S_{xq} = 4\pi a^2\sqrt{3}, V = 4\pi a^3\sqrt{3}$.

Câu 172: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 1 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) , cắt và vuông góc với d có phương trình là

A. $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-1}{1}$.

B. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{1}$.

D. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

Câu 173: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$ và $d': \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$.

A. $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$.

C. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$.

D. $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$.

GV. Lư Sĩ Pháp

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM**§1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
A																	
B																	
C																	
D																	

§2. MẶT PHẪNG

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A																				
B																				
C																				
D																				

	61	62	63	64	65
A					
B					
C					
D					

§3. ĐƯỜNG THẲNG

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45
A					
B					
C					
D					

§4. MẶT CẦU

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28
A								
B								
C								
D								

ÔN TẬP CHƯƠNG III

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A																				
B																				
C																				
D																				

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A																				
B																				
C																				
D																				

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A																				
B																				
C																				
D																				

	10 1	10 2	10 3	10 4	10 5	10 6	10 7	10 8	10 9	11 0	11 1	11 2	11 3	11 4	11 5	11 6	11 7	11 8	11 9	12 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	12 1	12 2	12 3	12 4	12 5	12 6	12 7	12 8	12 9	13 0	13 1	13 2	13 3	13 4	13 5	13 6	13 7	13 8	13 9	14 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	14 1	14 2	14 3	14 4	14 5	14 6	14 7	14 8	14 9	15 0	15 1	15 2	15 3	15 4	15 5	15 6	15 7	15 8	15 9	16 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175
A															
B															
C															
D															

ÔN TẬP THI THPT

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A																				
B																				
C																				
D																				

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
A																				
B																				
C																				
D																				

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
A																				
B																				
C																				
D																				

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
A																				
B																				
C																				
D																				

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
A																				
B																				
C																				
D																				

	10 1	10 2	10 3	10 4	10 5	10 6	10 7	10 8	10 9	11 0	11 1	11 2	11 3	11 4	11 5	11 6	11 7	11 8	11 9	12 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	12 1	12 2	12 3	12 4	12 5	12 6	12 7	12 8	12 9	13 0	13 1	13 2	13 3	13 4	13 5	13 6	13 7	13 8	13 9	14 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	14 1	14 2	14 3	14 4	14 5	14 6	14 7	14 8	14 9	15 0	15 1	15 2	15 3	15 4	15 5	15 6	15 7	15 8	15 9	16 0
A																				
B																				
C																				
D																				

	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173
A													
B													
C													
D													