

TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử F là một nguyên hàm của f trên $[a; b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$ của hàm số $f(x)$), kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Ta dùng kí hiệu $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ để chỉ hiệu số $F(b) - F(a)$. Vậy $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

Nhận xét: Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

Ý nghĩa hình học của tích phân: Nếu hàm số f liên tục và không âm trên đoạn $[a; b]$ thì tích phân $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Vậy $S = \int_a^b f(x)dx$.

2. Tính chất của tích phân

$$1. \int_a^a f(x)dx = 0. \quad 2. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$3. \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad (a < b < c). \quad 4. \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$5. \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

B. BÀI TẬP

ÁP DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ BẢNG NGUYÊN HÀM

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

B. $\int_a^b xf(x)dx = x \int_a^b f(x)dx$.

C. $\int_a^a kf(x)dx = 0$.

D. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

Câu 2: Khẳng định nào sau đây sai?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. & \text{B. } \int_a^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx. \\ \text{C. } \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx. & \text{D. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt. \end{array}$$

Câu 3: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên K , $a, b \in K$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. & \text{B. } \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx. \\ \text{C. } \int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx. & \text{D. } \\ \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx. \end{array}$$

Câu 4: Cho hai số thực a, b tùy ý, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a). & \text{B. } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \\ \text{C. } \int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b). & \text{D. } \int_a^b f(x) dx = F(b) + F(a). \end{array}$$

Câu 5: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $c \in [a; b]$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx. & \text{B. } \int_a^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx. \\ \text{C. } \int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx = \int_c^a f(x) dx. & \text{D. } \int_a^b f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = \int_c^b f(x) dx. \end{array}$$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K và $a, b, c \in K$. Mệnh đề nào sau đây sai?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } \int_a^b f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx. & \text{B. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt. \\ \text{C. } \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. & \text{D. } \int_a^a f(x) dx = 0. \end{array}$$

Câu 7: Cho hàm số $f(t)$ liên tục trên K và $a, b \in K$, $F(t)$ là một nguyên hàm của $f(t)$ trên K . Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau.

$$\begin{array}{ll} \text{A. } F(a) - F(b) = \int_a^b f(t) dt. & \text{B. } \int_a^b f(t) dt = F(t) \Big|_a^b. \\ \text{C. } \int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f(t) dt \right) \Big|_a^b. & \text{D. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt. \end{array}$$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$

B. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$

C. $\int_a^b k dx = k(a-b), \forall k \in \mathbb{R}.$

D. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \forall c \in (a; b).$

Câu 9: Giả sử f là hàm số liên tục trên khoảng K và a, b, c là ba số bất kỳ trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int_a^a f(x) dx = 1.$ **B.** $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$

C. $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, c \in (a; b).$ **D.** $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$

B. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$

$\forall c \in \mathbb{R}.$

C. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$ **D.** $\int_a^a f(x) dx = 0.$

Câu 11: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó hiệu số $F(0) - F(1)$ bằng

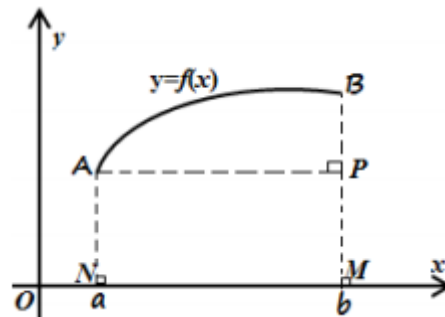
A. $\int_0^1 f(x) dx.$

B. $\int_0^1 -f(x) dx.$

C. $\int_0^1 -F(x) dx.$

D. $\int_0^1 -f(x) dx.$

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, có đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ sau:



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\int_a^b f'(x) dx$ là diện tích hình thang $ABMN$. **B.** $\int_a^b f'(x) dx$ là độ dài đoạn BP .

C. $\int_a^b f'(x)dx$ là độ dài đoạn MN .

D. $\int_a^b f'(x)dx$ là độ dài đoạn cong AB .

Câu 13: Cho hai tích phân $\int_{-a}^a f(x)dx = m$ và $\int_{-a}^a g(x)dx = n$. Giá trị của tích phân $\int_{-a}^a [f(x) - g(x)]dx$ là:
A. $m - n$. **B.** $n - m$. **C.** $m + n$. **D.** Không thể xác định.

Câu 14: Cho tích phân $I_1 = \int_a^b f(x)dx = m$ và $I_2 = \int_c^a f(x)dx = n$. Tích phân $I = \int_c^b f(x)dx$ có giá trị là:
A. $m + n$. **B.** $m - n$. **C.** $-m - n$. **D.** Không thể xác định.

Câu 15: Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ được phân tích thành:

A. $\int_c^b f(x) + \int_c^a -f(x)dx$. **B.** $\int_c^b f(x) - \int_c^a -f(x)dx$.
C. $\int_c^b f(x) + \int_c^a f(x)dx$. **D.** $-\int_c^b f(x) + \int_c^a f(x)dx$.

Câu 16: Cho $\int_{-2}^1 f(x)dx = 3$. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 [2f(x) - 1]dx$.
A. -9 . **B.** -3 . **C.** 3 . **D.** 5 .

Câu 17: Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2; 3]$ đồng thời $f(2) = 2$, $f(3) = 5$. Tính $\int_2^3 f'(x)dx$ bằng
A. -3 . **B.** 7 . **C.** 10 **D.** 3 .

Câu 18: Cho $\int_a^b f'(x)dx = 7$ và $f(b) = 5$. Khi đó $f(a)$ bằng
A. 12 . **B.** 0 . **C.** 2 . **D.** -2 .

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) = -2$, $f(b) = -4$. Tính $T = \int_a^b f'(x)dx$.
A. $T = -6$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = 6$. **D.** $T = -2$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ và $f(1) - f(0) = 2$. Tính tích phân $\int_0^1 f'(x)dx$.
A. $I = -1$. **B.** $I = 1$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 0$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^4 f'(x)dx = 17$. Khi đó $f(4)$ bằng

- A. 5. B. 29. C. 19. D. 9.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và thỏa mãn $f(-1) = 4$; $f(3) = 7$. Giá trị của $I = \int_{-1}^3 5f'(x)dx$ bằng

- A. $I = 20$. B. $I = 3$. C. $I = 10$. D. $I = 15$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2$, với a, b là các số hữu tỉ thỏa điều kiện $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = 2 - 3\ln 2$. Tính $T = a + b$.

- A. $T = -1$. B. $T = 2$. C. $T = -2$. D. $T = 0$.

Câu 24: Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{dx}{x+2}$.

- A. $I = \frac{4581}{5000}$. B. $I = \log \frac{5}{2}$. C. $I = \ln \frac{5}{2}$. D. $I = -\frac{21}{100}$.

Câu 25: Tính tích phân $I = \int_1^{2^{2018}} \frac{dx}{x}$.

- A. $I = 2018 \cdot \ln 2 - 1$. B. $I = 2^{2018}$. C. $I = 2018 \cdot \ln 2$. D. $I = 2018$.

Câu 26: Tính $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x} \right) dx$.

- A. $2 + \ln \sqrt{3}$. B. $4 + \ln 3$. C. $2 + \ln 3$. D. $1 + \ln \sqrt{3}$.

Câu 27: Tính tích phân $I = \int_0^1 x^{2018} (1+x) dx$

- A. $I = \frac{1}{2018} + \frac{1}{2019}$. B. $I = \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021}$. C. $I = \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020}$. D. $I = \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018}$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x)dx$.

- A. $\frac{7}{2}$. B. 1. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^3 f(x)dx$.

- A. $6 + \ln 4$. B. $4 + \ln 4$. C. $6 + \ln 2$. D. $2 + 2\ln 2$.

- Câu 30:** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính $\int_0^2 f(x)dx$.
- A. $\frac{7}{2}$. B. 1. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.
- Câu 31:** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 6x^2 & \text{khi } x \leq 0 \\ a-a^2x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ và $I = \int_{-1}^4 f(x)dx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên a để $I + 22 \geq 0$?
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.
- Câu 32:** Biết $\int_a^b (2x-1)dx = 1$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?
- A. $b-a=1$. B. $a^2-b^2=a-b-1$. C. $b^2-a^2=b-a+1$. D. $a-b=1$.
- Câu 33:** Đặt $I = \int_1^2 (2mx+1)dx$ (m là tham số thực). Tìm m để $I = 4$.
- A. $m = -1$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.
- Câu 34:** Cho $\int_0^3 f(x)dx = a$, $\int_2^3 f(x)dx = b$. Khi đó $\int_0^2 f(x)dx$ bằng:
- A. $-a-b$. B. $b-a$. C. $a+b$. D. $a-b$.
- Câu 35:** Giá trị nào của b để $\int_1^b (2x-6)dx = 0$?
- A. $b = 0$ hoặc $b = 3$. B. $b = 0$ hoặc $b = 1$ C. $b = 5$ hoặc $b = 0$. D. $b = 1$ hoặc $b = 5$.
- Câu 36:** Có bao nhiêu giá trị thực của AD để có $\int_0^a (2x+5)dx = a-4$
- A. 1. B. 0. C. 2. D. Vô số.
- Câu 37:** Xác định số thực dương m để tích phân $\int_0^m (x-x^2)dx$ có giá trị lớn nhất.
- A. $m = 1$. B. $m = 2$. C. $m = 3$. D. $m = 4$
- Câu 38:** Cho a là số thực thỏa mãn $|a| < 2$ và $\int_a^2 (2x+1)dx = 4$. Giá trị biểu thức $1+a^3$ bằng.
- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.
- Câu 39:** Tích phân $I = \int_1^2 2x \cdot dx$ có giá trị là:
- A. $I = 1$. B. $I = 2$. C. $I = 3$. D. $I = 4$.
- Câu 40:** Tích phân $I = \int_{-1}^1 (x^3 + 3x + 2)dx$ có giá trị là:
- A. $I = 1$. B. $I = 2$. C. $I = 3$. D. $I = 4$.

Câu 41: Cho giá trị của tích phân $I_1 = \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^3)dx = a$, $I_2 = \int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x)dx = b$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ là:

- A. $P = -\frac{4}{65}$. B. $P = \frac{12}{65}$. C. $P = -\frac{12}{65}$. D. $P = \frac{4}{65}$.

Câu 42: Tích phân $I = \int_{-1}^0 (x^3 + ax + 2)dx$ có giá trị là:

- A. $I = \frac{7}{4} - \frac{a}{2}$. B. $I = \frac{9}{4} - \frac{a}{2}$. C. $I = \frac{7}{4} + \frac{a}{2}$. D. $I = \frac{9}{4} + \frac{a}{2}$.

Câu 43: Tích phân $I = \int_0^1 (ax^2 + bx)dx$ có giá trị là:

- A. $I = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$. B. $I = \frac{a}{3} + \frac{b}{3}$. C. $I = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$. D. $I = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}$.

Câu 44: Tích phân $I = \int_2^a \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx$ có giá trị là:

- A. $I = -\frac{1}{2} - \frac{1}{a} + a^2$. B. $I = -\frac{3}{2} - \frac{1}{a} + a^2$. C. $I = -\frac{5}{2} - \frac{1}{a} + a^2$. D. $I = -\frac{7}{2} - \frac{1}{a} + a^2$.

Câu 45: Tích phân $I = \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx$ có giá trị là:

- A. $I = \frac{3}{2}$. B. $I = \frac{1}{6}$. C. $I = -\frac{3}{2}$. D. $I = -\frac{1}{6}$.

Câu 46: Tích phân $I = \int_{-1}^1 |x^3 + x^2 - x - 1| dx$ có giá trị là:

- A. $I = \frac{4}{3}$. B. $I = \frac{1}{2}$. C. $I = -\frac{4}{3}$. D. $I = -\frac{1}{2}$.

Câu 47: Tích phân $I = \int_{-2}^{-1} \frac{|x^3 - 3x + 2|}{x-1} dx$ có giá trị là:

- A. $I = -\frac{7}{6}$. B. $I = \frac{17}{6}$. C. $I = \frac{7}{6}$. D. $I = -\frac{17}{6}$.

Câu 48: Tích phân $I = \int_{-2}^2 \left| \frac{x^2 - x - 2}{x-1} \right| dx$ có giá trị là:

- A. $I = 3 - 2\ln 3$. B. $I = -2\ln 3$. C. $I = 3 + 2\ln 3$. D. $I = 3 - 3\ln 2$.

Câu 49: Tích phân $I = \int_{-2}^{-1} \left(2ax^3 + \frac{1}{x} \right) dx$ có giá trị là:

- A. $I = -\frac{15a}{16} + \ln 2$. B. $I = \frac{15a}{16} - \ln 2$. C. $I = \frac{15a}{16} + \ln 2$. D. $I = -\frac{15a}{16} - \ln 2$.

Câu 50: Biết tích phân $I_1 = \int_0^1 2x dx = a$. Giá trị của $I_2 = \int_a^2 (x^2 + 2x) dx$ là:

- A. $I_2 = \frac{17}{3}$. B. $I_2 = \frac{19}{3}$. C. $I_2 = \frac{16}{3}$. D. $I_2 = \frac{13}{3}$.

Câu 51: Cho tích phân $I = \int_a^b (x^2 + 1) dx$. Khẳng định nào dưới đây không đúng?

- A. $I = \int_a^b (x^2 + 1) dx = \int_a^b x^2 dx + \int_a^b 1 dx$. B. $I = (x^3 + x) \Big|_a^b$.
C. $I = \frac{1}{3}b^3 + b - \frac{1}{3}a^3 - a$. D. Chỉ có A và C đúng.

Câu 52: Số nghiệm nguyên âm của phương trình: $x^3 - ax + 2 = 0$ với $a = \int_1^{3e} \frac{1}{x} dx$ là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 53: Số nghiệm dương của phương trình: $x^3 + ax + 2 = 0$, với $a = \int_0^1 2x dx$, a và b là các số hữu tỉ là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 54: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để có $\int_1^k (2x-1) dx = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

- A. $\begin{cases} k=1 \\ k=2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} k=1 \\ k=-2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} k=-1 \\ k=-2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} k=-1 \\ k=2 \end{cases}$.

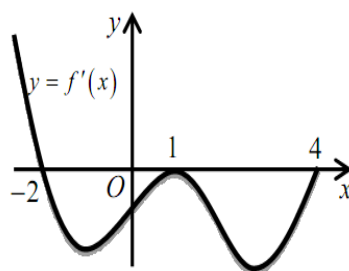
Câu 55: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = |1+x| - |1-x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1) = 3$. Tính tổng $F(0) + F(2) + F(-3)$.

- A. 8. B. 12. C. 14. D. 10.

Câu 56: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương n thỏa mãn $\int_0^2 (1 - n^2 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}) dx = -2$?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ và $[1;4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1) = 3$. Giá trị biểu thức $f(-2) + f(4)$ bằng

A. 21 **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 58: Cho $I = \int_0^2 (2x^2 - x - m) dx$ và $J = \int_0^1 (x^2 - 2mx) dx$. Tìm điều kiện của m để $I \leq J$.

A. $m \geq 3$. **B.** $m \geq 2$. **C.** $m \geq 1$. **D.** $m \geq 0$.

Câu 59: Biết rằng hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x) dx = -2$ và $\int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2}$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}$). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.

A. $P = -\frac{3}{4}$. **B.** $P = -\frac{4}{3}$. **C.** $P = \frac{4}{3}$. **D.** $P = \frac{3}{4}$.

TÍCH PHÂN HỮU TỈ

Câu 60: Biết $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x-5}{2x+2} dx = a + \ln b$ với a, b là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $ab = \frac{8}{81}$. **B.** $a + b = \frac{7}{24}$. **C.** $ab = \frac{9}{8}$. **D.** $a + b = \frac{3}{10}$.

Câu 61: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{2ax}{x+1} dx = \ln 2$. Giá trị của a là:

A. $a = \frac{\ln 2}{1 - \ln 2}$. **B.** $a = \frac{\ln 2}{2 - 2 \ln 2}$. **C.** $a = \frac{\ln 2}{1 + \ln 2}$. **D.** $a = \frac{\ln 2}{2 + 2 \ln 2}$.

Câu 62: Cho $I = \int_0^1 \frac{1}{3+2x-x^2} dx = (a-b) \ln 2 + b \ln 3$. Giá trị $a + b$ là:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 63: Biết $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = a + \ln b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Gọi $S = 2a + b$, giá trị của S thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(8;10)$. **B.** $(6;8)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(2;4)$.

Câu 64: Tích phân $I = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{x}{x+1} \right) dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{10}{3} + \ln 2 - \ln 3$. **B.** $I = \frac{10}{3} - \ln 2 + \ln 3$. **C.** $I = \frac{10}{3} - \ln 2 - \ln 3$. **D.** $I = \frac{10}{3} + \ln 2 + \ln 3$.

Câu 65: Nhận xét: Không thể dùng máy tính để tính ra kết quả như trên mà ta chỉ có thể dùng để kiểm tra mà Tích phân $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{5}{2}$. **B.** $I = \frac{7}{2}$. **C.** $I = \frac{9}{2}$. **D.** $I = \frac{11}{2}$.

Câu 66: Tích phân $I = \int_0^1 \left(\frac{ax}{x+1} - 2ax \right) dx$ có giá trị là:

A. $I = -a \ln 2$. **B.** $I = -2 \ln 2$. **C.** $I = 2 \ln 2$. **D.** $I = a \ln 2$.

Câu 67: Tích phân $I = \int_1^a \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right) dx$, với $a \neq 0$ có giá trị là:

A. $I = a \ln |a| + \frac{a^2 + 1}{2a}$. **B.** $I = a \ln a + \frac{a^2 + 1}{2a}$.
C. $I = a \ln |a| + \frac{a^2 - 1}{2a}$. **D.** $I = a \ln a + \frac{a^2 - 1}{2a}$.

Câu 68: Tích phân $I = \int_2^3 \frac{a^2 x^2 + 2x}{ax} dx$ có giá trị nhỏ nhất khi số thực dương a có giá trị là:

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 69: Tích phân $I = \int_1^2 \left(ax^2 + \frac{b}{x} \right) dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{7}{3}a - b \ln 2$. **B.** $I = 3a - b \ln 2$. **C.** $I = \frac{7}{3}a + b \ln 2$. **D.** $I = 3a + b \ln 2$.

Câu 70: Tích phân $I = \int_{-1}^1 \left(ax^3 + \frac{b}{x+2} \right) dx$ có giá trị là:

A. $I = -b \ln 3$. **B.** $I = \frac{a}{2} - b \ln 3$. **C.** $I = \frac{a}{2} + b \ln 3$. **D.** $I = b \ln 3$.

Câu 71: Tích phân $I = \int_e^{e^2} \frac{x+1}{x^2} dx$ có giá trị là:

A. $I = 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}$. **B.** $I = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$. **C.** $I = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}$. **D.** $I = 1 + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$.

Câu 72: Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = a$. Biểu thức $P = 2a - 1$ có giá trị là:

A. $P = 1 - \ln 2$. **B.** $P = 2 - 2 \ln 2$. **C.** $P = 1 - 2 \ln 2$. **D.** $P = 2 - \ln 2$.

Câu 73: Giá trị của tích phân $I = \int_e^{e^2} \left(\frac{1+x+x^2}{x} \right) dx = a$. Biểu thức $P = a - 1$ có giá trị là:

A. $P = e + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^4$. **B.** $P = -e + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^4$.

C. $P = -e - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^4$. **D.** $P = e + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^4$.

Câu 74: Biết $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị $a + 2b$.

A. 30. **B.** 40. **C.** 50. **D.** 60.

Câu 75: Tính tích phân: $I = \int_1^2 \frac{x+1}{x} dx$.

A. $I = 1 - \ln 2$. **B.** $I = 2 \ln 2$. **C.** $I = 1 + \ln 2$. **D.** $I = \frac{7}{4}$.

Câu 76: Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 9}$.

A. $I = \frac{1}{6} \ln \frac{1}{2}$. **B.** $I = -\frac{1}{6} \ln \frac{1}{2}$. **C.** $I = \frac{1}{6} \ln 2$. **D.** $I = \ln \sqrt[6]{2}$.

Câu 77: Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2 + x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 6$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = -2$. **D.** $S = 0$.

Câu 78: Biết rằng $\int_1^5 \frac{3}{x^2 + 3x} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a + 2b = 0$. **B.** $2a - b = 0$. **C.** $a - b = 0$. **D.** $a + b = 0$.

Câu 79: Giả sử $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2 + 4x + 3} dx = a \ln 5 + b \ln 3$; $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = ab$.

A. $P = 8$. **B.** $P = -6$. **C.** $P = -4$. **D.** $P = -5$.

Câu 80: Cho giá trị của tích phân $a = 2, b = -3$ $I_1 = \int_1^2 \frac{x^2 + 2x}{x+1} dx = a$, $I_2 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = b$. Giá trị của biểu thức $P = a - b$ là:

A. $P = \frac{7}{2} + \ln 2 - \ln 3$. **B.** $P = \frac{3}{2} + \ln 2 - \ln 3$.

C. $P = \frac{5}{2} + \ln 2 - \ln 3$. **D.** $P = \frac{1}{2} + \ln 2 - \ln 3$.

Câu 81: Giá trị của tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 + x - 2} dx$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. $-\frac{\ln 2}{2}$. **B.** $\ln 2 - 1$. **C.** $\frac{3}{2} - \ln 4$. **D.** $-\frac{\ln 3}{3}$.

Câu 82: Tích phân $I = \int_1^2 \frac{ax+1}{x^2 + 3x + 2} dx = \frac{3}{5} \ln \frac{4}{3} + \frac{3}{5} \ln \frac{2}{3}$. Giá trị của a là:

A. $a = \frac{1}{5}$. **B.** $a = \frac{2}{5}$. **C.** $a = \frac{3}{5}$. **D.** $a = \frac{4}{5}$.

- Câu 83:** Tích phân $I = \int_1^a \frac{x^2+1}{x^3+3x} dx = \frac{1}{3} \ln \frac{7}{2}$. Giá trị của a là:
A. $a=1$. **B.** $a=2$. **C.** $a=3$. **D.** $a=4$.
- Câu 84:** Biết $\int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = a \ln|x-1| + b \ln|x-2| + C$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.
A. $a+b=1$. **B.** $a+b=5$. **C.** $a+b=-1$. **D.** $a+b=-5$.
- Câu 85:** Biết $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx = 3 \ln \frac{a}{b} - \frac{5}{6}$, trong đó a, b là hai số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính ab ta được kết quả.
A. $ab=-5$. **B.** $ab=27$. **C.** $ab=6$. **D.** $ab=12$.
- Câu 86:** Biết $\int_2^3 \frac{x^2-3x+2}{x^2-x+1} dx = a \ln 7 + b \ln 3 + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + 2b^2 + 3c^3$.
A. $T=4$. **B.** $T=6$. **C.** $T=3$. **D.** $T=5$.
- Câu 87:** Giả sử $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$. Khi đó giá trị $a+2b$ là:
A. 30. **B.** 40. **C.** 50. **D.** 60.
- Câu 88:** Biết rằng $\int_1^5 \frac{3}{x^2+3x} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $a+2b=0$. **B.** $2a-b=0$.
C. $a-b=0$. **D.** $a+b=0$.
- Câu 89:** Nếu $\int_2^3 \frac{x+2}{2x^2-3x+1} dx = a \ln 5 + b \ln 3 + 3 \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) thì giá trị của $P = 2a - b$ là
A. $P=1$. **B.** $P=7$. **C.** $P=-\frac{15}{2}$. **D.** $P=\frac{15}{2}$.
- Câu 90:** Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = m \ln 2 + n \ln 3 + p \ln 5$, với m, n, p là các số hữu tỉ. Tính $S = m^2 + n + p^2$.
A. $S=6$. **B.** $S=4$. **C.** $S=3$. **D.** $S=5$.
- Câu 91:** Biết rằng $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = a + \ln b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$. Hỏi giá trị $2a+b$ thuộc khoảng nào sau đây?
A. $(8;10)$. **B.** $(6;8)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(2;4)$.
- Câu 92:** Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$
A. $S=6$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=0$.

- Câu 93:** Biết $\int_1^2 \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, với a, b là các số nguyên thuộc khoảng $(-7; 3)$ thì a và b là nghiệm của phương trình nào sau đây?
A. $2x^2 - x - 1 = 0$. **B.** $x^2 + 4x - 12 = 0$. **C.** $x^2 - 5x + 6 = 0$. **D.** $x^2 - 9 = 0$.
- Câu 94:** Biết $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.
A. $S = -2$. **B.** $S = 5$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 10$.
- Câu 95:** Biết $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 7$, $(a, b, c \in \mathbb{Q})$. Giá trị của biểu thức $2a + 3b - c$ bằng
A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 96:** Tìm giá trị của a để $\int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \ln a$.
A. 12. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.
- Câu 97:** Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $a + b = 2$. **B.** $a - 2b = 0$. **C.** $a + b = -2$. **D.** $a + 2b = 0$.
- Câu 98:** Biết $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 6$. Tính $S = 3a + 2b + c$.
A. 3. **B.** -14. **C.** -2. **D.** -11.
- Câu 99:** Cho $\int_1^2 \frac{1}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $a + b + c = 4$. **B.** $a + b + c = -3$. **C.** $a + b + c = 2$. **D.** $a + b + c = 6$.
- Câu 100:** Biết $\int \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6} dx = \ln \left| (x-1)^m (x-2)^n (x-3)^p \right| + C$. Tính $4(m+n+p)$.
A. 5. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.
- Câu 101:** Cho $\int_2^3 \frac{x+8}{x^2+x-2} dx = a \ln 2 + b \ln 5$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $a + b = 3$. **B.** $a - 2b = 11$. **C.** $a - b = 5$. **D.** $a + 2b = 11$.
- Câu 102:** Biết $\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2} dx = \frac{1}{a} + b \ln \frac{3}{2}$ ($a, b > 0$) tìm các giá trị của k để

$$\int_8^{ab} dx < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2+1)x + 2017}{x + 2018}.$$

A. $k < 0$.

B. $k \neq 0$.

C. $k > 0$.

D. $k \in \mathbb{R}$.

TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỈ

Câu 103: Tính tích phân $I = \int_0^2 \sqrt{4x+1} \, dx$.

A. 13.

B. $\frac{13}{3}$.

C. 4.

D. $\frac{4}{3}$.

Câu 104: Biết rằng $I_1 = \int_0^1 (x + \sqrt{x+1}) \, dx = \frac{a}{6} + b\sqrt{2}$. Giá trị của $a - \frac{3}{4}b$ là:

A. -1.

B. -2.

C. -3.

D. -4.

Câu 105: Tích phân $I = \int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \, dx$ bằng

A. $I = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $I = 2\sqrt{2}$.

C. $I = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $I = 2 - \sqrt{2}$.

Câu 106: Cho $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = a\sqrt{b} - \frac{8}{3}\sqrt{a} + \frac{2}{3}$, ($a, b \in \mathbb{N}^*$). Tính $a + 2b$.

A. $a + 2b = 7$.

B. $a + 2b = 8$.

C. $a + 2b = -1$.

D. $a + 2b = 5$.

Câu 107: Biết tích phân $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+1}} \, dx = \frac{a+b\sqrt{3}}{9}$ với a, b là các số thực. Tính tổng $T = a + b$.

A. $T = -10$.

B. $T = -4$.

C. $T = 15$.

D. $T = 8$.

Câu 108: Tích phân $I = \int_0^a x\sqrt{x+1} \, dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3} + \frac{4}{15}$.

B. $I = \frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3} + \frac{4}{15}$.

C. $I = \frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3} - \frac{4}{15}$.

D. $I = \frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3} - \frac{4}{15}$.

Câu 109: Tích phân $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} \, dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2$.

B. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2$.

C. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 1$.

D. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} + 1$.

Câu 110: Biết rằng $I = \int_3^4 \frac{x^2 - x + 2}{x + \sqrt{x-2}} \, dx = \frac{a - 4\sqrt{b}}{c}$. Với a, b, c là số nguyên dương. Tính $a + b + c$.

A. 39.

B. 27.

C. 33.

D. 41.

Câu 111: Biết $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+2} + (x+2)\sqrt{x}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} - c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.

- A. $P = 2$. B. $P = 8$. C. $P = 46$. D. $P = 22$.

Câu 112: Biết $I = \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.

- A. $P = 24$. B. $P = 12$. C. $P = 18$. D. $P = 46$.

TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

Câu 113: Tính tích phân $\int_0^{\pi} \sin 3x dx$.

- A. $-\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 114: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx$.

- A. $I = \frac{\pi}{4}$. B. $I = -1$. C. $I = 0$. D. $I = 1$.

Câu 115: Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ bằng?

- A. $\cot \frac{\pi}{3} - \cot \frac{\pi}{4}$. B. $\cot \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{4}$. C. $-\cot \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{4}$. D. $-\cot \frac{\pi}{3} - \cot \frac{\pi}{4}$.

Câu 116: Biết $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = a + b\sqrt{3}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $T = 2a + 6b$.

- A. $T = 3$. B. $T = -1$. C. $T = -4$. D. $T = 2$.

Câu 117: Số $-\cot \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{4}$ các số nguyên thỏa mãn $\int_0^m \cos 2x dx = 0$ là

- A. 643. B. 1284. C. 1285. D. 642.

Câu 118: Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ có giá trị là:

- A. $I = 1$. B. $I = 0$. C. $I = -1$. D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 119: Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$?

- A. 8. B. 2. C. 4. D. 6.

Câu 120: Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$ có giá trị là:

- A. $I = 1$. B. $I = 2$. C. $I = -2$. D. $I = -1$.

Câu 121: Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x - \cos 3x) dx$ có giá trị là:

- A. $I = \frac{2}{3}$. B. $I = \frac{3}{4}$. C. $I = -\frac{3}{4}$. D. $I = -\frac{2}{3}$.

Câu 122: Kết quả của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1 - \sin x) dx$ được viết ở dạng $a, b \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $a + 2b = 8$. B. $a + b = 5$. C. $2a - 3b = 2$. D. $a - b = 2$.

Câu 123: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin x} dx = a + b\pi$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = 1 + a^3 + b^2$

- A. $P = 9$. B. $P = 29$. C. $P = 11$. D. $P = -25$.

Câu 124: Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x - 1 + \cos x) dx = \pi \left(\frac{\pi}{a} - \frac{1}{b} \right) + c$, $(a, b, c \in \mathbb{Q})$. Tính $a - b + c$

- A. -3 B. 1 . C. -2 . D. $\frac{1}{3}$.

Câu 125: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3 + 4\sin^2 x) dx = \frac{a\pi}{b} - \frac{c\sqrt{3}}{6}$, trong đó a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + b + c$

- A. 8 . B. 16 . C. 12 . D. 14 .

Câu 126: Cho giá trị của tích phân $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \cos x) dx = a$, $I_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x + \sin x) dx = b$. Giá trị của $a + b$ là:

- A. $P = \frac{3}{4} + \sqrt{3}$. B. $P = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $P = \frac{3}{4} - \sqrt{3}$. D. $P = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 127: Cho giá trị của tích phân $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin 3x + \cos 3x) dx = a$, $I_2 = \int_e^{2e} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = b$. Giá

trị $a.b$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 8 . B. 16 . C. 10 . D. 1 .

Câu 128: Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin ax + \cos ax) dx$, với $a \neq 0$ có giá trị là:

- A.** $I = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$.
B. $I = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$.
C. $I = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(-a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$.
D. $I = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[-\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$.

Câu 129: Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + x \cos x - \sin^3 x}{1 + \cos x} dx = \frac{\pi^2}{a} - \frac{b}{c}$. Trong đó a, b, c là các số nguyên dương, phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

- A.** $T = 16$. **B.** $T = 59$. **C.** $T = 69$. **D.** $T = 50$.

Câu 130: Cho hàm số $f(x) = a \sin 2x - b \cos 2x$ thỏa mãn $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ và $\int_a^b dx = 3$. Tính tổng $a + b$ bằng:

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 131: Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \cos 2x \cos 4x dx = a + b\sqrt{3}$, trong đó a, b là các hằng số hữu tỉ. Tính $e^a + \log_2 |b|$.

- A.** -2. **B.** -3. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** 0.

Câu 132: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{1 + \sin 2x}$ với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, biết

$$F(0) = 1; F(\pi) = 0. \text{ Tính } P = F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right).$$

- A.** $P = 2 - \sqrt{3}$. **B.** $P = 0$. **C.** Không tồn tại P . **D.** $P = 1$.

Câu 133: Cho M, N là các số thực, xét hàm số $f(x) = M \cdot \sin \pi x + N \cdot \cos \pi x$ thỏa mãn $f(1) = 3$ và

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{\pi}. \text{ Giá trị của } f'\left(\frac{1}{4}\right) \text{ bằng}$$

- A.** $\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Câu 134: Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 1) \cos^2 x dx$ có giá trị là:

- A. $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$. B. $I = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$. C. $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$. D. $I = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}$.

Câu 135: Biết tích phân $I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = a$. Giá trị của $I_2 = \int_a^1 \frac{x^2 + 1}{x^3 + x} dx = b \ln 2 - c \ln 5$. Thương số giữa b và c là:

- A. -2. B. -4. C. 2. D. 4.

Câu 136: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3x + \cos^2 x) dx = (a \cos 3x + b x \sin + c \sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$. Giá trị của $3a + 2b + 4c$ là:

- A. -1. B. 1. C. -2. D. 2.

Câu 137: Cho $I_n = \int \tan^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \dots + I_8) + I_9 + I_{10}$ bằng

- A. $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^r}{r} + C$. B. $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$. C. $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^r}{r} + C$. D. $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$.

TÍCH PHÂN HÀM MŨ – LÔGARIT

Câu 138: Tích phân $\int_0^1 e^{-x} dx$ bằng

- A. $e - 1$. B. $\frac{1}{e} - 1$. C. $\frac{e - 1}{e}$. D. $\frac{1}{e}$.

Câu 139: Tích phân $I = \int_0^{2018} 2^x dx$ bằng

- A. $2^{2018} - 1$. B. $\frac{2^{2018} - 1}{\ln 2}$. C. $\frac{2^{2018}}{\ln 2}$. D. 2^{2018} .

Câu 140: Biết $\int_{-1}^4 f(x) dx = \frac{1}{2}$ và $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{-1}{2}$. Tính tích phân $I = \int_0^4 [4e^{2x} + 2f(x)] dx$.

- A. $I = 2e^8$. B. $I = 4e^8 - 2$. C. $I = 4e^8$. D. $I = 2e^8 - 4$.

Câu 141: Cho $F(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} dt$. Tính $F'(2)$.

- A. $F'(2) = 4e^4$. B. $F'(2) = 8e^{16}$. C. $F'(2) = 4e^{16}$. D. $F'(2) = e^4$.

Câu 142: Cho hàm số $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ với $x > 0$. Đạo hàm của $g(x)$ là

- A. $g'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. B. $g'(x) = \frac{1-x}{\ln x}$. C. $g'(x) = \frac{1}{\ln x}$. D. $g'(x) = \ln x$.

Câu 143: $\Leftrightarrow \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = 6$. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn

$$\int_1^2 e^{kx} dx < \frac{2018 \cdot e^k - 2018}{k}. \text{ Số phần tử của tập hợp } S \text{ bằng.}$$

- A.** 7. **B.** 8. **C.** Vô số. **D.** 6.

Câu 144: Cho $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$ với $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Đặt } u_n = 1 \cdot (I_1 + I_2) + 2(I_2 + I_3) + 3(I_3 + I_4) + \dots + n(I_n + I_{n+1}) - n.$$

Biết $\lim u_n = L$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $L \in (-1; 0)$. **B.** $L \in (-2; -1)$. **C.** $L \in (0; 1)$. **D.** $L \in (1; 2)$.

C . HƯỚNG DẪN GIẢI

ÁP DỤNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT VÀ BẢNG NGUYÊN HÀM

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và số thực k tùy ý. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$

B. $\int_a^b xf(x) dx = x \int_a^b f(x) dx.$

C. $\int_a^a kf(x) dx = 0.$

D. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào tính chất của tích phân, A, C, D đúng nên B sai.

Câu 2. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$ **B.** $\int_a^b f(x) dx = \int_c^b f(x) dx + \int_a^c f(x) dx.$

C. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx.$

D. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 3. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên K , $a, b \in K$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$ **B.** $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$

C. $\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx.$ **D.**

$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Câu 4. Cho hai số thực a, b tùy ý, $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên tập $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a).$

B. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$

C. $\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b).$

D. $\int_a^b f(x) dx = F(b) + F(a).$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Theo định nghĩa, ta có $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Câu 5. Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $c \in [a; b]$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

A. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$.

B. $\int_a^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$.

C. $\int_a^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$.

D. $\int_a^b f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\int_a^b f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = F(b) - F(a) + F(a) - F(c) = F(b) - F(c) = \int_c^b f(x)dx.$$

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng K và $a, b, c \in K$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.

B. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

C. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

D. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Mệnh đề đúng là: $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$.

Câu 7. Cho hàm số $f(t)$ liên tục trên K và $a, b \in K$, $F(t)$ là một nguyên hàm của $f(t)$ trên K . Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau.

A. $F(a) - F(b) = \int_a^b f(t)dt$.

B. $\int_a^b f(t)dt = F(t)\Big|_a^b$.

C. $\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f(t)dt \right)\Big|_a^b$.

D. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

Bài giải

Chọn A

Theo định nghĩa ta có: $\int_a^b f(t)dt = F(t)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Suy ra phương án A sai.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$.

B. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

C. $\int_a^b kdx = k(a - b), \forall k \in \mathbb{R}$.

D. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \forall c \in (a; b)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\int_a^b k dx = kx \Big|_a^b = kb - ka = k(b-a)$.

Câu 9. Giả sử f là hàm số liên tục trên khoảng K và a, b, c là ba số bất kỳ trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int_a^a f(x) dx = 1$.

B. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

C. $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx, c \in (a; b)$. **D.** $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

B. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \forall c \in \mathbb{R}$.

C. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt$. **D.** $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Câu 11. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó hiệu số $F(0) - F(1)$ bằng

A. $\int_0^1 f(x) dx$.

B. $\int_0^1 -f(x) dx$.

C. $\int_0^1 -F(x) dx$.

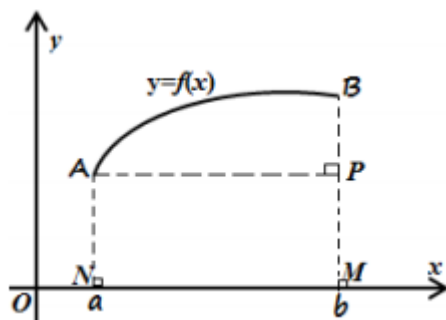
D. $\int_0^1 -f(x) dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^1 -f(x) dx = -F(x) \Big|_0^1 = -[F(1) - F(0)] = F(0) - F(1)$.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, có đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ sau:



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\int_a^b f'(x) dx$ là diện tích hình thang $ABMN$. **B.** $\int_a^b f'(x) dx$ là độ dài đoạn BP .

C. $\int_a^b f'(x) dx$ là độ dài đoạn MN . **D.** $\int_a^b f'(x) dx$ là độ dài đoạn cong AB .

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a) = BM - PM = BP.$$

- Câu 13.** Cho hai tích phân $\int_{-a}^a f(x)dx = m$ và $\int_{-a}^a g(x)dx = n$. Giá trị của tích phân $\int_{-a}^a [f(x) - g(x)]dx$ là:
- A.** $m - n$. **B.** $n - m$. **C.** $m + n$. **D.** Không thể xác định.

Hướng dẫn giải

Cho hai tích phân $\int_{-a}^a f(x)dx = m$ và $\int_{-a}^a g(x)dx = n$. Giá trị của tích phân $\int_{-a}^a [f(x) - g(x)]dx$ là:

$$\text{Ta có ngay kết quả: } \int_{-a}^a [f(x) - g(x)]dx = \int_{-a}^a f(x)dx - \int_{-a}^a g(x)dx = m - n.$$

Chọn A

- Câu 14.** Cho tích phân $I_1 = \int_a^b f(x)dx = m$ và $I_2 = \int_c^a f(x)dx = n$. Tích phân $I = \int_c^b f(x)dx$ có giá trị là:
- A.** $m + n$. **B.** $m - n$. **C.** $-m - n$. **D.** Không thể xác định.

Hướng dẫn giải

Cho tích phân $I_1 = \int_a^b f(x)dx = m$ và $I_2 = \int_c^a f(x)dx = n$. Tích phân $I = \int_c^b f(x)dx$ có giá trị là:

$$\text{Quy tắc “nối đuôi” cho ta: } I = \int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = m + n.$$

Chọn A

- Câu 15.** Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ được phân tích thành:

A. $\int_c^b f(x)dx + \int_c^a -f(x)dx$. **B.** $\int_c^b f(x)dx - \int_c^a -f(x)dx$.
C. $\int_c^b f(x)dx + \int_c^a f(x)dx$. **D.** $-\int_c^b f(x)dx + \int_c^a f(x)dx$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $\int_a^b f(x)dx$ được phân tích thành:

$$\text{Ta có: } \int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx.$$

Chọn A

- Câu 16.** Cho $\int_{-2}^1 f(x)dx = 3$. Tính tích phân $I = \int_{-2}^1 [2f(x) - 1]dx$.
- A.** -9 . **B.** -3 . **C.** 3 . **D.** 5 .

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } I = \int_{-2}^1 [2f(x) - 1] dx = 2 \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_{-2}^1 dx = 6 - x \Big|_{-2}^1 = 3.$$

Câu 17. Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[2;3]$ đồng thời $f(2) = 2$, $f(3) = 5$. Tính $\int_2^3 f'(x) dx$ bằng

A. -3 .

B. 7 .

C. 10

D. 3 .

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_2^3 f'(x) dx = f(x) \Big|_2^3 = f(3) - f(2) = 3.$$

Câu 18. Cho $\int_a^b f'(x) dx = 7$ và $f(b) = 5$. Khi đó $f(a)$ bằng

A. 12 .

B. 0 .

C. 2 .

D. -2 .

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\int_a^b f'(x) dx = 7 \Leftrightarrow f(b) - f(a) = 7 \Leftrightarrow f(a) = f(b) - 7 = -2.$$

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a) = -2$, $f(b) = -4$. Tính

$$T = \int_a^b f'(x) dx.$$

A. $T = -6$.

B. $T = 2$.

C. $T = 6$.

D. $T = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } T = \int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a) = -2.$$

Câu 20. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $f(1) - f(0) = 2$. Tính tích phân $\int_0^1 f'(x) dx$.

A. $I = -1$.

B. $I = 1$.

C. $I = 2$.

D. $I = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = f(1) - f(0) = 2.$$

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện $f(1) = 12$, $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và

$$\int_1^4 f'(x) dx = 17. \text{ Khi đó } f(4) \text{ bằng}$$

A. 5 .

B. 29 .

C. 19 .

D. 9 .

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_1^4 f'(x) dx = 17 \Leftrightarrow f(x) \Big|_1^4 = 17 \Leftrightarrow f(4) - f(1) = 17 \Leftrightarrow f(4) = 29.$$

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và thỏa mãn $f(-1) = 4$; $f(3) = 7$.

$$\text{Giá trị của } I = \int_{-1}^3 5f'(x) dx \text{ bằng}$$

A. $I = 20$.

B. $I = 3$.

C. $I = 10$.

D. $I = 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$I = \int_{-1}^3 5f'(x)dx = 5f(x)\Big|_{-1}^3 = 5f(3) - 5f(-1) = 5.7 - 5.4 = 15.$$

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2$, với a, b là các số hữu tỉ thỏa điều kiện $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = 2 - 3\ln 2$

. Tính $T = a + b$.

A. $T = -1$.

B. $T = 2$.

C. $T = -2$.

D. $T = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + 2 \right) dx = \left(-\frac{a}{x} + b \ln|x| + 2x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = a + 1 + b \ln 2.$$

Theo giả thiết, ta có $2 - 3\ln 2 = a + 1 + b \ln 2$. Từ đó suy ra $a = 1, b = -3$.

Vậy $T = a + b = -2$.

Câu 24. Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{dx}{x+2}$.

A. $I = \frac{4581}{5000}$.

B. $I = \log \frac{5}{2}$.

C. $I = \ln \frac{5}{2}$.

D. $I = -\frac{21}{100}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } I = \int_0^3 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| \Big|_0^3 = \ln \frac{5}{2}.$$

Câu 25. Tính tích phân $I = \int_1^{2^{2018}} \frac{dx}{x}$.

A. $I = 2018 \cdot \ln 2 - 1$.

B. $I = 2^{2018}$.

C. $I = 2018 \cdot \ln 2$.

D. $I = 2018$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } I = \ln|x| \Big|_1^{2^{2018}} = \ln(2^{2018}) - \ln 1 = 2018 \cdot \ln 2.$$

Câu 26. Tính $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x} \right) dx$.

A. $2 + \ln \sqrt{3}$.

B. $4 + \ln 3$.

C. $2 + \ln 3$.

D. $1 + \ln \sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} + 3\sqrt{x} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx + 3 \int_0^1 \sqrt{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|2x+1| \Big|_0^1 + 3 \cdot \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3 + 2 = \ln \sqrt{3} + 2. \end{aligned}$$

Câu 27. Tính tích phân $I = \int_0^1 x^{2018} (1+x) dx$

A. $I = \frac{1}{2018} + \frac{1}{2019}$. **B.** $I = \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021}$. **C.** $I = \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020}$. **D.** $I = \frac{1}{2017} + \frac{1}{2018}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $I = \int_0^1 x^{2018} (1+x) dx = \int_0^1 (x^{2018} + x^{2019}) dx = \left(\frac{x^{2019}}{2019} + \frac{x^{2020}}{2020} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020}$.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x) dx$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 (3x^2) dx + \int_1^2 (4-x) dx = \left. \frac{3x^3}{3} \right|_0^1 + \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{2}.$$

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{khi } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$. Tính tích phân $\int_0^3 f(x) dx$.

A. $6 + \ln 4$. **B.** $4 + \ln 4$. **C.** $6 + \ln 2$. **D.** $2 + 2 \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = \int_0^1 \frac{2}{x+1} dx + \int_1^3 (2x-1) dx$
 $= 2 \ln |x+1| \Big|_0^1 + (x^2 - x) \Big|_1^3 = \ln 4 + 6$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{khi } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$.

A. $\frac{7}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có, $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4-x) dx = x^3 \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 6x^2 & \text{khi } x \leq 0 \\ a - a^2 x & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ và $I = \int_{-1}^4 f(x) dx$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số nguyên a để $I + 22 \geq 0$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta

có

$$I = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx = \int_{-1}^0 6x^2 dx + \int_0^4 (a - a^2 x) dx = 2x^3 \Big|_{-1}^0 + \left(ax - \frac{a^2 x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 2 + 4a - 8a^2.$$

$$I + 22 \geq 0 \Leftrightarrow 2 + 4a - 8a^2 + 22 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 - a - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq a \leq 2 \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a \in \{-1; 0; 1; 2\}.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Câu 32. Biết $\int_a^b (2x-1)dx = 1$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.** $b-a=1$. **B.** $a^2-b^2=a-b-1$. **C.** $b^2-a^2=b-a+1$. **D.** $a-b=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \int_a^b (2x-1)dx = (x^2-x) \Big|_a^b = b^2-b-(a^2-a).$$

$$\text{Mà } \int_a^b (2x-1)dx = 1 \Leftrightarrow b^2-b-a^2+a=1 \Leftrightarrow b^2-a^2=b-a+1.$$

Câu 33. Đặt $I = \int_1^2 (2mx+1)dx$ (m là tham số thực). Tìm m để $I = 4$.

- A.** $m=-1$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } I = \int_1^2 (2mx+1)dx = (mx^2+x) \Big|_1^2 = (4m+2)-(m+1) = 3m+1.$$

$$I = 4 \Leftrightarrow 3m+1=4 \Leftrightarrow m=1.$$

Câu 34. Cho $\int_0^3 f(x)dx = a$, $\int_2^3 f(x)dx = b$. Khi đó $\int_0^2 f(x)dx$ bằng:

- A.** $-a-b$. **B.** $b-a$. **C.** $a+b$. **D.** $a-b$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Do } \int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx - \int_2^3 f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)dx = a-b$$

Câu 35. Giá trị nào của b để $\int_1^b (2x-6)dx = 0$?

- A.** $b=0$ hoặc $b=3$. **B.** $b=0$ hoặc $b=1$ **C.** $b=5$ hoặc $b=0$. **D.** $b=1$ hoặc $b=5$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_1^b (2x-6)dx = (x^2-6x) \Big|_1^b = (b^2-6b)-(1-6) = b^2-6b+5.$$

$$\text{Theo bài ra, có } b^2-6b+5=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ b=5 \end{cases}.$$

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị thực của AD để có $\int_0^a (2x+5)dx = a-4$

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_0^a (2x+5)dx = a-4 \Leftrightarrow (x^2+5x) \Big|_0^a = a-4 \text{ (H) } y = \sqrt{x}-1$$

Câu 37. Xác định số thực dương m để tích phân $\int_0^m (x - x^2) dx$ có giá trị lớn nhất.

A. $m = 1$.

B. $m = 2$.

C. $m = 3$.

D. $m = 4$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$P = \int_0^m (x - x^2) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^m = \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3}.$$

$$\text{Đặt } f(m) = \frac{m^2}{2} - \frac{m^3}{3} \Rightarrow f'(m) = m - m^2 \Rightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = 1$$

Lập bảng biến thiên

m	0	1	$+\infty$
$f'(m)$		0	-
$f(m)$	$-\infty$	$\frac{1}{6}$	$-\infty$

Vậy $f(m)$ đạt GTLN tại $m = 1$.

Câu 38. Cho a là số thực thỏa mãn $|a| < 2$ và $\int_a^2 (2x+1) dx = 4$. Giá trị biểu thức $1+a^3$ bằng.

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int_a^2 (2x+1) dx = \left(x^2 + x \right) \Big|_a^2 = 6 - a^2 - a. \text{ Theo đề: } \begin{cases} |a| < 2 \\ 6 - a^2 - a = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 1.$$

$$\text{Vậy } 1 + a^3 = 2.$$

Câu 39. Tích phân $I = \int_1^2 2x dx$ có giá trị là:

A. $I = 1$.

B. $I = 2$.

C. $I = 3$.

D. $I = 4$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^2 2x dx$ có giá trị là:

$$\text{Cách 1: } I = \int_1^2 2x dx = 2 \cdot \int_1^2 x dx = \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 3.$$

Chọn C

Cách 2: Kiểm tra bằng máy tính, dễ dàng thu được kết quả như cách 1.

Câu 40. Tích phân $I = \int_{-1}^1 (x^3 + 3x + 2) dx$ có giá trị là:

A. $I = 1$.

B. $I = 2$.

C. $I = 3$.

D. $I = 4$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-1}^1 (x^3 + 3x + 2) dx$ có giá trị là:

$$\text{Cách 1: } I = \int_{-1}^1 (x^3 + 3x + 2) dx = \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_{-1}^1 = 4.$$

Chọn D

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay.

Câu 41. Cho giá trị của tích phân $I_1 = \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^3)dx = a$, $I_2 = \int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x)dx = b$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ là:

- A.** $P = -\frac{4}{65}$. **B.** $P = \frac{12}{65}$. **C.** $P = -\frac{12}{65}$. **D.** $P = \frac{4}{65}$.

Hướng dẫn giải

Cho giá trị của tích phân $I_1 = \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^3)dx = a$, $I_2 = \int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x)dx = b$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ là:

Ta có:

$$I_1 = \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^3)dx = \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5} \Rightarrow a = \frac{2}{5}.$$

$$I_2 = \int_{-2}^{-1} (x^2 + 3x)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_{-2}^{-1} = -\frac{13}{6} \Rightarrow b = -\frac{13}{6}.$$

$$\Rightarrow P = \frac{a}{b} = -\frac{12}{65}.$$

Chọn C

Câu 42. Tích phân $I = \int_{-1}^0 (x^3 + ax + 2)dx$ có giá trị là:

- A.** $I = \frac{7}{4} - \frac{a}{2}$. **B.** $I = \frac{9}{4} - \frac{a}{2}$. **C.** $I = \frac{7}{4} + \frac{a}{2}$. **D.** $I = \frac{9}{4} + \frac{a}{2}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-1}^0 (x^3 + ax + 2)dx$ có giá trị là:

$$I = \int_{-1}^0 (x^3 + ax + 2)dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{2}x^2 + 2x \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{7}{4} - \frac{a}{2}.$$

Chọn A

Câu 43. Tích phân $I = \int_0^1 (ax^2 + bx)dx$ có giá trị là:

- A.** $I = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$. **B.** $I = \frac{a}{3} + \frac{b}{3}$. **C.** $I = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$. **D.** $I = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^1 (ax^2 + bx)dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_0^1 (ax^2 + bx)dx = \left(\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}.$$

Chọn D

Câu 44. Tích phân $I = \int_2^a \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right)dx$ có giá trị là:

- A.** $I = -\frac{1}{2} - \frac{1}{a} + a^2$. **B.** $I = -\frac{3}{2} - \frac{1}{a} + a^2$. **C.** $I = -\frac{5}{2} - \frac{1}{a} + a^2$. **D.** $I = -\frac{7}{2} - \frac{1}{a} + a^2$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_2^a \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx$, với $a \neq 0$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_2^a \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx = \left(-\frac{1}{x} + x^2 \right) \Big|_2^a = a^2 - \frac{1}{a} - \frac{7}{2}.$$

Chọn D

Câu 45. Tích phân $I = \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{3}{2}.$

B. $I = \frac{1}{6}.$

C. $I = -\frac{3}{2}.$

D. $I = -\frac{1}{6}.$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$\underbrace{x^2 - x}_{f(x)} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

Từ bảng xét dấu ta được:

$$I = \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx + \int_0^2 (-x^2 + x) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{3}{2}.$$

Chọn A

Câu 46. Tích phân $I = \int_{-1}^1 |x^3 + x^2 - x - 1| dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{4}{3}.$

B. $I = \frac{1}{2}.$

C. $I = -\frac{4}{3}.$

D. $I = -\frac{1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-1}^1 |x^3 + x^2 - x - 1| dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$\underbrace{x^3 + x^2 - x - 1}_{f(x)} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Từ bảng xét dấu ta được:

$$I = \int_{-1}^1 |x^3 + x^2 - x - 1| dx = -\int_{-1}^1 (x^3 + x^2 - x - 1) dx = -\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$$

Chọn A

Câu 47. Tích phân $I = \int_{-2}^{-1} \frac{|x^3 - 3x + 2|}{x-1} dx$ có giá trị là:

A. $I = -\frac{7}{6}.$

B. $I = \frac{17}{6}.$

C. $I = \frac{7}{6}.$

D. $I = -\frac{17}{6}.$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-2}^{-1} \frac{|x^3 - 3x + 2|}{x-1} dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$\underbrace{x^3 - 3x + 2}_{f(x)} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-2.$$

Từ bảng xét dấu ta được:

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x-1} dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 + x - 2) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right) \Big|_{-2}^{-1} = \frac{7}{6}.$$

Chọn C

Câu 48. Tích phân $I = \int_{-2}^2 \left| \frac{x^2 - x - 2}{x-1} \right| dx$ có giá trị là:

- A.** $I = 3 - 2\ln 3$. **B.** $I = -2\ln 3$. **C.** $I = 3 + 2\ln 3$. **D.** $I = 3 - 3\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-2}^0 \left| \frac{x^2 - x - 2}{x-1} \right| dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x-1} \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2 \wedge x \neq 1$$

Từ bảng xét dấu ta được:

$$I = \int_{-2}^0 \left| \frac{x^2 - x - 2}{x-1} \right| dx = - \int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x-1} \right) dx + \int_{-1}^0 \frac{x^2 - x - 2}{x-1} dx.$$

$$I_1 = - \int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x-1} \right) dx = - \int_{-2}^{-1} \left(x - \frac{2}{x-1} \right) dx = - \left(\frac{x^2}{2} - 2\ln|x-1| \right) \Big|_{-2}^{-1} = \frac{5}{2} + 2\ln 2 - 2\ln 3.$$

$$I_2 = \int_{-1}^0 \left(\frac{x^2 - x - 2}{x-1} \right) dx = \dots = \left(\frac{x^2}{2} - 2\ln|x-1| \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{2} - 2\ln 2.$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = 3 - 2\ln 3.$$

Chọn A

Câu 49. Tích phân $I = \int_{-2}^{-1} \left(2ax^3 + \frac{1}{x} \right) dx$ có giá trị là:

- A.** $I = -\frac{15a}{16} + \ln 2$. **B.** $I = \frac{15a}{16} - \ln 2$. **C.** $I = \frac{15a}{16} + \ln 2$. **D.** $I = -\frac{15a}{16} - \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-2}^{-1} \left(2ax^3 + \frac{1}{x} \right) dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_{-2}^{-1} \left(2ax^3 + \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{a}{2}x^4 + \ln|x| \right) \Big|_{-2}^{-1} = -\frac{15a}{16} - \ln 2.$$

Chọn C

Câu 50. Biết tích phân $I_1 = \int_0^1 2x dx = a$. Giá trị của $I_2 = \int_a^2 (x^2 + 2x) dx$ là:

- A.** $I_2 = \frac{17}{3}$. **B.** $I_2 = \frac{19}{3}$. **C.** $I_2 = \frac{16}{3}$. **D.** $I_2 = \frac{13}{3}$.

Hướng dẫn giải

Biết tích phân $I_1 = \int_0^1 2x dx = a$. Giá trị của $I_2 = \int_a^2 (x^2 + 2x) dx$ là:

Ta có:

$$I_1 = \int_0^1 2x dx = (x^2) \Big|_0^1 = 1 \Rightarrow I_2 = \int_a^2 (x^2 + 2x) dx = \int_1^2 (x^2 + 2x) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + x^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{16}{3}.$$

Chọn C

Câu 51. Cho tích phân $I = \int_a^b (x^2 + 1) dx$. Khẳng định nào dưới đây không đúng?

A. $I = \int_a^b (x^2 + 1) dx = \int_a^b x^2 dx + \int_a^b dx$.

B. $I = (x^3 + x) \Big|_a^b$.

C. $I = \frac{1}{3} b^3 + b - \frac{1}{3} a^3 - a$.

D. Chỉ có A và C đúng.

Hướng dẫn giải

Cho tích phân $I = \int_a^b (x^2 + 1) dx$. Khẳng định nào dưới đây không đúng?

Ta có:

$$I = \int_a^b (x^2 + 1) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + x \right) \Big|_a^b = \frac{1}{3} b^3 + b - \frac{1}{3} a^3 - a.$$

Phát biểu (A): đúng.

Phát biểu (B): sai.

Phát biểu (C): đúng.

Phát biểu (D): đúng.

Chọn B

Câu 52. Số nghiệm nguyên âm của phương trình: $x^3 - ax + 2 = 0$ với $a = \int_1^{3e} \frac{1}{x} dx$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Số nghiệm nguyên âm của phương trình: $x^3 - ax + 2 = 0$ với $a = \int_1^{3e} \frac{1}{x} dx$ là:

$$\text{Ta có: } a = \int_1^{3e} \frac{1}{x} dx = (\ln |x|) \Big|_1^{3e} = 3 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 (x+2) = 0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-2.$$

Chọn B

Câu 53. Số nghiệm dương của phương trình: $x^3 + ax + 2 = 0$, với $a = \int_0^1 2x dx$, a và b là các số hữu tỉ

là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Số nghiệm dương của phương trình: $x^3 + ax - 2 = 0$, với $a = \int_0^1 2x dx$ là:

$$\text{Ta có: } a = \int_0^1 2x dx = (x^2) \Big|_0^1 = 1 \Rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x=1.$$

Chọn B

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để có $\int_1^k (2x-1)dx = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

- A. $\begin{cases} k=1 \\ k=2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} k=1 \\ k=-2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} k=-1 \\ k=-2 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} k=-1 \\ k=2 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \int_1^k (2x-1)dx = \frac{1}{2} \int_1^k (2x-1)d(2x-1) = \frac{(2x-1)^2}{4} \Big|_1^k = \frac{(2k-1)^2}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\text{Mà } 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 2$$

$$\text{Khi đó: } \int_1^k (2x-1)dx = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \Leftrightarrow \frac{(2k-1)^2-1}{4} = 2 \Leftrightarrow (2k-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ k=-1 \end{cases}$$

Câu 55. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = |1+x| - |1-x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1) = 3$. Tính tổng $F(0) + F(2) + F(-3)$.

- A. 8. B. 12. **C.** 14. D. 10.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Bảng khử dấu giá trị tuyệt đối:

x	$-\infty$ $+\infty$	-1	1
$1+x$	$-$	0	$+$
$1-x$	$+$	0	$-$

$$\text{Ta có: } \int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1) = F(2) - 3 \text{ mà } \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 2dx = 2 \text{ nên } F(2) = 5.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = 3 - F(0) \text{ mà } \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 2xdx = x^2 \Big|_0^1 = 1 \text{ nên } F(0) = 2.$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx = F(0) - F(-1) = 2 - F(-1) \text{ mà } \int_{-1}^0 f(x)dx = \int_{-1}^0 2xdx = x^2 \Big|_{-1}^0 = -1 \text{ nên } F(-1) = 3.$$

$$\Rightarrow \int_{-3}^{-1} f(x)dx = F(-1) - F(-3) = 3 - F(-3) \text{ mà } \int_{-3}^{-1} f(x)dx = \int_{-3}^{-1} -2dx = -4 \text{ nên } F(-3) = 7.$$

$$\text{Vậy } F(0) + F(2) + F(-3) = 2 + 5 + 7 = 14.$$

Câu 56. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương n thỏa mãn $\int_0^2 (1 - n^2 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1})dx = -2$?

- A. 1. B. 2. **C.** 0. D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^2 (1 - n^2 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}) dx = -2$

$$\Leftrightarrow \left(x - n^2x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n \right) \Big|_0^2 = -2$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2n^2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = -2 \Leftrightarrow 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = n^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2^n - 1 = n^2 + 1 \Leftrightarrow 2^n - n^2 - 2 = 0.$$

Thử với các giá trị $n \in \{1; 2; 3; 4\}$ đều không thỏa mãn.

Với $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 5$ ta chứng minh $2^n > n^2 + 2$ (1). Dễ thấy $n = 5$ thì (1) đúng.

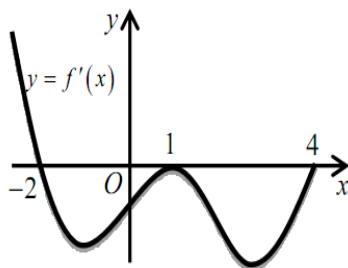
Giả sử (1) đúng với $n = k$ với $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 5$. Khi đó $2^k > k^2 + 2$.

$$\text{Khi đó: } 2^{k+1} > 2(k^2 + 2) = k^2 + k^2 + 2 + 2 > k^2 + 2k + 1 + 2 = (k+1)^2 + 2.$$

Do đó (1) đúng với $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp thì (1) đúng.

Vậy không tồn tại số nguyên n .

Câu 57. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Biết rằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 1]$ và $[1; 4]$ lần lượt bằng 9 và 12. Cho $f(1) = 3$. Giá trị biểu thức $f(-2) + f(4)$ bằng

A. 21

B. 9.

C. 3.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Theo giả thiết ta có $\int_{-2}^1 |f'(x)| dx = 9$ và $\int_1^4 |f'(x)| dx = 12$.

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có: } \int_{-2}^1 |f'(x)| dx = -\int_{-2}^1 f'(x) dx = -f(x) \Big|_{-2}^1 = -f(1) + f(-2)$$

$$\Rightarrow -f(1) + f(-2) = 9.$$

$$\text{Tương tự ta có } -f(4) + f(1) = 12.$$

$$\text{Như vậy } [-f(1) + f(-2)] - [-f(4) + f(1)] = -3 \Leftrightarrow f(-2) + f(4) - 2f(1) = -3$$

$$\Leftrightarrow f(-2) + f(4) - 6 = -3 \Leftrightarrow f(-2) + f(4) = 3.$$

Câu 58. Cho $I = \int_0^2 (2x^2 - x - m) dx$ và $J = \int_0^1 (x^2 - 2mx) dx$. Tìm điều kiện của m để $I \leq J$.

A. $m \geq 3$.

B. $m \geq 2$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \geq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 (2x^2 - x - m) dx = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - mx \right) \Big|_0^2 = \frac{10}{3} - 2m.$$

$$J = \int_0^1 (x^2 - 2mx) dx = \left(\frac{x^3}{3} - mx^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - m.$$

$$\text{Do đó } I \leq J \Leftrightarrow \frac{10}{3} - 2m \leq \frac{1}{3} - m \Leftrightarrow m \geq 3$$

Câu 59. Biết rằng hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}$, $\int_0^2 f(x) dx = -2$ và $\int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2}$ (với $a, b, c \in \mathbb{R}$). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.

A. $P = -\frac{3}{4}$.

B. $P = -\frac{4}{3}$.

C. $P = \frac{4}{3}$.

D. $P = \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^d f(x) dx = \left(\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right) \Big|_0^d = \frac{a}{3} d^3 + \frac{b}{2} d^2 + cd.$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} \int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2} \\ \int_0^2 f(x) dx = -2 \\ \int_0^3 f(x) dx = \frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = -\frac{7}{2} \\ \frac{8}{3}a + 2b + 2c = -2 \\ 9a + \frac{9}{2}b + 3c = \frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -\frac{16}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } P = a + b + c = -\frac{4}{3}$$

TÍCH PHÂN HỮU TỈ

Câu 60. Biết $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x-5}{2x+2} dx = a + \ln b$ với a, b là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $ab = \frac{8}{81}$.

B. $a + b = \frac{7}{24}$.

C. $ab = \frac{9}{8}$.

D. $a + b = \frac{3}{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{x-5}{2x+2} dx &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{3}}^1 \left(1 - \frac{6}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} \left(x - 6 \ln|x+1| \right) \Big|_{\frac{1}{3}}^1 = \frac{1}{2} \left(1 - 6 \ln 2 - \frac{1}{3} + 6 \ln \frac{4}{3} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \ln \frac{8}{27}. \text{ Vậy } ab = \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{8}{81}. \end{aligned}$$

Câu 61. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{2ax}{x+1} dx = \ln 2$. Giá trị của a là:

A. $a = \frac{\ln 2}{1 - \ln 2}$.

B. $a = \frac{\ln 2}{2 - 2 \ln 2}$.

C. $a = \frac{\ln 2}{1 + \ln 2}$.

D. $a = \frac{\ln 2}{2 + 2 \ln 2}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Tích phân } I = \int_0^1 \frac{2ax}{x+1} dx = \ln 2. \text{ Giá trị của } a \text{ là:}$$

Ta có:

$$I = \int_0^1 \frac{2ax}{x+1} dx = 2a \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = 2a \left(x - \ln|x+1|\right) \Big|_0^1 = 2a(1 - \ln 2).$$

$$\text{Mà } I = \ln 2 \Leftrightarrow 2a(1 - \ln 2) = \ln 2 \Leftrightarrow a = \frac{\ln 2}{2 - 2\ln 2}.$$

Chọn B

Câu 62. Cho $I = \int_0^1 \frac{1}{3+2x-x^2} dx = (a-b)\ln 2 + b\ln 3$. Giá trị $a+b$ là:

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Cho $I = \int_0^1 \frac{1}{3+2x-x^2} dx = (a-b)\ln 2 + b\ln 3$. Giá trị $a+b$ là:

Ta có:

$$I = \int_0^1 \frac{1}{3+2x-x^2} dx = \int_0^1 \left(\frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{3-x} \right) dx = \frac{1}{4} (\ln|x+1| - \ln|x-3|) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \ln 3 \Rightarrow a = b = \frac{1}{4} \Rightarrow a+b = \frac{1}{2}.$$

Chọn B

Câu 63. Biết $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = a + \ln b$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Gọi $S = 2a + b$, giá trị của S thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(8; 10)$.

B. $(6; 8)$.

C. $(4; 6)$.

D. $(2; 4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta

có

$$\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| \right) \Big|_0^2 = \ln 3 = a + \ln b \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow S = 3.$$

Vậy $S \in (2; 4)$.

Câu 64. Tích phân $I = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{x}{x+1} \right) dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{10}{3} + \ln 2 - \ln 3$. **B.** $I = \frac{10}{3} - \ln 2 + \ln 3$. **C.** $I = \frac{10}{3} - \ln 2 - \ln 3$. **D.**

$I = \frac{10}{3} + \ln 2 + \ln 3$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{x}{x+1} \right) dx$ có giá trị là:

$$I = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{x}{x+1} \right) dx = \int_1^2 \left(x^2 + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x - \ln|x+1| \right) \Big|_1^2$$

Ta có:

$$= \frac{8}{3} + 2 - \ln 3 - \left(\frac{1}{3} + 1 - \ln 2 \right) = \frac{10}{3} + \ln 2 - \ln 3$$

Chọn A

Câu 65. Nhận xét: Không thể dùng máy tính để tính ra kết quả như trên mà ta chỉ có thể dùng để kiểm tra mà Tích phân $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{5}{2}$.

B. $I = \frac{7}{2}$.

C. $I = \frac{9}{2}$.

D. $I = \frac{11}{2}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx$ có giá trị là:

Cách 1: $I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) dx = \left(-\frac{1}{x} + x^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{2}$.

Chọn B

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay.

Câu 66. Tích phân $I = \int_0^1 \left(\frac{ax}{x+1} - 2ax \right) dx$ có giá trị là:

A. $I = -a \ln 2$.

B. $I = -2 \ln 2$.

C. $I = 2 \ln 2$.

D. $I = a \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^1 \left(\frac{ax}{x+1} - 2ax \right) dx$ có giá trị là:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{ax}{x+1} - 2ax \right) dx = a \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx - 2a \int_0^1 x dx = a \left(x - \ln|x+1| \right) \Big|_0^1 - a \left(x^2 \right) \Big|_0^1 = a(1 - \ln 2) - a = -a \ln 2$$

Chọn A

Câu 67. Tích phân $I = \int_1^a \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right) dx$, với $a \neq 0$ có giá trị là:

A. $I = a \ln|a| + \frac{a^2+1}{2a}$.

B. $I = a \ln a + \frac{a^2+1}{2a}$.

C. $I = a \ln|a| + \frac{a^2-1}{2a}$.

D. $I = a \ln a + \frac{a^2-1}{2a}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^a \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right) dx$, với $a \neq 0$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_1^a \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right) dx = \left(a \ln|x| + \frac{x^2}{2a} \right) \Big|_1^a = a \ln|a| + \frac{a}{2} - \frac{1}{2a} = a \ln|a| + \frac{a^2-1}{2a}$$

Chọn C

Câu 68. Tích phân $I = \int_2^3 \frac{a^2 x^2 + 2x}{ax} dx$ có giá trị nhỏ nhất khi số thực dương a có giá trị là:

A. $2\sqrt{5}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

D. $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_2^3 \frac{a^2 x^2 + 2x}{ax} dx$ có giá trị nhỏ nhất khi số thực dương a có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_2^3 \frac{a^2 x^2 + 2x}{ax} dx = \int_2^3 \left(ax + \frac{2}{a} \right) dx = \left(\frac{a}{2} x^2 + \frac{2}{a} x \right) \Big|_2^3 = \frac{5a}{2} + \frac{2}{a}$$

Vì a là số thực dương nên $I = \frac{5a}{2} + \frac{2}{a} \geq 2\sqrt{\frac{5a}{2} \cdot \frac{2}{a}} = 2\sqrt{5}$.

Chọn A

Câu 69. Tích phân $I = \int_1^2 \left(ax^2 + \frac{b}{x} \right) dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{7}{3}a - b \ln 2$. **B.** $I = 3a - b \ln 2$. **C.** $I = \frac{7}{3}a + b \ln 2$. **D.** $I = 3a + b \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^2 \left(ax^2 + \frac{b}{x} \right) dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_1^2 \left(ax^2 + \frac{b}{x} \right) dx = \left(\frac{a}{3} x^3 + b \ln |x| \right) \Big|_1^2 = \frac{7a}{3} + b \ln 2.$$

Chọn C

Câu 70. Tích phân $I = \int_{-1}^1 \left(ax^3 + \frac{b}{x+2} \right) dx$ có giá trị là:

A. $I = -b \ln 3$. **B.** $I = \frac{a}{2} - b \ln 3$. **C.** $I = \frac{a}{2} + b \ln 3$. **D.** $I = b \ln 3$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-1}^1 \left(ax^3 + \frac{b}{x+2} \right) dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_{-1}^1 \left(ax^3 + \frac{b}{x+2} \right) dx = \left(\frac{a}{4} x^4 + b \ln |x+2| \right) \Big|_{-1}^1 = b \ln 3.$$

Chọn D

Câu 71. Tích phân $I = \int_e^{e^2} \frac{x+1}{x^2} dx$ có giá trị là:

A. $I = 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}$. **B.** $I = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$. **C.** $I = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}$. **D.** $I = 1 + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_e^{e^2} \frac{x+1}{x^2} dx$ có giá trị là:

$$I = \int_e^{e^2} \frac{x+1}{x^2} dx = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \left(\ln |x| - \frac{1}{x} \right) \Big|_e^{e^2} = 1 + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}.$$

Chọn D

Câu 72. Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = a$. Biểu thức $P = 2a - 1$ có giá trị là:

A. $P = 1 - \ln 2$. **B.** $P = 2 - 2 \ln 2$. **C.** $P = 1 - 2 \ln 2$. **D.** $P = 2 - \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = a$. Biểu thức $P = 2a - 1$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = \left(x - \ln|x+1|\right) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2 \Rightarrow a = 1 - \ln 2 \Rightarrow P = 2a - 1 = 1 - 2\ln 2$$

Chọn C

Câu 73. Giá trị của tích phân $I = \int_e^{e^2} \left(\frac{1+x+x^2}{x}\right) dx = a$. Biểu thức $P = a - 1$ có giá trị là:

A. $P = e + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^4$. **B.** $P = -e + \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^4$.

C. $P = -e - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^4$. **D.** $P = e + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^4$.

Hướng dẫn giải

Giá trị của tích phân $I = \int_e^{e^2} \left(\frac{1+x+x^2}{x}\right) dx = a$. Biểu thức $P = a - 1$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_e^{e^2} \left(\frac{1+x+x^2}{x}\right) dx = \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{x} + 1 + x\right) dx = \left(\ln|x| + x + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_e^{e^2} = 1 - e + \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2}.$$

$$\Rightarrow a = 1 - e + \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2} \Leftrightarrow a - 1 = -e + \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2} \Leftrightarrow P = -e + \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{2}.$$

Chọn B

Câu 74. Biết $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị $a + 2b$.

A. 30.

B. 40.

C. 50.

D. 60.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta

có:

$$I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = \int_{-1}^0 \left(3x + 11 + \frac{21}{x - 2}\right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} + 11x + 21 \ln|x - 2|\right) \Big|_{-1}^0 = 21 \ln \frac{2}{3} + \frac{19}{2}.$$

Vậy $a + 2b = 40$.

Câu 75. Tính tích phân: $I = \int_1^2 \frac{x+1}{x} dx$.

A. $I = 1 - \ln 2$.

B. $I = 2 \ln 2$.

C. $I = 1 + \ln 2$.

D. $I = \frac{7}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } I = \int_1^2 \frac{x+1}{x} dx = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \left(x + \ln x\right) \Big|_1^2 = 1 + \ln 2.$$

Câu 76. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 9}$.

A. $I = \frac{1}{6} \ln \frac{1}{2}$. **B.** $I = -\frac{1}{6} \ln \frac{1}{2}$. **C.** $I = \frac{1}{6} \ln 2$. **D.** $I = \ln \sqrt[6]{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-9} = I = \frac{1}{6} \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln 1 \right) = \frac{1}{6} \ln \frac{1}{2}$.

Câu 77. Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 6$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = -2$. **D.** $S = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x}$. Ta có: $\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

Khi đó:

$I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = \int_3^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = (\ln x - \ln(x+1)) \Big|_3^4 = (\ln 4 - \ln 5) - (\ln 3 - \ln 4) = 4 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5$.

Suy ra: $a = 4, b = -1, c = -1$. Vậy $S = 2$.

Câu 78. Biết rằng $\int_1^5 \frac{3}{x^2+3x} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a + 2b = 0$. **B.** $2a - b = 0$. **C.** $a - b = 0$. **D.** $a + b = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$\int_1^5 \frac{3}{x^2+3x} dx = \int_1^5 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) dx = (\ln|x| - \ln|x+3|) \Big|_1^5 = \ln 5 - \ln 2 \Rightarrow a = 1$ và $b = -1$.

Ta có: $a + b = 0$.

Câu 79. Giả sử $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = a \ln 5 + b \ln 3$; $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = ab$.

A. $P = 8$. **B.** $P = -6$. **C.** $P = -4$. **D.** $P = -5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = \int_0^2 \frac{x-1}{(x+1)(x+3)} dx = \int_0^2 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+3} \right) dx = (-\ln|x+1| + 2\ln|x+3|) \Big|_0^2 = 2\ln 5 - 3\ln 3$

Suy ra: Do đó: $P = ab = -6$.

Câu 80. Cho giá trị của tích phân $a = 2, b = -3$ $I_1 = \int_1^2 \frac{x^2+2x}{x+1} dx = a$, $I_2 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = b$. Giá trị của biểu

thức $P = a - b$ là:

A. $P = \frac{7}{2} + \ln 2 - \ln 3$. **B.** $P = \frac{3}{2} + \ln 2 - \ln 3$.

C. $P = \frac{5}{2} + \ln 2 - \ln 3$. **D.** $P = \frac{1}{2} + \ln 2 - \ln 3$.

Hướng dẫn giải

Cho giá trị của tích phân $I_1 = \int_1^2 \frac{x^2 + 2x}{x+1} dx = a$, $I_2 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = b$. Giá trị của biểu thức $P = a - b$

có giá trị là:

Ta có:

$$I_1 = \int_1^2 \frac{x^2 + 2x}{x+1} dx = \int_1^2 \left(x+1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| \right) \Big|_1^2 = \frac{5}{2} + \ln 2 - \ln 3 \Rightarrow a = \frac{5}{2} + \ln 2 - \ln 3$$

.

$$I_2 = \int_e^{e^2} \frac{1}{x} dx = (\ln|x|) \Big|_e^{e^2} = 1 \Rightarrow b = 1.$$

$$P = a - b = \frac{3}{2} + \ln 2 - \ln 3.$$

Chọn B

Câu 81. Giá trị của tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 + x - 2} dx$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. $-\frac{\ln 2}{2}.$

B. $\ln 2 - 1.$

C. $\frac{3}{2} - \ln 4.$

D. $-\frac{\ln 3}{3}.$

Hướng dẫn giải

Giá trị của tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 + x - 2} dx$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

Ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 + x - 2} dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{(x-1)(x^2 - 2x - 2)}{(x-1)(x+2)} dx = \int_{-1}^0 \frac{x^2 - 2x - 2}{x+2} dx = \int_{-1}^0 \left(x - 4 + \frac{6}{x+2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 6 \ln|x+2| \right) \Big|_{-1}^0 = 6 \ln 2 - \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Chọn A

Câu 82. Tích phân $I = \int_1^2 \frac{ax+1}{x^2+3x+2} dx = \frac{3}{5} \ln \frac{4}{3} + \frac{3}{5} \ln \frac{2}{3}$. Giá trị của a là:

A. $a = \frac{1}{5}.$

B. $a = \frac{2}{5}.$

C. $a = \frac{3}{5}.$

D. $a = \frac{4}{5}.$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^2 \frac{ax+1}{x^2+3x+2} dx = \frac{3}{5} \ln \frac{4}{3} + \frac{3}{5} \ln \frac{2}{3}$. Giá trị của a là:

Ta có:

$$I = \int_1^2 \frac{ax+1}{x^2+3x+2} dx = a \int_1^2 \frac{x}{x^2+3x+2} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2+3x+2} dx.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= a \int_1^2 \frac{x}{x^2+3x+2} dx = a \int_1^2 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = a (2 \ln|x+2| - \ln|x+1|) \Big|_1^2 \\ \text{Xét} \quad &= a (2 \ln 4 - 3 \ln 3 + \ln 2) = 2a \ln \frac{4}{3} + a \ln \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Xét } I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2+3x+2} dx = (\ln|x+1| - \ln|x+2|) \Big|_1^2 = -\ln \frac{4}{3} - \ln \frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = (2a-1)\ln\frac{4}{3} + (a-1)\ln\frac{2}{3}$$

$$\text{Theo đề bài: } I = \frac{3}{5}\ln\frac{4}{3} + \frac{3}{5}\ln\frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{4}{5}.$$

Chọn D

Câu 83. Tích phân $I = \int_1^a \frac{x^2+1}{x^3+3x} dx = \frac{1}{3}\ln\frac{7}{2}$. Giá trị của a là:

A. $a=1$.

B. $a=2$.

C. $a=3$.

D. $a=4$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Tích phân } I = \int_1^a \frac{x^2+1}{x^3+3x} dx = \frac{1}{3}\ln\frac{7}{2}. \text{ Giá trị của } a \text{ là:}$$

Ta có:

$$I = \int_1^a \frac{x^2+1}{x^3+3x} dx \Rightarrow \frac{1}{3} \int_4^{a^3+3a} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{3} (\ln|t|) \Big|_4^{a^3+3a} = \frac{1}{3} \ln \frac{a^3+3a}{4}, \text{ với } t = x^3+3x.$$

$$\text{Theo đề bài: } \frac{1}{3} \ln \frac{a^3+3a}{4} = \frac{1}{3} \ln \frac{7}{2} \Leftrightarrow a^3+3a-14=0 \Leftrightarrow (a-2)(a^2+2a+7)=0 \Leftrightarrow a=2.$$

Chọn B

Câu 84. Biết $\int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = a \ln|x-1| + b \ln|x-2| + C$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.

A. $a+b=1$.

B. $a+b=5$.

C. $a+b=-1$.

D. $a+b=-5$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

$$\frac{-x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

$$\Leftrightarrow -x-1 = A(x-2) + B(x-1).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ -2A-B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-3 \end{cases}.$$

$$\text{Nên: } \int \frac{x+1}{(x-1)(2-x)} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x-2} \right) dx.$$

$$= 2\ln|x-1| - 3\ln|x-2| + C.$$

$$\text{Vậy } a=2, b=-3. \text{ Vậy } a+b=-1.$$

Câu 85. Biết $\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx = 3\ln\frac{a}{b} - \frac{5}{6}$, trong đó a, b là hai số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối

giản. Tính ab ta được kết quả.

A. $ab=-5$.

B. $ab=27$.

C. $ab=6$.

D. $ab=12$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\int_0^1 \frac{3x-1}{x^2+6x+9} dx = \int_0^1 \frac{3x-1}{(x+3)^2} dx$$

$$\text{Đặt } t = x+3 \Rightarrow dt = dx; x = t-3$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=3; x=1 \Rightarrow t=4$$

Khi đó:

$$K = \int_0^1 \frac{3x-1}{(x+3)^2} dx = \int_3^4 \frac{3(t-3)-1}{t^2} dt = \int_3^4 \left(\frac{3}{t} - \frac{10}{t^2} \right) dt = \left(3 \ln |t| + \frac{10}{t} \right) \Big|_3^4$$

$$= 3 \ln 4 - 3 \ln 3 - \frac{5}{6} = 3 \ln \frac{4}{3} - \frac{5}{6} \Rightarrow a = 4, b = 3 \Rightarrow a.b = 12.$$

Câu 86. Biết $\int_2^3 \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x + 1} dx = a \ln 7 + b \ln 3 + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + 2b^2 + 3c^3$.

- A.** $T = 4$. **B.** $T = 6$. **C.** $T = 3$. **D.** $T = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\int_2^3 \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x + 1} dx = \int_2^3 \left(1 - \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} \right) dx = \left(x - \ln |x^2 - x + 1| \right) \Big|_2^3 = -\ln 7 + \ln 3 + 1, \text{ suy ra } \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } T = a + 2b^2 + 3c^3 = 4.$$

Câu 87. Giả sử $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$. Khi đó giá trị $a + 2b$ là:

- A.** 30. **B.** 40. **C.** 50. **D.** 60.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có

$$I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = \int_{-1}^0 \left(3x + 11 + \frac{21}{x - 2} \right) dx = \left(\frac{3x^2}{2} + 11x + 21 \ln |x - 2| \right) \Big|_{-1}^0 = 21 \ln \frac{2}{3} + \frac{19}{2}$$

Câu 88. Biết rằng $\int_1^5 \frac{3}{x^2 + 3x} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $a + 2b = 0$. **B.** $2a - b = 0$.
C. $a - b = 0$. **D.** $a + b = 0$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

$$\int_1^5 \frac{3}{x^2 + 3x} dx = \int_1^5 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 3} \right) dx$$

$$= (\ln |x| - \ln |x + 3|) \Big|_1^5 = \ln 5 - \ln 2.$$

$$\text{Vậy } a = 1, b = -1.$$

Câu 89. Nếu $\int_2^3 \frac{x + 2}{2x^2 - 3x + 1} dx = a \ln 5 + b \ln 3 + 3 \ln 2$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) thì giá trị của $P = 2a - b$ là

- A.** $P = 1$. **B.** $P = 7$. **C.** $P = -\frac{15}{2}$. **D.** $P = \frac{15}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{aligned}
\int_2^3 \frac{x+2}{2x^2-3x+1} dx &= \frac{1}{4} \int_2^3 \frac{4x-3}{2x^2-3x+1} dx + \frac{11}{4} \int_2^3 \frac{1}{2x^2-3x+1} dx \\
&= \frac{1}{4} \int_2^3 \frac{1}{2x^2-3x+1} d(2x^2-3x+1) + \frac{11}{4} \int_2^3 \frac{1}{(x-1)(2x-1)} dx \\
&= \frac{1}{4} \ln|2x^2-3x+1| \Big|_2^3 + \frac{11}{4} \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{2x-1} \right) dx \\
&= \frac{1}{4} \ln|2x^2-3x+1| \Big|_2^3 + \frac{11}{4} \ln \left| \frac{x-1}{2x-1} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{4} (\ln 10 - \ln 3) + \frac{11}{4} \left(\ln \frac{2}{5} - \ln \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{1}{4} \ln \frac{10}{3} + \frac{11}{4} \ln \frac{6}{5} = \frac{1}{4} (\ln 5 + \ln 2 - \ln 3) + \frac{11}{4} (\ln 2 + \ln 3 - \ln 5) = -\frac{5}{2} \ln 5 + \frac{5}{2} \ln 3 + 3 \ln 2.
\end{aligned}$$

Do đó $a = -\frac{5}{2}$, $b = \frac{5}{2}$, $P = -\frac{15}{2}$.

Câu 90. Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = m \ln 2 + n \ln 3 + p \ln 5$, với m, n, p là các số hữu tỉ. Tính

$$S = m^2 + n + p^2.$$

A. $S = 6$.

B. $S = 4$.

C. $S = 3$.

D. $S = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx &= \int_1^3 \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} dx = \int_1^3 \frac{2x+4-(x+1)}{(x+1)(x+2)} dx \\
&= \int_1^3 \left[\frac{2x+4}{(x+2)(x+1)} - \frac{x+1}{(x+2)(x+1)} \right] dx \\
&= \int_1^3 \frac{2}{x+1} dx - \int_1^3 \frac{1}{x+2} dx = 2 \ln(x+1) \Big|_1^3 - \ln(x+2) \Big|_1^3 = 2 \ln 4 - 2 \ln 2 - (\ln 5 - \ln 3) \\
&= 2 \ln \left(\frac{4}{2} \right) - \ln 5 + \ln 3 = 2 \ln 2 + \ln 3 - \ln 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 1 \\ p = -1 \end{cases} \Leftrightarrow S = 2^2 + 1 + (-1)^2 = 6.
\end{aligned}$$

Câu 91. Biết rằng $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = a + \ln b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$. Hỏi giá trị $2a + b$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(8; 10)$.

B. $(6; 8)$.

C. $(4; 6)$.

D. $(2; 4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } \int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx &= \int_0^2 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| \right) \Big|_0^2 = \ln 3 \Rightarrow a = 0, \quad b = 3 \\
\Rightarrow 2a + b &= 3.
\end{aligned}$$

Câu 92. Biết $I = \int_3^4 \frac{dx}{x^2+x} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$

A. $S = 6$.

B. $S = 2$.

C. $S = -2$.

D. $S = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1:

$$I = \int_3^4 \frac{1}{x^2 + x} dx = \int_3^4 \frac{1}{x(x+1)} dx = \ln \frac{x}{x+1} \Big|_3^4 = \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{3}{4} = 4 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5.$$

Suy ra $a = 4, b = c = -1 \Rightarrow S = 2$.

Cách 2:

Ta

có:

$$I = \int_3^4 \frac{1}{x^2 + x} dx = \int_3^4 \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_3^4 \frac{1}{x} dx - \int_3^4 \frac{1}{x+1} dx = \ln 4 - \ln 3 - \ln 5 + \ln 4 = 4 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5$$

Suy ra $a = 4, b = c = -1 \Rightarrow S = 2$.

Câu 93. Biết $\int_1^2 \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, với a, b là các số nguyên thuộc khoảng $(-7; 3)$ thì a và b là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $2x^2 - x - 1 = 0$. **B.** $x^2 + 4x - 12 = 0$. **C.** $x^2 - 5x + 6 = 0$. **D.** $x^2 - 9 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_1^2 \frac{dx}{4x^2 - 4x + 1} = \int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2} \int_1^2 (2x-1)^{-2} d(2x-1) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1} \Big|_1^2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{-6} + \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\begin{cases} a = -6 \\ b = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \end{cases}$ và a, b là nghiệm của phương trình $x^2 + 4x - 12 = 0$.

Câu 94. Biết $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x+1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

A. $S = -2$. **B.** $S = 5$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x+1} dx = \int_3^5 \left(x + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{1}{2} x^2 + \ln|x+1| \right) \Big|_3^5 = \frac{25}{2} + \ln 6 - \frac{9}{2} - \ln 4 = 8 + \ln \frac{3}{2}.$$

Vậy $a = 8, b = 3$. Suy ra $S = a - 2b = 8 - 2 \cdot 3 = 2$.

Câu 95. Biết $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 7$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của biểu thức $2a + 3b - c$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)} = \frac{1}{2} \int_0^3 \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\ln|x+2| - \ln|x+4| \right) \Big|_0^3 = \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 7 + \frac{1}{2} \ln 2.$$

Khi đó: $2a + 3b - c = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 3$.

Câu 96. Tìm giá trị của a để $\int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \ln a$.

A. 12. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

$$\int_3^4 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right|_3^4 = \ln \frac{2}{3} - \ln \frac{1}{2} = \ln \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} \right) = \ln \frac{4}{3} = \ln a$$

$$\Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

Câu 97. Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $a+b=2$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $a+b=-2$. **D.** $a+2b=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| \Big|_0^1 = \ln 2$ và $\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2| \Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2$

Do đó $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln 2 - (\ln 3 - \ln 2) = 2 \ln 2 - \ln 3 \Rightarrow a = 2, b = -1$.

Vậy $a+2b=0$.

Câu 98. Biết $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 6$. Tính $S = 3a + 2b + c$.

- A.** 3. **B.** -14. **C.** -2. **D.** -11.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\frac{5x+12}{x^2+5x+6} = \frac{5x+12}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x+3A+2B}{x^2+5x+6}$.

$$\begin{cases} A+B=5 \\ 3A+2B=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=3 \end{cases}$$

Nên $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx = \int_2^3 \frac{2}{x+2} dx + \int_2^3 \frac{3}{x+3} dx = 2 \ln|x+2| \Big|_2^3 + 3 \ln|x+3| \Big|_2^3$
 $= 3 \ln 6 - \ln 5 - 2 \ln 4 = -4 \ln 2 - \ln 5 + 3 \ln 6$. Vậy $S = 3a + 2b + c = -11$.

Câu 99. Cho $\int_1^2 \frac{1}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $a+b+c=4$. **B.** $a+b+c=-3$. **C.** $a+b+c=2$. **D.** $a+b+c=6$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\int_1^2 \frac{1}{x^2+5x+6} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+2} + \frac{-1}{x+3} \right) dx = (\ln|x+2| - \ln|x+3|) \Big|_1^2$

$$= (\ln 4 - \ln 5) - (\ln 3 - \ln 4) = 2 \ln 4 - \ln 3 - \ln 5 = 4 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5.$$

Vậy $a+b+c = 4 + (-1) + (-1) = 2$.

Câu 100. Biết $\int \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6} dx = \ln|(x-1)^m(x-2)^n(x-3)^p| + C$. Tính $4(m+n+p)$.

- A.** 5. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow x^2+1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=1 \\ -5A-4B-3C=0 \\ 6A+3B+2C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-5 \\ C=5 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{x^2+1}{x^3-6x^2+11x-6} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - 5 \int \frac{1}{x-2} dx + 5 \int \frac{1}{x-3} dx$$

$$= \ln |(x-1)(x-2)^{-5}(x-3)^5| + C.$$

$$\text{Vậy } 4(m+n+p) = 4.$$

Câu 101. Cho $\int_2^3 \frac{x+8}{x^2+x-2} dx = a \ln 2 + b \ln 5$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=3$.

B. $a-2b=11$.

C. $a-b=5$.

D. $a+2b=11$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_2^3 \frac{x+8}{x^2+x-2} dx = \int_2^3 \left(\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2} \right) dx = 3 \ln |x-1| \Big|_2^3 - 2 \ln |x+2| \Big|_2^3 = 7 \ln 2 - 2 \ln 5.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a=7 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow a-2b=11.$$

Câu 102. Biết $\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2} dx = \frac{1}{a} + b \ln \frac{3}{2}$ ($a, b > 0$) tìm các giá trị của k để

$$\int_8^{ab} dx < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}.$$

A. $k < 0$.

B. $k \neq 0$.

C. $k > 0$.

D. $k \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{3}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3} x^3 + 3 \ln |x+2| \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 3 \ln \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \int_8^{ab} dx = \int_8^9 dx = 1$$

$$\text{Mà } \int_8^{ab} dx < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} \Rightarrow 1 < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$$

$$\text{Mặt khác ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} = k^2+1.$$

$$\text{Vậy để } \int_8^{ab} dx < \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} \text{ thì } 1 < k^2+1 \Rightarrow k^2 > 0 \Rightarrow k \neq 0.$$

TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỈ

Câu 103. Tính tích phân $I = \int_0^2 \sqrt{4x+1} \, dx$.

A. 13.

B. $\frac{13}{3}$.

C. 4.

D. $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } I = \int_0^2 \sqrt{4x+1} \, dx = \int_0^2 (4x+1)^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (4x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 = \frac{13}{3}.$$

Câu 104. Biết rằng $I_1 = \int_0^1 (x + \sqrt{x+1}) \, dx = \frac{a}{6} + b\sqrt{2}$. Giá trị của $a - \frac{3}{4}b$ là:

A. -1.

B. -2.

C. -3.

D. -4.

Hướng dẫn giải

$$\text{Biết rằng } I_1 = \int_0^1 (x + \sqrt{x+1}) \, dx = \frac{a}{6} + b\sqrt{2}. \text{ Giá trị của } a - \frac{3}{4}b \text{ là:}$$

Ta có:

$$I_1 = \int_0^1 (x + \sqrt{x+1}) \, dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{6} + \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow a = -1, b = \frac{4}{3} \Rightarrow a - \frac{3}{4}b = -2.$$

Chọn B

Câu 105. Tích phân $I = \int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \, dx$ bằng

A. $I = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $I = 2\sqrt{2}$.

C. $I = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $I = 2 - \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } I = \int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \, dx = \sqrt{x+2} \Big|_0^2 = 2 - \sqrt{2}.$$

Câu 106. Cho $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = a\sqrt{b} - \frac{8}{3}\sqrt{a} + \frac{2}{3}$, ($a, b \in \mathbb{N}^*$). Tính $a + 2b$.

A. $a + 2b = 7$.

B. $a + 2b = 8$.

C. $a + 2b = -1$.

D. $a + 2b = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} &= \int_0^1 (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}) \, dx = \frac{2}{3} \left(\sqrt{(x+2)^3} - \sqrt{(x+1)^3} \right) \Big|_0^1 \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2} + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Do đó $a = 2$, $b = 3$, $a + 2b = 8$.

Câu 107. Biết tích phân $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+1}} \, dx = \frac{a+b\sqrt{3}}{9}$ với a, b là các số thực. Tính tổng $T = a + b$.

A. $T = -10$.

B. $T = -4$.

C. $T = 15$.

D. $T = 8$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\begin{aligned}\text{Ta có } \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x+1}} dx &= \int_0^1 \frac{x(\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+1})}{x} dx = \int_0^1 (\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+1}) dx \\&= \int_0^1 \left[(3x+1)^{\frac{1}{2}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}} \right] dx = \left[\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\&= \left(\frac{16}{9} - \sqrt{3} \right) - \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{3} \right) = \frac{17}{9} - \sqrt{3} = \frac{17-9\sqrt{3}}{9}.\end{aligned}$$

Câu 108. Tích phân $I = \int_0^a x\sqrt{x+1}dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3} + \frac{4}{15}.$

B. $I = \frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3} + \frac{4}{15}.$

C. $I = \frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3} - \frac{4}{15}.$

D. $I = \frac{2\sqrt{(a+1)^5}}{5} - \frac{2\sqrt{(a+1)^3}}{3} - \frac{4}{15}.$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^a x\sqrt{x+1}dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^a x\sqrt{x+1}dx = \int_0^a (x+1)\sqrt{x+1}dx - \int_0^a \sqrt{x+1}dx = \int_0^a (x+1)^{\frac{3}{2}}dx - \int_0^a (x+1)^{\frac{1}{2}}dx \\&= \left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} \right]_0^a - \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + \frac{4}{15}\end{aligned}$$

Chọn B

Câu 109. Tích phân $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2.$

B. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2.$

C. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 1.$

D. $I = \frac{4\sqrt{2}}{3} + 1.$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \sqrt{x+1} + 1 \Rightarrow I = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} dx = \int_{-1}^1 (\sqrt{x+1} + 1) dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + x \right]_{-1}^1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} + 2.$$

Chọn A

Câu 110. Biết rằng $I = \int_3^4 \frac{x^2 - x + 2}{x + \sqrt{x-2}} dx = \frac{a-4\sqrt{b}}{c}$. Với a, b, c là số nguyên dương. Tính $a+b+c$.

A. 39.

B. 27.

C. 33.

D. 41.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_3^4 \frac{x^2 - x + 2}{x + \sqrt{x-2}} dx = \int_3^4 (x - \sqrt{x-2}) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}(\sqrt{x-2})^3 \right) \Big|_3^4 = \frac{25-8\sqrt{2}}{6} = \frac{25-4\sqrt{8}}{6}$$

Suy ra $a=25, b=8, c=6$. Vậy $a+b+c=39$.

Câu 111. Biết $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+2} + (x+2)\sqrt{x}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} - c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính

$$P = a + b + c.$$

A. $P = 2.$

B. $P = 8.$

C. $P = 46.$

D. $P = 22.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+2} + (x+2)\sqrt{x}} &= \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})} = \int_1^2 \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})}{2\sqrt{x}\sqrt{x+2}} dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \right) dx = \left(\sqrt{x} - \sqrt{x+2} \right) \Big|_1^2 = \sqrt{2} + \sqrt{3} - 3. \end{aligned}$$

Vậy $a = 2; b = 3; c = 3$ nên $P = a + b + c = 8.$

Câu 112. Biết $I = \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính

$$P = a + b + c.$$

A. $P = 24.$

B. $P = 12.$

C. $P = 18.$

D. $P = 46.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \neq 0, \forall x \in [1; 2]$ nên:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+1}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \\ &= \int_1^2 \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) dx}{\sqrt{x}(x+1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})} = \int_1^2 \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) dx}{\sqrt{x}(x+1)} \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx = \left(2\sqrt{x} - 2\sqrt{x+1} \right) \Big|_1^2 = 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2 = \sqrt{32} - \sqrt{12} - 2. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } I = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c \text{ nên } \begin{cases} a = 32 \\ b = 12 \\ c = 2 \end{cases} \text{ . Suy ra: } P = a + b + c = 32 + 12 + 2 = 46.$$

TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

Câu 113. Tính tích phân $\int_0^{\pi} \sin 3x dx.$

A. $-\frac{1}{3}.$

B. $\frac{1}{3}.$

C. $-\frac{2}{3}.$

D. $\frac{2}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int_0^{\pi} \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{3}(-1 - 1) = \frac{2}{3}.$$

Câu 114. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx.$

A. $I = \frac{\pi}{4}$.

B. $I = -1$.

C. $I = 0$.

D. $I = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Câu 115. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ bằng?

A. $\cot \frac{\pi}{3} - \cot \frac{\pi}{4}$.

B. $\cot \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{4}$.

C. $-\cot \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{4}$.

D. $-\cot \frac{\pi}{3} - \cot \frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}.$$

Câu 116. Biết $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = a + b\sqrt{3}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $T = 2a + 6b$.

A. $T = 3$.

B. $T = -1$

C. $T = -4$.

D. $T = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy } 2a + 6b = 2 - 3 = -1.$$

Câu 117. Số $-\cot \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{4}$ các số nguyên thỏa mãn $\int_0^m \cos 2x dx = 0$ là

A. 643.

B. 1284.

C. 1285.

D. 642.

Hướng dẫn giải.

Chọn B

Ta

có

$$\int_0^m \cos 2x dx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_0^m = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2m = 0 \Leftrightarrow \sin 2m = 0 \Leftrightarrow 2m = k\pi \Leftrightarrow m = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

.

$$\text{Vì } m \in (0; 2017) \Rightarrow 0 < \frac{k\pi}{2} < 2017 \Leftrightarrow 0 < k < \frac{4043}{\pi} \approx 1284,06.$$

Vì $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có tất cả 1284 số nguyên của m .

Câu 118. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ có giá trị là:

A. $I = 1$.
sai.

B. $I = 0$.

C. $I = -1$.

D. Cả A, B, C đều

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ có giá trị là:

Cách 1: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$

Chọn A

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay.

Câu 119. Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$?

A. 8.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1 \Leftrightarrow 2 \sin 2x \Big|_{\pi}^b = 1 \Leftrightarrow \sin 2b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ b = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}.$

Do đó, có 4 số thực b thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 120. Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$ có giá trị là:

A. $I = 1.$

B. $I = 2.$

C. $I = -2.$

D. $I = -1.$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx$ có giá trị là:

Cách 1 $m \in (0; 2017)$: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = (-\cos x - \sin x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2.$

Chọn C

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay.

Câu 121. Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x - \cos 3x) dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{2}{3}.$

B. $I = \frac{3}{4}.$

C. $I = -\frac{3}{4}.$

D. $I = -\frac{2}{3}.$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x - \cos 3x) dx$ có giá trị là:

Cách 1: $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin 2x - \cos 3x) dx = \left(-\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{3} \sin 3x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{3}{4}.$

Chọn C

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay.

Câu 122. Kết quả của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1-\sin x) dx$ được viết ở dạng $a, b \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $a+2b=8$.

B. $a+b=5$.

C. $2a-3b=2$.

D. $a-b=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1-\sin x) dx = \left(x^2 - x + \cos x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} - 1 = \pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) - 1.$$

Vậy $a=4, b=2$. Suy ra $a+b=6$. Vậy B sai.

Câu 123. Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1+\sin x} dx = a+b\pi$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P=1+a^3+b^2$

A. $P=9$.

B. $P=29$.

C. $P=11$.

D. $P=-25$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1+\sin x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\sin x + 2 - \frac{1}{1+\sin x} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\sin x + 2 - \frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \right) dx = \left(2\cos x + 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} dx \\ &= -2 + \pi - \frac{1}{2} \cdot 2 \tan\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3 + \pi. \end{aligned}$$

Vậy $a=-3, b=1$.

$$P=1+a^3+b^2=-25.$$

Câu 124. Cho tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x-1+\cos x) dx = \pi\left(\frac{\pi}{a}-\frac{1}{b}\right)+c, (a, b, c \in \mathbb{Q})$. Tính $a-b+c$

A. -3

B. 1 .

C. -2 .

D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x-1+\cos x) dx = \left(2x^2 - x + \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\right)+1.$$

Suy ra $a=2, b=2, c=1$ nên $a-b+c=1$.

Câu 125. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3+4\sin^2 x) dx = \frac{a\pi}{b} - \frac{c\sqrt{3}}{6}$, trong đó a, b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b+c$

A. 8 .

B. 16 .

C. 12 .

D. 14 .

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (3 + 4\sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} [3 + 2(1 - \cos 2x)] dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (5 - 2\cos 2x) dx$$

$$= \frac{5\pi}{6} - \frac{3\sqrt{3}}{6}.$$

Suy ra $a = 5$, $b = 6$, $c = 3$.Vậy $a + b + c = 14$.

Câu 126. Cho giá trị của tích phân $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \cos x) dx = a$, $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x + \sin x) dx = b$. Giá trị

của $a + b$ là:

A. $P = \frac{3}{4} + \sqrt{3}$. **B.** $P = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $P = \frac{3}{4} - \sqrt{3}$. **D.** $P = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Cho giá trị của tích phân $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \cos x) dx = a$, $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x + \sin x) dx = b$. Giá trị

của $a + b$ là:

Cách 1:

Ta có:

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + \cos x) dx = \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$I_2 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos 2x + \sin x) dx = \left(\frac{1}{2} \sin 2x - \cos x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow P = a + b = \frac{3}{4} + \sqrt{3}.$$

Chọn A

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay vì các giá trị rất quen thuộc học sinh có thể nhận ra.

Câu 127. Cho giá trị của tích phân $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin 3x + \cos 3x) dx = a$, $I_2 = \int_e^{2e} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = b$. Giá

trị $a.b$ gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 8. **B.** 16. **C.** 10. **D.** 1.

Ta có:

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin 3x + \cos 3x) dx = \left(-\frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{2}{3} \Rightarrow a = -\frac{2}{3}.$$

$$I_2 = \int_e^{2e} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|x+1| \right) \Big|_e^{2e} = \ln 2 - \frac{1}{2e} + \frac{1}{e} - \ln(2e+1) + \ln(e+1)$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{e} + \ln 2 - \ln(2e+1) + \ln(e+1)$$

$$\Rightarrow ab \approx -0,2198.$$

Chọn D

Câu 128. Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin ax + \cos ax) dx$, với $a \neq 0$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right].$

B. $I = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right].$

C. $I = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(-a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right].$

D. $I = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[-\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right].$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin ax + \cos ax) dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin ax + \cos ax) dx = \left(-\frac{1}{a} \cos ax + \frac{1}{a} \sin ax \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{a} \sin \left(ax - \frac{\pi}{4} \right) \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{a} \left[\sin \left(a \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(a \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

Chọn B

Câu 129. Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + x \cos x - \sin^3 x}{1 + \cos x} dx = \frac{\pi^2}{a} - \frac{b}{c}$. Trong đó a, b, c là các số nguyên dương, phân số

$\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $T = 16.$

B. $T = 59.$

C. $T = 69.$

D. $T = 50.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + x \cos x - \sin^3 x}{1 + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) \sin x dx = \frac{\pi^2}{8} + \left(\cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}.$$

Như vậy $a = 8, b = 1, c = 2$. Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 = 69$.

Câu 130. Cho hàm số $f(x) = a \sin 2x - b \cos 2x$ thỏa mãn $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ và $\int_a^b dx = 3$. Tính tổng $a + b$

bằng:

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$f'(x) = 2a \cos 2x + 2b \sin 2x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \Leftrightarrow -2a = -2 \Leftrightarrow a = 1$$

$$\int_a^b dx = \int_1^b dx = 3 \Leftrightarrow b - 1 = 3 \Leftrightarrow b = 4$$

$$\text{Vậy } a + b = 1 + 4 = 5.$$

Câu 131. Cho tích phân $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \cos 2x \cos 4x dx = a + b\sqrt{3}$, trong đó a, b là các hằng số hữu tỉ. Tính $e^a + \log_2 |b|$.

A. -2.

B. -3.

C. $\frac{1}{8}$.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \cos 2x \cos 4x dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 (\cos 6x + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^0 = \frac{1}{8} \sqrt{3}.$$

$$\text{Do đó ta có } a = 0, b = \frac{1}{8}. \text{ Vậy } e^a + \log_2 |b| = e^0 + \log_2 \frac{1}{8} = -2.$$

Câu 132. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{1 + \sin 2x}$ với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, biết

$$F(0) = 1; F(\pi) = 0. \text{ Tính } P = F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right).$$

A. $P = 2 - \sqrt{3}$.

B. $P = 0$.

C. Không tồn tại P .

D. $P = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= F\left(-\frac{\pi}{12}\right) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right) = -\left[F(0) - F\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] + \left[F(\pi) - F\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right] + F(0) - F(\pi) \\ &= -\int_{-\frac{\pi}{12}}^0 \frac{1}{1 + \sin 2x} dx + \int_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} \frac{1}{1 + \sin 2x} dx + 1. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{1 + \sin 2x} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \text{ nên}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{12}}^0 \frac{1}{1+\sin 2x} dx = \frac{1}{2} \tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{12}}^0 = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{3});$$

$$\int_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} \frac{1}{1+\sin 2x} dx = \frac{1}{2} \tan \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \Big|_{\frac{11\pi}{12}}^{\pi} = \frac{1}{2} (-1 + \sqrt{3}).$$

Vậy $P = 1$.

Câu 133. Cho M, N là các số thực, xét hàm số $f(x) = M \cdot \sin \pi x + N \cdot \cos \pi x$ thỏa mãn $f(1) = 3$ và

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{\pi}. \text{ Giá trị của } f'\left(\frac{1}{4}\right) \text{ bằng}$$

- A.** $\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. **B.** $-\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $f(1) = 3 \Leftrightarrow M \cdot \sin \pi + N \cdot \cos \pi = 3 \Leftrightarrow N = -3$.

$$\text{Mặt khác } \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} (M \cdot \sin \pi x - 3 \cdot \cos \pi x) dx = -\frac{1}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{M}{\pi} \cos \pi x - \frac{3}{\pi} \sin \pi x \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{3}{\pi} + \frac{M}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow M = 2.$$

$$\text{Vậy } f(x) = 2 \sin \pi x - 3 \cos \pi x \text{ nên } f'(x) = 2\pi \cos \pi x + 3\pi \sin \pi x \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 134. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 1) \cos^2 x dx$ có giá trị là:

- A.** $I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$. **B.** $I = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$. **C.** $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$. **D.** $I = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 1) \cos^2 x dx$ có giá trị là:

Ta

biến

đổi:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - 1) \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 - \sin^2 x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4}$$

, với $t = \sin x$.

Chọn D

Câu 135. Biết tích phân $I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = a$. Giá trị của $I_2 = \int_a^1 \frac{x^2 + 1}{x^3 + x} dx = b \ln 2 - c \ln 5$. Thương số giữa b

và c là:

- A.** -2 . **B.** -4 . **C.** 2 . **D.** 4 .

Hướng dẫn giải

Biết tích phân $I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = a$. Giá trị của $I_2 = \int_a^1 \frac{x^2+1}{x^3+x} dx = b \ln 2 - c \ln 5$. Thương số giữa b

và c là:

Ta có:

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = (\cos x) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow I_2 = \int_a^1 \frac{x^2+1}{x^3+x} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2+1}{x^3+x} dx = \frac{1}{3} (\ln |t|) \Big|_{\frac{5}{8}}^2 = \frac{4}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \ln 5 \Rightarrow b = \frac{4}{3}, c = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b}{c} = -4.$$

Chọn B

Câu 136. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3x + \cos^2 x) dx = (a \cos 3x + bx \sin + c \sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$. Giá trị của $3a + 2b + 4c$ là:

A. - 1.

B. 1.

C. - 2.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3x + \cos^2 x) dx = (a \cos 3x + bx \sin + c \sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$. Giá trị của $3a + 2b + 4c$ là:

Ta có:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3x + \cos^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin 3x + \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \left(-\frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4} \Rightarrow 3a + 2b + 4c = 1$$

Chọn B

Câu 137. Cho $I_n = \int \tan^n x dx$ với $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \dots + I_8) + I_9 + I_{10}$ bằng

A. $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^r}{r} + C.$

B. $\sum_{r=1}^9 \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C.$

C. $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^r}{r} + C.$

D. $\sum_{r=1}^{10} \frac{(\tan x)^{r+1}}{r+1} + C$

.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$I_n = \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \tan^{n-2} x \cdot (\tan x)' dx - I_{n-2}$$

$$= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} + C$$

$$\Rightarrow I_n + I_{n-2} = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} + C.$$

$$I_0 + I_1 + 2(I_2 + I_3 + \dots + I_8) + I_9 + I_{10} = (I_{10} + I_8) + (I_9 + I_7) + \dots + (I_3 + I_1) + (I_2 + I_0)$$

$$= \frac{\tan^9 x}{9} + \frac{\tan^8 x}{8} + \dots + \frac{\tan^2 x}{2} + \tan x + C = \sum_{r=1}^9 \frac{\tan^r x}{r} + C.$$

TÍCH PHÂN HÀM MŨ – LÔGARIT

Câu 138. Tích phân $\int_0^1 e^{-x} dx$ bằng

A. $e-1$.

B. $\frac{1}{e}-1$.

C. $\frac{e-1}{e}$.

D. $\frac{1}{e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^1 = -\left(\frac{1}{e}-1\right) = \frac{e-1}{e}$.

Câu 139. Tích phân $I = \int_0^{2018} 2^x dx$ bằng

A. $2^{2018}-1$.

B. $\frac{2^{2018}-1}{\ln 2}$.

C. $\frac{2^{2018}}{\ln 2}$.

D. 2^{2018} .

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$I = \int_0^{2018} 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^{2018} = \frac{2^{2018}-1}{\ln 2}.$$

Câu 140. Biết $\int_{-1}^4 f(x) dx = \frac{1}{2}$ và $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{-1}{2}$. Tính tích phân $I = \int_0^4 [4e^{2x} + 2f(x)] dx$.

A. $I = 2e^8$.

B. $I = 4e^8 - 2$.

C. $I = 4e^8$.

D. $I = 2e^8 - 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $I = \int_0^4 [4e^{2x} + 2f(x)] dx = 4 \cdot \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^4 + 2 \int_0^{-1} f(x) dx + 2 \int_{-1}^4 f(x) dx$.

$$\Leftrightarrow I = 2(e^8 - 1) + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2e^8.$$

Câu 141. Cho $F(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2} dt$. Tính $F'(2)$.

A. $F'(2) = 4e^4$.

B. $F'(2) = 8e^{16}$.

C. $F'(2) = 4e^{16}$.

D. $F'(2) = e^4$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $G(x)$ là nguyên hàm của hàm số e^{t^2} .

$$\Rightarrow F(x) = G(x^2) - G(0)$$

$$\Rightarrow F'(x) = 2x \cdot G'(x^2) = 2x \cdot e^{x^4}$$

$$\Rightarrow F'(2) = 4e^{16}$$

Câu 142. Cho hàm số $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$ với $x > 0$. Đạo hàm của $g(x)$ là

A. $g'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$.

B. $g'(x) = \frac{1-x}{\ln x}$.

C. $g'(x) = \frac{1}{\ln x}$.

D. $g'(x) = \ln x$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Giả sử $F(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{1}{\ln t}$.

Khi đó $F'(t) = \frac{1}{\ln t}$ hay $F'(x) = \frac{1}{\ln x}$.

Ta có $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt = F(x^2) - F(x)$.

Suy ra $g'(x) = (F(x^2) - F(x))' = F'(x^2) - F'(x) = \frac{1}{\ln x^2} \cdot 2x - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$.

Chú ý: ta có công thức $\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right)' = v'(x) \cdot f[v(x)] - u'(x) \cdot f[u(x)]$

Câu 143. $\Leftrightarrow \int_{\frac{-3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = 6$. Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương k thỏa mãn

$\int_1^2 e^{kx} dx < \frac{2018 \cdot e^k - 2018}{k}$. Số phần tử của tập hợp S bằng.

- A.** 7. **B.** 8. **C.** Vô số. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\int_1^2 e^{kx} dx = \left(\frac{1}{k} e^{kx} \right) \Big|_1^2 = \frac{e^{2k} - e^k}{k}$.

$\int_1^2 e^{kx} dx < \frac{2018 \cdot e^k - 2018}{k} \Leftrightarrow \frac{e^{2k} - e^k}{k} < \frac{2018 \cdot e^k - 2018}{k}$

$\Leftrightarrow e^k (e^k - 1) < 2018(e^k - 1)$ (do k nguyên dương).

$\Leftrightarrow (e^k - 1)(e^k - 2018) < 0 \Leftrightarrow 1 < e^k < 2018 \Leftrightarrow 0 < k < \ln 2018 \approx 7.6$.

Do k nguyên dương nên ta chọn được $k \in S$ (với $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$).

Suy ra số phần tử của S là 7.

Câu 144. Cho $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx$ với $n \in \mathbb{N}$.

Đặt $u_n = 1 \cdot (I_1 + I_2) + 2(I_2 + I_3) + 3(I_3 + I_4) + \dots + n(I_n + I_{n+1}) - n$.

Biết $\lim u_n = L$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $L \in (-1; 0)$. **B.** $L \in (-2; -1)$. **C.** $L \in (0; 1)$. **D.** $L \in (1; 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Với $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx} \cdot e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx - \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx - I_n$

$\Rightarrow I_{n+1} = \int_0^1 e^{-nx} dx - I_n \Rightarrow I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n} (1 - e^{-n})$

Do đó $u_n = (1 - e^{-1}) + (1 - e^{-2}) + (1 - e^{-3}) + \dots + (1 - e^{-n}) - n$

$\Rightarrow u_n = -e^{-1} - e^{-2} - e^{-3} - \dots - e^{-n}$

Ta thấy u_n là tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = -e^{-1}$ và $q = \frac{1}{e}$, nên

$$\lim u_n = \frac{-e^{-1}}{1 - \frac{1}{e}} \Rightarrow L = \frac{-1}{e-1} \Rightarrow L \in (-1; 0).$$

TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 1

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $\alpha \leq u(x) \leq \beta$. Giả sử có thể viết $f(x) = g(u(x))u'(x)$, $x \in [a; b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$. Khi đó, ta có

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.$$

Dấu hiệu nhận biết và cách tính tích phân

	Dấu hiệu	Có thể đặt	Ví dụ
1	Có $\sqrt{f(x)}$	$t = \sqrt{f(x)}$	$I = \int_0^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+1}}$. Đặt $t = \sqrt{x+1}$
2	Có $(ax+b)^n$	$t = ax+b$	$I = \int_0^1 x(x+1)^{2016} dx$. Đặt $t = x+1$
3	Có $a^{f(x)}$	$t = f(x)$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x + 3}}{\cos^2 x} dx$. Đặt $t = \tan x + 3$
4	Có $\frac{dx}{x}$ và $\ln x$	$t = \ln x$ hoặc biểu thức chứa $\ln x$	$I = \int_1^e \frac{\ln x dx}{x(\ln x + 1)}$. Đặt $t = \ln x + 1$
5	Có $e^x dx$	$t = e^x$ hoặc biểu thức chứa e^x	$I = \int_0^{\ln 2} e^{2x} \sqrt{3e^x + 1} dx$. Đặt $t = \sqrt{3e^x + 1}$
6	Có $\sin x dx$	$t = \cos x$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx$. Đặt $t = \sin x$
7	Có $\cos x dx$	$t = \sin x$	$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{2\cos x + 1} dx$. Đặt $t = 2\cos x + 1$
8	Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	$t = \tan x$	$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) \frac{1}{\cos^2 x} dx$ Đặt $t = \tan x$
9	Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	$t = \cot x$	$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cot x}}{1 - \cos 2x} dx = \int \frac{e^{\cot x}}{2\sin^2 x} dx$. Đặt $t = \cot x$

BÀI TẬP

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$ và $u(x) \in [\alpha; \beta] \forall x \in [a; b]$, hơn nữa $f(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng? $x = a$

A. $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_a^b f(u)du.$

B. $\int_{u(a)}^{u(b)} f[u(x)]u'(x)dx = \int_a^b f(u)du.$

C. $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$

D. $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_a^b f(x)du.$

HÀM ĐA THỨC VÀ HÀM HỮU TỈ

Câu 2: Tính tích phân $I = \int_1^3 x(x-1)^{1000} dx.$

A. $I = \frac{2003.2^{1002}}{1003002}$. **B.** $I = \frac{1502.2^{1001}}{501501}$. **C.** $I = \frac{3005.2^{1002}}{1003002}$. **D.** $I = \frac{2003.2^{1001}}{501501}$.

Câu 3: Giá trị của tích phân $\int_0^{100} x(x-1)\dots(x-100)dx$ bằng
A. 0. **B.** 1. **C.** 100. **D.** một giá trị khác.

Câu 4: Tích phân $\int_0^2 \frac{x}{x^2+3} dx$ bằng
A. $\frac{1}{2} \log \frac{7}{3}$. **B.** $\ln \frac{7}{3}$. **C.** $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{3}$. **D.** $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{7}$.

Câu 5: Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^5+x^3} = a \ln \frac{5}{8} + b$. Khi đó $a+2b$ bằng
A. $\frac{5}{2}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{5}{8}$ **D.** $\frac{5}{16}$

Câu 6: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^5 dx}{(1+x^2)^3}$ được kết quả $I = a \ln 2 - b$. Giá trị $a+b$ là:
A. $\frac{3}{16}$ **B.** $\frac{13}{16}$ **C.** $\frac{14}{17}$ **D.** $\frac{4}{17}$

Câu 7: Tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2+1} dx$ có giá trị là:
A. $I = \ln 3$. **B.** $I = -\ln 2$. **C.** $I = -\ln 3$. **D.** $I = \ln 2$.

Câu 8: Cho $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \ln a$, a là các số hữu tỉ. Giá trị của a là:
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 9: Tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{ax}{ax^2+2} dx$, với $a \neq -2$ có giá trị là:
A. $I = \frac{\ln 2 + \ln|a+2|}{2}$. **B.** $I = \frac{\ln 2 - \ln|a+2|}{2}$.
C. $I = \frac{-\ln 2 - \ln|a+2|}{2}$. **D.** $I = \frac{-\ln 2 + \ln|a+2|}{2}$.

Câu 10: Giả sử $\int_3^5 \frac{dx}{x^2-x} = a \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2$, ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) $\int_3^5 \frac{dx}{x^2-x} = a \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2$. Tính giá trị biểu thức $S = -2a + b + 3c^2$.
A. $S = 3$. **B.** $S = 6$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = -2$.

Câu 11: Biết $\int_0^1 \frac{2x^2+3x+3}{x^2+2x+1} dx = a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2$.
A. 13. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 12: Tính $I = \int_a^b \frac{a-x^2}{(a+x^2)^2} dx$ (với a, b là các số thực dương cho trước).

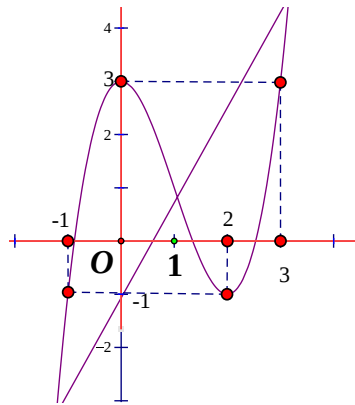
- A. $I = \frac{2b}{a^2+b^2}$. B. $I = \frac{b}{a+b^2}$. C. $I = \frac{(a-1)(b-1)}{(a+b^2)(a+1)}$. D. $I = \frac{b}{a^2+b}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1} dx = 2$.

Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. $I = 6$. B. $I = 2$. C. $I = 3$. D. $I = 1$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hình bên. Tính tích phân $I = \int_1^2 f'(2x-1) dx$.



- A. $I = -2$. B. $I = -1$. C. $I = 1$. D. $I = 2$.

HÀM VÔ TỈ

Câu 15: Cho tích phân $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x} dx$, với cách đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$ thì tích phân đã cho bằng với tích phân nào sau đây?

- A. $3 \int_0^1 t dt$. B. $\int_0^1 t^3 dt$. C. $3 \int_0^1 t^2 dt$. D. $3 \int_0^1 t^3 dt$.

Câu 16: Trong các tích phân sau, tích phân nào có cùng giá trị với $I = \int_1^2 x^3 \sqrt{x^2-1} dx$

- A. $\frac{1}{2} \int_1^2 t \sqrt{t-1} dt$. B. $\int_1^4 t \sqrt{t-1} dt$ C. $\int_0^{\sqrt{3}} (t^2+1) t^2 dt$. D. $\int_1^{\sqrt{3}} (x^2+1) x^2 dx$.

Câu 17: Nếu $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} dx = \int_1^2 f(t) dt$, với $t = \sqrt{1+x}$ thì $f(t)$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

- A. $f(t) = 2t^2 + 2t$ B. $f(t) = t^2 - t$ C. $f(t) = t^2 + t$ D. $f(t) = 2t^2 - 2t$

- Câu 18:** Kết quả của $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$ bằng
- A. 4. B. 5. C. 2. D. 3.
- Câu 19:** Tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ bằng
- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.
- Câu 20:** Cho $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{3} + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng
- A. 1. B. 2. C. 7. D. 9.
- Câu 21:** Biết $I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}-5} dx = a + b \ln 2$ với a, b là số nguyên. Tính $S = a + b$.
- A. $S = 3$. B. $S = -3$. C. $S = 5$. D. $S = 7$.
- Câu 22:** Tính tích phân $\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I = a \ln 3 + b \ln 5$. Giá trị $a^2 + ab + 3b^2$ là
- A. 4. B. 5. C. 1. D. 0.
- Câu 23:** Cho tích phân $I = \int_0^4 \frac{dx}{3+\sqrt{2x+1}} = a + b \ln \frac{2}{3}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $a - b = 3$. B. $a - b = 5$. C. $a + b = 5$. D. $a + b = 3$.
- Câu 24:** Biết $\int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{2}{3}(a - \sqrt{b})$, với a, b là các số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây đúng.
- A. $a = 2b$. B. $a < b$. C. $a = b$. D. $a = 3b$.
- Câu 25:** Cho $I = \int_{\sqrt{5}}^a \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}$, ($a > \sqrt{5}$). Khi đó giá trị của số thực a là
- A. $2\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{5}$. C. $3\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.
- Câu 26:** Cho $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = a\sqrt{2} + b$. Giá trị $a.b$ là:
- A. -1. B. -2. C. 1. D. 2.
- Câu 27:** Với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Đặt $I = \int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx = a - \ln \frac{b}{c}$. Giá trị của tích abc là :
- A. $\sqrt{3}$ B. $-2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $-\sqrt{3}$
- Câu 28:** Cho $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx = a - \sqrt{b} + \ln \frac{c+\sqrt{d}}{\sqrt{e}}$ với c nguyên dương và a, b, c, d, e là các số nguyên tố. Giá trị của biểu thức $a + b + c + d + e$ bằng.

A. 14.

B. 17.

C. 10.

D. 24.

Câu 29: Giá trị của $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ được viết dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên dương). Khi đó giá trị của $a - 7b$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. -1.

Câu 30: Giả sử $I = \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = a \ln \frac{2}{3} + b$ với a, b là số nguyên. Tính giá trị $a - b$.

A. -17.

B. 5.

C. -5.

D. 17.

Câu 31: Giả sử $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx = \frac{1}{c} \left(a\sqrt{a} - \frac{b}{b+c}\sqrt{b} \right)$ với $a, b, c \in \mathbb{N}; 1 \leq a, b, c \leq 9$. Tính giá trị của biểu thức C_{2a+c}^{b-a} .

A. 165.

B. 715.

C. 5456.

D. 35.

Câu 32: Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt > 0$ (ẩn x) là:

A. $(-\infty; +\infty)$.B. $(-\infty; 0)$.C. $(-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$.D. $(0; +\infty)$.

Câu 33: Cho biết $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản. Tính $m - 7n$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 91.

Câu 34: Biết $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{35}$ với a, b, c là các số hữu tỷ, tính $P = a + 2b + c - 7$.

A. $-\frac{1}{9}$.B. $\frac{86}{27}$.

C. -2.

D. $\frac{67}{27}$.

Câu 35: Biết $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.

A. $P = 44$.B. $P = 42$.C. $P = 46$.D. $P = 48$.

Câu 36: Giả sử a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\int_0^4 \frac{2x^2 + 4x + 1}{\sqrt{2x+1}} dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (au^4 + bu^2 + c) du$, trong đó $u = \sqrt{2x+1}$. Tính giá trị $S = a + b + c$.

A. $S = 3$.B. $S = 0$.C. $S = 1$.D. $S = 2$.

Câu 37: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{a^2 x^3 + ax}{\sqrt{ax^2 + 1}} dx$, với $a \geq 0$ có giá trị là:

A. $I = \frac{a(a-2)}{4}$.B. $I = \frac{a(a-2)}{2}$.C. $I = \frac{a(a+2)}{4}$.D. $I = \frac{a(a+2)}{2}$.

Câu 38: Tích phân $I = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} dx$ có giá trị là:

A. $I = -\ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $I = -\ln \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $I = \ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $I = \ln \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 39: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{a}{\sqrt{3x^2+12}} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{a}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right|$. **B.** $I = -\frac{a}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right|$.
C. $I = -\frac{a}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right|$. **D.** $I = \frac{a}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right|$.

Câu 40: Tích phân $I = \int_1^2 \frac{ax-2}{\sqrt{ax^2-4x}} dx = 2\sqrt{3}-1$. Giá trị nguyên của a là:

A. $a=5$. **B.** $a=6$. **C.** $a=7$. **D.** $a=8$.

Câu 41: Cho $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln \frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị $\frac{a}{b}$ là:

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 42: Tích phân $I = \int_0^{\sqrt[3]{7}} \frac{3x^5}{\sqrt[3]{8-x^3}} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{87}{5}$. **B.** $I = \frac{67}{5}$. **C.** $I = \frac{77}{5}$. **D.** $I = \frac{57}{5}$.

Câu 43: Biết $\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1} dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3} = a+b \ln 2 + c \ln \frac{5}{3}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính $T = 2a+b+c$.

A. $T=4$. **B.** $T=2$. **C.** $T=1$. **D.** $T=3$.

Câu 44: Biết $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = a\sqrt{3}+b\sqrt{2}+c+\frac{1}{2} \ln(3\sqrt{2}-3)$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính

$P = a+b+c$.

A. $P = \frac{1}{2}$. **B.** $P = -1$. **C.** $P = -\frac{1}{2}$. **D.** $P = \frac{5}{2}$.

Câu 45: Biết rằng $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}} = 2 \ln \left(\frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}} \right)$ với a, b là các số nguyên dương. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 7.

- Câu 46:** Biết $\int_1^2 \left(\sqrt[3]{x - \frac{1}{x^2}} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^{11}}} \right) dx = \frac{a}{b} \sqrt[3]{c}$, với a, b, c nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản và $c < a$. Tính $S = a + b + c$
- A.** $S = 51$. **B.** $S = 67$. **C.** $S = 39$. **D.** $S = 75$.

- Câu 47:** Cho số thực dương $k > 0$ thỏa $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln(2 + \sqrt{5})$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A.** $k > \frac{3}{2}$. **B.** $0 < k \leq \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2} < k \leq 1$. **D.** $1 < k \leq \frac{3}{2}$.

HÀM LƯỢNG GIÁC

- Câu 48:** Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- A.** $\int_0^1 \sin(1-x) dx = \int_0^1 \sin x dx$. **B.** $\int_0^1 \cos(1-x) dx = -\int_0^1 \cos x dx$.
- C.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$. **D.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

- Câu 49:** Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.

- A.** $I = \frac{5}{2}$. **B.** $I = \frac{3}{2}$. **C.** $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}$. **D.** $I = \frac{9}{4}$.

- Câu 50:** Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x dx = \ln a - \frac{b}{8}$. Chọn mệnh đề **đúng**:

- A.** $a + b = 4$ **B.** $a - b = 2$ **C.** $ab = 6$ **D.** $a^b = 4$

- Câu 51:** Biết rằng $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{1 + \cos 2x} dx = a$ và $I = \int_{-1}^0 \sqrt[3]{x+2} dx = b\sqrt[3]{2} - \frac{3}{4}$, a và b là các số hữu tỉ.

Thương số giữa a và b có giá trị là:

- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

- Câu 52:** Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{\cos 2x}{1 + 2 \sin 2x} dx = \frac{1}{4} \ln 3$. Tìm giá trị của a là:

- A.** 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

- Câu 53:** Biết $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) dx = a$ và $I_2 = \int_0^1 (x^2 + \sqrt{x}) dx = \left(bx^3 + cx^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_0^1$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b + c$ là:

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 54: Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x + \cos 3x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} + \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right).$

B. $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} - \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right).$

C. $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right).$

D. $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-2} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right).$

Câu 55: Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x + \cos x}{x^2 + \sin x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \ln \left(\frac{\pi^2}{4} - 1 \right) - \ln \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$

B. $I = \ln \left(\frac{\pi^2}{4} + 1 \right) - \ln \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$

C. $I = \ln \left(\frac{\pi^2}{4} - 1 \right) + \ln \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$

D. $I = \ln \left(\frac{\pi^2}{4} + 1 \right) + \ln \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$

Câu 56: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \ln(\tan x + 1) dx = a\pi + b \ln 2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $T = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - c$.

A. $T = 2.$

B. $T = 4.$

C. $T = 6.$

D. $T = -4.$

Câu 57: Xét tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx$. Nếu đặt $t = \sqrt{1 + \cos x}$, khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

A. $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{4t^3 - 4t}{t} dt.$

B. $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-4t^3 + 4t}{t} dt.$

C. $I = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt.$

D.

$I = -4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt.$

Câu 58: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cdot \cos x dx = \frac{1}{64} (n \in \mathbb{N})$. Tìm giá trị n .

A. $n = 3.$

B. $n = 4.$

C. $n = 5.$

D. $n = 6.$

Câu 59: Cho tích phân $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a + b = 0.$

B. $a - 2b = 0.$

C. $2a - b = 0.$

D. $a + 2b = 0.$

Câu 60: Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{(e^x \cos x + 1) \cos x} dx$ có giá trị là:

$$\begin{aligned} \text{A. } I &= \ln \left| \frac{e^{\frac{\pi}{3}} \left(e^{\frac{\pi}{3}} + 2 \right)}{e^{\frac{2\pi}{3}} - 2} \right|, & \text{B. } I &= \ln \left| \frac{e^{\frac{\pi}{3}} \left(e^{\frac{\pi}{3}} - 2 \right)}{e^{\frac{2\pi}{3}} - 2} \right|, \\ \text{C. } I &= \ln \left| \frac{e^{\frac{\pi}{3}} \left(e^{\frac{\pi}{3}} + 2 \right)}{e^{\frac{2\pi}{3}} + 2} \right|, & \text{D. } I &= \ln \left| \frac{e^{\frac{\pi}{3}} \left(e^{\frac{\pi}{3}} - 2 \right)}{e^{\frac{2\pi}{3}} + 2} \right|. \end{aligned}$$

Câu 61: Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$ có giá trị là:

$$\text{A. } I = \frac{19+17\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad \text{B. } I = \frac{19+17\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}, \quad \text{C. } I = \frac{-19+17\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad \text{D. } I = \frac{19-17\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}.$$

Câu 62: Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x + \sqrt{3} \sin x)^2} dx$ có giá trị là:

$$\begin{aligned} \text{A. } I &= \frac{\sqrt{3}}{16} \ln \left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2} \right) + \frac{3}{8}, & \text{B. } I &= \frac{\sqrt{3}}{8} \ln \left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2} \right) + \frac{3}{8}, \\ \text{C. } I &= -\frac{\sqrt{3}}{8} \ln \left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2} \right) + \frac{3}{8}, & \text{D. } I &= -\frac{\sqrt{3}}{16} \ln \left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2} \right) + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Câu 63: Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{9\cos^2 x - \sin^2 x} dx$ có giá trị là:

$$\text{A. } I = \frac{1}{3} \ln 2, \quad \text{B. } I = \frac{1}{2} \ln 2, \quad \text{C. } I = \frac{1}{6} \ln 2, \quad \text{D. } I = \ln 2.$$

Câu 64: Tích phân $I = \int_0^a \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^2} dx = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$. Giá trị của a là:

$$\text{A. } a = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{B. } a = -\frac{\pi}{4}, \quad \text{C. } a = \frac{\pi}{3}, \quad \text{D. } a = \frac{\pi}{6}.$$

Câu 65: Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ có giá trị là:

$$\begin{aligned} \text{A. } I &= \frac{\pi}{12} + \ln(\sqrt{3}+1), & \text{B. } I &= \frac{\pi}{12} + \ln \frac{\sqrt{3}+1}{4}, \\ \text{C. } I &= \frac{\pi}{12} - \frac{\ln \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right)}{2}, & \text{D. } I &= \frac{\pi}{12} + \ln \frac{\sqrt{3}+1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 66: Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = a\pi + b \ln 2$ với a và b là các số hữu tỉ. Khi đó $\frac{a}{b}$ bằng:

A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 67: Biết $\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi^a}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $P = 2a + b$.

A. $P = 8$. B. $P = 10$. C. $P = 6$. D. $P = 12$.

Câu 68: Cho tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}}$ (với $\alpha > 1$) thì giá trị của I bằng:

A. 2. B. $\frac{\alpha}{2}$. C. 2α . D. $\frac{2}{\alpha}$.

Câu 69: Có bao nhiêu giá trị của tham số m trong khoảng $(0; 6\pi)$ thỏa mãn $\int_0^m \frac{\sin x}{5 + 4 \cos x} dx = \frac{1}{2}$?

A. 6. B. 12. C. 8. D. 4.

Câu 70: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 1$. B. $S = 4$. C. $S = 3$. D. $S = 0$.

Câu 71: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x) \cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x} dx = a\pi^2 + b - \ln \frac{c}{\pi}$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính giá trị của biểu thức $P = ac^3 + b$.

A. $P = 3$. B. $P = \frac{5}{4}$. C. $P = \frac{3}{2}$. D. $P = 2$.

Câu 72: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2 - 5 \cos x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, với a, b là các số hữu tỉ, $c > 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 3$. B. $S = 0$. C. $S = 1$. D. $S = 4$.

Câu 73: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos 2x + 3 \sin 2x) \ln(\cos x + 2 \sin x) dx = c \ln 2 - \frac{a}{b}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 9$. B. $T = -11$. C. $T = 5$. D. $T = 7$.

Câu 74: Biết $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6} + x^3} dx = \frac{\pi^3}{a} + \frac{\sqrt{3}\pi^2}{b} + c\pi + d\sqrt{3}$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính $a + b + c + d$.

A. $a+b+c+d=28$. **B.** $a+b+c+d=16$. **C.** $a+b+c+d=14$. **D.** $a+b+c+d=22$.

Câu 75: Biết $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = a + \frac{\pi^2}{b} + \frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính $M = a - b + c$.

A. $M=35$. **B.** $M=41$. **C.** $M=-37$. **D.** $M=-35$.

Câu 76: Cho $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 2018$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x \cdot f(\sin 2x) dx$.

A. $I = \frac{1009}{2}$. **B.** $I=1009$. **C.** $I=4036$. **D.** $I=2018$.

Câu 77: Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 7$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$.

A. 1. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 78: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = 12$, $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2 \cos x) \sin x dx$ bằng

A. -12. **B.** 12. **C.** 6. **D.** -6.

Câu 79: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$ và $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) \cos x dx = 2$.

Tích phân $I = \int_0^3 f(x) dx$ bằng

A. $I=2$. **B.** $I=6$. **C.** $I=4$. **D.** $I=10$.

HÀM MŨ – LÔGARIT

Câu 80: Cho $I = \int_0^1 x e^{1-x^2} dx$. Biết rằng $I = \frac{ae-b}{2}$. Khi đó, $a+b$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 81: Nguyên hàm của $f(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$ là

A. $\sin^2 x \cdot e^{\sin^2 x - 1} + C$. **B.** $\frac{e^{\sin^2 x + 1}}{\sin^2 x + 1} + C$. **C.** $e^{\sin^2 x} + C$. **D.** $\frac{e^{\sin^2 x - 1}}{\sin^2 x - 1} + C$.

Câu 82: Biết rằng $\int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}} dx = \frac{a}{5}e^2 + \frac{b}{3}e + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính $T = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$.

A. $T=6$. **B.** $T=9$. **C.** $T=10$. **D.** $T=5$.

Câu 83: Tích phân $I = \int_{\ln 5}^{\ln 12} \sqrt{e^x + 4} dx$ có giá trị là:

A. $I = 2 - \ln 3 + \ln 5$. **B.** $I = 2 - 2 \ln 3 + 2 \ln 5$.

C. $I = 2 - 2 \ln 3 + \ln 5$. **D.** $I = 2 - \ln 3 - 2 \ln 5$.

Câu 84: Tìm tất cả các giá trị dương của tham số m sao cho $\int_0^m x e^{\sqrt{x^2+1}} dx = 2^{500} \cdot e^{\sqrt{m^2+1}}$.

A. $m = 2^{250} \sqrt{2^{500} - 2}$. **B.** $m = \sqrt{2^{1000} + 1}$. **C.** $m = 2^{250} \sqrt{2^{500} + 2}$. **D.** $m = \sqrt{2^{1000} - 1}$.

Câu 85: Cho $\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}} \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = a \cdot e^2 + b \cdot e + c$. Với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 1$. **B.** $S = 2$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = 4$.

Câu 86: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx$. Nếu đổi biến số $t = \sin^2 x$ thì:

A. $I = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 e^t dt + \int_0^1 t e^t dt \right]$. **B.** $I = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 e^t dt - \int_0^1 t e^t dt \right]$.

C. $I = 2 \left[\int_0^1 e^t dt + \int_0^1 t e^t dt \right]$. **D.** $I = 2 \left[\int_0^1 e^t dt - \int_0^1 t e^t dt \right]$.

Câu 87: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{1 + e^x}$.

A. -1 . **B.** 1 . **C.** e . **D.** 0 .

Câu 88: Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2016}}{e^x + 1} dx$.

A. $I = 0$. **B.** $I = \frac{2^{2018}}{2017}$. **C.** $I = \frac{2^{2017}}{2017}$. **D.** $I = \frac{2^{2018}}{2018}$.

Câu 89: Cho biết $\int_0^1 \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx = \frac{a}{b} \cdot e + c$ với a, c là các số nguyên, b là số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a - b + c$.

A. 3 . **B.** 0 . **C.** 2 . **D.** -3 .

Câu 90: Biết tích phân $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x + 3}} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = -1$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = 1$.

Câu 91: Giá trị $I = \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}} x^2 \sin(\pi x^3) e^{\cos(\pi x^3)} dx$ gần bằng số nào nhất trong các số sau đây:

A. $0,046$. **B.** $0,036$. **C.** $0,037$. **D.** $0,038$.

Câu 92: Cho $\int_0^1 \frac{(x^2 + x) e^x}{x + e^{-x}} dx = a \cdot e + b \ln(e + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + 2b - c$.

A. $P = 1$.

B. $P = -1$.

C. $P = 0$.

D. $P = -2$.

Câu 93: Biết $\int_0^1 \frac{(x^2 + 5x + 6)e^x}{x + 2 + e^{-x}} dx = ae - b - \ln \frac{ae + c}{3}$ với a, b, c là các số nguyên và e là cơ số của logarit tự nhiên. Tính $S = 2a + b + c$.

A. $S = 10$.

B. $S = 0$.

C. $S = 5$.

D. $S = 9$.

Câu 94: $\int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + ex^3 \cdot 2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \frac{1}{m} + \frac{1}{e \ln n} \ln \left(p + \frac{e}{e + \pi} \right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $S = m + n + p$.

A. $S = 6$.

B. $S = 5$.

C. $S = 7$.

D. $S = 8$.

Câu 95: Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 . Tính tích phân $I = \int_{x_1}^{x_2} (2ax + b)e^{ax^2 + bx + c} dx$.

A. $I = x_1 - x_2$.

B. $I = \frac{x_1 - x_2}{4}$.

C. $I = 0$.

D. $I = \frac{x_1 - x_2}{2}$.

Câu 96: Với cách đổi biến $u = \sqrt{1 + 3 \ln x}$ thì tích phân $\int_1^e \frac{\ln x}{x \sqrt{1 + 3 \ln x}} dx$ trở thành

A. $\frac{2}{3} \int_1^2 (u^2 - 1) du$.

B. $\frac{2}{9} \int_1^2 (u^2 - 1) du$.

C. $2 \int_1^2 (u^2 - 1) du$.

D. $\frac{2}{9} \int_1^2 \frac{u^2 - 1}{u} du$.

Câu 97: Biết $\int_1^e \frac{(x+1) \ln x + 2}{1 + x \ln x} dx = a \cdot e + b \ln \left(\frac{e+1}{e} \right)$ trong đó a, b là các số nguyên. Khi đó tỉ số $\frac{a}{b}$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 98: Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x}}{x} dx$ bằng cách đặt $t = \sqrt{1 + 3 \ln x}$, mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $I = \frac{2}{9} t^3 \Big|_1^2$.

B. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t dt$.

C. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt$.

D. $I = \frac{14}{9}$.

Câu 99: Biết $\int_1^2 \frac{(3x+1)}{3x^2 + x \ln x} dx = \ln \left(a + \frac{\ln b}{c} \right)$ với a, b, c là các số nguyên dương và $c \leq 4$. Tổng $a + b + c$ bằng

A. 6.

B. 9.

C. 7.

D. 8.

Câu 100: Biết $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)} dx = a \ln \frac{3}{2} + b$, ($a, b \in \mathbb{Q}$). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a - b = 1$.

B. $2a + b = 1$.

C. $a^2 + b^2 = 4$.

D. $a + 2b = 0$.

Câu 101: Tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x (2\sqrt{\ln^2 x + 1} + 1)}{x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{4\sqrt{2}+3}{3}$. **B.** $I = \frac{4\sqrt{2}+1}{3}$. **C.** $I = \frac{4\sqrt{2}+5}{3}$. **D.** $I = \frac{4\sqrt{2}-3}{3}$.

Câu 102: Tích phân $I = \int_1^e x(\ln^2 x + \ln x) dx$ có giá trị là:

A. $I = -2e$. **B.** $I = -e$. **C.** $I = e$. **D.** $I = 2e$.

Câu 103: Biết $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{\ln^3 x + 3x} \left(\ln^2 x + \frac{1}{3}x \right)}{x} dx = \frac{2}{9} \left(\sqrt{1+ae+27e^2+27e^3} - 3\sqrt{3} \right)$, a là các số hữu tỉ.

Giá trị của a là:

A. 9. **B.** -6. **C.** -9. **D.** 6.

Câu 104: Tích phân $I = \int_1^e \frac{2 \ln x \sqrt{\ln^2 x + 1}}{x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$. **B.** $I = \frac{4\sqrt{2}+2}{3}$. **C.** $I = \frac{2\sqrt{2}-2}{3}$. **D.** $I = \frac{2\sqrt{2}+2}{3}$.

Câu 105: Tính $I = \int_e^{e^2} \frac{(1-\ln x)^2}{x} dx$ được kết quả là

A. $\frac{13}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 106: Cho tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x} dx$, đặt $t = \sqrt{1+3\ln x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = \frac{2}{3} \int_1^e t^2 dt$. **B.** $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t dt$. **C.** $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt$. **D.** $I = \frac{2}{3} \int_1^e t dt$.

Câu 107: Biết $\int_1^e \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x} dx = \frac{a-b\sqrt{c}}{3}$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $c < 4$. Tính giá trị $S = a + b + c$.

A. $S = 13$. **B.** $S = 28$. **C.** $S = 25$. **D.** $S = 16$.

Câu 108: Cho $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx$ có kết quả dạng $I = \ln a + b$ với $a > 0, b \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2ab = -1$. **B.** $2ab = 1$. **C.** $-b + \ln \frac{3}{2a} = -\frac{1}{3}$. **D.** $-b + \ln \frac{3}{2a} = \frac{1}{3}$.

Câu 109: Biết $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+x\ln x} dx = \ln(\ln a + b)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2 + ab$.

A. 10. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 6.

Câu 110: Cho tích phân $I = \int_e^{e^2} \frac{(x^2+1)\ln x + 1}{x \ln x} dx = \frac{ae^4 + be^2}{2} + c + d \ln 2$. Chọn phát biểu **đúng nhất**:

- A.** $a = b = c = d$ **B.** $a = b^2 = \sqrt{c} = \frac{1}{d}$ **C.** A và B đúng **D.** A và B sai

Câu 111: Tính tích phân $I = \int_0^{2018} \frac{\ln(1+2^x)}{(1+2^{-x})\log_4 e} dx$.

- A.** $I = \ln(1+2^{2018}) - \ln 2$. **B.** $I = \ln^2(1+2^{2018}) - \ln^2 2$.
C. $I = \ln^2(1+2^{2018}) - \ln 4$. **D.** $I = \ln^2(1+2^{-2018}) - \ln^2 2$.

Câu 112: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\int_0^1 f(x) dx = 1$. **B.** $\int_0^1 f(x) dx = e$. **C.** $\int_0^e f(x) dx = 1$. **D.** $\int_0^e f(x) dx = e$.

Câu 113: Biết $\int_e^{e^4} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = 4$. Tính tích phân $I = \int_1^4 f(x) dx$.

- A.** $I = 8$. **B.** $I = 16$. **C.** $I = 2$. **D.** $I = 4$.

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2

Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ (*) sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha; \beta]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

- $\sqrt{a^2 - x^2}$: đặt $x = |a| \sin t$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- $\sqrt{x^2 - a^2}$: đặt $x = \frac{|a|}{\sin t}$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$
- $\sqrt{x^2 + a^2}$: $x = |a| \tan t$; $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
- $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$: đặt $x = a \cos 2t$

Lưu ý: Chỉ nên sử dụng phép đặt này khi các dấu hiệu 1, 2, 3 đi với x mũ chẵn. Ví dụ, để tính

tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ thì phải đổi biến dạng 2 còn với tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ thì nên đổi biến dạng 1.

Câu 114: Khi tính $I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$, bằng phép đặt $x = 2 \sin t$, thì được

- A.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1 + \cos 2t) dt$. **B.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1 - \cos 2t) dt$. **C.** $\int_0^2 4 \cos^2 t dt$. **D.** $\int_0^2 2 \cos^2 t dt$.

Câu 115: Biết rằng $\int_{-1}^1 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{2\pi}{3} + a$. Khi đó a bằng:

- A. $\sqrt{2}$. B. 1. C. $\sqrt{3}$. D. 2.

Câu 116: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = a\pi$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của a là:

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 117: Giá trị của $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \frac{a}{b}\pi$ trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T = ab$.

- A. $T = 35$. B. $T = 24$. C. $T = 12$. D. $T = 36$.

Câu 118: Đổi biến $x = 2\sin t$ thì tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ trở thành

- A. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt$. B. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} t dt$. C. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}$. D. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$.

Câu 119: Biết rằng $\int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}} dx = \frac{\pi}{6}$ trong đó a, b là các số nguyên dương và $4 < a + \sqrt{b} < 5$. Tổng $a + b$ bằng

- A. 5. B. 7. C. 4. D. 6.

Câu 120: Tích phân $I = \int_{\frac{5}{2}}^3 \sqrt{(x-1)(3-x)} dx$ có giá trị là:

- A. $I = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $I = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}$. C. $I = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$. D. $I = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Câu 121: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{3+4x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$ có giá trị là:

- A. $I = \frac{7\pi}{6} - 4\sqrt{3} + 8$. B. $I = \frac{7\pi}{6} - 4\sqrt{3} - 8$.
C. $I = \frac{7\pi}{6} + 4\sqrt{3} - 8$. D. $I = \frac{7\pi}{6} + 4\sqrt{3} + 8$.

Câu 122: Tích phân $I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{4x-3}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx$ có giá trị là:

- A. $I = \frac{5\pi}{3}$. B. $I = \frac{5\pi}{6}$. C. $I = -\frac{5\pi}{3}$. D. $I = -\frac{5\pi}{6}$.

Câu 123: Cho $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}} dx = a\pi + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Giá trị $a + b$ gần nhất với

- A. $\frac{1}{10}$ B. 1 C. $\frac{1}{5}$ D. $\sqrt{2}$

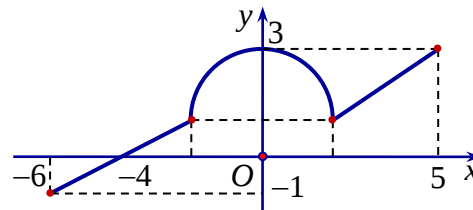
Câu 124: Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ có giá trị là:

- A. $I = \frac{\pi}{2}$. B. $I = \frac{\pi}{3}$. C. $I = \frac{\pi}{4}$. D. $I = \frac{\pi}{6}$.

Câu 125: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

- A. $\frac{\pi+2}{8}$. B. 1. C. $\frac{2+\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 126: Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6; 5]$, có đồ thị gồm hai đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I = \int_{-6}^5 [f(x) + 2] dx$.



- A. $I = 2\pi + 35$. B. $I = 2\pi + 34$. C. $I = 2\pi + 33$. D. $I = 2\pi + 32$.

Câu 127: Khi đổi biến $x = \sqrt{3} \tan t$, tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+3}$ trở thành tích phân nào?

- A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3} dt$. B. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3} dt$ C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} t dt$. D. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$ và $u(x) \in [\alpha, \beta] \forall x \in [a, b]$, hơn nữa $f(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng? $x = a$

A. $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_a^b f(u)du.$

B. $\int_{u(a)}^{u(b)} f[u(x)]u'(x)dx = \int_a^b f(u)du.$

C. $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$

D. $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_a^b f(x)du.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $u(x) = t \Rightarrow u'(x)dx = dt.$

Đổi cận

Khi $x = a$ thì $t = u(a)$; khi $x = b$ thì $t = u(b).$

Do đó $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$

HÀM ĐA THỨC VÀ HÀM HỮU TỈ

Câu 2. Tính tích phân $I = \int_1^3 x(x-1)^{1000} dx.$

A. $I = \frac{2003.2^{1002}}{1003002}.$

B. $I = \frac{1502.2^{1001}}{501501}.$

C. $I = \frac{3005.2^{1002}}{1003002}.$

D. $I = \frac{2003.2^{1001}}{501501}.$

Hướng dẫn giải

Đặt $x-1 = t$, khi $x=1 \Rightarrow t=0$; $x=3 \Rightarrow t=2.$

Do đó $I = \int_0^2 (t+1)t^{1000}d(t+1) = \int_0^2 (t^{1001} + t^{1000})dt = \left(\frac{t^{1002}}{1002} + \frac{t^{1001}}{1001} \right) \Big|_0^2$
 $= \frac{2^{1002}}{1002} + \frac{2^{1001}}{1001} = 2^{1001} \left(\frac{2}{1002} + \frac{1}{1001} \right) = \frac{1502.2^{1001}}{501501}.$

Chọn B

Câu 3. Giá trị của tích phân $\int_0^{100} x(x-1)\dots(x-100)dx$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 100.

D. một giá trị khác.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tính $I = \int_0^{100} x(x-1)\dots(x-100)dx.$

Đặt $t = 100 - x \Rightarrow dx = -dt.$

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t=100$; khi $x=100$ thì $t=0.$

Do $x(x-1)\dots(x-100) = (100-t)(99-t)\dots(1-t)(-t) = -t(t-1)\dots(t-99)(t-100)$ nên

$I = \int_0^{100} x(x-1)\dots(x-100)dx = - \int_{100}^0 t(t-1)\dots(t-100)dt = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0.$

Câu 4. Tích phân $\int_0^2 \frac{x}{x^2+3} dx$ bằng

A. $\frac{1}{2} \log \frac{7}{3}$.

B. $\ln \frac{7}{3}$.

C. $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{3}$.

D. $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^2 \frac{x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{x^2+3} d(x^2+3) = \frac{1}{2} \ln |x^2+3| \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{7}{3}$.

Câu 5. Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x^5+x^3} = a \ln \frac{5}{8} + b$. Khi đó $a+2b$ bằng

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{5}{4}$

C. $\frac{5}{8}$

D. $\frac{5}{16}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x^5+x^3} = \int_1^2 \frac{dx}{x^3(x^2+1)} = \int_1^2 \frac{x}{x^4(x^2+1)} dx$$

Đặt $t = x^2 + 1$, suy ra $dt = 2x dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} dt = x dx$.

Đổi cận $x=1 \Rightarrow t=2, x=2 \Rightarrow t=5$.

Suy ra $I = \int_2^5 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(t-1)^2} dt$.

Ta cần tách tiếp $\frac{1}{(t-1)^2} t$ về dạng $\frac{mt+n}{(t-1)^2} + \frac{k}{t}$ để có thể lấy nguyên hàm được. Dễ dàng tìm được m, n, k bằng phương pháp đồng nhất hệ số. Ta tìm được $m=-1, n=2, k=1$.

Suy ra

$$I = \frac{1}{2} \int_2^5 \left[\frac{1}{t} + \frac{2-t}{(t-1)^2} \right] dt = \frac{1}{2} \ln |x| \Big|_2^5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} \Big|_2^5 - \frac{1}{2} \ln |t-1| \Big|_2^5 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} - 1 \right) - \frac{1}{2} \ln 4 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{8} + \frac{3}{8}$$

Suy ra $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{8} \Rightarrow a+2b = \frac{5}{4}$.

Ta chọn phương án

B.

Câu 6. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^5 dx}{(1+x^2)^3}$ được kết quả $I = a \ln 2 - b$. Giá trị $a+b$ là:

A. $\frac{3}{16}$

B. $\frac{13}{16}$

C. $\frac{14}{17}$

D. $\frac{4}{17}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

đặt $t = (1+x^2) \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$.

Câu 7. Tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2+1} dx$ có giá trị là:

A. $I = \ln 3$.

B. $I = -\ln 2$.

C. $I = -\ln 3$.

D. $I = \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Ta nhận thấy: $(x^2 + 1)' = 2x$.

Ta đặt: $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \end{cases} \Rightarrow I = \int_2^1 \frac{1}{t} dt = (\ln |t|) \Big|_2^1 = -\ln 2$.

Chọn B

Câu 8. Cho $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \ln a$, a là các số hữu tỉ. Giá trị của a là:

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Cho $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \ln a$. Giá trị của a là:

Ta có:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \dots = \int_1^2 \frac{1}{3t} dt = \frac{1}{3} (\ln |t|) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \ln 2 \Rightarrow a = 2.$$

Chọn A

Câu 9. Tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{ax}{ax^2 + 2} dx$, với $a \neq -2$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\ln 2 + \ln |a + 2|}{2}$.

B. $I = \frac{\ln 2 - \ln |a + 2|}{2}$.

C. $I = \frac{-\ln 2 - \ln |a + 2|}{2}$.

D. $I = \frac{-\ln 2 + \ln |a + 2|}{2}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-1}^0 \frac{ax}{ax^2 + 2} dx$, với $a \neq -2$ có giá trị là:

Ta nhận thấy: $(ax^2 + 2)' = 2ax$. Ta dùng đổi biến số.

Đặt $t = ax^2 + 2 \Rightarrow dt = 2ax dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 2 \\ x = -1 \Rightarrow t = a + 2 \end{cases}$.

$$I = \int_{a+2}^2 \frac{1}{2t} dt = \frac{1}{2} (\ln |t|) \Big|_{a+2}^2 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln |a + 2|).$$

Chọn B

Câu 10. Giả sử $\int_3^5 \frac{dx}{x^2 - x} = a \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2$, ($a, b, c \in \mathbb{Z}$) $\int_3^5 \frac{dx}{x^2 - x} = a \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2$. Tính giá trị

biểu thức $S = -2a + b + 3c^2$.

A. $S = 3$.

B. $S = 6$.

C. $S = 0$.

D. $S = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\int_3^5 \frac{dx}{x^2 - x} = \int_3^5 \frac{dx}{x(x-1)} = \int_3^5 \frac{dx}{x-1} - \int_3^5 \frac{dx}{x} = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| \Big|_3^5 = \ln \frac{4}{5} - \ln \frac{2}{3} = \ln 4 - \ln 5 - \ln 2 + \ln 3 = \ln 2 + \ln 3 - \ln 5$$

suy ra $a = -1; b = 1; c = 1$

Vậy $S = 2 + 1 + 3 = 6$.

Câu 11. Biết $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx = a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2$.

A. 13.

B. 5.

C. 4.

D. 10.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $I = \int_0^1 \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx$

Đặt $t = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = dx \\ x = t - 1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x = 0 \leftrightarrow t = 1 \\ x = 1 \leftrightarrow t = 2 \end{cases}$

Khi đó $I = \int_1^2 \frac{2(t-1)^2 + 3(t-1) + 3}{t^2} dt = \int_1^2 \frac{2t^2 - t + 2}{t^2} dt = \int_1^2 \left(2 - \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} \right) dt = \left(2t - \ln t - \frac{2}{t} \right) \Big|_1^2$

$= 3 - \ln 2$.

Suy ra $P = 3^2 + 2^2 = 13$.

Câu 12. Tính $I = \int_a^b \frac{a - x^2}{(a + x^2)^2} dx$ (với a, b là các số thực dương cho trước).

A. $I = \frac{2b}{a^2 + b^2}$.

B. $I = \frac{b}{a + b^2}$.

C. $I = \frac{(a-1)(b-1)}{(a+b^2)(a+1)}$.

D. $I = \frac{b}{a^2 + b}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$I = \int_a^b \frac{a - x^2}{(a + x^2)^2} dx = \int_a^b \frac{\frac{a}{x^2} - 1}{\left(\frac{a}{x} + x\right)^2} dx$.

Đặt $t = \frac{a}{x} + x \Rightarrow dt = \left(-\frac{a}{x^2} + 1 \right) dx$. Đổi cận: $x = a \Rightarrow t = 1 + a$; $x = b \Rightarrow t = \frac{a}{b} + b$

Khi đó: $I = \int_{1+a}^{\frac{a}{b}+b} \frac{-1}{t^2} dt = \frac{1}{t} \Big|_{1+a}^{\frac{a}{b}+b} = \frac{1}{\frac{a}{b}+b} - \frac{1}{1+a} = \frac{b}{a+b^2} - \frac{1}{1+a} = \frac{(a-b)(b-1)}{(a+b^2)(a+1)}$

$\Leftrightarrow k = 1$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và các tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$.

Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $I = 6$.

B. $I = 2$.

C. $I = 3$.

D. $I = 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = (1 + \tan^2 x) dx \Rightarrow \frac{dt}{1+t^2} = dx$

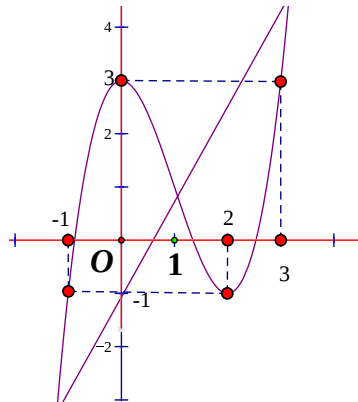
Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$ và $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1$

Đó đó: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x) dx = 4 \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(t) dt}{1+t^2} = 4 \Rightarrow \int_0^1 \frac{f(x) dx}{1+x^2} = 4$

Nên $\int_0^1 \frac{f(x)dx}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{x^2 f(x)dx}{1+x^2} = 4+2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 6$

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hình bên. Tính tích phân

$$I = \int_1^2 f'(2x-1)dx.$$



A. $I = -2.$

B. $I = -1.$

C. $I = 1.$

D. $I = 2.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $(-1; -1)$, $(0; 3)$, $(2; -1)$, $(3; 3)$ nên hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

Ta có: $I = \int_1^2 f'(2x-1)dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f'(2x-1)d(2x-1) = \frac{1}{2} f(2x-1) \Big|_1^2 = \frac{1}{2} [f(3) - f(1)] = 1$

HÀM VÔ TỈ

Câu 15. Cho tích phân $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x} dx$, với cách đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$ thì tích phân đã cho bằng với tích phân nào sau đây?

A. $3 \int_0^1 t dt$.

B. $\int_0^1 t^3 dt$.

C. $3 \int_0^1 t^2 dt$.

D. $3 \int_0^1 t^3 dt$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow x = 1-t^3 \Rightarrow dx = -3t^2 dt$, đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$, $x=1 \Rightarrow t=0$.

Khi đó ta có $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x} dx = 3 \int_0^1 t^3 dt$.

Câu 16. Trong các tích phân sau, tích phân nào có cùng giá trị với $I = \int_1^2 x^3 \sqrt{x^2-1} dx$

A. $\frac{1}{2} \int_1^2 t \sqrt{t-1} dt$.

B. $\int_1^4 t \sqrt{t-1} dt$

C. $\int_0^{\sqrt{3}} (t^2+1)t^2 dt$.

D. $\int_1^{\sqrt{3}} (x^2+1)x^2 dx$.

Hướng dẫn giải.

Đặt $t = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow t^2 = x^2-1 \Rightarrow t dt = x dx$

$x=1 \Rightarrow t=0$, $x=2 \Rightarrow t=\sqrt{3}$

$I = \int_1^2 x^3 \sqrt{x^2-1} dx = \int_0^{\sqrt{3}} (t^2+1)t^2 dt$

Chọn C

Câu 17. Nếu $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} dx = \int_1^2 f(t) dt$, với $t = \sqrt{1+x}$ thì $f(t)$ là hàm số nào trong các hàm số dưới đây?

A. $f(t) = 2t^2 + 2t$

B. $f(t) = t^2 - t$

C. $f(t) = t^2 + t$

D. $f(t) = 2t^2 - 2t$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = \sqrt{1+x}$, suy ra $t^2 = 1+x$, $2t dt = dx$

Ta có $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} dx = \int_1^2 \frac{t^2-1}{1+t} \cdot 2t dt = \int_1^2 (t-1) \cdot 2t dt = \int_1^2 (2t^2 - 2t) dt$

Câu 18. Kết quả của $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx$ bằng

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1 \Rightarrow 2t dt = 2dx \Rightarrow t dt = dx$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$, $x=4 \Rightarrow t=3$.

Khi đó, ta có $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx = \int_1^3 \frac{t dt}{t} = \int_1^3 dt = t \Big|_1^3 = 2$.

Câu 19. Tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1 \Rightarrow 2t dt = 3dx \Rightarrow \frac{2t}{3} dt = dx$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=1 \Rightarrow t=2$$

$$\text{Khi đó } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot t dt = \frac{2}{3} \int_1^2 dt = \frac{2}{3} t \Big|_1^2 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Cách khác: Sử dụng công thức } \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C \text{ thì } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

- Câu 20.** Cho $\int_0^3 \frac{x}{4+2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{3} + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng
- A.** 1. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 9.

Hướng dẫn giải**Chọn A**

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+1} \Rightarrow t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t dt.$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1; x=3 \Rightarrow t=2.$$

Khi đó:

$$\int_1^2 \frac{t^2-1}{4+2t} \cdot 2t dt = \int_1^2 \frac{t^3-t}{t+2} dt = \int_1^2 \left(t^2 - 2t + 3 - \frac{6}{t+2} \right) dt = \left(\frac{t^3}{3} - t^2 + 3t - 6 \ln|t+2| \right) \Big|_1^2 = \frac{7}{3} - 12 \ln 2 + 6 \ln 3$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a=7 \\ b=-12 \\ c=6 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=1.$$

- Câu 21.** Biết $I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}-5} dx = a + b \ln 2$ với a, b là số nguyên. Tính $S = a + b$.

- A.** $S = 3$. **B.** $S = -3$. **C.** $S = 5$. **D.** $S = 7$.

Hướng dẫn giải:**Chọn B**

$$t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1 \Rightarrow 2t dt = 2dx$$

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=4 \Rightarrow t=3 \end{cases}$$

$$I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}-5} dx = \int_1^3 \frac{t}{t-5} dt = \int_1^3 \left(1 + \frac{5}{t-5} \right) dt = \left(t + 5 \ln|t-5| \right) \Big|_1^3 = 2 - 5 \ln 2.$$

$$\text{Suy ra: } a=2; b=-5 \Rightarrow S = a+b = -3.$$

- Câu 22.** Tính tích phân $\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ được kết quả $I = a \ln 3 + b \ln 5$. Giá trị $a^2 + ab + 3b^2$ là
- A.** 4. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3x+1} \Rightarrow t^2 = 3x+1 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{3} \Rightarrow dx = \frac{2t dt}{3}.$$

$$\text{Đổi cận: } x=1 \Rightarrow t=2; x=5 \Rightarrow t=4.$$

Khi đó

$$I = \int_2^4 \frac{2}{t^2-1} dt = \int_2^4 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right|_2^4 = 2\ln 3 - \ln 5. \text{ Suy ra } \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Do đó $a^2 + ab + 3b^2 = 5$.

Câu 23. Cho tích phân $I = \int_0^4 \frac{dx}{3+\sqrt{2x+1}} = a + b \ln \frac{2}{3}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $a-b=3$. **B.** $a-b=5$. **C.** $a+b=5$. **D.** $a+b=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1 \Rightarrow dx = t dt$.

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=4 \Rightarrow t=3$

$$\text{Khi đó } I = \int_1^3 \frac{dx}{3+\sqrt{2x+1}} = \int_1^3 \frac{t dt}{3+t} = \int_1^3 \left(1 - \frac{3}{t+3} \right) dt = \left(t - 3 \ln |t+3| \right) \Big|_1^3 = 2 + 3 \ln \frac{2}{3}$$

Do đó $a+b=5$.

Câu 24. Biết $\int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{2}{3}(a-\sqrt{b})$, với a, b là các số nguyên dương. Mệnh đề nào sau đây đúng.

- A.** $a=2b$. **B.** $a < b$. **C.** $a=b$. **D.** $a=3b$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow t dt = x dx$. Đổi cận $x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$; $x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2$.

$$\text{Khi đó } \int_1^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1} dx = \int_{\sqrt{2}}^2 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{\sqrt{2}}^2 = \frac{2}{3}(4-\sqrt{2}). \text{ Vậy } a=2b.$$

Câu 25. Cho $I = \int_{\sqrt{5}}^a \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}$, ($a > \sqrt{5}$). Khi đó giá trị của số thực a là

- A.** $2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow t^2 = x^2+4 \Rightarrow t dt = x dx$. Đổi cận: $x=\sqrt{5} \Rightarrow t=3$, $x=a \Rightarrow t=\sqrt{a^2+4}$.

$$I = \int_{\sqrt{5}}^a \frac{x dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \int_3^{\sqrt{a^2+4}} \frac{dt}{t^2-4} = \int_3^{\sqrt{a^2+4}} \frac{dt}{(t-2)(t+2)} \\ = \frac{1}{4} \int_3^{\sqrt{a^2+4}} \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right|_3^{\sqrt{a^2+4}} = \frac{1}{4} \ln \left(5 \cdot \frac{\sqrt{a^2+4}-2}{\sqrt{a^2+4}+2} \right).$$

$$\text{Ta có, } I = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \ln \left(5 \cdot \frac{\sqrt{a^2+4}-2}{\sqrt{a^2+4}+2} \right) = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}, (a > \sqrt{5}) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a^2+4}-2}{\sqrt{a^2+4}+2} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(\sqrt{a^2+4}-2) = \sqrt{a^2+4}+2 \Leftrightarrow a=2\sqrt{3}.$$

Câu 26. Cho $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = a\sqrt{2} + b$. Giá trị a, b là:

- A.** -1 . **B.** -2 . **C.** 1 . **D.** 2 .

Hướng dẫn giải

Cho $I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = a\sqrt{2} + b$. Giá trị a, b là:

Ta có:

Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$. Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=2 \end{cases}$.

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow a = 1, b = -1 \Rightarrow a.b = -1.$$

Chọn A

Câu 27. Với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Đặt $I = \int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx = a - \ln \frac{b}{c}$. Giá trị của tích abc là :

A. $\sqrt{3}$

B. $-2\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $-\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đây là dạng toán tính tích phân để tránh tình trạng bấm máy tính nên chúng ta cần phải nhớ phương pháp làm. Có hai cách để làm bài toán này là chuyển về lượng giác hoặc phá căn. Dưới đây là một cách

Đặt $t = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow t^2 = 4-x^2 \Rightarrow t dt = -x dx$

$$I = \int_{\sqrt{3}}^0 \frac{t(-tdt)}{4-t^2} = \int_{\sqrt{3}}^0 \frac{t^2}{t^2-4} dt = \int_{\sqrt{3}}^0 \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right) dt = \left(t + \ln \left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right) \Big|_{\sqrt{3}}^0 = -\sqrt{3} - \ln \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

Suy ra $abc = -\sqrt{3}(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$

Câu 28. Cho $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx = a - \sqrt{b} + \ln \frac{c+\sqrt{d}}{\sqrt{e}}$ với c nguyên dương và a, b, c, d, e là các số

nguyên tố. Giá trị của biểu thức $a+b+c+d+e$ bằng.

A. 14.

B. 17.

C. 10.

D. 24.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} x dx.$$

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2 = x^2+1 \Rightarrow 2t dt = 2x dx \Rightarrow t dt = x dx$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2} \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^2}{t^2-1} dt = \int_{\sqrt{2}}^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\right] dt = \int_{\sqrt{2}}^2 dt + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= t \Big|_{\sqrt{2}}^2 + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{t-1}{t+1}\right| \Big|_{\sqrt{2}}^2 = 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \ln (3 - 2\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} + \ln \sqrt{\frac{3+\sqrt{8}}{3}} \\ &= 2 - \sqrt{2} + \ln \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Vậy $a+b+c+d+e=10$.

Câu 29. Giá trị của $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ được viết dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (a, b là các số nguyên dương). Khi đó giá trị của $a-7b$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. -1.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1: Tính $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

Đặt $u = \sqrt[3]{1+x^2} \Rightarrow \frac{3}{2}u^2 du = x dx$. Đổi cận: $x=0 \Rightarrow u=1$; $x=\sqrt{7} \Rightarrow u=2$.

Vậy $I = \frac{3}{2} \int_1^2 \frac{(u^3-1)u^2}{u} du = \frac{3}{2} \int_1^2 (u^4-u) du = \frac{141}{20}$.

Suy ra: $a=141$, $b=20$.

Vậy $a-7b=1$.

Cách 2: Dùng MTCT $I = \int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = 7.01 = \frac{141}{20}$.

Suy ra: $a=141$, $b=20$.

Vậy $a-7b=1$.

Câu 30. Giả sử $I = \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = a \ln \frac{2}{3} + b$ với a, b là số nguyên. Tính giá trị $a-b$.

A. -17.

B. 5.

C. -5.

D. 17.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\sqrt[6]{x} = t \Rightarrow x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$.

Với $x=1 \Rightarrow t=1$, $x=64 \Rightarrow t=2$.

Khi đó $I = \int_1^2 \frac{6t^5}{t^3+t^2} dt = 6 \int_1^2 \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = (2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln|t+1|) \Big|_1^2 = 6 \ln \frac{2}{3} + 11$.

$\Rightarrow a=6$, $b=11$. Vậy $a-b=-5$.

Câu 31. Giả sử $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx = \frac{1}{c} \left(a\sqrt{a} - \frac{b}{b+c} \sqrt{b} \right)$ với $a, b, c \in \mathbb{N}$; $1 \leq a, b, c \leq 9$. Tính giá trị của biểu thức C_{2a+c}^{b-a} .

A. 165.

B. 715.

C. 5456.

D. 35.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$I = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}{x^3} dx$

Đặt $t^2 = 1 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow 2tdt = -\frac{2}{x^3} dx \Rightarrow -tdt = \frac{1}{x^3} dx$

Ta được $I = -\int_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_{\frac{\sqrt{5}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3} \left(2\sqrt{2} - \frac{5}{5+3} \sqrt{5} \right)$.

Vậy $a=2$, $b=5$, $c=3$, suy ra $C_{2a+c}^{b-a} = C_7^3 = 35$.

Câu 32. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt > 0$ (ẩn x) là:

A. $(-\infty; +\infty)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $(-\infty; +\infty) \setminus \{0\}$.

D. $(0; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^x \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} d(t^2+1) > 0 \Leftrightarrow \sqrt{t^2+1} \Big|_0^x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - 1 > 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > 1 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Câu 33. Cho biết $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản. Tính $m-7n$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 91.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = \sqrt[3]{1+x^2} \Rightarrow t^3 = 1+x^2 \Rightarrow 3t^2 dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{3t^2 dt}{2}.$$

Đổi cận: khi $x=0 \Rightarrow t=1$; khi $x=\sqrt{7} \Rightarrow t=2$

$$\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = \int_1^2 \frac{t^3-1}{t} \cdot \frac{3t^2}{2} dt = \frac{3}{2} \int_1^2 (t^4-t) dt = \frac{3}{2} \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \frac{141}{20}.$$

$$\Rightarrow m-7n = 141 - 7 \cdot 20 = 1.$$

Câu 34. Biết $\int_1^2 \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}} dx = a+b\sqrt{2}+c\sqrt{35}$ với a, b, c là các số hữu tỷ, tính $P = a+2b+c-7$.

A. $-\frac{1}{9}$.

B. $\frac{86}{27}$.

C. -2.

D. $\frac{67}{27}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Cách 1: Ta có } \int_1^2 \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}} dx = \int_1^2 x \left(3x+\sqrt{9x^2-1} \right) dx = \int_1^2 \left(3x^2 - x\sqrt{9x^2-1} \right) dx \\ = \int_1^2 3x^2 dx - \int_1^2 x\sqrt{9x^2-1} dx = x^3 \Big|_1^2 + \int_1^2 x\sqrt{9x^2-1} dx = 7 - \int_1^2 x\sqrt{9x^2-1} dx.$$

$$\text{Tính } \int_1^2 x\sqrt{9x^2-1} dx.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{9x^2-1} = t \Rightarrow 9x^2-1 = t^2 \Rightarrow x dx = \frac{t dt}{9}.$$

Khi $x=1$ thì $t=2\sqrt{2}$; khi $x=2$ thì $t=\sqrt{35}$.

$$\text{Khi đó } \int_1^2 x\sqrt{9x^2-1} dx = \int_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{35}} t \frac{t dt}{9} = \frac{t^3}{27} \Big|_{2\sqrt{2}}^{\sqrt{35}} = \frac{35}{27} \sqrt{35} - \frac{16}{27} \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } \int_1^2 \frac{x}{3x+\sqrt{9x^2-1}} dx = 7 - \frac{35}{27} \sqrt{35} + \frac{16}{27} \sqrt{2} \Rightarrow a=7, b=\frac{16}{27}, c=-\frac{35}{27}.$$

$$\text{Vậy } P = a+2b+c-7 = 7 + \frac{32}{27} - \frac{35}{27} - 7 = -\frac{1}{9}.$$

$$\text{Cách 2: } \int_1^2 x\sqrt{9x^2-1} dx = \frac{1}{18} \int_1^2 (9x^2-1)^{\frac{1}{2}} d(9x^2-1) = \frac{1}{27} (9x^2-1)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{35\sqrt{35}}{27} - \frac{16\sqrt{2}}{27}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = 7 - \frac{35}{27}\sqrt{35} + \frac{16}{27}\sqrt{2} \Rightarrow a = 7, b = \frac{16}{27}, c = -\frac{35}{27}.$$

$$\text{Vậy } P = a + 2b + c - 7 = 7 + \frac{32}{27} - \frac{35}{27} - 7 = -\frac{1}{9}.$$

Câu 35. Biết $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính

$$P = a + b + c.$$

A. $P = 44.$

B. $P = 42.$

C. $P = 46.$

D. $P = 48.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} + \sqrt{x+1} \Rightarrow dt = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2\sqrt{x(x+1)}} dx \Leftrightarrow \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}} = 2 \frac{dt}{t}.$$

$$\text{Khi } x=1 \text{ thì } t = \sqrt{2} + 1, \text{ khi } x=2 \text{ thì } t = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = 2 \int_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2} = -2 \frac{1}{t} \Big|_{\sqrt{2}+1}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = -2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \right)$$

$$= 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 2 = \sqrt{32} - \sqrt{12} - \sqrt{4} \Rightarrow a = 32, b = 12, c = 4$$

$$\text{Vậy } P = a + b + c = 48$$

Câu 36. Giả sử a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $\int_0^4 \frac{2x^2 + 4x + 1}{\sqrt{2x+1}} dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (au^4 + bu^2 + c) du$, trong

đó $u = \sqrt{2x+1}$. Tính giá trị $S = a + b + c$.

A. $S = 3.$

B. $S = 0.$

C. $S = 1.$

D. $S = 2.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow u^2 = 2x+1 \Rightarrow \begin{cases} udu = dx \\ x = \frac{u^2-1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int_0^4 \frac{2x^2 + 4x + 1}{\sqrt{2x+1}} dx = \int_1^3 \frac{2\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{u^2-1}{2}\right) + 1}{u} u \cdot du = \frac{1}{2} \int_1^3 (u^4 + 2u^2 - 1) \cdot du$$

$$\text{Vậy } S = a + b + c = 1 + 2 - 1 = 2.$$

Câu 37. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{a^2 x^3 + ax}{\sqrt{ax^2 + 1}} dx$, với $a \geq 0$ có giá trị là:

A. $I = \frac{a(a-2)}{4}.$

B. $I = \frac{a(a-2)}{2}.$

C. $I = \frac{a(a+2)}{4}.$

D. $I = \frac{a(a+2)}{2}.$

Hướng dẫn giải

$$\text{Tích phân } I = \int_0^1 \frac{a^2 x^3 + ax}{\sqrt{ax^2 + 1}} dx, \text{ với } a \geq 0 \text{ có giá trị là:}$$

Ta biến đổi: $I = \int_0^1 \frac{a^2 x^3 + ax}{\sqrt{ax^2 + 1}} dx = \int_0^1 \frac{ax(ax^2 + 1)}{\sqrt{ax^2 + 1}} dx = \int_0^1 (ax\sqrt{ax^2 + 1}) dx.$

Ta nhận thấy: $(ax^2 + 1)' = 2ax$. Ta dùng đổi biến số.

Đặt $t = ax^2 + 1 \Rightarrow dt = 2ax dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=a+1 \end{cases}$.

$$I = \int_1^{a+1} \frac{1}{2} t dt = \left(\frac{1}{4} t^2 \right) \Big|_1^{a+1} = \frac{1}{4} a(a+2).$$

Chọn C

Câu 38. Tích phân $I = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$ có giá trị là:

A. $I = -\ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $I = -\ln \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $I = \ln \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $I = \ln \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$ có giá trị là:

Đặt $u = x + \sqrt{x^2 + 9} \Rightarrow du = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} \right) dx = \frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \frac{u dx}{\sqrt{x^2 + 9}} \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}.$

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=3 \\ x=3 \Rightarrow u=3+3\sqrt{2} \end{cases}$.

$$\Rightarrow I = \int_3^{3+3\sqrt{2}} \frac{du}{u} = (\ln |u|) \Big|_3^{3+3\sqrt{2}} = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Chọn C

Câu 39. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{a}{\sqrt{3x^2 + 12}} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{a}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right|$. **B.** $I = -\frac{a}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right|$.
C. $I = -\frac{a}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right|$. **D.** $I = \frac{a}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right|$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^1 \frac{a}{\sqrt{3x^2 + 12}} dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_0^1 \frac{a}{\sqrt{3x^2 + 12}} dx = \frac{a}{\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx.$$

Đặt $u = x + \sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow du = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}.$

$$I = \frac{a}{\sqrt{3}} \int_2^{1+\sqrt{5}} \frac{1}{u} du = \frac{a}{\sqrt{3}} (\ln u) \Big|_2^{1+\sqrt{5}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right|.$$

Chọn D

Câu 40. Tích phân $I = \int_1^2 \frac{ax-2}{\sqrt{ax^2-4x}} dx = 2\sqrt{3}-1$. Giá trị nguyên của a là:

A. $a = 5$.

B. $a = 6$.

C. $a = 7$.

D. $a = 8$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^2 \frac{ax-2}{\sqrt{ax^2-4x}} dx = 2\sqrt{3}-1$. Giá trị của a là:

Ta có: $(ax^2-4x)' = 2ax-4 = 2(ax-2)$.

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2ax-4}{\sqrt{ax^2-4x}} dx.$$

Đặt $t = ax^2-4x \Rightarrow dt = (2ax-4)dx$.

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=2 \Rightarrow t=4a-8 \\ x=1 \Rightarrow t=a-4 \end{cases}.$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{a-4}^{4a-8} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left(\sqrt{t} \right) \Big|_{a-4}^{4a-8} = \sqrt{4a-8} - \sqrt{a-4}$$

Theo đề bài: $I = 2\sqrt{3}-1 \Leftrightarrow \sqrt{4a-8} - \sqrt{a-4} = 2\sqrt{3}-1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a=5$.

Câu 41. Cho $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln \frac{2+\sqrt{a}}{1+\sqrt{b}}$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị $\frac{a}{b}$ là:

A. $\frac{2}{5}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Cho $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. Giá trị $\frac{a}{b}$ là:

Ta đặt: $t = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=1+\sqrt{2} \\ x=2 \Rightarrow t=2+\sqrt{5} \end{cases}.$$

$$\int_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} \frac{dt}{t} = \left(\ln |t| \right) \Big|_{1+\sqrt{2}}^{2+\sqrt{5}} = \ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}.$$

Chọn B

Câu 42. Tích phân $I = \int_0^{\sqrt[3]{7}} \frac{3x^5}{\sqrt[3]{8-x^3}} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{87}{5}$.

B. $I = \frac{67}{5}$.

C. $I = \frac{77}{5}$.

D. $I = \frac{57}{5}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^{\sqrt[3]{7}} \frac{3x^5}{\sqrt[3]{8-x^3}} dx$ có giá trị là:

Cách 1: Ta nhận thấy: $(8-x^3)' = -3x^2$. Ta dùng đổi biến số.

Đặt $t = 8-x^3 \Rightarrow dt = -3x^2 dx$.

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=8 \\ x=\sqrt[3]{7} \Rightarrow t=1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\sqrt[3]{7}} \frac{3x^5}{\sqrt[3]{8-x^3}} dx = - \int_0^{\sqrt[3]{7}} \frac{-3x^2 \cdot x^3}{\sqrt[3]{8-x^3}} dx = - \int_0^{\sqrt[3]{7}} \frac{-3x^2(8-t)}{\sqrt[3]{8-x^3}} dx$$

$$\Rightarrow I = \int_8^1 \frac{t-8}{\sqrt[3]{t}} dt = \int_8^1 \left(t^{\frac{2}{3}} - 8t^{-\frac{1}{3}} \right) dt = \left(\frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} - 12t^{\frac{2}{3}} \right) \Big|_8^1 = \frac{87}{5}.$$

Chọn A

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay, tuy nhiên chờ máy giải cũng khá mất thời gian.

Câu 43. Biết $\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1} dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3} = a + b \ln 2 + c \ln \frac{5}{3}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính $T = 2a + b + c$.

A. $T = 4$.

B. $T = 2$.

C. $T = 1$.

D. $T = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$I = \int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1} dx}{2x+3\sqrt{2x+1}+3} = \int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1} dx}{(\sqrt{2x+1}+1)(\sqrt{2x+1}+2)} = \int_0^4 \frac{2(\sqrt{2x+1}+1) - (\sqrt{2x+1}+2) dx}{(\sqrt{2x+1}+1)(\sqrt{2x+1}+2)}$$

$$= \int_0^4 \frac{2 dx}{(\sqrt{2x+1}+2)} - \int_0^4 \frac{dx}{(\sqrt{2x+1}+1)}.$$

Đặt $u = \sqrt{2x+1} \Rightarrow u du = dx$. Với $x=0 \Rightarrow u=1$, với $x=4 \Rightarrow u=3$.

$$\text{Suy ra } I = \int_1^3 \frac{2udu}{u+2} - \int_1^3 \frac{udu}{u+1} = \int_1^3 \left(2 - \frac{4}{u+2} \right) du - \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{u+1} \right) du$$

$$= \left(u - 4 \ln|u+2| + \ln|u+1| \right) \Big|_1^3 = 2 - 4 \ln \frac{5}{3} + \ln 2$$

$$\Rightarrow a = 2, b = 1, c = 1 \Rightarrow T = 2 \cdot 1 + 1 - 4 = 1.$$

Câu 44. Biết $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = a\sqrt{3} + b\sqrt{2} + c + \frac{1}{2} \ln(3\sqrt{2}-3)$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Tính $P = a + b + c$.

A. $P = \frac{1}{2}$.

B. $P = -1$.

C. $P = -\frac{1}{2}$.

D. $P = \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{(1+x-\sqrt{1+x^2}) dx}{2x} = \left(\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} x \right) \Big|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{1+x^2} dx}{2x^2}.$$

$$= \frac{1}{2} \ln \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} - I$$

$$\text{Xét } I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{1+x^2} dx}{2x^2}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+x^2} \Rightarrow t dt = x dx$$

$$I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t^2 dt}{2(t^2-1)} = \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \right] = \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \ln \frac{t-1}{t+1} \right] \Big|_{\sqrt{2}}^2$$

Câu 47. Cho số thực dương $k > 0$ thỏa $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln(2 + \sqrt{5})$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $k > \frac{3}{2}$.

B. $0 < k \leq \frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2} < k \leq 1$.

D. $1 < k \leq \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \ln(x + \sqrt{x^2 + k}) \Rightarrow dt = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + k}}}{x + \sqrt{x^2 + k}} dx \Leftrightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}} dx$$

$$\text{Ta có } \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \int_0^2 dt = t|_0^2 \Leftrightarrow \ln(x + \sqrt{x^2 + k}) \Big|_0^2 = \ln(2 + \sqrt{5})$$

$$\Leftrightarrow \ln(2 + \sqrt{4 + k}) - \ln \sqrt{k} = \ln(2 + \sqrt{5}) \Leftrightarrow \ln \frac{2 + \sqrt{4 + k}}{\sqrt{k}} = \ln(2 + \sqrt{5})$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 + \sqrt{4 + k}}{\sqrt{k}} = 2 + \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 2 + \sqrt{4 + k} = (2 + \sqrt{5})\sqrt{k} \Leftrightarrow 4 + 4 + k + 4\sqrt{4 + k} = (2 + \sqrt{5})^2 k \Leftrightarrow \sqrt{4 + k} = (2 + \sqrt{5})k - 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{2}{2 + \sqrt{5}} \\ 4 + k = (2 + \sqrt{5})^2 k^2 + 4 - 4(2 + \sqrt{5})k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{2}{2 + \sqrt{5}} \\ (2 + \sqrt{5})^2 k^2 - (9 + 4\sqrt{5})k = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k > \frac{2}{2 + \sqrt{5}} \\ k = 0 \\ k = 1 \end{cases}$$

HÀM LƯỢNG GIÁC

Câu 48. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\int_0^1 \sin(1-x) dx = \int_0^1 \sin x dx.$

B. $\int_0^1 \cos(1-x) dx = -\int_0^1 \cos x dx.$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$

D.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét tích phân $\int_0^1 \sin(1-x) dx$

Đặt $1-x=t \Rightarrow dx = -dt$. Khi $x=0 \Rightarrow t=1$; Khi $x=1 \Rightarrow t=0$.

Do đó $\int_0^1 \sin(1-x) dx = \int_1^0 \sin t (-dt) = \int_0^1 \sin t dt = \int_0^1 \sin x dx.$

Câu 49. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx.$

A. $I = \frac{5}{2}.$

B. $I = \frac{3}{2}.$

C. $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}.$

D. $I = \frac{9}{4}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx.$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1$; $x=\frac{\pi}{3} \Rightarrow t=\frac{1}{2}.$

Khi đó: $I = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{t^3} dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^3} dt = \left. \frac{-1}{2t^2} \right|_{\frac{1}{2}}^1 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$

Câu 50. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x dx = \ln a - \frac{b}{8}.$ Chọn mệnh đề **đúng**:

A. $a+b=4$

B. $a-b=2$

C. $ab=6$

D. $a^b=4$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $u = \cos x \Rightarrow -du = \sin x dx$

Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$

$$I = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{(1-u^2)(-du)}{u} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{u} - u \right) du = \left[\ln u - \frac{u^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \ln 2 - \frac{3}{8}$$

Câu 51. Biết rằng $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{1 + \cos 2x} dx = a$ và $I = \int_{-1}^0 \sqrt[3]{x+2} dx = b\sqrt[3]{2} - \frac{3}{4}$, a và b là các số hữu tỉ.

Thương số giữa a và b có giá trị là:

- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Biết rằng $I_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{1 + \cos 2x} dx = a$ và $I = \int_{-1}^0 \sqrt[3]{x+2} dx = b\sqrt[3]{2} - \frac{3}{4}$. Thương số giữa a và b có giá

trị là:

Ta có:

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{1 + \cos 2x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\cos^2 x} dx = \dots = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 t dt = \frac{1}{2}, \text{ với } t = \tan x.$$

$$I = \int_{-1}^0 \sqrt[3]{x+2} dx = \frac{3}{4} \left[\sqrt[3]{(x+2)^4} \right]_{-1}^0 = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} - \frac{3}{4}.$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3}.$$

Chọn B

Câu 52. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{\cos 2x}{1 + 2 \sin 2x} dx = \frac{1}{4} \ln 3$. Tìm giá trị của a là:

- A.** 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = 1 + 2 \sin 2x \text{ đưa đến } I = \frac{1}{4} \int_1^{1+2 \sin 2\pi/a} \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \ln t \Big|_1^{1+2 \sin 2\pi/a} = \frac{1}{4} \ln 3$$

suy ra $1 + 2 \sin 2/a = 3$ suy ra $a = 4$.

Câu 53. Biết $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) dx = a$ và $I_2 = \int_0^1 (x^2 + \sqrt{x}) dx = \left(bx^3 + cx^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_0^1$, a và b là các số hữu tỉ. Giá

trị của $a + b + c$ là:

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Biết $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) dx = a$ và $I_2 = \int_0^1 (x^2 + \sqrt{x}) dx = \left(bx^3 + cx^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_0^1$. Giá trị của $a + b + c$ là:

Ta có:

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \dots = \int_0^1 t dt = 1, \text{ với } t = \tan x.$$

$$I_2 = \int_0^1 (x^2 + \sqrt{x}) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_0^1.$$

$$\Rightarrow a = 1, b = \frac{1}{3}, c = \frac{2}{3} \Rightarrow a + b + c = 2.$$

Chọn B

Câu 54. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x + \cos 3x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} + \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right).$

B. $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} - \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right).$

C. $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right).$

D. $I = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-2} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right).$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x + \cos 3x} dx$ có giá trị là:

Ta biến đổi:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos x + \cos 3x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{2 \cos^2 x - 1} dx = \dots = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2t}-1}{\sqrt{2t}+1} \right) \Bigg|_1^{\frac{1}{2}},$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}+2} - \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right)$$

với $t = \cos x$.

Chọn C

Câu 55. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x + \cos x}{x^2 + \sin x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \ln \left(\frac{\pi^2}{4} - 1 \right) - \ln \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$

B. $I = \ln \left(\frac{\pi^2}{4} + 1 \right) - \ln \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$

C. $I = \ln \left(\frac{\pi^2}{4} - 1 \right) + \ln \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$

D. $I = \ln \left(\frac{\pi^2}{4} + 1 \right) + \ln \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x + \cos x}{x^2 + \sin x} dx$ có giá trị là:

Ta có: $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x + \cos x}{x^2 + \sin x} dx = \dots = \int_{\frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\pi^2}{4} + 1} \frac{1}{t} dt = \ln \left(\frac{\pi^2}{4} + 1 \right) - \ln \left(\frac{\pi^2}{16} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$ với $t = x^2 + \sin x$.

Chọn B

Câu 56. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \ln(\tan x + 1) dx = a\pi + b \ln 2 + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính $T = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - c$.

A. $T = 2.$

B. $T = 4.$

C. $T = 6.$

D. $T = -4.$

Hướng dẫn giải**Chọn B**

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \ln(\tan x + 1) dx &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\tan x + 1) d(\cos 2x) \\
&= -\frac{1}{2} \cos 2x \ln(\tan x + 1) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x d[\ln(\tan x + 1)] \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \cdot \frac{1}{\tan x + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{\sin x}{\cos x}\right) dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} d(\cos x) \\
&= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln|\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8} \pi - \frac{1}{4} \ln 2 \Rightarrow T = 8 - 4 + 0 = 4.
\end{aligned}$$

Câu 57. Xét tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx$. Nếu đặt $t = \sqrt{1 + \cos x}$, khẳng định nào dưới đây là **đúng**?

A. $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{4t^3 - 4t}{t} dt.$ **B.** $I = \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{-4t^3 + 4t}{t} dt.$ **C.** $I = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt.$ **D.**

$$I = -4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt.$$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1 + \cos x} \Rightarrow dt = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1 + \cos x}} dx \Rightarrow \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx = -2dt$$

$$\Rightarrow t^2 = 1 + \cos x \Rightarrow \cos x = t^2 - 1$$

$$\text{Đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1.$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x \sin x dx}{\sqrt{1 + \cos x}} = \int_{\sqrt{2}}^1 2(t^2 - 1)(-2)dt = -4 \int_{\sqrt{2}}^1 (t^2 - 1)dt = 4 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)dt.$$

Câu 58. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cdot \cos x dx = \frac{1}{64} (n \in \mathbb{N})$. Tìm giá trị n .

A. $n = 3.$ **B.** $n = 4.$ **C.** $n = 5.$ **D.** $n = 6.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

[Phương pháp tự luận]

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx. \text{ Với } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cdot \cos x dx = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{n+1}{32} \quad (1)$$

Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của $y = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ là một hàm số giảm trên

$\mathbb{R}$ và $y = \frac{n+1}{32} \left(y' = \frac{1}{32} > 0 \right)$ là một hàm số tăng trên $\mathbb{R}$.

Vậy phương trình (1) có tối đa 1 nghiệm.

Với $n = 3$ thay vào phương trình (1) ta được: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3+1}{32}$ (đúng).

Vậy $n = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

[Phương pháp trắc nghiệm]

Thay $n = 3$ vào bấm máy tính: $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cdot \cos x dx = \frac{1}{64}$. Ta chọn đáp án A.

Câu 59. Cho tích phân $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2a + b = 0$. **B.** $a - 2b = 0$. **C.** $2a - b = 0$. **D.** $a + 2b = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = \cos x + 2 \Rightarrow dt = -\sin x dx$

Đổi cận $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{5}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 2$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = -\int_{\frac{5}{2}}^2 \frac{1}{t} dt = \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_2^{\frac{5}{2}} = \ln \frac{5}{2} - \ln 2 = \ln 5 - 2 \ln 2$$

Vậy ta được $a = 1; b = -2$.

Câu 60. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{(e^x \cos x + 1) \cos x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \ln \left| \frac{e^{\frac{\pi}{3}} \left(e^{\frac{\pi}{3}} + 2 \right)}{e^{\frac{2\pi}{3}} - 2} \right|$.

B. $I = \ln \left| \frac{e^{\frac{\pi}{3}} \left(e^{\frac{\pi}{3}} - 2 \right)}{e^{\frac{2\pi}{3}} - 2} \right|$.

C. $I = \ln \left| \frac{e^{\frac{\pi}{3}} \left(e^{\frac{\pi}{3}} + 2 \right)}{e^{\frac{2\pi}{3}} + 2} \right|$.

D. $I = \ln \left| \frac{e^{\frac{\pi}{3}} \left(e^{\frac{\pi}{3}} - 2 \right)}{e^{\frac{2\pi}{3}} + 2} \right|$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos x - \sin x}{(e^x \cos x + 1) \cos x} dx$ có giá trị là:

Ta biến đổi: $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \cdot (\cos x - \sin x)}{(e^x \cos x + 1)e^x \cos x} dx.$

Đặt $t = e^x \cos x \Rightarrow dt = e^x (\cos x - \sin x) dx.$

Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}} \\ x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = -\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi}{3}} \end{cases}.$

$$I = \int_{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}}}^{\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi}{3}}} \frac{1}{t(t+1)} dt = \left(\ln \left| \frac{t}{t+1} \right| \right) \Big|_{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}}}^{\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi}{3}}} = \ln \left| \frac{e^{\frac{2\pi}{3}}}{e^{\frac{2\pi}{3}} - 2} \right| - \ln \left| \frac{e^{\frac{\pi}{3}}}{e^{\frac{\pi}{3}} + 2} \right| = \ln \left| \frac{e^{\frac{\pi}{3}}(e^{\frac{\pi}{3}} + 2)}{e^{\frac{2\pi}{3}} - 2} \right|.$$

Chọn A

Câu 61. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{19+17\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$ **B.** $I = \frac{19+17^4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$ **C.** $I = \frac{-19+17\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$ **D.** $I = \frac{19-17^4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$ có giá trị là:

Ta nhận thấy: $(\cos x)' = -\sin x$. T dùng đổi biến số.

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx.$

Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{(1 - \cos^2 x) \sin x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2 - 1}{\sqrt{t}} dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}} \right) dx = \left(\frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{19-17^4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Chọn D

Câu 62. Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x + \sqrt{3} \sin x)^2} dx$ có giá trị là:

$$\text{A. } I = \frac{\sqrt{3}}{16} \ln \left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2} \right) + \frac{3}{8}.$$

$$\text{B. } I = \frac{\sqrt{3}}{8} \ln \left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2} \right) + \frac{3}{8}.$$

$$\text{C. } I = -\frac{\sqrt{3}}{8} \ln \left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2} \right) + \frac{3}{8}.$$

$$\text{D. } I = -\frac{\sqrt{3}}{16} \ln \left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2} \right) + \frac{3}{8}.$$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x + \sqrt{3} \sin x)^2} dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x + \sqrt{3} \sin x)^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{4 \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right)^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{4 \left[\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right]^2} dx.$$

$$\text{Đặt } u = x + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = u - \frac{\pi}{6} \Rightarrow dx = du.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow u = -\frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \left(u - \frac{\pi}{6} \right)}{4 \sin^2 u} du = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u \cos \frac{\pi}{6} - \cos u \sin \frac{\pi}{6}}{4 \sin^2 u} du = \frac{1}{8} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3} \sin u - \cos u}{\sin^2 u} du \\ &= \frac{1}{8} \left(\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3} \sin u}{1 - \cos^2 u} du - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin^2 u} du \right) \end{aligned}$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3} \sin u}{1 - \cos^2 u} du.$$

$$\text{Đặt } t = \cos u, u \in [0; \pi] \Rightarrow dt = -\sin u du.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} u = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ u = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \frac{\sqrt{3} dt}{1 - t^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \right) \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2} \right).$$

$$\text{Xét } I_2 = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sin^2 u} du.$$

Đặt $t = \sin u, u \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dt = \cos u du$.

Đổi cận $\begin{cases} u = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \\ u = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$.

$$I_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^2} du = \left(-\frac{1}{t}\right) \Big|_{-\frac{1}{2}}^1 = -3. \Rightarrow I = \frac{1}{8}(I_1 - I_2) = -\frac{\sqrt{3}}{16} \ln \left(\frac{\sqrt{3}+2}{-\sqrt{3}+2} \right) + \frac{3}{8}.$$

Chọn D

Câu 63. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{9\cos^2 x - \sin^2 x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{1}{3} \ln 2$.

B. $I = \frac{1}{2} \ln 2$.

C. $I = \frac{1}{6} \ln 2$.

D. $I = \ln 2$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{9\cos^2 x - \sin^2 x} dx$ có giá trị là:

Ta biến đổi: $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{9\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x (9 - \tan^2 x)} dx$.

Nhận thấy: $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. Ta dùng đổi biến số.

Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 1 \end{cases}$.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{9-t^2} dt = \frac{1}{6} \int_0^1 \left(\frac{1}{3-t} + \frac{1}{3+t} \right) dt = \left(\frac{1}{6} \ln \left| \frac{3+t}{3-t} \right| \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \ln 2.$$

Chọn C

Câu 64. Tích phân $I = \int_0^a \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^2} dx = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$. Giá trị của a là:

A. $a = -\frac{\pi}{2}$.

B. $a = -\frac{\pi}{4}$.

C. $a = \frac{\pi}{3}$.

D. $a = \frac{\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^a \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^2} dx = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$. Giá trị của a là:

Ta có:

$$I = \int_0^a \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^2} dx = \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_{-1}^{\sin a - \cos a} = \frac{1}{\cos a - \sin a} - 1, \quad t = \sin x - \cos x.$$

Theo đề bài, ta có: $\frac{1}{\cos a - \sin a} - 1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \xrightarrow{\text{casio}} a = \frac{\pi}{3}$.

Chọn C

Câu 65. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\pi}{12} + \ln(\sqrt{3} + 1)$.

B. $I = \frac{\pi}{12} + \ln \frac{\sqrt{3} + 1}{4}$.

C. $I = \frac{\pi}{12} - \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)}{2}$.

D. $I = \frac{\pi}{12} + \ln \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ có giá trị là:

Xét $I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

Ta có:
$$\begin{cases} I_2 = I + I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dx \\ I_3 = I_1 - I = \int_{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \frac{1}{t} dt \end{cases} \Rightarrow I = \frac{I_2 - I_3}{2} = \frac{\pi}{12} - \frac{\ln \frac{1 + \sqrt{3}}{2}}{2}, t = \sin x + \cos x.$$

Chọn C

Câu 66. Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = a\pi + b \ln 2$ với a và b là các số hữu tỉ. Khi đó $\frac{a}{b}$ bằng:

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{3}{8}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Xét $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$; $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

$\Rightarrow I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}$

$I_1 - I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln(\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln 2$

$\Rightarrow I_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}; b = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{2}.$

Cách giải khác: Đặt $x = \frac{\pi}{4} - t$

Câu 67. Biết $\int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi^a}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $P = 2a + b$.

A. $P = 8$.

B. $P = 10$.

C. $P = 6$.

D. $P = 12$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$.

Đặt $x = \pi - t \Rightarrow dx = -dt$.

Khi $x = 0$ thì $t = \pi$.

Khi $x = \pi$ thì $t = 0$.

Ta có $I = - \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin^{2018}(\pi - t)}{\sin^{2018}(\pi - t) + \cos^{2018}(\pi - t)} dt = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$

$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$

$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx - I$.

Suy ra $I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$.

Xét tích phân $J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$.

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - u \Rightarrow dx = -du$.

Khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $u = 0$.

Khi $x = \pi$ thì $u = -\frac{\pi}{2}$.

Nên $J = - \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}{\sin^{2018}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) + \cos^{2018}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$.

Vì hàm số $f(x) = \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x}$ là hàm số chẵn nên:

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx$

Từ đó ta có:

$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx \right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x}{\sin^{2018} x + \cos^{2018} x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi^2}{4}.
\end{aligned}$$

Như vậy $a = 2$, $b = 4$. Do đó $P = 2a + b = 2 \cdot 2 + 4 = 8$.

Câu 68. Cho tích phân $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2}}$ (với $\alpha > 1$) thì giá trị của I bằng:

- A. 2. B. $\frac{\alpha}{2}$. C. 2α . **D. $\frac{2}{\alpha}$.**

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2} \Rightarrow t^2 = 1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2 \Rightarrow \frac{t}{\alpha} dt = \sin x dx$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha-1}^{\alpha+1} \frac{tdt}{t} = \frac{1}{\alpha} \cdot t \Big|_{\alpha-1}^{\alpha+1} = \frac{2}{\alpha}$$

Câu 69. Có bao nhiêu giá trị của tham số m trong khoảng $(0; 6\pi)$ thỏa mãn $\int_0^m \frac{\sin x}{5 + 4 \cos x} dx = \frac{1}{2}$?

- A. 6.** B. 12. C. 8. **D. 4.**

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \frac{1}{2} = \int_0^m \frac{\sin x}{5 + 4 \cos x} dx = - \int_0^m \frac{1}{5 + 4 \cos x} d(\cos x)$$

$$= - \frac{1}{4} \int_0^m \frac{1}{5 + 4 \cos x} d(5 + 4 \cos x) = - \frac{1}{4} \ln |5 + 4 \cos x| \Big|_0^m.$$

$$\text{Mà } 5 + 4 \cos x \geq 5 - 4 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = - \frac{1}{4} \ln (5 + 4 \cos x) \Big|_0^m = - \frac{1}{4} \ln \frac{5 + 4 \cos m}{9}$$

$$\Rightarrow \ln \frac{5 + 4 \cos m}{9} = -2 \Leftrightarrow \frac{5 + 4 \cos m}{9} = e^{-2} \Leftrightarrow \cos m = \frac{9e^{-2} - 5}{4}$$

$$\Leftrightarrow m = \pm \arccos \frac{9e^{-2} - 5}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Theo đề bài } m \in (0; 6\pi) \Rightarrow \begin{cases} \arccos \frac{9e^{-2} - 5}{4} + k2\pi \in (0; 6\pi) \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \\ k = 2 \end{cases} \\ -\arccos \frac{9e^{-2} - 5}{4} + k2\pi \in (0; 6\pi) \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 2 \\ k = 3 \end{cases} \end{cases}.$$

Với mỗi giá trị k trong hai trường hợp trên ta được một giá trị m thỏa mãn.
Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 70. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 1$.

B. $S = 4$.

C. $S = 3$.

D. $S = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = \int_0^1 \frac{1}{t^2 - 5t + 6} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2} \right) dt = \ln \left| \frac{t-3}{t-2} \right| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln \frac{3}{2} = \ln \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow a = 1, b = 0, c = 3 \Rightarrow S = a + b + c = 4.$$

Câu 71. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x) \cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x} dx = a\pi^2 + b - \ln \frac{c}{\pi}$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Tính giá trị của biểu thức $P = ac^3 + b$.

A. $P = 3$.

B. $P = \frac{5}{4}$.

C. $P = \frac{3}{2}$.

D. $P = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 + (2x + \cos x) \cos x + 1 - \sin x}{x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x + \cos x)^2 + 1 - \sin x}{x + \cos x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \cos x + \frac{1 - \sin x}{x + \cos x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \sin x + \ln |x + \cos x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} + 1 + \ln \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8} + 1 - \ln \frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{8}, b = 1, c = 2. P = ac^3 + b = \frac{1}{8} \cdot 8 + 1 = 2.$$

Câu 72. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2 - 5 \cos x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, với a, b là các số hữu tỉ, $c > 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

A. $S = 3$.

B. $S = 0$.

C. $S = 1$.

D. $S = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2 - 5 \cos x + 6} dx = - \int_1^0 \frac{1}{t^2 - 5t + 6} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t-2} \right) dt = \ln \left| \frac{t-3}{t-2} \right| \Big|_0^1 = \ln 2 - \ln \frac{3}{2}$$

$$= \ln \frac{4}{3} = a \ln \frac{4}{c} + b.$$

$$\text{Do đó: } \begin{cases} a=1 \\ c=3 \\ b=0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } S = a + b + c = 4.$$

Câu 73. Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos 2x + 3 \sin 2x) \ln(\cos x + 2 \sin x) dx = c \ln 2 - \frac{a}{b}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 9$.

B. $T = -11$.

C. $T = 5$.

D. $T = 7$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cos 2x + 3 \sin 2x) \ln(\cos x + 2 \sin x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos x + 2 \sin x)(2 \cos x - \sin x) \ln(\cos x + 2 \sin x) dx. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } t = \cos x + 2 \sin x \Rightarrow dt = (-\sin x + 2 \cos x) dx.$$

$$\text{Với } x = 0 \text{ thì } t = 1.$$

$$\text{Với } x = \frac{\pi}{2} \text{ thì } t = 2.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_1^2 2t \ln t dt = \int_1^2 \ln t d(t^2) = (t^2 \cdot \ln t) \Big|_1^2 - \int_1^2 t dt = 4 \ln 2 - \frac{t^2}{2} \Big|_1^2 = 4 \ln 2 - \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow T = a + b + c = 9.$$

Câu 74. Biết $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6}+x^3} dx = \frac{\pi^3}{a} + \frac{\sqrt{3}\pi^2}{b} + c\pi + d\sqrt{3}$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính

$$a + b + c + d.$$

A. $a + b + c + d = 28$.

B. $a + b + c + d = 16$.

C. $a + b + c + d = 14$.

D.

$a + b + c + d = 22$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^6}+x^3} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\sqrt{1+x^6}-x^3)\sin x}{1+x^6-x^6} dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{1+x^6}-x^3)\sin x dx.$$

$$\text{Đặt } t = -x \Rightarrow dt = -dx. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{1+t^6} + t^3 \right) \sin(-t)(-dt) = - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{1+t^6} + t^3 \right) \sin t dt = - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{1+x^6} + x^3 \right) \sin x dx$$

$$\text{Suy ra } 2I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (-2x^3 \sin x) dx \Leftrightarrow I = - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^3 \sin x dx.$$

$$\begin{array}{l} x^3 (+) + \sin x \\ 3x^2 (-) - \cos x \\ 6x (+) - \sin x \\ 6 (-) + \cos x \\ 0 + \sin x \end{array} \quad \begin{array}{l} \searrow \\ \searrow \\ \searrow \\ \searrow \end{array}$$

$$I = \left(x^3 \cos x - 3x^2 \sin x - 6x \cos x + 6 \sin x \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^3}{27} - \frac{\sqrt{3}\pi^2}{3} - 2\pi + 6\sqrt{3}$$

Suy ra: $a = 27, b = -3, c = -2, d = 6$. Vậy $a + b + c + d = 28$.

Câu 75. Biết $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = a + \frac{\pi^2}{b} + \frac{\sqrt{3}\pi}{c}$ với a, b, c, d là các số nguyên. Tính $M = a - b + c$.

A. $M = 35$.

B. $M = 41$.

C. $M = -37$.

D. $M = -35$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^0 \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = I + J$$

$$\text{Xét } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^0 \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx. \text{ Đặt } t = -x \text{ (} C_m \text{)}; \text{ Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 0; x = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^0 \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^0 \frac{-t \cos(-t)}{\sqrt{1+(-t)^2}-t} (-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{-t \cos t}{\sqrt{1+t^2}-t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{-x \cos x}{\sqrt{1+x^2}-x} dx.$$

$$\text{Khi đó } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{-x \cos x}{\sqrt{1+x^2}-x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos x \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} -2x^2 \cos x dx.$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x \cos x}{\sqrt{1+x^2}+x} dx = \left(-2x^2 \sin x - 4x \cos x + 4 \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 + \frac{\pi^2}{-36} + \frac{\pi\sqrt{3}}{-3}.$$

Khi đó $a = 2; b = -36; c = -3$.

Vậy $M = a - b + c = 35$.

Câu 76. Cho $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 2018$. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x \cdot f(\sin 2x) dx$.

A. $I = \frac{1009}{2}$.

B. $I = 1009$.

C. $I = 4036$.

D. $I = 2018$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét $I = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos 2x \cdot f(\sin 2x) dx$.

Đặt $u = \sin 2x \Rightarrow du = 2 \cos 2x dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0$ và $x = \frac{\pi}{12} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$.

Khi đó $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} f(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 2018 = 1009$.

Câu 77. Cho f là hàm số liên tục thỏa $\int_0^1 f(x) dx = 7$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx$.

A. 1.

B. 9.

C. 3.

D. 7.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$.

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(\sin x) dx = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = 7$.

Câu 78. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 f(x) dx = 12$, $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2 \cos x) \sin x dx$ bằng

A. -12.

B. 12.

C. 6.

D. -6.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t = 2 \cos x \Rightarrow dt = -2 \sin x dx$.

Đổi cận

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
t	1	-1

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} f(2 \cos x) \sin x dx = \int_1^{-1} f(t) \left(-\frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx = 6$.

Câu 79. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 4$ và $\int_0^{\pi/2} f(\sin x) \cos x dx = 2$.

Tích phân $I = \int_0^3 f(x) dx$ bằng

A. $I = 2$.

B. $I = 6$.

C. $I = 4$.

D. $I = 10$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow \int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^3 f(t) dt = 4 \rightarrow \int_1^3 f(t) dt = 2.$$

$$\text{Đặt } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx \Rightarrow \int_0^{\pi/2} f(\sin x) \cos x dx = \int_0^1 f(t) dt = 2.$$

$$I = \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 2 + 2 = 4.$$

HÀM MŨ – LÔGARIT

Câu 80. Cho $I = \int_0^1 x e^{1-x^2} dx$. Biết rằng $I = \frac{ae-b}{2}$. Khi đó, $a+b$ bằng

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 x e^{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 e^{1-x^2} d(1-x^2) = -\frac{1}{2} e^{1-x^2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

$$\text{Vì } I = \frac{ae-b}{2} \Rightarrow a=1; b=1. \text{ Vậy } a+b=2.$$

Câu 81. Nguyên hàm của $f(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$ là

A. $\sin^2 x \cdot e^{\sin^2 x-1} + C$.

B. $\frac{e^{\sin^2 x+1}}{\sin^2 x+1} + C$.

C. $e^{\sin^2 x} + C$.

D. $\frac{e^{\sin^2 x-1}}{\sin^2 x-1} + C$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x} dx = \int e^{\sin^2 x} d(\sin^2 x) = e^{\sin^2 x} + C$$

Câu 82. Biết rằng $\int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}} dx = \frac{a}{5}e^2 + \frac{b}{3}e + c$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính $T = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$.

A. $T = 6$.

B. $T = 9$.

C. $T = 10$.

D. $T = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+3x} \Rightarrow t^2 = 1+3x \Rightarrow 2t dt = 3dx$$

$$\text{Đổi cận: } x=0 \Rightarrow t=1, x=1 \Rightarrow t=2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 3e^{\sqrt{1+3x}} dx = 2 \int_1^2 t e^t dt = 2 \left(t e^t \Big|_1^2 - \int_1^2 e^t dt \right) = 2 \left(t e^t \Big|_1^2 - e^t \Big|_1^2 \right) = 2(2e^2 - e - e^2 + e) = 2e^2.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=10 \\ b=c=0 \end{cases} \Rightarrow T=10 \text{ nên câu C đúng.}$$

Câu 83. Tích phân $I = \int_{\ln 5}^{\ln 12} \sqrt{e^x + 4} dx$ có giá trị là:

A. $I = 2 - \ln 3 + \ln 5$.

B. $I = 2 - 2 \ln 3 + 2 \ln 5$.

C. $I = 2 - 2 \ln 3 + \ln 5$.

D. $I = 2 - \ln 3 - 2 \ln 5$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{\ln 5}^{\ln 12} \sqrt{e^x + 4} dx$ có giá trị là:

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{e^x + 4} \Leftrightarrow t^2 = e^x + 4 \Rightarrow 2t dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{2t dt}{t^2 - 4}.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \ln 5 \Rightarrow t = 3 \\ x = \ln 12 \Rightarrow t = 4 \end{cases}.$$

$$I = \int_3^4 \frac{2t^2}{t^2 - 4} dt = 2 \left(t - 2 \ln \left| \frac{t+2}{t-2} \right| \right) \Big|_3^4 = 2 - 2 \ln 3 + 2 \ln 5.$$

Chọn B

Câu 84. Tìm tất cả các giá trị dương của tham số m sao cho $\int_0^m x e^{\sqrt{x^2+1}} dx = 2^{500} \cdot e^{\sqrt{m^2+1}}$.

A. $m = 2^{250} \sqrt{2^{500} - 2}$. **B.** $m = \sqrt{2^{1000} + 1}$. **C.** $m = 2^{250} \sqrt{2^{500} + 2}$. **D.** $m = \sqrt{2^{1000} - 1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int_0^m x e^{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_1^{\sqrt{m^2+1}} t e^t dt = (t e^t - e^t) \Big|_1^{\sqrt{m^2+1}} = (\sqrt{m^2+1} - 1) e^{\sqrt{m^2+1}}$

Theo bài ra $\int_0^m x e^{\sqrt{x^2+1}} dx = 2^{500} \cdot e^{\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow 2^{500} \cdot e^{\sqrt{m^2+1}} = (\sqrt{m^2+1} - 1) e^{\sqrt{m^2+1}} \Leftrightarrow 2^{500} = \sqrt{m^2+1} - 1$

$\Leftrightarrow m^2 + 1 = (2^{500} + 1)^2 \Leftrightarrow m^2 = 2^{1000} + 2^{501} = 2^{500} (2^{500} + 2) \Rightarrow m = 2^{250} \sqrt{2^{500} + 2}$.

Câu 85. Cho $\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}} \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = a.e^2 + b.e + c$. Với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.

A. $S = 1$.

B. $S = 2$.

C. $S = 0$.

D. $S = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Xét $I = \int_0^3 e^{\sqrt{x+1}} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$; đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 1$; $x = 3 \Rightarrow u = 2$

$\Rightarrow I = \int_1^2 e^u 2du = 2e^u \Big|_1^2 = 2e^2 - 2e \Rightarrow a = 2, b = -2, c = 0, S = a + b + c = 0$.

Câu 86. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx$. Nếu đổi biến số $t = \sin^2 x$ thì:

A. $I = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 e^t dt + \int_0^1 t e^t dt \right]$.

B. $I = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 e^t dt - \int_0^1 t e^t dt \right]$.

C. $I = 2 \left[\int_0^1 e^t dt + \int_0^1 t e^t dt \right]$.

D.

$I = 2 \left[\int_0^1 e^t dt - \int_0^1 t e^t dt \right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \cdot (1 - \sin^2 x) \sin x \cdot \cos x dx$.

Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x \cos x dx \Rightarrow \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} dt$.

Đổi cận

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

Vậy $I = \frac{1}{2} \int_0^1 e^t (1-t) dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 e^t dt - \int_0^1 t e^t dt \right]$.

Câu 87. Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{1+e^x}$.

A. -1 .

B. 1 .

C. e .

D. 0 .

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Tính } I = \int_n^{n+1} \frac{dx}{1+e^x} = \int_n^{n+1} \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)}.$$

$$\text{Đặt } t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = n \Rightarrow t = e^n, x = n+1 \Rightarrow t = e^{n+1}.$$

$$\text{Khi đó } I = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{dt}{t(t+1)} = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \left(\ln t - \ln(t+1) \right) \Big|_{e^n}^{e^{n+1}} = 1 + \ln \frac{1 + \frac{1}{e^n}}{e + \frac{1}{e^n}}.$$

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{1+e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \ln \frac{1 + \frac{1}{e^n}}{e + \frac{1}{e^n}} \right) = 1 - 1 = 0.$$

Câu 88. Tính tích phân $I = \int_{-2}^2 \frac{x^{2016}}{e^x + 1} dx$.

A. $I = 0$. **B.** $I = \frac{2^{2018}}{2017}$. **C.** $I = \frac{2^{2017}}{2017}$. **D.** $I = \frac{2^{2018}}{2018}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C

$$\text{Đặt } x = -t \Rightarrow dx = -dt. \text{ Đổi cận: Với } x = 2 \Rightarrow t = -2; x = -2 \Rightarrow t = 2$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_2^{-2} \frac{-t^{2016}}{e^{-t} + 1} dt = \int_{-2}^2 \frac{x^{2016} e^x dx}{1 + e^x}, \text{ suy ra } 2I = \int_{-2}^2 x^{2016} dx = \frac{x^{2017}}{2017} \Big|_{-2}^2 = \frac{2^{2018}}{2017} \Rightarrow I = \frac{2^{2017}}{2017}.$$

Câu 89. Cho biết $\int_0^1 \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx = \frac{a}{b} \cdot e + c$ với a, c là các số nguyên, b là số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a - b + c$.

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** -3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = x + 2 \Rightarrow dt = dx, \text{ đổi cận } x = 0 \Rightarrow t = 2, x = 1 \Rightarrow t = 3.$$

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx = \int_2^3 \frac{(t-2)^2 e^{t-2}}{t^2} dt = \int_2^3 \left(1 - \frac{4}{t} + \frac{4}{t^2} \right) e^{t-2} dt = \int_2^3 e^{t-2} dt + \int_2^3 \left(-\frac{4}{t} + \frac{4}{t^2} \right) e^{t-2} dt$$

$$+ \text{Tính } I_1 = \int_2^3 e^{t-2} dt = e^{t-2} \Big|_2^3 = e - 1.$$

$$+ \text{Tính } I_2 = \int_2^3 \left(-\frac{4}{t} + \frac{4}{t^2} \right) e^{t-2} dt.$$

$$\text{Đặt } u = \frac{4}{t} \Rightarrow du = -\frac{4}{t^2} dt, dv = e^{t-2} dt \Rightarrow v = e^{t-2}$$

$$\text{Ta có } \int_2^3 \frac{4}{t} e^{t-2} dt = \frac{4}{t} \cdot e^{t-2} \Big|_2^3 + \int_2^3 \frac{4}{t^2} e^{t-2} dt \Rightarrow I_2 = \int_2^3 \left(-\frac{4}{t} + \frac{4}{t^2} \right) e^{t-2} dt = -\frac{4}{3} e + 2.$$

$$\text{Suy ra } I = \frac{-1}{3} e + 1 \Rightarrow a = -1, b = 3, c = 1. \text{ Vậy } a - b + c = 3.$$

- Câu 90.** Biết tích phân $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a + b + c$.
- A.** $T = -1$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = \sqrt{e^x + 3} \Rightarrow t^2 = e^x + 3 \Rightarrow 2t dt = e^x dx.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \ln 6 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}} dx = \int_2^3 \frac{2t dt}{1+t} = \int_2^3 \left(2 - \frac{2}{1+t} \right) dt = (2t - 2 \ln |t+1|) \Big|_2^3 = (6 - 2 \ln 4) - (4 - 2 \ln 3)$$

$$= 2 - 4 \ln 2 + 2 \ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 2 \end{cases}$$

Vậy $T = 0$.

- Câu 91.** Giá trị $I = \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{6}}}^{\frac{9}{\sqrt[3]{4}}} x^2 \sin(\pi x^3) e^{\cos(\pi x^3)} dx$ gần bằng số nào nhất trong các số sau đây:
- A.** 0,046. **B.** 0,036. **C.** 0,037. **D.** 0,038.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } u = \cos(\pi x^3) \Rightarrow du = -3\pi x^2 \sin(\pi x^3) dx \Rightarrow x^2 \sin(\pi x^3) dx = -\frac{1}{3\pi} du.$$

$$\text{Khi } x = \frac{1}{\sqrt[3]{6}} \text{ thì } u = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Khi } x = \frac{9}{\sqrt[3]{4}} \text{ thì } u = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ta có } I = -\frac{1}{3\pi} \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^u du = \frac{1}{3\pi} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} e^u du = \frac{1}{3\pi} e^u \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3\pi} \left(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \approx 0,037.$$

- Câu 92.** Cho $\int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = a.e + b \ln(e + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + 2b - c$.

- A.** $P = 1$. **B.** $P = -1$. **C.** $P = 0$. **D.** $P = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{(x+1)e^x x e^x}{x e^x + 1} dx.$$

$$\text{Đặt } t = x e^x + 1 \Rightarrow dt = (1+x) e^x dx.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = e + 1.$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_1^{e+1} \frac{t-1}{t} dt = \int_1^{e+1} \left(1 - \frac{1}{t} \right) dt = (t - \ln |t|) \Big|_1^{e+1} = e - \ln(e+1).$$

Suy ra: $a=1, b=-1, c=1$.

Vậy: $P = a + 2b - c = -2$.

Câu 93. Biết $\int_0^1 \frac{(x^2 + 5x + 6)e^x}{x + 2 + e^{-x}} dx = ae - b - \ln \frac{ae + c}{3}$ với a, b, c là các số nguyên và e là cơ số của logarit tự nhiên. Tính $S = 2a + b + c$.

A. $S = 10$.

B. $S = 0$.

C. $S = 5$.

D. $S = 9$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Ta có : } I = \int_0^1 \frac{(x^2 + 5x + 6)e^x}{x + 2 + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{(x+2)(x+3)e^{2x}}{(x+2)e^x + 1} dx.$$

Đặt $t = (x+2)e^x \Rightarrow dt = (x+3)e^x dx$. Đổi cận : $x=0 \Rightarrow t=2, x=1 \Rightarrow t=3e$.

$$I = \int_2^{3e} \frac{tdt}{t+1} = \int_2^{3e} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = \left(t - \ln|t+1|\right) \Big|_2^{3e} = 3e - 2 - \ln \frac{3e+1}{3}.$$

Vậy $a=3, b=2, c=1 \Rightarrow S=9$.

Câu 94. $\int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + ex^3 \cdot 2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \frac{1}{m} + \frac{1}{e \ln n} \ln \left(p + \frac{e}{e + \pi} \right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $S = m + n + p$.

A. $S = 6$.

B. $S = 5$.

C. $S = 7$.

D. $S = 8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + ex^3 \cdot 2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{2^x}{\pi + e \cdot 2^x} \right) dx = \frac{1}{4} + \int_0^1 \frac{2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \frac{1}{4} + J.$$

Tính $J = \int_0^1 \frac{2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx$. Đặt $\pi + e \cdot 2^x = t \Rightarrow e \cdot 2^x \ln 2 dx = dt \Leftrightarrow 2^x dx = \frac{1}{e \cdot \ln 2} dt$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t = \pi + e$; khi $x=1$ thì $t = \pi + 2e$.

$$J = \int_0^1 \frac{2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \frac{1}{e \ln 2} \int_{\pi+e}^{\pi+2e} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{e \ln 2} \ln \left| t \right| \Big|_{\pi+e}^{\pi+2e} = \frac{1}{e \ln 2} \ln \left(1 + \frac{e}{e + \pi} \right).$$

Khi đó $\int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + ex^3 \cdot 2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{e \ln 2} \ln \left(1 + \frac{e}{e + \pi} \right) \Rightarrow m=4, n=2, p=1$. Vậy $S=7$.

Câu 95. Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 . Tính tích phân $I = \int_{x_1}^{x_2} (2ax + b) e^{ax^2 + bx + c} dx$.

A. $I = x_1 - x_2$.

B. $I = \frac{x_1 - x_2}{4}$.

C. $I = 0$.

D. $I = \frac{x_1 - x_2}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t = ax^2 + bx + c \Rightarrow dt = (2ax + b) dx$

Khi $\begin{cases} x = x_1 \Rightarrow t = ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \\ x = x_2 \Rightarrow t = ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \end{cases}$. Do đó $I = \int_{x_1}^{x_2} (2ax + b) e^{ax^2 + bx + c} dx = \int_0^0 e^t dt = 0$.

Câu 96. Với cách đổi biến $u = \sqrt{1 + 3 \ln x}$ thì tích phân $\int_1^e \frac{\ln x}{x \sqrt{1 + 3 \ln x}} dx$ trở thành

A. $\frac{2}{3} \int_1^2 (u^2 - 1) du$. B. $\frac{2}{9} \int_1^2 (u^2 - 1) du$. C. $2 \int_1^2 (u^2 - 1) du$. D. $\frac{2}{9} \int_1^2 \frac{u^2 - 1}{u} du$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$u = \sqrt{1 + 3 \ln x} \Rightarrow u^2 = 1 + 3 \ln x \Rightarrow \ln x = \frac{u^2 - 1}{3} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2u}{3} du.$$

$$\text{Khi đó } \int_1^e \frac{\ln x}{x \sqrt{1 + 3 \ln x}} dx = \int_1^2 \frac{\frac{u^2 - 1}{3}}{u} \cdot \frac{2u}{3} du = \frac{2}{9} \int_1^2 (u^2 - 1) du.$$

Câu 97. Biết $\int_1^e \frac{(x+1) \ln x + 2}{1 + x \ln x} dx = a.e + b \ln \left(\frac{e+1}{e} \right)$ trong đó a, b là các số nguyên. Khi đó tỉ số $\frac{a}{b}$ là

A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 3. D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_1^e \frac{(x+1) \ln x + 2}{1 + x \ln x} dx &= \int_1^e \frac{1 + x \ln x + 1 + \ln x}{1 + x \ln x} dx = \int_1^e dx + \int_1^e \frac{d(1 + x \ln x)}{1 + x \ln x} \\ &= x \Big|_1^e + \ln(1 + x \ln x) \Big|_1^e = e - 1 + \ln(1 + e) = e + \ln \frac{e+1}{e}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } a = b = 1. \text{ Vậy } \frac{a}{b} = 1.$$

Câu 98. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x}}{x} dx$ bằng cách đặt $t = \sqrt{1 + 3 \ln x}$, mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $I = \frac{2}{9} t^3 \Big|_1^2$. B. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t dt$. C. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt$. D. $I = \frac{14}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x}}{x} dx, \text{ đặt } t = \sqrt{1 + 3 \ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3 \ln x \Rightarrow 2t dt = \frac{3}{x} dx \Rightarrow \frac{2t}{3} dt = \frac{dx}{x}.$$

$$\text{Đổi cận: } x = 1 \Rightarrow t = 1; x = e \Rightarrow t = 2.$$

$$I = \int_1^2 \frac{2t^2}{3} dt = \frac{2}{9} t^3 \Big|_1^2 = \frac{14}{9}.$$

Câu 99. Biết $\int_1^2 \frac{(3x+1)}{3x^2 + x \ln x} dx = \ln \left(a + \frac{\ln b}{c} \right)$ với a, b, c là các số nguyên dương và $c \leq 4$. Tổng $a + b + c$ bằng

A. 6. B. 9. C. 7. D. 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \int_1^2 \frac{(3x+1)}{3x^2 + x \ln x} dx = \int_1^2 \frac{3 + \frac{1}{x}}{3x + \ln x} dx. \text{ Đặt } t = 3x + \ln x, dt = \left(3 + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\text{Đổi cận } x = 1 \Rightarrow t = 3, x = 2 \Rightarrow t = 6 + \ln 2.$$

$$\int_1^2 \frac{3 + \frac{1}{x}}{3x + \ln x} dx = \int_3^{6+\ln 2} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_3^{6+\ln 2} = \ln(6 + \ln 2) - \ln 3 = \ln \left(2 + \frac{\ln 2}{3} \right)$$

$\Rightarrow a = 2, b = 2, c = 3$. Vậy tổng $a + b + c = 7$.

Câu 100. Biết $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)} dx = a \ln \frac{3}{2} + b, (a, b \in \mathbb{Q})$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a - b = 1$.

B. $2a + b = 1$.

C. $a^2 + b^2 = 4$.

D. $a + 2b = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = \ln x + 2$, suy ra $dt = \frac{1}{x} dx$.

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2$

$x = e \Rightarrow t = 3$

Khi đó, $I = \int_2^3 \frac{t-2}{t} dt = (t - 2 \ln t) \Big|_2^3 = 1 + 2 \ln \frac{3}{2} = 1 - 2 \ln \frac{2}{3}$.

Vậy $a = -2; b = 1$, nên $a + 2b = 0$.

Câu 101. Tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x (2\sqrt{\ln^2 x + 1} + 1)}{x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{4\sqrt{2} + 3}{3}$.

B. $I = \frac{4\sqrt{2} + 1}{3}$.

C. $I = \frac{4\sqrt{2} + 5}{3}$.

D. $I = \frac{4\sqrt{2} - 3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x (2\sqrt{\ln^2 x + 1} + 1)}{x} dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_1^e \frac{\ln x (2\sqrt{\ln^2 x + 1} + 1)}{x} dx = \int_1^e \frac{2 \ln x \sqrt{\ln^2 x + 1}}{x} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_1^e \frac{2 \ln x \sqrt{\ln^2 x + 1}}{x} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \ln^2 x + 1 \Rightarrow dt = \frac{2 \ln x}{x} dx.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 1 \\ x = e \Rightarrow t = 2 \end{cases} \Rightarrow I_1 = \int_1^2 \sqrt{t} dt = \left(\frac{2}{3} \sqrt{t^3} \right) \Big|_1^2 = \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}.$$

$$\text{Xét } I_2 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ x = e \Rightarrow t = 1 \end{cases} \Rightarrow I_2 = \int_0^1 dt = 1.$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_2 = \frac{4\sqrt{2} + 1}{3}.$$

Chọn B

Câu 102. Tích phân $I = \int_1^e x(\ln^2 x + \ln x) dx$ có giá trị là:

- A.** $I = -2e$. **B.** $I = -e$. **C.** $I = e$. **D.** $I = 2e$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^e x(\ln^2 x + \ln x) dx$ có giá trị là:

Ta biến đổi: $I = \int_1^e x(\ln^2 x + \ln x) dx = \int_1^e x \ln x (\ln x + 1) dx$.

Đặt $t = x \ln x \Rightarrow dt = (\ln x + 1) dx$.

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=e \Rightarrow t=e \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^e dt = e$.

Chọn C

Câu 103. Biết $I = \int_0^1 \frac{\sqrt{\ln^3 x + 3x} \left(\ln^2 x + \frac{1}{3} x \right)}{x} dx = \frac{2}{9} \left(\sqrt{1 + ae + 27e^2 + 27e^3} - 3\sqrt{3} \right)$, a là các số hữu tỉ.

Giá trị của a là:

- A.** 9. **B.** -6. **C.** -9. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Biết $I = \int_1^e \frac{\sqrt{\ln^3 x + 3x} \left(\ln^2 x + \frac{1}{3} x \right)}{x} dx = \frac{2}{9} \left(\sqrt{1 + ae + 27e^2 + 27e^3} - 3\sqrt{3} \right)$. Giá trị của a là:

Ta có:

$$I = \int_1^e \frac{\sqrt{\ln^3 x + 3x} \left(\ln^2 x + \frac{1}{3} x \right)}{x} dx = \frac{1}{3} \int_1^e \frac{\sqrt{\ln^3 x + 3x} (3\ln^2 x + x)}{x} dx$$

Đặt $t = \ln^3 x + 3x \Rightarrow dt = \frac{3}{x} \ln^2 x + 1$

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=3 \\ x=e \Rightarrow t=1+3e \end{cases}$.

$$\Rightarrow I = \int_3^{1+3e} \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} \left(\sqrt{t} \right) \Big|_3^{1+3e} = \frac{2}{3} \left(\sqrt{(1+3e)^3} - 3\sqrt{3} \right) = \frac{2}{9} \left(\sqrt{1+9e+27e^2+27e^3} - 3\sqrt{3} \right) \Rightarrow a = 9$$

Chọn A

Câu 104. Tích phân $I = \int_1^e \frac{2 \ln x \sqrt{\ln^2 x + 1}}{x} dx$ có giá trị là:

- A.** $I = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}$. **B.** $I = \frac{4\sqrt{2}+2}{3}$. **C.** $I = \frac{2\sqrt{2}-2}{3}$. **D.** $I = \frac{2\sqrt{2}+2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^e \frac{2 \ln x \sqrt{\ln^2 x + 1}}{x} dx$ có giá trị là:

Ta nhận thấy: $(\ln^2 x + 1)' = \frac{2 \ln x}{x}$. Ta dùng đổi biến số.

$$\text{Đặt } t = \ln^2 x + 1 \Rightarrow dt = \frac{2 \ln x}{x} dx.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \Rightarrow t=1 \\ x=e \Rightarrow t=2 \end{cases}.$$

$$I = \int_1^2 \sqrt{t} dx = \left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_1^2 = \frac{4\sqrt{2}-2}{3}.$$

Chọn A

Câu 105. Tính $I = \int_e^{e^2} \frac{(1-\ln x)^2}{x} dx$ được kết quả là

A. $\frac{13}{3}.$

B. $\frac{1}{3}.$

C. $\frac{5}{3}.$

D. $\frac{4}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } t = \ln x \Leftrightarrow dt = \frac{1}{x} dx. \text{ Với } x=e \Rightarrow t=1; x=e^2 \Rightarrow t=2$$

$$I = \int_e^{e^2} \frac{(1-\ln x)^2}{x} dx = \int_1^2 (1-t)^2 dt = -\frac{1}{3}(1-t)^3 \Big|_1^2 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

Câu 106. Cho tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}}{x} dx$, đặt $t = \sqrt{1+3\ln x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $I = \frac{2}{3} \int_1^e t^2 dt.$

B. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t dt.$

C. $I = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt.$

D. $I = \frac{2}{3} \int_1^e t dt.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+3\ln x} \Rightarrow \frac{2}{3} t dt = \frac{1}{x} dx. \text{ Đổi cận } x=e \Rightarrow t=2; x=1 \Rightarrow t=1$$

$$\text{Do đó } I = \frac{2}{3} \int_1^2 t^2 dt.$$

Câu 107. Biết $\int_1^e \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x} dx = \frac{a-b\sqrt{c}}{3}$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương và $c < 4$. Tính giá

trị $S = a + b + c.$

A. $S = 13.$

B. $S = 28.$

C. $S = 25.$

D. $S = 16.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } t = \sqrt{3+\ln x} \Rightarrow 2t dt = \frac{dx}{x}.$$

$$\text{Đổi: Với } x=1 \Rightarrow t=\sqrt{3}; x=e \Rightarrow t=2.$$

$$\Rightarrow I = \int_1^e \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x} dx = 2 \int_{\sqrt{3}}^2 t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_{\sqrt{3}}^2 = \frac{16-6\sqrt{3}}{3}.$$

$$\Rightarrow a=16, b=6, c=3 \Rightarrow S = a + b + c = 25.$$

Câu 108. Cho $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx$ có kết quả dạng $I = \ln a + b$ với $a > 0, b \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2ab = -1$. **B.** $2ab = 1$. **C.** $-b + \ln \frac{3}{2a} = -\frac{1}{3}$. **D.** $-b + \ln \frac{3}{2a} = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\ln x + 2 = t \Leftrightarrow \ln x = t - 2 \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$.

Đổi cận: khi $x = 1$ thì $t = 2$; khi $x = e$ thì $t = 3$.

Khi đó $I = \int_2^3 \frac{t-2}{t^2} dt = \int_2^3 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} \right) dt = \left(\ln|t| + \frac{2}{t} \right) \Big|_2^3 = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

Vậy $2ab = -1$.

Câu 109. Biết $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2 + x \ln x} dx = \ln(\ln a + b)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2 + ab$.

A. 10.

B. 8.

C. 12.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2 + x \ln x} dx = \int_1^2 \frac{x+1}{x(x + \ln x)} dx$.

Đặt $t = x + \ln x \Rightarrow dt = \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x+1}{x} dx$.

Khi $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = 2 \Rightarrow t = 2 + \ln 2$.

Khi đó $I = \int_1^{2+\ln 2} \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_1^{2+\ln 2} = \ln(\ln 2 + 2)$. Suy ra $\begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$.

Vậy $P = 8$.

Câu 110. Cho tích phân $I = \int_e^{e^2} \frac{(x^2+1)\ln x + 1}{x \ln x} dx = \frac{ae^4 + be^2}{2} + c + d \ln 2$. Chọn phát biểu **đúng nhất**:

A. $a = b = c = d$

B. $a = b^2 = \sqrt{c} = \frac{1}{d}$

C. A và B đúng

D. A và B sai

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_e^{e^2} \frac{(x^2+1)\ln x + 1}{x \ln x} dx = \int_e^{e^2} \frac{x^2 \ln x + 1 + \ln x}{x \ln x} dx \\ &= \int_e^{e^2} \left(x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln x} \right) dx = \int_e^{e^2} \left(x + \frac{1}{x} \right) dx + \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx \end{aligned}$$

Xét $M = \int_e^{e^2} \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x| \right) \Big|_e^{e^2} = \frac{e^4 - e^2}{2} + 1$

Xét $N = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$, đặt $t = \ln x$, suy ra $dt = \frac{1}{x} dx$.

Đổi cận $x = e \Rightarrow t = 1$ và $x = e^2 \Rightarrow t = 2$ ta được

$N = \int_1^2 \frac{dt}{t} = (\ln|t|) \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

Vậy $I = \frac{e^4 - e^2}{2} + 1 + \ln 2$.

Do đó $a = -b = c = d = 1$. Ta chọn phương án **B**.

Câu 111. Tính tích phân $I = \int_0^{2018} \frac{\ln(1+2^x)}{(1+2^{-x})\log_4 e} dx$.

A. $I = \ln(1+2^{2018}) - \ln 2$.

B. $I = \ln^2(1+2^{2018}) - \ln^2 2$.

C. $I = \ln^2(1+2^{2018}) - \ln 4$.

D. $I = \ln^2(1+2^{-2018}) - \ln^2 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $I = \int_0^{2018} \frac{\ln(1+2^x)}{(1+2^{-x})\log_4 e} dx = 2 \int_0^{2018} \ln(1+2^x) \frac{2^x \ln 2}{1+2^x} dx = 2 \int_0^{2018} \ln(1+2^x) d[\ln(1+2^x)]$

Do đó $I = \ln^2(1+2^x) \Big|_0^{2018} = \ln^2(1+2^{2018}) - \ln^2 2$.

Câu 112. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int_0^1 f(x) dx = 1$.

B. $\int_0^1 f(x) dx = e$.

C. $\int_0^e f(x) dx = 1$.

D. $\int_0^e f(x) dx = e$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$. Cận: $x = 1 \Rightarrow t = 0$; $x = e \Rightarrow t = 1$

$\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^1 f(t) dt = e \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = e$.

Câu 113. Biết $\int_e^{e^4} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = 4$. Tính tích phân $I = \int_1^4 f(x) dx$.

A. $I = 8$.

B. $I = 16$.

C. $I = 2$.

D. $I = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$.

x	e	e^4
t	1	4

$\int_e^{e^4} f(\ln x) \frac{1}{x} dx = \int_1^4 f(t) dt = \int_1^4 f(x) dx$.

Suy ra $I = \int_1^4 f(x) dx = 4$.

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ DẠNG 2

Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$. Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]^{(*)}$ sao cho $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ và $a \leq \varphi(t) \leq b$ với mọi $t \in [\alpha; \beta]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Một số phương pháp đổi biến: Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng

1. $\sqrt{a^2 - x^2}$: đặt $x = |a| \sin t$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

2. $\sqrt{x^2 - a^2}$: đặt $x = \frac{|a|}{\sin t}$; $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$

3. $\sqrt{x^2 + a^2}$: $x = |a| \tan t$; $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

4. $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ hoặc $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$: đặt $x = a \cos 2t$

Lưu ý: Chỉ nên sử dụng phép đặt này khi các dấu hiệu 1, 2, 3 đi với x mũ chẵn. Ví dụ, để tính

tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ thì phải đổi biến dạng 2 còn với tích phân $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$ thì nên đổi

biến dạng 1.

Câu 114. Khi tính $I = \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$, bằng phép đặt $x = 2 \sin t$, thì được

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1 + \cos 2t) dt$.

B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1 - \cos 2t) dt$.

C. $\int_0^2 4 \cos^2 t dt$.

D. $\int_0^2 2 \cos^2 t dt$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$

Đổi cận

$$x = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Khi đó } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t dt.$$

Câu 115. Biết rằng $\int_{-1}^1 \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{2\pi}{3} + a$. Khi đó a bằng:

A. $\sqrt{2}$.

B. 1.

C. $\sqrt{3}$.

D. 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$.

$$\text{Khi đó : } \int_{-1}^1 \sqrt{4 - x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4 \cos t |\cos t| dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4 \cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2 + 2 \cos 2t) dt$$

$$= (2t + \sin 2t) \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}.$$

Câu 116. Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = a\pi$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của a là:

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = a\pi$. Giá trị của a là:

Ta có:

Đặt $x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt = \frac{\pi}{6} \Rightarrow a = \frac{1}{6}$.

Chọn D

Câu 117. Giá trị của $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \frac{a}{b}\pi$ trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $T = ab$.

A. $T = 35$.

B. $T = 24$.

C. $T = 12$.

D. $T = 36$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $x = 3\sin t \Leftrightarrow dx = 3\cos t dt$. Đổi cận: $x = 0 \rightarrow t = 0; x = 3 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9 - (3\sin t)^2} \cdot 3\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{9}{4}\pi$. Vậy $T = 9 \cdot 4 = 36$.

Câu 118. Đổi biến $x = 2\sin t$ thì tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ trở thành

A. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt$.

B. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} t dt$.

C. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}$.

D. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $x = 2\sin t$, khi đó $dx = 2\cos t dt$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \end{cases}$

$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t}{\sqrt{4\cos^2 t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos t}{2\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$.

- Câu 119.** Biết rằng $\int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}} dx = \frac{\pi}{6}$ trong đó a, b là các số nguyên dương và $4 < a + \sqrt{b} < 5$. Tổng $a+b$ bằng
- A.** 5. **B.** 7. **C.** 4. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{-x^2+6x-5}} dx = \int_4^{a+\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{4-(x-3)^2}} dx.$

Đặt $x-3 = 2 \sin t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), dx = 2 \cos t dt.$

Đổi cận $x=4 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}, x=a+\sqrt{b} \Rightarrow t = \arcsin \frac{a+\sqrt{b}-3}{2} = m.$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^m \frac{2 \cos t}{\sqrt{4-4 \sin^2 t}} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^m dt = t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^m = m - \frac{\pi}{6}.$$

Theo đề ta có $m - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \arcsin \frac{a+\sqrt{b}-3}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{a+\sqrt{b}-3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a+\sqrt{b} = \sqrt{3}+3.$

Do đó $a=3, b=3, a+b=6.$

- Câu 120.** Tích phân $I = \int_{\frac{5}{2}}^3 \sqrt{(x-1)(3-x)} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$ **B.** $I = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$ **C.** $I = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$ **D.** $I = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{\frac{5}{2}}^3 \sqrt{(x-1)(3-x)} dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_{\frac{5}{2}}^3 \sqrt{(x-1)(3-x)} dx = \int_{\frac{5}{2}}^3 \sqrt{-3-x^2+2x} dx = \int_{\frac{5}{2}}^3 \sqrt{1-(x-2)^2} dx.$$

Đặt $x-2 = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = \cos t dt.$

Đổi cận $\begin{cases} x = \frac{5}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \\ x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Chọn C

- Câu 121.** Tích phân $I = \int_0^1 \frac{3+4x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{7\pi}{6} - 4\sqrt{3} + 8.$

B. $I = \frac{7\pi}{6} - 4\sqrt{3} - 8.$

C. $I = \frac{7\pi}{6} + 4\sqrt{3} - 8.$

D. $I = \frac{7\pi}{6} + 4\sqrt{3} + 8.$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^1 \frac{3+4x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx$ có giá trị là:

Ta có: $(3+3x-x^2)' = 3-2x$ và $3+4x = 9-2(3-2x)$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{3+4x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{7-2(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{7}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx - \int_0^1 \frac{2(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx.$$

Xét $I_1 = \int_0^1 \frac{7}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{7}{\sqrt{4-(x-1)^2}} dx.$

Đặt $x-1 = 2\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 2\cos t dt.$

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6} \\ x=1 \Rightarrow t = 0 \end{cases}.$

$$\Rightarrow I_1 = \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 \frac{14\cos t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} dt = \frac{7\pi}{6}.$$

Xét $I_2 = \int_0^1 \frac{2(2-2x)}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx.$

Đặt $t = 3+2x-x^2 \Rightarrow dt = (2-2x)dx.$

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t = 3 \\ x=1 \Rightarrow t = 4 \end{cases}.$

$$\Rightarrow I_2 = \int_3^4 \frac{2}{\sqrt{t}} dt = 4 \left(t^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_3^4 = 4(2-\sqrt{3}).$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{7\pi}{6} + 4\sqrt{3} - 8.$$

Chọn C

Câu 122. Tích phân $I = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{4x-3}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{5\pi}{3}.$

B. $I = \frac{5\pi}{6}.$

C. $I = -\frac{5\pi}{3}.$

D. $I = -\frac{5\pi}{6}.$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{4x-3}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx$ có giá trị là:

Cách 1:

Ta có: $(5+4x-x^2)' = 4-2x$ và $4x-3 = 5-2(4-2x).$

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{4x-3}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{5}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{2(4-2x)}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx.$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{5}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{5}{\sqrt{9-(x-2)^2}} dx.$$

$$\text{Đặt } x-2=3\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow dx = 3\cos t dt.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{7}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{5 \cdot 3 \cos t}{\sqrt{9-9\sin^2 t}} dt = \frac{5\pi}{3}.$$

$$\text{Xét } I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{2(4-2x)}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx.$$

$$\text{Đặt } t = 5+4x-x^2 \Rightarrow dt = 4-2x.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{27}{4} \\ x = \frac{7}{2} \Rightarrow t = \frac{27}{4} \end{cases} \Rightarrow I_2 = 0.$$

$$\Rightarrow I = \frac{5\pi}{3}.$$

Chọn A

Cách 2: Dùng máy tính cầm tay.

Câu 123. Cho $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x} \sqrt{1-x^2} dx = a\pi + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Giá trị $a+b$ gần nhất với

A. $\frac{1}{10}$

B. 1

C. $\frac{1}{5}$

D. $\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Đáp án: C

Cũng như câu 25, câu 26 cũng là một câu tích phân đòi hỏi khả năng biến đổi của các thí sinh. Đối với câu này, chúng ta sử dụng phương pháp đưa về lượng giác.

Đặt $x = \sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. I được viết lại là

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-2\sin t \cos t} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{(\cos t - \sin t)^2} \cdot \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos t - \sin t) \cos t dt \\ &\Leftrightarrow -\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin t \cos t dt + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 t dt = -\frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2t d(2t) + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t + 1) d(2t) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{\cos 2t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{\sin 2t + 2t}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}-1}{8}$$

Suy ra $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}-1}{8} \approx 0,175$.

Nhận xét: Hai bài toán trên chính là cách hướng có thể ra đề để tránh tình trạng sử dụng máy tính Casio. Thí sinh hiểu bản chất và cách làm thực sự sẽ không gặp khó khăn nhiều khi giải quyết các bài toán này.

Câu 124. Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\pi}{2}$.

B. $I = \frac{\pi}{3}$.

C. $I = \frac{\pi}{4}$.

D. $I = \frac{\pi}{6}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ có giá trị là:

Ta có:

$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$. Ta dùng đổi biến số.

Đặt $x = \tan t, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{4} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}.$$

Chọn C

Câu 125. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{\pi+2}{8}$.

B. 1.

C. $\frac{2+\pi}{4}$.

D. $\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = \tan x$. Ta có $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2 \Rightarrow \cos^4 x = \frac{1}{(1+t^2)^2} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$

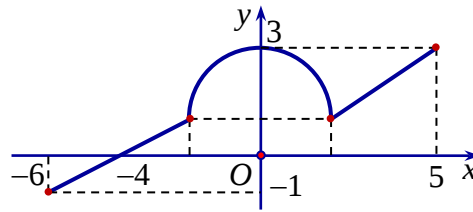
$$I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx.$$

Đặt $x = \tan u, \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 u) du$; đổi cận: $x=0 \Rightarrow u=0; x=1 \Rightarrow u=\frac{\pi}{4}$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 u}{(1 + \tan^2 u)^2} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u du = \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2+\pi}{8}$$

Câu 126. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6; 5]$, có đồ thị gồm hai đoạn thẳng và nửa đường tròn như

hình vẽ. Tính giá trị $I = \int_{-6}^5 [f(x) + 2] dx$.



A. $I = 2\pi + 35$.

B. $I = 2\pi + 34$.

C. $I = 2\pi + 33$.

D. $I = 2\pi + 32$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{khi } -6 \leq x \leq -2 \\ 1 + \sqrt{4 - x^2} & \text{khi } -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} & \text{khi } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} I &= \int_{-6}^5 [f(x) + 2] dx = \int_{-6}^5 f(x) dx + 2 \int_{-6}^5 dx \\ &= \int_{-6}^{-2} \left(\frac{1}{2}x + 2 \right) dx + \int_{-2}^2 \left(1 + \sqrt{4 - x^2} \right) dx + \int_2^5 \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \right) dx + 22 \\ &= \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x \right) \Big|_{-6}^{-2} + J + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{x}{3} \right) \Big|_2^5 + 22 = J + 28. \end{aligned}$$

Tính $J = \int_{-2}^2 \left(1 + \sqrt{4 - x^2} \right) dx$

Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$.

Đổi cận: Khi $x = -2$ thì $t = -\frac{\pi}{2}$; khi $x = 2$ thì $t = \frac{\pi}{2}$.

$$J = \int_{-2}^2 \left(1 + \sqrt{4 - x^2} \right) dx = 4 + 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4 + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 4 + 2\pi. \text{ Vậy } I = 32 + 2\pi.$$

Câu 127. Khi đổi biến $x = \sqrt{3} \tan t$, tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3}$ trở thành tích phân nào?

A. $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3} dt$.

B. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3} dt$

C. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} t dt$.

D. $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $x = \sqrt{3} \tan t \Rightarrow dx = \sqrt{3} (1 + \tan^2 t) dt$.

Khi $x = 0$ thì $t = 0$; Khi $x = 1$ thì $t = \frac{\pi}{6}$.

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}(1 + \tan^2 t)}{3(1 + \tan^2 t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}}{3} dt.$$

TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Với $P(x)$ là đa thức của x , ta thường gặp các dạng sau:

	$\int_a^b P(x).e^x dx$	$\int_a^b P(x).\cos x dx$	$\int_a^b P(x).\sin x dx$	$\int_a^b P(x).\ln x dx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\cos x dx$	$\sin x dx$	$P(x)$

BÀI TẬP

DẠNG 1:

- Câu 1.** Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin ax dx$, $a \neq 0$ có giá trị là:
- A. $I = \frac{\pi + 6 - 3\sqrt{3}}{6a}$. B. $I = \frac{\pi + 3 - 3\sqrt{3}}{6a}$. C. $I = \frac{\pi + 6 + 3\sqrt{3}}{6a}$. D. $I = \frac{\pi + 3 + 3\sqrt{3}}{6a}$.
- Câu 2.** Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+x) \cos 2x dx = \frac{1}{a} + \frac{\pi}{b}$ (a, b là các số nguyên khác 0). Tính giá trị ab .
- A. $ab = 32$. B. $ab = 2$. C. $ab = 4$. D. $ab = 12$.
- Câu 3.** Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx$ bằng cách đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$. B. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$.
- C. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$. D. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$.
- Câu 4.** Biết $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = a\pi\sqrt{3} + b \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của $\frac{a}{b}$ là:
- A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{24}$. C. $-\frac{1}{12}$. D. $-\frac{1}{24}$.
- Câu 5.** Biết rằng $\int_0^1 x \cos 2x dx = \frac{1}{4}(a \sin 2 + b \cos 2 + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. $2a + b + c = -1$. B. $a + 2b + c = 0$. C. $a - b + c = 0$. D. $a + b + c = 1$.
- Câu 6.** Tính nguyên hàm $I = \int (x-2) \sin 3x dx = -\frac{(x-2) \cos 3x}{a} + b \sin 3x + C$. Tính $M = a + 27b$.
Chọn đáp án đúng:
- A. 6 B. 14 C. 34 D. 22
- Câu 7.** Biết m là số thực thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + 2m) dx = 2\pi^2 + \frac{\pi}{2} - 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $m \leq 0$. B. $0 < m \leq 3$. C. $3 < m \leq 6$. D. $m > 6$.
- Câu 8.** Tính tích phân $\int_0^{\pi} x(x + \sin x) dx = a\pi^3 + b\pi$. Tính tích ab :

A. 3**B.** $\frac{1}{3}$ **C.** 6**D.** $\frac{2}{3}$

Câu 9. Tích phân $\int_0^{\pi} (3x+2)\cos^2 x \, dx$ bằng

A. $\frac{3}{4}\pi^2 - \pi$.**B.** $\frac{3}{4}\pi^2 + \pi$.**C.** $\frac{1}{4}\pi^2 + \pi$.**D.** $\frac{1}{4}\pi^2 - \pi$.

Câu 10. Cho số hữu tỷ dương m thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2m}} x \cdot \cos mx \, dx = \frac{\pi-2}{2}$. Hỏi số m thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $\left(\frac{7}{4}; 2\right)$.**B.** $\left(0; \frac{1}{4}\right)$.**C.** $\left(1; \frac{6}{5}\right)$.**D.** $\left(\frac{5}{6}; \frac{8}{7}\right)$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x & \text{khi } x \geq 0 \\ x \cdot \sin x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tích tích phân $I = \int_{-\pi}^1 f(x) \, dx$

A. $I = \frac{7}{6} + \pi$.**B.** $I = \frac{2}{3} + \pi$.**C.** $I = -\frac{1}{3} + 3\pi$.**D.** $I = \frac{2}{5} + 2\pi$.

Câu 12. Tính $\int_0^{\pi} x(1 + \cos x) \, dx$. Kết quả là

A. $\frac{\pi^2}{2} - 2$.**B.** $\frac{\pi^2}{3} + 3$.**C.** $\frac{\pi^2}{3} - 3$.**D.** $\frac{\pi^2}{2} + 2$.

Câu 13. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx = a\pi + b$. Phần nguyên của tổng $a+b$ là ?

A. 0**B.** -1**C.** 1**D.** -2

Câu 14. Cho $I = \int_0^{\frac{x}{4}} x \tan^2 x \, dx = \frac{\pi}{a} - \ln \sqrt{b} - \frac{\pi^2}{32}$ khi đó tổng $a+b$ bằng

A. 4**B.** 8**C.** 10**D.** 6

Câu 15. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos x} \, dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{8} - 2 \ln \left(\cos \frac{\pi}{8} \right)$.**B.** $I = \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{8} + 2 \ln \left(\cos \frac{\pi}{8} \right)$.**C.** $I = \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} - 2 \ln \left(\cos \frac{\pi}{8} \right)$.**D.** $I = \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} + 2 \ln \left(\cos \frac{\pi}{8} \right)$.

Câu 16. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} \, dx = a\pi + b \ln 2$, với a, b là các số thực. Tính $16a - 8b$

A. 4.**B.** 5.**C.** 2.**D.** 3.

Câu 17. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x - \sin x}{2 - 2 \cos x} \, dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{1}{2} \left(-\pi + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} + 4\ln\sqrt{2} + \ln 2 \right).$

B. $I = \frac{1}{2} \left(-\pi + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} + 2\ln\sqrt{2} - \ln 2 \right).$

C. $I = \frac{1}{2} \left(-\pi + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} + 4\ln\sqrt{2} - \ln 2 \right).$

D. $I = \frac{1}{2} \left(-\pi + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} + 2\ln\sqrt{2} + \ln 2 \right).$

Câu 18. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x^3 + 2x)\cos x + x\cos^2 x}{\cos x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{5\pi^4}{324} + \frac{2\pi^2}{9} + \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

B. $I = \frac{5\pi^4}{324} - \frac{2\pi^2}{9} + \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

C. $I = \frac{5\pi^4}{324} + \frac{2\pi^2}{9} - \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

D. $I = \frac{5\pi^4}{324} + \frac{2\pi^2}{9} + \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Câu 19. Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$ và $\int_0^a x \tan x dx = m$ Tính $I = \int_0^a \left(\frac{x}{\cos x} \right)^2 dx$ theo a và m .

A. $I = a \tan a - 2m.$

B. $I = -a^2 \tan a + m.$

C. $I = a^2 \tan a - 2m.$

D. $I = a^2 \tan a - m.$

Câu 20. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx$. Kết quả là

A. $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}.$

B. $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}.$

C. $\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}.$

D. $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}.$

Câu 21. Cho tích phân $I = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} dx = a\pi^2 + b$. Tính $A = a - b$

Chọn đáp án đúng:

A. 7

B. 10

C. 6

D. 2

Câu 22. Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n = \int_0^1 x^2 (1 - x^2)^n dx$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

DẠNG 2:

Câu 23. Cho $\int_0^a x e^x dx = 1 (a \in \mathbb{R})$. Tìm a ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. e .

Câu 24. Cho $I = \int_0^1 x e^{2x} dx = ae^2 + b$ (a, b là các số hữu tỷ). Khi đó tổng $a + b$ là

A. 0.

B. $\frac{1}{4}.$

C. 1.

D. $\frac{1}{2}.$

Câu 25. Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + b.e$, tích ab bằng:

A. 1.

B. -1.

C. -15.

D. 20.

Câu 26. Biết $I = \int_0^1 (2x+3)e^x dx = ae + b$, với a, b là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $a - b = 2.$

B. $a^3 + b^3 = 28.$

C. $ab = 3.$

D. $a + 2b = 1.$

Câu 27. Tìm a sao cho $I = \int_0^a x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx = 4$, chọn đáp án đúng

A. 1 B. 0 C. 4 D. 2

Câu 28. Cho tích phân $I = \int_0^1 (x+1)(e^x - 3) dx$. Kết quả tích phân này dạng $I = e - a$. Đáp án nào sau đây đúng?

A. $a = \frac{9}{2}$ B. $a = \frac{9}{4}$ C. $a = \frac{9}{5}$ D. $a = \frac{8}{3}$

Câu 29. Tính tích phân $I = \int_0^1 (a-x)(b+e^{2x}) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2$. Tính $A = \frac{15}{12}ab(a+b)$

Chọn đáp án đúng:

A. 27 B. 30 C. 16 D. 45

Câu 30. Tìm m để $\int_0^1 (mx+1)e^x dx = e$?

A. 0 B. -1 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

Câu 31. Cho $I = \int_0^m (2x-1)e^{2x} dx$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $I < m$ là khoảng $(a; b)$. Tính $P = a - 3b$.

A. $P = -3$. B. $P = -2$. C. $P = -4$. D. $P = -1$.

Câu 32. Biết rằng tích phân $\int_0^4 \frac{(x+1)e^x}{\sqrt{2x+1}} dx = ae^4 + b$. Tính $T = a^2 - b^2$

A. $T = 1$. B. $T = 2$. C. $T = \frac{3}{2}$. D. $T = \frac{5}{2}$.

Câu 33. Cho tích phân $I = \int_{\frac{1}{12}}^{\frac{12}{12}} \left(1+x - \frac{1}{x}\right) \cdot e^{\frac{x+1}{x}} \cdot dx = \frac{a}{b} \cdot e^{\frac{c}{d}}$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương

và các phân số $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $bc - ad$.

A. 24. B. $\frac{1}{6}$. C. 12. D. 1.

DẠNG 3.

Câu 34. Cho $I = \int_1^e x \ln x dx = \frac{a \cdot e^2 + b}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + b + c$.

A. 5. B. 3. C. 4. D. 6.

Câu 35. Kết quả của phép tính tích phân $\int_0^1 \ln(2x+1) dx$ được biểu diễn dạng $a \cdot \ln 3 + b$, khi đó giá trị của tích ab^3 bằng

A. 3. B. $\frac{3}{2}$. C. 1. D. $-\frac{3}{2}$.

Câu 36. Cho $\int_0^1 \ln(x+1) dx = a + \ln b$, $(a, b \in \mathbb{Z})$. Tính $(a+3)^b$.

A. 25. B. $\frac{1}{7}$. C. 16. D. $\frac{1}{9}$.

Câu 37. Biết tích phân $\int_1^2 (4x-1) \ln x dx = a \ln 2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tổng $2a + b$ bằng

A. 5. B. 8. C. $A(1; -2; 1)$ D. 13.

Câu 38. Biết $\int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2} dx = \frac{a+\ln b-\ln c}{4}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $P = a + b + c$ bằng?

A. 46. B. 35. C. 11. D. 48.

Câu 39. Giả sử $\int_1^2 (2x-1) \ln x dx = a \ln 2 + b, (a; b \in \mathbb{Q})$. Khi đó $a + b$?

A. $\frac{5}{2}$. B. 2. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 40. Tính tích phân $I = \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx$.

A. $I = \frac{2 \ln 2 + 6}{9}$. B. $I = \frac{6 \ln 2 + 2}{9}$. C. $I = \frac{2 \ln 2 - 6}{9}$. D. $I = \frac{6 \ln 2 - 2}{9}$.

Câu 41. Tích phân $I = \int_1^a x \ln x dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{a^2 \ln a}{2} + \frac{1-a^2}{4}$. B. $I = \frac{a^2 \ln a}{2} - \frac{1-a^2}{4}$.
C. $I = \frac{a^2 \ln |a|}{2} + \frac{1-a^2}{4}$. D. $I = \frac{a^2 \ln |a|}{2} - \frac{1-a^2}{4}$.

Câu 42. Kết quả tích phân $\int_0^2 (2x + \ln(x+1)) dx = 3 \ln 3 + b$. Giá trị $3 + b$ là:

A. 3 B. 4 C. 5 D. 7

Câu 43. Tính tích phân $I = \int_1^2 (4x+3) \cdot \ln x dx = 7 \ln a + b$. Tính $\sin \frac{(a+b)\pi}{4}$:

A. 1 B. -1 C. 0 D. $\frac{1}{2}$

Câu 44. Cho tích phân $I = \int_0^1 [3x^2 - 2x + \ln(2x+1)] dx$. Xác định a biết $I = b \ln a - c$ với a, b, c là các số hữu tỉ

A. $a=3$ B. $a=-3$ C. $a = \frac{2}{3}$ D. $a = -\frac{2}{3}$.

Câu 45. Cho $I = \int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2} dx = a(\ln 3 + 1) + \ln b$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $T = 4a + 2b$

A. 4 B. 7 C. 5 D. 6

Câu 46. Cho tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx = a \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}} \right) - b\pi$. Tính $A = \log_{\sqrt{3}} a + \log_{\sqrt{6}} b$

Chọn đáp án đúng:

A. -3 B. 2 C. -1 D. 1

Câu 47. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = a\sqrt{e} + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a \cdot b$.

A. $P = 4$. B. $P = -8$. C. $P = -4$. D. $P = 8$.

Câu 48. Biết $\int_0^2 2x \ln(x+1) dx = a \cdot \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a + 7b$.

A. 33. B. 25. C. 42. D. 39.

- Câu 49.** Cho $\int_0^1 x \left[\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} \right] dx = \frac{a^2 \ln 2 - bc \ln 3 + c}{4}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}$. Tính $T = a + b + c$.
- A. $T = 13$. B. $T = 15$. C. $T = 17$. D. $T = 11$.
- Câu 50.** Biết $\int_2^3 \ln(x^3 - 3x + 2) dx = a \ln 5 + b \ln 2 + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a \cdot b + c$
- A. $S = 60$. B. $S = -23$. C. $S = 12$. D. $S = -2$.
- Câu 51.** Cho biết tích phân $I = \int_0^1 (x+2) \ln(x+1) dx = a \ln 2 + \frac{-7}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:
- A. $a = b$. B. $a < b$. C. $a > b$. D. $a = b + 3$.
- Câu 52.** Cho $I = \int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x+1)^2} dx = \frac{a}{b} \ln 2 - \frac{1}{c}$ với a, b, m là các số nguyên dương và là phân số tối giản.
- Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{a+b}{c}$.
- A. $S = \frac{2}{3}$. B. $S = \frac{5}{6}$. C. $S = \frac{1}{2}$. D. $S = \frac{1}{3}$.
- Câu 53.** Cho $a > b > -1$. Tích phân $I = \int_a^b \ln(x+1) dx$ bằng biểu thức nào sau đây?
- A. $I = (x+1) \ln(x+1) \Big|_a^b - a + b$. B. $I = (x+1) \ln(x+1) \Big|_a^b - b + a$.
- C. $I = \frac{1}{(x+1)} \Big|_a^b$. D. $I = x \ln(x+1) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{x}{x+1} dx$.
- Câu 54.** Biết $\int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx = \frac{ae^2 + be + c}{2}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a^2 + b^2 + c^2$ bằng
- A. 5. B. 3. C. 4. D. 9.
- Câu 55.** Biết $\int_0^3 x \ln(x^2 + 16) dx = a \ln 5 + b \ln 2 + \frac{c}{2}$ trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.
- A. $T = 2$. B. $T = -16$. C. $T = -2$. D. $T = 16$.
- Câu 56.** Tính tích phân $I = \int_1^2 \left(2019 \log_2 x + \frac{1}{\ln 2} \right) x^{2018} dx$.
- A. $I = 2^{2017}$. B. $I = 2^{2019}$. C. $I = 2^{2018}$. D. $I = 2^{2020}$.
- Câu 57.** Biết $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx = a(1 + \ln 3) - b \ln 2$, ($a, b \in \mathbb{Q}$). Khi đó $a^2 + b^2$ bằng
- A. $a^2 + b^2 = \frac{7}{16}$. B. $a^2 + b^2 = \frac{16}{9}$. C. $a^2 + b^2 = \frac{25}{16}$. D. $a^2 + b^2 = \frac{3}{4}$.
- Câu 58.** Biết $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = a \ln 2 + \frac{b}{c}$ (với a là số hữu tỉ, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $S = 2a + 3b + c$.
- A. $S = 4$. B. $S = -6$. C. $S = 6$. D. $S = 5$.

- Câu 59.** Biết rằng $\int_1^2 \ln(x+1)dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$
- A. $S = 0$. B. $S = 1$. C. $S = 2$. D. $S = -2$.
- Câu 60.** Tính tích phân $I = \int_4^5 (x+1) \ln(x-3)dx$?
- A. $10 \ln 2$. B. $10 \ln 2 + \frac{19}{4}$. C. $\frac{19}{4} - 10 \ln 2$. D. $10 \ln 2 - \frac{19}{4}$.
- Câu 61.** Biết rằng $\int_2^3 x \ln x dx = m \ln 3 + n \ln 2 + p$, trong đó $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Khi đó số m là
- A. $\frac{9}{2}$. B. 18 . C. 9 . D. $\frac{27}{4}$.
- Câu 62.** Biết $\int_0^4 x \ln(x^2 + 9)dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ là
- A. $T = 10$. B. $T = 9$. C. $T = 8$. D. $T = 11$.
- Câu 63.** Tích phân $I = \int_0^1 \ln(\sqrt{1+x^2} - x)dx$ có giá trị là:
- A. $I = \sqrt{2} - 1 + \ln(\sqrt{2} - 1)$. B. $I = \sqrt{2} - 1 - \ln(\sqrt{2} - 1)$.
C. $I = -\sqrt{2} + 1 + \ln(\sqrt{2} - 1)$. D. $I = -\sqrt{2} + 1 - \ln(\sqrt{2} - 1)$.
- Câu 64.** Cho tích phân $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x dx = ae^2 + b$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của $2a - 3b$ là:
- A. $\frac{13}{2}$. B. $\frac{13}{4}$. C. $-\frac{13}{4}$. D. $-\frac{13}{2}$.
- Câu 65.** Tính tích phân $\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x} dx$, ta được kết quả
- A. $-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$. B. $\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \ln 2$. C. $-\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \ln 2$. D. $-\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \ln 2$.
- Câu 66.** Giả sử $\int_1^2 \frac{4 \ln x + 1}{x} dx = a \ln^2 2 + b \ln 2$, với a, b là các số hữu tỷ. Khi đó tổng $4a + b$ bằng.
- A. 3 . B. 5 . C. 7 . D. 9 .
- Câu 67.** Tính tích phân $I = \int_1^{2^{1000}} \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$.
- A. $I = -\frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} + 1000 \ln \frac{2}{1+2^{1000}}$. B. $I = -\frac{1000 \ln 2}{1+2^{1000}} + \ln \frac{2^{1001}}{1+2^{1000}}$.
C. $I = \frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} - 1000 \ln \frac{2}{1+2^{1000}}$. D. $I = \frac{1000 \ln 2}{1+2^{1000}} - \ln \frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1:

Câu 1. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin ax dx$, $a \neq 0$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\pi + 6 - 3\sqrt{3}}{6a}$. **B.** $I = \frac{\pi + 3 - 3\sqrt{3}}{6a}$. **C.** $I = \frac{\pi + 6 + 3\sqrt{3}}{6a}$. **D.** $I = \frac{\pi + 3 + 3\sqrt{3}}{6a}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin ax dx$, $a \neq 0$ có giá trị là:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin ax dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{1}{a} \cos x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{-1}{a} x \cos x \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{a} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left(\frac{-1}{a} x \cos x \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{1}{a} \sin x \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi + 6 - 3\sqrt{3}}{6a}.$$

Chọn A

Câu 2. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+x) \cos 2x dx = \frac{1}{a} + \frac{\pi}{b}$ (a, b là các số nguyên khác 0). Tính giá trị ab .

A. $ab = 32$. **B.** $ab = 2$. **C.** $ab = 4$. **D.** $ab = 12$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+x) \cos 2x dx = \left((1+x) \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{1}{a} + \frac{\pi}{b}.$$

$$\Rightarrow a = 4; b = 8 \Rightarrow ab = 32.$$

Câu 3. Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx$ bằng cách đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$. **B.** $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$.

C. $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$. **D.** $I = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } I = \int_0^{\pi} x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \sin 2x dx.$$

Câu 4. Biết $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = a\pi\sqrt{3} + b \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của $\frac{a}{b}$ là:

A. $\frac{1}{12}$.

B. $\frac{1}{24}$.

C. $-\frac{1}{12}$.

D. $-\frac{1}{24}$.

Hướng dẫn giải

Biết $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = a\pi\sqrt{3} + b \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ là:

Ta có:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = \left(\frac{1}{2} x \sin 2x \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{\pi\sqrt{3}}{24} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{24} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{12}$$

Chọn A

Câu 5. Biết rằng $\int_0^1 x \cos 2x dx = \frac{1}{4}(a \sin 2 + b \cos 2 + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $2a + b + c = -1$.

B. $a + 2b + c = 0$.

C. $a - b + c = 0$.

D. $a + b + c = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{\sin 2x}{2} \end{cases}$

Khi đó $\int_0^1 x \cos 2x dx = \frac{x \sin 2x}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \sin 2x dx = \frac{1}{4}(2 \sin 2 + \cos 2 - 1)$.

Vậy $a - b + c = 0$.

Câu 6. Tính nguyên hàm $I = \int (x-2) \sin 3x dx = -\frac{(x-2) \cos 3x}{a} + b \sin 3x + C$. Tính $M = a + 27b$.

Chọn đáp án **đúng**:

A. 6

B. 14

C. 34

D. 22

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x-2 \\ dv = \sin 3x dx \end{cases}$. ta được: $\begin{cases} du = dx \\ v = -\frac{\cos 3x}{3} \end{cases}$

Do đó:

$$I = -\frac{(x-2) \cos 3x}{3} + \frac{1}{3} \int \cos 3x dx = -\frac{(x-2) \cos 3x}{3} + \frac{1}{9} \sin 3x + c \Rightarrow a = 3; b = \frac{1}{9} \Rightarrow m = 6$$

Câu 7. Biết m là số thực thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + 2m) dx = 2\pi^2 + \frac{\pi}{2} - 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m \leq 0$.

B. $0 < m \leq 3$.

C. $3 < m \leq 6$.

D. $m > 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + 2m) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2mx dx = I + J$$

$$+) I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } I = x \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = x \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$+) J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2mx dx = mx^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} m.$$

$$\text{Suy ra } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + 2m) dx = \frac{\pi^2}{4} m + \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } \frac{\pi^2}{4} m + \frac{\pi}{2} - 1 = 2\pi^2 + \frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow m = 8.$$

Câu 8. Tính tích phân $\int_0^{\pi} x(x + \sin x) dx = a\pi^3 + b\pi$. Tính tích ab :

- A. 3 **B.** $\frac{1}{3}$ C. 6 **D.** $\frac{2}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} x^2 dx + \int_0^{\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} x^2 dx - \int_0^{\pi} x d(\cos x) = \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} - (x \cos x) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \\ &= \frac{\pi^3}{3} + \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3} \pi^3 + \pi \end{aligned}$$

Câu 9. Tích phân $\int_0^{\pi} (3x + 2) \cos^2 x dx$ bằng

- A. $\frac{3}{4} \pi^2 - \pi$. **B.** $\frac{3}{4} \pi^2 + \pi$. C. $\frac{1}{4} \pi^2 + \pi$. **D.** $\frac{1}{4} \pi^2 - \pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } I = \int_0^{\pi} (3x + 2) \cos^2 x dx. \text{ Ta có:}$$

$$\square I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (3x + 2)(1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi} (3x + 2) dx + \int_0^{\pi} (3x + 2) \cos 2x dx \right] = \frac{1}{2} (I_1 + I_2).$$

$$\square I_1 = \int_0^{\pi} (3x + 2) dx = \left(\frac{3}{2} x^2 + 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi^2 + 2\pi.$$

$$\square I_2 = \int_0^{\pi} (3x + 2) \cos 2x dx. \text{ Dùng tích phân từng phần}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 3x + 2 \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3 dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}.$$

Khi đó $I_2 = \frac{1}{2}(3x+2)\sin 2x \Big|_0^\pi - \frac{3}{2} \int_0^\pi \sin 2x dx = 0 + \frac{3}{4}(\cos 2x) \Big|_0^\pi = 0.$

□ Vậy $I = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\pi^2 + 2\pi \right) = \frac{3}{4}\pi^2 + \pi.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2m}} x \cdot \cos mx dx = \frac{\pi-2}{2}$$

Câu 10. Cho số hữu tỷ dương m thỏa mãn . Hỏi số m thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. $\left(\frac{7}{4}; 2\right).$ B. $\left(0; \frac{1}{4}\right).$ C. $\left(1; \frac{6}{5}\right).$ D. $\left(\frac{5}{6}; \frac{8}{7}\right).$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos mx dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{m} \sin mx \end{cases}.$

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2m}} x \cdot \cos mx dx = \frac{x}{m} \sin mx \Big|_0^{\frac{\pi}{2m}} - \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \sin mx dx = \frac{\pi}{2m^2} + \frac{1}{m^2} \cdot \cos mx \Big|_0^{\frac{\pi}{2m}} = \left(\frac{\pi-2}{2}\right) \cdot \frac{1}{m^2}.$

Theo giả thiết ta có $\left(\frac{\pi-2}{2}\right) \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{\pi-2}{2} \Leftrightarrow m = \pm 1.$

Vì m là số hữu tỷ dương nên $m = 1 \in \left(\frac{5}{6}; \frac{8}{7}\right).$

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x & \text{khi } x \geq 0 \\ x \cdot \sin x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tích tích phân $I = \int_{-\pi}^1 f(x) dx$

- A. $I = \frac{7}{6} + \pi.$ B. $I = \frac{2}{3} + \pi.$ C. $I = -\frac{1}{3} + 3\pi.$ D. $I = \frac{2}{5} + 2\pi.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$ nên hàm số liên tục tại $x = 0$. Do đó hàm số liên tục trên đoạn $[-\pi; 1]$.

Ta có: $I = \int_{-\pi}^1 f(x) dx = \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_{-\pi}^0 x \cdot \sin x dx + \int_0^1 (2x^2 + x) dx = I_1 + I_2.$

• $I_1 = \int_{-\pi}^0 x \cdot \sin x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$

$I_1 = (-x \cos x) \Big|_{-\pi}^0 + \int_{-\pi}^0 \cos x dx = (-x \cos x) \Big|_{-\pi}^0 + \sin x \Big|_{-\pi}^0 = \pi.$

• $I_2 = \int_0^1 (2x^2 + x) dx = \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^1 = \frac{7}{6}.$

Vậy $I = I_1 + I_2 = \frac{7}{6} + \pi$.

Câu 12. Tính $\int_0^{\pi} x(1 + \cos x) dx$. Kết quả là

A. $\frac{\pi^2}{2} - 2$.

B. $\frac{\pi^2}{3} + 3$.

C. $\frac{\pi^2}{3} - 3$.

D. $\frac{\pi^2}{2} + 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = (1 + \cos x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = x + \sin x \end{cases}$

Khi đó: $I = x(x + \sin x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (x + \sin x) dx = \pi^2 - \left(\frac{x^2}{2} - \cos x \right) \Big|_0^{\pi} = \pi^2 - \left(\frac{\pi^2}{2} + 1 + 1 \right) = \frac{\pi^2}{2} - 2$

Câu 13. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = a\pi + b$. Phần nguyên của tổng $a + b$ là ?

A. 0

B. -1

C. 1

D. -2

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đối với bài toán này, chúng ta sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \end{cases}$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có: $I = (x \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$= (x \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} \Leftrightarrow I = (x \tan x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$

Suy ra $a = \frac{1}{\sqrt{3}}; b = -\ln 2$.

Tổng $a + b = \frac{1}{\sqrt{3}} - \ln 2 \approx -0,1157969114$

Lưu ý khái niệm phần nguyên của x là số nguyên lớn nhất không vượt quá x , vậy đáp án đúng là đáp án **B.**

Nhận xét: Bài toán trên đòi hỏi khả năng biến đổi của thí sinh và nhắc lại kiến thức về khái niệm phần nguyên, sẽ có thí sinh khi đi thi đã tìm ra kết quả phân tích nhưng lúng túng trong việc lựa chọn đáp án vì không nhớ rõ khái niệm phần nguyên.

Câu 14. Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx = \frac{\pi}{a} - \ln \sqrt{b} - \frac{\pi^2}{32}$ khi đó tổng $a + b$ bằng

A. 4

B. 8

C. 10

D. 6

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = \frac{\pi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32}$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \tan x \end{cases}$$

$$I_1 = x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{4} + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} - \frac{\pi^2}{32}$$

Câu 15. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{8} - 2 \ln \left(\cos \frac{\pi}{8} \right).$

B. $I = \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{8} + 2 \ln \left(\cos \frac{\pi}{8} \right).$

C. $I = \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} - 2 \ln \left(\cos \frac{\pi}{8} \right).$

D. $I = \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} + 2 \ln \left(\cos \frac{\pi}{8} \right).$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos x} dx$ có giá trị là:

$$\text{Ta biến đổi: } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos x} dx = \frac{1}{2} I \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos^2 \frac{x}{2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 2 \tan \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \left[\left(2x \tan \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan \frac{x}{2} dx \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \tan \frac{\pi}{8} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \tan \frac{\pi}{8} + 4 \int_1^{\cos \frac{\pi}{8}} \frac{1}{t} dt = \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{8} + 2 \ln \left(\cos \frac{\pi}{8} \right)$$

Chọn B

Câu 16. Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx = a\pi + b \ln 2$, với a, b là các số thực. Tính $16a - 8b$

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{dx}{1 + \cos 2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \tan x \end{cases}. \text{ Ta có}$$

$$I = \frac{1}{2} x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}, b = -\frac{1}{4}$$

Do đó, $16a - 8b = 4$.

Câu 17. Tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x - \sin x}{2 - 2\cos x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{1}{2} \left(-\pi + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} + 4\ln\sqrt{2} + \ln 2 \right).$

B. $I = \frac{1}{2} \left(-\pi + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} + 2\ln\sqrt{2} - \ln 2 \right).$

C. $I = \frac{1}{2} \left(-\pi + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} + 4\ln\sqrt{2} - \ln 2 \right).$

D. $I = \frac{1}{2} \left(-\pi + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} + 2\ln\sqrt{2} + \ln 2 \right).$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x - \sin x}{2 - 2\cos x} dx$ có giá trị là:

$$\text{Ta biến đổi: } I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x - \sin x}{2 - 2\cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 - \cos x} dx - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 - \cos x} dx.$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 - \cos x} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 \frac{x}{2}} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -2 \cot \frac{x}{2} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} \left[\left(-2x \cdot \cot \frac{x}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cot \frac{x}{2} dx \right] = \frac{1}{2} \left[-\pi + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} + 4\ln\sqrt{2} \right].$$

$$\text{Xét } I_2 = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 - \cos x} dx.$$

$$\text{Đặt } t = 1 - \cos x \Rightarrow dt = \sin x dx.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} (\ln |t|) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{1}{2} \left(-\pi + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} + 4\ln\sqrt{2} - \ln 2 \right).$$

Chọn C

Câu 18. Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x^3 + 2x) \cos x + x \cos^2 x}{\cos x} dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{5\pi^4}{324} + \frac{2\pi^2}{9} + \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

B. $I = \frac{5\pi^4}{324} - \frac{2\pi^2}{9} + \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

C. $I = \frac{5\pi^4}{324} + \frac{2\pi^2}{9} - \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

D. $I = \frac{5\pi^4}{324} + \frac{2\pi^2}{9} + \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x^3 + 2x) \cos x + x \cos^2 x}{\cos x} dx$ có giá trị là:

Ta có:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x^3 + 2x) \cos x + x \cos^2 x}{\cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + 2x) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \left(\frac{1}{4} x^4 + x^2 \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

Xét $I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}.$

$$\Rightarrow I_1 = (x \sin x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{1}{4} x^4 + x^2 \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + I_1 = \frac{5\pi^4}{324} + \frac{2\pi^2}{9} + \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn A

Câu 19. Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$ và $\int_0^a x \tan x dx = m$ Tính $I = \int_0^a \left(\frac{x}{\cos x} \right)^2 dx$ theo a và m .

A. $I = a \tan a - 2m.$

B. $I = -a^2 \tan a + m.$

C. $I = a^2 \tan a - 2m.$

D. $I = a^2 \tan a - m.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \tan x \end{cases}$

$$I = \int_0^a \left(\frac{x}{\cos x} \right)^2 dx = x^2 \tan x \Big|_0^a - \int_0^a 2x \tan x dx = a^2 \tan a - 2m.$$

Câu 20. Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx$. Kết quả là

A. $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$.

B. $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$.

C. $\frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}$.

D. $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin^2 x) \cos x dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cos x + \sin^2 x \cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = I_1 + I_2$$

Tính I_1 : Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$.

Nên $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

$$= (x \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Tính I_2 : Đặt $u = \sin x$. Ta có $du = \cos x dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$.

$$\Rightarrow I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3} u^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}.$$

Câu 21. Cho tích phân $I = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} dx = a\pi^2 + b$. Tính $A = a - b$

Chọn đáp án đúng:

A. 7

B. 10

C. 6

D. 2

Hướng dẫn giải

Chọn B

* Đặt $u = t^2 \Rightarrow du = 2t dt$; $dv = \sin t dt$ chọn $v = -\cos t$

$$\text{Vậy } I = 2 \left[-t^2 \cos t \Big|_0^{\pi} + 2 \int_0^{\pi} t \cos t dt \right]$$

Đặt $u = t \Rightarrow du = dt$ $dv = \cos t dt$ chọn $v = \sin t$

$$I_1 = \int_0^{\pi} t \sin t dt = t \sin t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin t dt = \cos t \Big|_0^{\pi} = -2$$

* Do đó: $I = 2 \left[-t^2 \cos t \Big|_0^{\pi} - 4 \right] = 2\pi^2 - 8 \Rightarrow a = 2; b = -8 \Rightarrow A = 10$

Câu 22. Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n = \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1. Tự luận:

$$\text{Xét } I_n = \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = x(1-x^2)^n dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{-(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)} \end{cases}$$

$$I_n = \frac{-x(1-x^2)^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 + \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx = \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)} \int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n+1} dx$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)} \left[\int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx - \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n+1} dx \right]$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2(n+2)} [2(n+1)I_n - I_{n+1}] \Rightarrow \frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{2n+1}{2n+5} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1.$$

Cách 2. Trắc nghiệm:

Ta thấy $0 \leq (1-x^2) \leq 1$ với mọi $x \in [0;1]$, nên

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n+1} dx = \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n (1-x^2) dx \leq \int_0^1 x^2 (1-x^2)^n dx = I_n,$$

suy ra $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Dựa vào các đáp án, ta chọn **A**.

DẠNG 2:

Câu 23. Cho $\int_0^a x e^x dx = 1$ ($a \in \mathbb{R}$). Tìm a ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. e .

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\int_0^a x e^x dx = 1 \Leftrightarrow (x-1)e^x \Big|_0^a = (a-1)e^a + 1 = 1 \Leftrightarrow a = 1.$$

Câu 24. Cho $I = \int_0^1 x e^{2x} dx = ae^2 + b$ (a, b là các số hữu tỷ). Khi đó tổng $a + b$ là

A. 0.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 1.

D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \text{ ta có } \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{1}{2}.$$

Câu 25. Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + b.e$, tích ab bằng:

A. 1.

B. -1.

C. -15.

D. 20.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 (2x+1)e^x dx = (2x+1)e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = (2x-1)e^x \Big|_0^1 = e + 1.$$

$$\text{Suy ra } a = 1; b = 1 \Rightarrow ab = 1.$$

Câu 26. Biết $I = \int_0^1 (2x+3)e^x dx = ae + b$, với a, b là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $a - b = 2$.

B. $a^3 + b^3 = 28$.

C. $ab = 3$.

D. $a + 2b = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$I = \int_0^1 (2x+3)e^x dx = \int_0^1 (2x+3)d(e^x) = (2x+3)e^x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^x dx = 5e - 3 - 2e + 2 = 3e - 1.$$

$$\text{Vậy } a = 3, b = -1 \text{ nên } a + 2b = 1.$$

Câu 27. Tìm a sao cho $I = \int_0^a x.e^{\frac{x}{2}} dx = 4$, chọn đáp án đúng

A. 1**B. 0****C. 4****D. 2****Hướng dẫn giải****Chọn D**

Ta có: $I = \int_0^a x.e^{\frac{x}{2}} dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{\frac{x}{2}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 2.e^{\frac{x}{2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = 2x.e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^a - 2 \int_0^a e^{\frac{x}{2}} dx = 2ae^{\frac{a}{2}} - 4.e^{\frac{x}{2}} \Big|_0^a = 2(a-2)e^{\frac{a}{2}} + 4$$

Theo đề ra ta có: $I = 4 \Leftrightarrow 2(a-2)e^{\frac{a}{2}} + 4 = 4 \Leftrightarrow a = 2$

Câu 28. Cho tích phân $I = \int_0^1 (x+1)(e^x - 3) dx$. Kết quả tích phân này dạng $I = e - a$. Đáp án nào sau đây đúng?

A. $a = \frac{9}{2}$ **B.** $a = \frac{9}{4}$ **C.** $a = \frac{9}{5}$ **D.** $a = \frac{8}{3}$ **Hướng dẫn giải****Chọn A**

$$\begin{cases} u = x+1 \\ dv = (e^x - 3) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int (e^x - 3) dx = (e^x - 3x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = (x+1)(e^x - 3x) \Big|_0^1 - \int_0^1 (e^x - 3x) dx$$

$$= (x+1)(e^x - 3x) \Big|_0^1 - \left(e^x - \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = e - \frac{9}{2}$$

Câu 29. Tính tích phân $I = \int_0^1 (a-x)(b+e^{2x}) dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2$. Tính $A = \frac{15}{12}ab(a+b)$

Chọn đáp án đúng:

A. 27**B.** 30**C.** 16**D.** 45**Hướng dẫn giải****Chọn D**

Đặt

$$\begin{cases} u = a-x \\ dv = (b+e^{2x}) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = bx + \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$I = (a-x) \left(bx + \frac{1}{2}e^{2x} \right) \Big|_0^1 = \left(ab - b - \frac{1}{2}a + \frac{b}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{2}(a-1) + \frac{1}{4} \right) e^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2$$

$$\begin{cases} ab - b - \frac{1}{2}a + \frac{b}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}(a-1) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow A = 45$$

Câu 30. Tìm m để $\int_0^1 (mx+1)e^x dx = e$?

A. 0**B.** -1**C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1**Hướng dẫn giải****Chọn D**

Ta có

$$\begin{aligned}\int_0^1 (mx+1)e^x dx &= \int_0^1 (mx+1)dx(e^x) = (mx+1)e^x \Big|_0^1 - m \int_0^1 e^x d(mx+1) = (mx+1)e^x \Big|_0^1 - m \int_0^1 e^x dx \\ &= [(mx+1)e^x]_0^1 - [me^x]_0^1 = (m+1)e - 1 - me + m = e + m - 1\end{aligned}$$

Câu 31. Cho $I = \int_0^m (2x-1)e^{2x} dx$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $I < m$ là khoảng $(a; b)$.
Tính $P = a - 3b$.

A. $P = -3$.

B. $P = -2$.

C. $P = -4$.

D. $P = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$I = \int_0^m (2x-1)e^{2x} dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = \frac{e^{2x}}{2} \end{cases}.$$

$$I = \int_0^m (2x-1)e^{2x} dx = \frac{(2x-1)e^{2x}}{2} \Big|_0^m - \int_0^m e^{2x} dx = \frac{(2m-1)e^{2m}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2x} \Big|_0^m = me^m - e^{2m} + 1$$

$$I < m \Leftrightarrow me^{2m} - e^{2m} + 1 < m \Leftrightarrow (m-1)(e^{2m}-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

$$\text{Suy ra } a = 0, b = 1 \Rightarrow a - 3b = -3.$$

Câu 32. Biết rằng tích phân $\int_0^4 \frac{(x+1)e^x}{\sqrt{2x+1}} dx = ae^4 + b$. Tính $T = a^2 - b^2$

A. $T = 1$.

B. $T = 2$.

C. $T = \frac{3}{2}$.

D. $T = \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có } I = \int_0^4 \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}} e^x dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \frac{2x+2}{\sqrt{2x+1}} e^x dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^4 \sqrt{2x+1} e^x dx + \int_0^4 \frac{e^x}{\sqrt{2x+1}} dx \right).$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_0^4 \frac{e^x}{\sqrt{2x+1}} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = e^x \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = e^x dx \\ v = \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x+1} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } I_1 = e^x \cdot \sqrt{2x+1} \Big|_0^4 - \int_0^4 e^x \cdot \sqrt{2x+1} dx.$$

$$\text{Suy ra } I = \frac{3e^4 - 1}{2}. \text{ Khi đó } a = \frac{3}{2}, b = \frac{-1}{2} \Rightarrow T = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2.$$

Câu 33. Cho tích phân $I = \int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{x+1}{x}} dx = \frac{a}{b} \cdot e^{\frac{c}{d}}$, trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương

và các phân số $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $bc - ad$.

A. 24.

B. $\frac{1}{6}$.

C. 12.

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A

- Ta có: $I = \int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) \cdot e^{x+\frac{1}{x}} \cdot dx = \int_{\frac{1}{12}}^{12} e^{x+\frac{1}{x}} \cdot dx + \int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} \cdot dx = J + K$

- Tính $J = \int_{\frac{1}{12}}^{12} e^{x+\frac{1}{x}} \cdot dx$.

Đặt $\begin{cases} u = e^{x+\frac{1}{x}} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}} \cdot dx \\ v = x \end{cases}$

$$\Rightarrow J = \left(x \cdot e^{x+\frac{1}{x}} \right) \Big|_{\frac{1}{12}}^{12} - \int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(x - \frac{1}{x} \right) \cdot e^{x+\frac{1}{x}} \cdot dx = 12 \cdot e^{\frac{145}{12}} - \frac{1}{12} \cdot e^{\frac{145}{12}} - K = \frac{143}{12} \cdot e^{\frac{145}{12}} - K$$

$$\Rightarrow I = J + K = \frac{143}{12} \cdot e^{\frac{145}{12}}.$$

- Theo giả thiết: $I = \frac{a}{b} \cdot e^{\frac{c}{d}}$ với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số

tối giản nên $\frac{a}{b} = \frac{143}{12}$ và $\frac{c}{d} = \frac{145}{12} \Rightarrow a = 143, b = 12, c = 145, d = 12$.

Vậy $bc - ad = 24$.

DẠNG 3.

Câu 34. Cho $I = \int_1^e x \ln x dx = \frac{a \cdot e^2 + b}{c}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $T = a + b + c$.

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 6.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases}$ nên $\begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

$$I = \int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2 + 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 4 \end{cases}$$

Vậy $T = a + b + c = 6$.

Câu 35. Kết quả của phép tính tích phân $\int_0^1 \ln(2x+1) dx$ được biểu diễn dạng $a \cdot \ln 3 + b$, khi đó giá trị của tích ab^3 bằng

A. 3.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 1.

D. $-\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn

D.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(2x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{2x+1} dx \\ v = x \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int_0^1 \ln(2x+1) dx = x \ln(2x+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{2x+1} dx = \ln 3 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2x+1}\right) dx \\ &= \ln 3 - \left(x - \frac{1}{2} \ln|2x+1|\right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \ln 3 - 1. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } a = \frac{3}{2}; b = -1. \text{ Vậy } ab^3 = -\frac{3}{2}.$$

Câu 36. Cho $\int_0^1 \ln(x+1) dx = a + \ln b$, $(a, b \in \mathbb{Z})$. Tính $(a+3)^b$.

- A. 25. B. $\frac{1}{7}$. **C. 16.** D. $\frac{1}{9}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = x+1 \end{cases}.$$

$$I = \int_0^1 \ln(x+1) dx = (x+1) \ln(x+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} dx = 2 \ln 2 - x \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1 = -1 + \ln 4.$$

$$\Rightarrow a = -1, b = 4 \Rightarrow (a+3)^b = 16.$$

Câu 37. Biết tích phân $\int_1^2 (4x-1) \ln x dx = a \ln 2 + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tổng $2a+b$ bằng

- A. 5. B. 8. **C. $A(1; -2; 1)$** D. 13.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = (4x-1) dx \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \int_1^2 (4x-1) \ln x dx = x(2x-1) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 (2x-1) dx = 6 \ln 2 - (x^2 - x) \Big|_1^2 = 6 \ln 2 - 2.$$

$$\text{Vậy } 2a+b=10.$$

Câu 38. Biết $\int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2} dx = \frac{a+\ln b-\ln c}{4}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Giá trị của biểu thức

$$P = a+b+c \text{ bằng?}$$

- A. 46.** B. 35. C. 11. D. 48.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int_1^3 \frac{3+\ln x}{(x+1)^2} dx = - \int_1^3 (3+\ln x) d\left(\frac{1}{x+1}\right) = - \frac{3+\ln x}{x+1} \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x+1} d(3+\ln x)$$

$$= - \frac{3+\ln 3}{4} + \frac{3}{2} + \int_1^3 \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{3-\ln 3}{4} + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{3-\ln 3}{4} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Big|_1^3$$

$$= \frac{3 - \ln 3}{4} + \ln \frac{3}{4} - \ln \frac{1}{2} = \frac{3 - \ln 3}{4} + \ln 3 - \ln 4 + \ln 2 = \frac{3 - \ln 3}{4} + \ln 3 - \ln 2$$

$$= \frac{3 + 3\ln 3 - 4\ln 2}{4} = \frac{3 + \ln 27 - \ln 16}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 27 \\ c = 16 \end{cases} \Rightarrow P = 46.$$

Câu 39. Giả sử $\int_1^2 (2x-1) \ln x dx = a \ln 2 + b, (a; b \in \mathbb{Q})$. Khi đó $a + b$?

- A. $\frac{5}{2}$. B. 2. C. 1. **D. $\frac{3}{2}$.**

Hướng dẫn giải
Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x-1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x^2 - x \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \int_1^2 (2x-1) \ln x dx = \left(x^2 - x \right) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 (x-1) dx$$

$$= 2 \ln 2 - \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó } a = 2; b = -\frac{1}{2}. \text{ Vậy } a + b = \frac{3}{2}.$$

Câu 40. Tính tích phân $I = \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx$.

- A. $I = \frac{2 \ln 2 + 6}{9}$. **B. $I = \frac{6 \ln 2 + 2}{9}$.** C. $I = \frac{2 \ln 2 - 6}{9}$. D. $I = \frac{6 \ln 2 - 2}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Cách 1: } I = \int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = (x^2 - 1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} - x \end{cases}$$

$$\text{Do đó } I = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - 1 \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln x \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{9} - x \right) \Big|_1^2 = \frac{6 \ln 2 + 2}{9}.$$

Cách 2:

$$\int_1^2 (x^2 - 1) \ln x dx = \int_1^2 \ln x d \left(\frac{x^3}{3} - x \right) = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - x \right) d(\ln x)$$

$$= \frac{2}{3} \ln 2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3} - 1 \right) dx = \frac{2}{3} - \left(\frac{x^3}{9} - x \right) \Big|_1^2 = \frac{2 + 6 \ln 2}{9}.$$

Câu 41. Tích phân $I = \int_1^a x \ln x dx$ có giá trị là:

A. $I = \frac{a^2 \ln a}{2} + \frac{1-a^2}{4}$. **B.** $I = \frac{a^2 \ln a}{2} - \frac{1-a^2}{4}$.

C. $I = \frac{a^2 \ln |a|}{2} + \frac{1-a^2}{4}$. **D.** $I = \frac{a^2 \ln |a|}{2} - \frac{1-a^2}{4}$.

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_1^a x \ln x dx$ có giá trị là:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x \right) \Big|_1^a - \int_1^a \frac{x}{2} dx = \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x \right) \Big|_1^a - \left(\frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^a = \frac{a^2 \ln |a|}{2} + \frac{1-a^2}{4}.$$

Chọn C

Câu 42. Kết quả tích phân $\int_0^2 (2x + \ln(x+1)) dx = 3 \ln 3 + b$. Giá trị $3+b$ là:

A. 3

B. 4

C. 5

D. 7

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$I = \int_0^2 (2x + \ln(x+1)) dx = A + B$$

$$\text{Tính } A = \int_0^2 2x dx = x^2 \Big|_0^2 = 4$$

$$\text{Tính } B = \int_0^2 (\ln(x+1)) dx$$

$$\text{Xem: } \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases} \text{ ta chọn được } \begin{cases} du = \frac{dx}{x+1} \\ v = x+1 \end{cases}$$

Dùng công thức tích phân từng phần

$$B = \int_0^2 (\ln(x+1)) dx = (x+1) \cdot \ln(x+1) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x+1}{x+1} dx = 3 \ln 3 - x \Big|_0^2 = 3 \ln 3 - 2$$

$$\text{Vậy: } I = \int_0^2 (2x + \ln(x+1)) dx = 3 \ln 3 + 2$$

Câu 43. Tính tích phân $I = \int_1^2 (4x+3) \cdot \ln x dx = 7 \ln a + b$. Tính $\sin \frac{(a+b)\pi}{4}$:

A. 1

B. -1

C. 0

D. $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = (4x+3) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = 2x^2 + 3x \end{cases}. \text{ Khi đó}$$

$$I = (2x^2 + 3x) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{2x^2 + 3x}{x} dx = (2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2) \ln 2 - (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1) \ln 1 - \int_1^2 (2x+3) dx$$

$$= 14 \ln 2 - 0 - (x^2 + 3x) \Big|_1^2 = 14 \ln 2 - 0 - [(2^2 + 3 \cdot 2) - (1^2 + 3 \cdot 1)] = 14 \ln 2 - (10 - 4) = 14 \ln 2 - 6$$

Câu 44. Cho tích phân $I = \int_0^1 [3x^2 - 2x + \ln(2x+1)] dx$. Xác định a biết $I = b \ln a - c$ với a,b,c là các số hữu tỉ

- A.** $a=3$ **B.** $a=-3$ **C.** $a = \frac{2}{3}$ **D.** $a = -\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$I = \int_0^1 [3x^2 - 2x + \ln(2x+1)] dx = \int_0^1 [3x^2 - 2x] dx + \int_0^1 [\ln(2x+1)] dx = I_1 + I_2$$

Giải I_2 bằng phương pháp từng phần $\begin{cases} u = \ln(2x+1) \\ dv = dx \end{cases}$

$$I = \frac{3}{2} \ln 3 - 1 \Rightarrow a = 3$$

Câu 45. Cho $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx = a(\ln 3 + 1) + \ln b$ với a,b ∈ R. Tính giá trị biểu thức $T = 4a + 2b$

- A.** 4 **B.** 7 **C.** 5 **D.** 6

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ở bài toán này máy tính dường như không giúp được nhiều trong việc giải quyết bài toán, đây là bài toán sử dụng phương pháp tích phân thành phần ở mức độ vận dụng.

Đặt

$$\begin{cases} u = 3 + \ln x \\ v = \frac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{-1}{x+1} + 1 = \frac{x}{x+1} \end{cases}$$

Áp dụng công thức tính tích phân thành phần $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$ thì ta được

$$I = \frac{(3 + \ln x)x}{x+1} \Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{dx}{x+1} = \frac{(3 + \ln x)x}{x+1} \Big|_1^3 - \ln(x+1) \Big|_1^3$$

$$I = \left(\frac{3(3 + \ln 3)}{4} - \frac{3}{2} \right) - (\ln 4 - \ln 2)$$

$$= \frac{3}{4}(\ln 3 + 1) - \ln 2 = \frac{3}{4}(\ln 3 + 1) + \ln \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Vậy } a = \frac{3}{4}; b = \frac{1}{2} \Rightarrow T = 4a + 2b = 3 + 1 = 4$$

Nhận xét: Điểm mấu chốt để xử lí nhanh bài toán nằm ở việc đặt $v = \frac{-1}{x+1} + 1 = \frac{x}{x+1}$. Một số

thí sinh chọn đáp án B vì khi làm đến $I = \frac{3}{4}(\ln 3 + 1) - \ln 2$ không để ý dấu nên suy ra luôn

$a = \frac{3}{4}; b = 2$ dẫn đến kết quả sai.

Câu 46. Cho tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx = a \ln \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}} \right) - b\pi$. Tính $A = \log_{\sqrt{3}} a + \log_{\sqrt{6}} b$

Chọn đáp án đúng:

A. -3

B. 2

C. -1

D. 1

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } u = \ln(\sin x) \Rightarrow du = \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \text{ chọn } v = \tan x$$

$$\text{Vậy } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx = \left[\tan x \cdot \ln(\sin x) \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx$$

Câu 47. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = a\sqrt{e} + b$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a.b$.

A. $P = 4$.

B. $P = -8$.

C. $P = -4$.

D. $P = 8$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ dv = 2\sqrt{x} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^e - 4\sqrt{x} \Big|_1^e = -2\sqrt{e} + 4 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P = ab = -8.$$

Câu 48. Biết $\int_0^2 2x \ln(x+1) dx = a \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $6a + 7b$.

A. 33.

B. 25.

C. 42.

D. 39.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Xét } I = \int_0^2 2x \ln(x+1) dx = 6. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = 2x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = x^2 - 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } I = (x^2 - 1) \ln(x+1) \Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2 - 1}{x+1} dx = 3 \ln 3 - \int_0^2 (x-1) dx = 3 \ln 3 - \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^2 = 3 \ln 3.$$

$$\text{Vậy } a = 3, b = 3 \Rightarrow 6a + 7b = 39.$$

Câu 49. Cho $\int_0^1 x \left[\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} \right] dx = \frac{a^2 \ln 2 - bc \ln 3 + c}{4}$ với $a, b, c \in \mathbb{N}$. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 13$.

B. $T = 15$.

C. $T = 17$.

D. $T = 11$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+2) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+2} \\ v = \frac{x^2 - 4}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^1 x \left[\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} \right] dx = \frac{x^2 - 4}{2} \ln(x+2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x-2}{2} dx + \int_0^1 \frac{x}{x+2} dx$$

$$= \frac{-3}{2} \ln 3 + 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^1 + \left(x - 2 \ln(x+2) \right) \Big|_0^1 = \frac{-3}{2} \ln 3 + 2 \ln 2 + \frac{3}{4} + 1 - 2(\ln 3 - \ln 2)$$

$$= \frac{-14 \ln 3 + 16 \ln 2 + 7}{4}. \text{ Suy ra: } \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \\ c = 7 \end{cases}$$

Vậy $T = a + b + c = 13$.

Câu 50. Biết $\int_2^3 \ln(x^3 - 3x + 2) dx = a \ln 5 + b \ln 2 + c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $S = a.b + c$

A. $S = 60$. **B.** $S = -23$. **C.** $S = 12$. **D.** $S = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int_2^3 \ln(x^3 - 3x + 2) dx &= x \cdot \ln(x^3 - 3x + 2) \Big|_2^3 - \int_2^3 x dx \ln(x^3 - 3x + 2) \\ &= 3 \ln 20 - 4 \ln 2 - \int_2^3 \frac{x(3x^2 - 3)}{(x-1)^2(x+2)} dx \\ &= 3 \ln 20 - 4 \ln 2 - \int_2^3 \frac{3x(x+1)}{(x-1)(x+2)} dx = 3 \ln 5 + 2 \ln 2 - \int_2^3 \frac{3(x-1)(x+2) + 6}{(x-1)(x+2)} dx \\ &= 3 \ln 5 + 2 \ln 2 - (3x) \Big|_2^3 - 2 \int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = 3 \ln 5 + 2 \ln 2 - 3 - 2 \ln|x-1| \Big|_2^3 + 2 \ln|x+2| \Big|_2^3 \\ &= 5 \ln 5 - 4 \ln 2 - 3. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 5; b = -4; c = -3$. Do đó $S = ab + c = -23$.

Câu 51. Cho biết tích phân $I = \int_0^1 (x+2) \ln(x+1) dx = a \ln 2 + \frac{-7}{b}$ trong đó a, b là các số nguyên dương. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $a = b$. **B.** $a < b$. **C.** $a > b$. **D.** $a = b + 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = (x+2) dx \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = \frac{x^2}{2} + 2x \end{cases} \\ I &= \left[\left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln(x+1) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 + 4x}{x+1} dx = \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x+3 - \frac{3}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{5}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 3 \ln(x+1) \right]_0^1 = 4 \ln 2 + \frac{-7}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra $a = 4, b = 4$.

Vậy $a = b$.

Câu 52. Cho $I = \int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x+1)^2} dx = \frac{a}{b} \ln 2 - \frac{1}{c}$ với a, b, m là các số nguyên dương và là phân số tối giản.

Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{a+b}{c}$.

A. $S = \frac{2}{3}$.

B. $S = \frac{5}{6}$.

C. $S = \frac{1}{2}$.

D. $S = \frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Tính $I = \int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x+1)^2} dx$.

Đặt $\begin{cases} x + \ln x = u \\ \frac{1}{(x+1)^2} dx = dv \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+x}{x} dx = du \\ -\frac{1}{x+1} = v \end{cases}$.

Khi đó $I = \int_1^2 \frac{x + \ln x}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} (x + \ln x) \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1+x}{x} \cdot \frac{1}{x+1} dx = -\frac{1}{3} (2 + \ln 2) + \frac{1}{2} + \int_1^2 \frac{1}{x} dx$
 $= -\frac{1}{3} (2 + \ln 2) + \frac{1}{2} + \ln |x| \Big|_1^2 = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{6}$

Vậy $a = 2; b = 3; c = 6 \Rightarrow S = \frac{a+b}{c} = \frac{5}{6}$.

Câu 53. Cho $a > b > -1$. Tích phân $I = \int_a^b \ln(x+1) dx$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $I = (x+1) \ln(x+1) \Big|_a^b - a + b$.

B. $I = (x+1) \ln(x+1) \Big|_a^b - b + a$.

C. $I = \frac{1}{(x+1)} \Big|_a^b$.

D. $I = x \ln(x+1) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{x}{x+1} dx$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = x+1 \end{cases}$

Do đó $I = \int_a^b \ln(x+1) dx = (x+1) \ln(x+1) \Big|_a^b - \int_a^b dx = (x+1) \ln(x+1) \Big|_a^b - x \Big|_a^b$
 $= (x+1) \ln(x+1) \Big|_a^b - b + a$

Câu 54. Biết $\int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx = \frac{ae^2 + be + c}{2}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a^2 + b^2 + c^2$ bằng

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 9.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét tích phân: $\int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} dx$.

Đặt $u = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x \ln^2 x} dx$. $dv = dx$ chọn $v = x$.

Khi đó $\int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} dx = \frac{x}{\ln x} \Big|_e^{e^2} + \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln^2 x} dx \Leftrightarrow \int_e^{e^2} \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx = \frac{-e^2 + 2e}{2}$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 + c^2 = 5$$

Câu 55. Biết $\int_0^3 x \ln(x^2 + 16) dx = a \ln 5 + b \ln 2 + \frac{c}{2}$ trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.

A. $T = 2$.

B. $T = -16$.

C. $T = -2$.

D. $T = 16$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x^2 + 16) \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{x^2 + 16} dx \\ v = \frac{x^2 + 16}{2} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_0^3 x \ln(x^2 + 16) dx &= \left. \frac{x^2 + 16}{2} \ln(x^2 + 16) \right|_0^3 - \int_0^3 x dx = \frac{x^2 + 16}{2} \ln(x^2 + 16) \Big|_0^3 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^3 \\ &= \frac{25}{2} \ln 25 - 8 \ln 16 - \frac{9}{2} = 25 \ln 5 - 32 \ln 2 - \frac{9}{2}. \text{ Do đó } a = 25, b = -32, c = -9 \Rightarrow T = -16. \end{aligned}$$

Câu 56. Tính tích phân $I = \int_1^2 \left(2019 \log_2 x + \frac{1}{\ln 2} \right) x^{2018} dx$.

A. $I = 2^{2017}$.

B. $I = 2^{2019}$.

C. $I = 2^{2018}$.

D. $I = 2^{2020}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$I = \int_1^2 \left(2019 \log_2 x + \frac{1}{\ln 2} \right) x^{2018} dx = 2019 \int_1^2 x^{2018} \log_2 x dx + \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 x^{2018} dx = 2019 I_1 + \frac{1}{\ln 2} I_2.$$

$$\text{Trong đó } I_2 = \int_1^2 x^{2018} dx = \left. \frac{x^{2019}}{2019} \right|_1^2 = \frac{2^{2019} - 1}{2019}.$$

$$\text{và } I_1 = \int_1^2 x^{2018} \log_2 x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \log_2 x \\ dv = x^{2018} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x \ln 2} dx \\ v = \frac{x^{2019}}{2019} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } I_1 = \left(\frac{x^{2019}}{2019} \cdot \log_2 x \right) \Big|_1^2 - \frac{1}{2019 \ln 2} I_2 = \frac{2^{2019}}{2019} - \frac{1}{2019 \ln 2} \cdot \frac{2^{2019} - 1}{2019} = \frac{2^{2019}}{2019} - \frac{2^{2019} - 1}{2019^2 \ln 2}.$$

$$\text{Vậy } I = 2^{2019}.$$

Câu 57. Biết $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx = a(1 + \ln 3) - b \ln 2$, ($a, b \in \mathbb{Q}$). Khi đó $a^2 + b^2$ bằng

A. $a^2 + b^2 = \frac{7}{16}$.

B. $a^2 + b^2 = \frac{16}{9}$.

C. $a^2 + b^2 = \frac{25}{16}$.

D. $a^2 + b^2 = \frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = 3 + \ln x \\ dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } I &= -\frac{3 + \ln x}{x+1} \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)} dx = -\frac{3 + \ln 3}{4} + \frac{3}{2} + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{3 - \ln 3}{4} + (\ln|x| - \ln|x+1|) \Big|_1^3 \\ &= \frac{3 - \ln 3}{4} + \ln 3 - \ln 4 + \ln 2 = \frac{3}{4}(1 + \ln 3) - \ln 2 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{25}{16}. \end{aligned}$$

- Câu 58.** Biết $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = a \ln 2 + \frac{b}{c}$ (với a là số hữu tỉ, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $S = 2a + 3b + c$.
A. $S = 4$. **B.** $S = -6$. **C.** $S = 6$. **D.** $S = 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}.$$

Khi đó, ta có:

$$= \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2}.$$

Từ giả thiết suy ra $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 2$.

Vậy giá trị của $S = 4$.

- Câu 59.** Biết rằng $\int_1^2 \ln(x+1) dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + b + c$.
A. $S = 0$. **B.** $S = 1$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó, ta có: } \int_1^2 \ln(x+1) dx &= x \ln(x+1) \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx \\ &= 2 \ln 3 - \ln 2 - \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = 2 \ln 3 - \ln 2 - (x - \ln|x+1|) \Big|_1^2 \\ &= 2 \ln 3 - \ln 2 - (2 - \ln 3 - 1 + \ln 2) = 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

Suy ra $S = a + b + c = 3 - 2 - 1 = 0$.

- Câu 60.** Tính tích phân $I = \int_4^5 (x+1) \ln(x-3) dx$?

A. $10 \ln 2$.

B. $10 \ln 2 + \frac{19}{4}$.

C. $\frac{19}{4} - 10 \ln 2$.

D. $10 \ln 2 - \frac{19}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x-3) \\ dv = x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-3} dx \\ v = \frac{1}{2}x^2 + x \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{2}x^2 + x \right) \ln(x-3) \Big|_4^5 - \int_4^5 \frac{\frac{1}{2}x^2 + x}{x-3} dx = \frac{35}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_4^5 \frac{x^2 - 9 + 9}{x-3} dx - \int_4^5 \frac{x-3+3}{x-3} dx \\ &= \frac{35}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{9}{2} + 3 + 9 \ln 2 \right) - (1 + 3 \ln 2) = 10 \ln 2 - \frac{19}{4}. \end{aligned}$$

Câu 61. Biết rằng $\int_2^3 x \ln x dx = m \ln 3 + n \ln 2 + p$, trong đó $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Khi đó số m là

A. $\frac{9}{2}$.

B. 18.

C. 9.

D. $\frac{27}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_2^3 x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{9}{2} \ln 3 - 2 \ln 2 - \frac{x^3}{6} \Big|_2^3 = \frac{9}{2} \ln 3 - 2 \ln 2 - \frac{19}{6} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{9}{2} \\ n = -2 \\ p = -\frac{19}{6} \end{cases}$$

Vậy $m = \frac{9}{2}$.

Câu 62. Biết $\int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ là

A. $T = 10$.

B. $T = 9$.

C. $T = 8$.

D. $T = 11$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x^2 + 9) \\ dv = x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{x^2 + 9} dx \\ v = \frac{x^2 + 9}{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = \frac{x^2 + 9}{2} \ln(x^2 + 9) \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{x^2 + 9}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 9} dx = 25 \ln 5 - 9 \ln 3 - 8.$$

Do đó $a = 25, b = -9, c = -8$ nên $T = 8$.

Câu 63. Tích phân $I = \int_0^1 \ln(\sqrt{1+x^2} - x) dx$ có giá trị là:

A. $I = \sqrt{2} - 1 + \ln(\sqrt{2} - 1).$

B. $I = \sqrt{2} - 1 - \ln(\sqrt{2} - 1).$

C. $I = -\sqrt{2} + 1 + \ln(\sqrt{2} - 1).$

D. $I = -\sqrt{2} + 1 - \ln(\sqrt{2} - 1).$

Hướng dẫn giải

Tích phân $I = \int_0^1 \ln(\sqrt{1+x^2} - x) dx$ có giá trị là:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(\sqrt{1+x^2} - x) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ v = x \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = \left(x \cdot \ln(\sqrt{x^2+1} - x) \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx.$$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=2 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left(\sqrt{t} \right) \Big|_1^2 = \sqrt{2} - 1.$$

$$\Rightarrow I = I_1 + \left(x \cdot \ln(\sqrt{x^2+1} - x) \right) \Big|_0^1 = \sqrt{2} - 1 + \ln(\sqrt{2} - 1).$$

Chọn A

Câu 64. Cho tích phân $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x dx = ae^2 + b$, a và b là các số hữu tỉ. Giá trị của $2a - 3b$ là:

A. $\frac{13}{2}.$

B. $\frac{13}{4}.$

C. $-\frac{13}{4}.$

D. $-\frac{13}{2}.$

Hướng dẫn giải

Cho tích phân $I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x dx = ae^2 + b$. Giá trị của $2a - 3b$ là:

Ta có:

$$I = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx + \int_0^1 dt = \frac{e^2}{4} + \frac{5}{4}, \text{ với } t = \ln x.$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = \frac{5}{4} \Rightarrow 2a - 3b = -\frac{13}{4}.$$

Chọn C

Câu 65. Tính tích phân $\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x} dx$, ta được kết quả

A. $-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$

B. $\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \ln 2.$

C. $-\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \ln 2.$

D. $-\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \ln 2.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Trắc nghiệm bấm máy tính tích phân trừ cho từng đáp án ta được đáp án

C.

Tự luận:
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\cos x \cdot (1 + \tan x))}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} + \frac{\ln(1 + \tan x)}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx + \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1 + \tan x)}{\cos^2 x} dx = I + J.$$

Đặt
$$\begin{cases} u = \ln \cos x \Rightarrow du = -\frac{\sin x}{\cos x} dx \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx, v = \tan x \end{cases}.$$

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx = \tan x \cdot \ln(\cos x) \Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx = \tan x \cdot \ln \cos x \Big|_0^{\pi/4} + (-x + \tan x) \Big|_0^{\pi/4} = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} + 1$$

$$J = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1 + \tan x)}{\cos^2 x} dx. \text{ Đặt } t = 1 + \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1, x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 2$

$$J = \int_1^2 \ln t dt. \text{ Đặt } \begin{cases} u = \ln t \Rightarrow du = \frac{1}{t} dt \\ dv = dt, v = t \end{cases} \Rightarrow J = \int_1^2 \ln t dt = (t \ln t - t) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1$$

Vậy
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \ln 2.$$

Câu 66.

Giả sử $\int_1^2 \frac{4 \ln x + 1}{x} dx = a \ln^2 2 + b \ln 2$, với a, b là các số hữu tỷ. Khi đó tổng $4a + b$ bằng.

- A. 3. B. 5 C. 7. D. 9.

Hướng dẫn giải

$$\int_1^2 \frac{4 \ln x + 1}{x} dx = \int_1^2 \left(\frac{4 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = 4 \int_1^2 \ln x d(\ln x) + \int_1^2 \frac{1}{x} dx = 2 \ln^2 x \Big|_1^2 + \ln |x| \Big|_1^2 = 2 \ln^2 2 + \ln 2.$$

Chọn D

Câu 67.

Tính tích phân $I = \int_1^{2^{1000}} \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx.$

- A. $I = -\frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} + 1000 \ln \frac{2}{1+2^{1000}}.$ B. $I = -\frac{1000 \ln 2}{1+2^{1000}} + \ln \frac{2^{1001}}{1+2^{1000}}.$
C. $I = \frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} - 1000 \ln \frac{2}{1+2^{1000}}.$ D. $I = \frac{1000 \ln 2}{1+2^{1000}} - \ln \frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}.$

Hướng dẫn giải

Ta có
$$I = \int_1^{2^{1000}} \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx = - \int_1^{2^{1000}} \ln x d \frac{1}{x+1} = - \frac{\ln x}{x+1} \Big|_1^{2^{1000}} + \int_1^{2^{1000}} \frac{1}{x+1} d(\ln x)$$

$$= -\frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} + \int_1^{2^{1000}} \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1000 \ln 2}{1+2^{1000}} + \int_1^{2^{1000}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= -\frac{1000 \ln 2}{1+2^{1000}} + (\ln |x| - \ln |x+1|) \Big|_1^{2^{1000}} = -\frac{1000 \ln 2}{1+2^{1000}} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Big|_1^{2^{1000}} = -\frac{1000 \ln 2}{1+2^{1000}} + \ln \frac{2^{1001}}{1+2^{1000}}.$$

Chọn B