Nguyễn Minh Tuấn

Lớp 11A – Trường THPT Bình Minh

Tìm tòi

Sáng tạo một số cách giải phương trình vô tỷ

BÌNH MINH - 2017

LỜI NÓI ĐẦU.

Phương trình vô tỷ là một trong những vấn đề quan trọng của đại số sơ cấp, hiện nay đã có rất nhiều tài liệu nói về vấn đề này, nhưng tuy nhiên trong bài viết này tôi sẽ giới thiệu tới bạn đọc một vài kỹ thuật rất hay bao gồm kỹ thuật giải những bài toán không cần CASIO và những bài toán kết hợp với một vài kỹ thuật CASIO nhỏ để giải quyết những bài toán hay và khó.
Trong bài viết này sẽ gồm 5 chủ đề:

- Một số kỹ thuật nhỏ trong phương trình vô tỷ
- Kỹ thuật nhân liên hợp, phân tích nhân tử một số phương trình vô tỷ cơ bản và tầm trung
- Kỹ thuật chứng minh vô nghiệm.
- Kỹ thuật sử dụng tính đơn điệu của hàm số.
- Kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức.

Bài viết là những kinh nghiệm, thủ thuật mà tôi tích lũy được trong quá trình học tập. Một số kỹ thuật trong bài viết được tôi sưu tầm và phát triển lên, nhưng tuy nhiên không thể nhớ được hết tác giả của những kỹ thuật đó, mong tác giả bỏ qua cho thiếu sót này. Chủ yếu trong bài viết tôi tham khảo từ những anh, chị, thầy cô, diễn đàn sau:

1. Anh Bùi Thế Việt.
2. Anh Lâm Hữu Minh
3. Thầy Lã Duy Tiến
4. Thầy Đoàn Trí Dũng
5. Diễn đàn k2pi.net.
6. Diễn đàn VMF: diendantoanhoc.net

Ngoài ra bạn đọc có thể tham khảo một số bài viết, những tài liệu trên mạng để hiểu biết hơn. Hầu hết tất cả các bài toán trong bài viết được giải theo cách giải của tôi nên không thể tránh khỏi những thiếu sót, nên mong bạn đọc góp ý để bài viết được hoàn thiện hơn.
Mọi ý kiến đóng xin gửi về tác giả.

Nguyễn Minh Tuấn - Lớp 12A THPT Bình Minh
Email: tuangenk@gmail.com
Facebook: https://www.facebook.com/khanhhuyenhth
Fanpage: https://www.facebook.com/DinhXuanHung.KinhNghiemHocToan/
Địa chỉ Blog: https://kinhnghiemhoctoan.wordpress.com/

MỤC LỤC

A. MỘT VÀI KỸ THUẬT NHỎ.

I. KIỂM TRA NGHIỆM BỘI.

Xét phương trình $f(x)=0$ ta có thể phân tích phương trình thành $(x-x_0)^k.g(x)=0$.

- Nếu $k=1$ khi đó phương trình có nghiệm đơn.
- Nếu $k>1$ khi đó phương trình có nghiệm bội k.

Sau đây là các cách để kiểm tra 1 nghiệm xem có phải là nghiệm bội hay không của phương trình.

a) Kiểm tra bằng đạo hàm.

Xét phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x=x_0$ và nghiệm bội n khi và chỉ khi: $\begin{cases} f(x_0)=0 \\ f'(x_0)=0 \\ .... \\ f^{(n-1)}(x_0)=0 \\ f^{(n)}(x_0)\neq 0 \end{cases}$. Khi đó phương trình $f(x)=0$ có nghiệm bội n.

Ví dụ : Kiểm tra nghiệm bội $x=1$ của phương trình: $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$

Ta có:

- $f'(x)=4x^3-12x^2+12x-4\big|_{x=1}=0$
- $f''(x)=12x^2-24x+12\big|_{x=1}=0$
- $f'''(x)=24x-24\big|_{x=1}=0$
- $f''''(x)=24\neq 0$

Vậy phương trình có nghiệm bội 4 $x=1$.

Nhận xét: Cách kiểm tra nghiệm bội bằng đạo hàm này khá nhanh với các phương trình đa thức. Nhưng tuy nhiên nếu gặp phải phương trình vô tỷ có 2 căn trở lên mà nghiệm bội cao ví dụ như bội 5 thì có mà tính đạo hàm bằng tay đã chết luôn rồi chứ đừng có nói là sẽ đủ quyết tâm làm tiếp . Do đó ta sẽ sử dụng cách 2.

b) Kiểm tra bằng giới hạn hàm số.

Xét phương trình $f(x)=0$ ta có thể phân tích phương trình thành $(x-x_0)^k.g(x)=0$ có nghiệm bội k $x=x_0$.

- Khi đó nếu $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^{k-1}}=0 \\ \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^{k}}\neq 0 \end{cases}$ thì phương trình có nghiệm bội k .
- Về mặt đạo hàm thì ta có $\begin{cases} f^{i}(x_0)=0\forall i=\overline{0,k-1} \\ f^{i}(x_0)\neq 0\forall i\geq k \end{cases}$

Ví dụ: Kiểm tra nghiệm bội $x=0$ của phương trình: $(x+2)\sqrt{x+1}+(x-2)\sqrt{1-x}+x^5-4x=0$

Ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)\sqrt{x+1}+(x-2)\sqrt{1-x}+x^5-4x}{x}=0$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)\sqrt{x+1}+(x-2)\sqrt{1-x}+x^5-4x}{x^2}=0$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)\sqrt{x+1}+(x-2)\sqrt{1-x}+x^5-4x}{x^3}=0$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)\sqrt{x+1}+(x-2)\sqrt{1-x}+x^5-4x}{x^4}=0$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)\sqrt{x+1}+(x-2)\sqrt{1-x}+x^5-4x}{x^5}\neq 0$$

Lời giải là:

$$(x+2)\sqrt{x+1}+(x-2)\sqrt{1-x}+x^5-4x=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}-2\right)^2\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}\right)$$
$$\left(\left(x^3-6x^2-8x+16\right)\sqrt{x+1}+\left(-x^3-6x^2+8x+16\right)\sqrt{1-x}+4\left(4-x^2\right)\sqrt{1-x^2}+18-12x^2\right)=0$$

Việc tính cái lim cuối cùng bằng máy tính để được kết quả chính xác thì rất là khó. Nhưng tuy nhiên đây chúng ta chỉ cần kiểm tra nghiệm bội của phương trình nên cho nên chỉ cần cái cuối khác 0 là được, không cần quan tâm đến điều khác. Còn một điều nữa, khi tính lim của bài này các bạn nên $\text{CALC } X=0,01$ nếu không thì kết quả sẽ ra toàn bằng 0 làm các bạn rất khó suy đoán. Việc tính lim này chúng ta nên CALC nhiều giá trị khác nhau để có thể đánh giá đúng được tính chất của nghiệm.

Một số mẹo khác.

- Do trong đề thi đại học thì tối đa có thể cho nghiệm kép là hết cỡ cho nên ta có thể kiểm tra nghiệm kép bằng cách sau:

+ Dùng $\boxed{\text{MODE}}\boxed{7}$ ta có thể thấy hàm không đổi dấu khi đi qua mốc 0 cho nên đó sẽ là nghiệm kép.

+ Dùng tổ hợp phím $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{\int_{\square}^{\square}\square}$ tức là tính đạo hàm. Tính $\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)\Big|_{x=x_0}=0$ thì là nghiệm kép.

- Kiểm tra nghiệm bội 3:

Nếu dùng $\boxed{\text{MODE}}\boxed{7}$ mà thấy hàm đổi dấu khi qua mốc 0, mà khi thức hiện phép tính $\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)\Big|_{x=x_0}=0$ thì chứng tỏ đó là nghiệm bội 3.

Nói chung chỉ có vậy ai cũng có thể phát hiện ra trong quá trình làm bài!

II. TÌM NHÂN TỬ.

Đây là điều rất quan trọng trong việc giải phương trình vô tỷ, làm tốt bước này thì mới có thể chuyển sang các bước sau được. Sau đây tôi sẽ đưa ra cho các bạn các loại nhân tử có thể gặp trong khi giải, và một số không bao giờ có trong đề thi học sinh giỏi hay THPT Quốc Gia mà chỉ mang tính chất tham khảo. Ngoài ra tôi nhắc các bạn là phải nắm chắc cách tìm các loại nhân tử hay gặp trong đề thi để có thể xử lí tốt khi gặp phải.

Cách tìm nhân tử chứa nghiệm hữu tỷ đơn duy nhất.

- Đối với phương trình 1 căn:khi gặp phải loại này thì các bạn thay trực tiếp nghiệm $x = x_0$ vào căn thức.

+ Nếu kết quả là nguyên thì ta được luôn nhân tử chứa nghiệm đơn đó.
+ Nếu kết quả là vô tỷ thì có thể đây là dạng phải dùng ẩn phụ không hoàn toàn để giải quyết nó hoặc dùng công thức chia 2 căn để giải quyết, nói chung là còn rất nhiều cách.

- Đối với phương trình 2 căn thì lúc này nhân tử có dạng tối ưu nhất là $\sqrt{f(x)} + a\sqrt{g(x)} + b$.

  Cũng tương tự như 1 căn, phương trình 2 căn cũng có khi các hệ số là vô tỷ, và những trường hợp đó các bạn đều phải suy đoán một loại nhân tử khác chứa nghiệm này hoặc đây không phải là bài cho có thể phân tích thành nhân tử được, hoặc nếu thay kết quả vào các căn mà thấy nó bằng nhau thì có thể dễ dàng suy ra nhân tử. Để tìm nhân tử ta sẽ cho a tùy ý để tìm ra b sao cho số a là một số vừa nhỏ, tối ưu nhất. Với cách làm như trên thì có thể có nhiều nhân tử được sinh ra, để kiểm tra nhân tử nào tối ưu hơn thì chúng ta nên chọn số a chỉ là 1,-1 thôi hoặc ta sẽ lấy biểu thức đầu chia cho nhân tử tôi đang suy đoán rồi CALC những giá trị bé chạy từ -3 đến 3, nếu kết quả là những số hiển thị dạng căn thì là nhân tử đẹp. Chú ý khi chọn nhân tử như vậy sẽ rất có thể có nghiệm ngoại lai làm chia căn bị lẻ. Nếu gặp trường hợp như thể thì hãy tìm nghiệm ngoại lai trước (có thể bình phương nhân tử để tìm nghiệm) rồi nhân cái nhân tử đó vào phương trình đầu. Nếu thử hết mọi cách mà không được thì chuyển sang liên hợp chứng minh vô nghiệm (đọc phần chứng minh vô nghiệm thì sẽ thấy thích cách này J).

Cách tìm nhân tử chứa nghiệm hữu tỷ kép.

- Phương trình vô tỷ 1 căn.

Nhân tử 1 căn thức chứa nghiệm kép có dạng tổng quát như sau: $\sqrt{f(x)} + ax + b$. Do chứa nghiệm kép $x = x_0$ nên có hệ phương trình sau: $\begin{cases} \sqrt{f(x)} + ax + b = 0 \\ \left(\sqrt{f(x)} + ax + b\right)' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{f(x)}\right)\Big|_{x=x_0} \\ b = -\sqrt{f(x)} + \dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{f(x)}\right)\Big|_{x=x_0} \end{cases}$

Từ đó ta có thể suy ra nhân tử của bài toán.

- Phương trình vô tỷ 2 căn.

Cũng tương tự như trên, nhân tử chứa nghiệm bội kép có dạng $\sqrt{f(x)} + a\sqrt{g(x)} + b$. Do đây là nghiệm hữu tỷ kép nên đạo hàm của nó cũng chứa nghiệm kép $x = x_0$ nhưng trong phương trình $f'(x) = 0$ thì $x = x_0$ chỉ là nghiệm đơn, có hệ sau:

$$\begin{cases}\sqrt{f(x)}+a\sqrt{g(x)}+b=0\\ \left(\sqrt{f(x)}+a\sqrt{g(x)}+b\right)'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{\left.\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{f(x)}\right)\right|_{x=x_0}}{\left.\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{g(x)}\right)\right|_{x=x_0}}\\ b=-\sqrt{f(x)}+\left[\dfrac{\left.\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{f(x)}\right)\right|_{x=x_0}}{\left.\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{g(x)}\right)\right|_{x=x_0}}\right]\sqrt{g(x)}\end{cases}$$ Từ đó ta có thể suy ra nhân tử của bài toán.

Cách tìm nhân tử chứa nghiệm bội cao.

- Phương trình vô tỷ 1 căn.

Xét phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x=x_0$ và nghiệm bội n $(n\geq 2)$. Khi đó để tìm nhân tử chứa nghiệm bội n $x=x_0$ ta làm như sau: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}f(x)=0\\ f'(x)=0\\ \dots\dots\dots\dots\\ f^{(n-1)}(x)=0\end{cases}$. Khi đó nhân tử có dạng $\alpha\sqrt{f(x)}+a.x^{n-1}+b.x^{n-2}+c.x^{n-3}+...+dx+e$. Và sau khi giải hệ ta tìm được các hệ số của nhân tử.

Ngoài ra cần chú ý đối với nhân tử nghiệm bội cao hơn như bậc 4 hoặc bậc 5 thì không nên tìm nhân tử theo như trên mà đầu tiên nên kiểm tra xem nó có thể tách thành nhân tử nghiệm kép bình phương hay không
(đối với nghiệm bội 4) hay có thể tách thành nhân tử nghiệm bội 4 nhân với nhân tử chứa nghiệm đơn hay không (đối với nghiệm bội 5) để giảm bớt độ cồng kềnh của nhân tử.

- Phương trình vô tỷ 2 căn.

Thông thường khi gặp phương trình vô tỷ 2 căn hay nhiều căn chứa nghiệm bội 2 trở lên thì cách làm mà nhiều người sử dụng là tách căn sau đó tìm nhân tử liên hợp từng căn rồi nhân liên hợp sau đó chứng minh phương trình còn lại vô nghiệm. Tuy nhiên chúng ta vẫn có thể tìm nhân tử 2 căn chứa nghiệm bội như sau.

+ Nếu phương trình có nghiệm bội 3 (hoặc có 3 nghiệm hữu tỷ), lúc này nhân tử có dạng như sau: $\sqrt{f(x)}+a\sqrt{g(x)}+bx+c$. Để tìm các hệ số a,b,c ta giải hệ $\begin{cases}\sqrt{f(x)}+a\sqrt{g(x)}+bx+c=0\\ \left(\sqrt{f(x)}+a\sqrt{g(x)}+bx+c\right)'=0\\ \left(\sqrt{f(x)}+a\sqrt{g(x)}+bx+c\right)''=0\end{cases}\Rightarrow$

Nhân tử

+ Nếu phương trình có nghiệm bội 4 thì ta sẽ tìm nhân tử chứa nghiệm bội kép sau đó bình phương lên thành nhân tử chứa nghiệm bội 4.

+ Nếu phương trình có nghiệm bội 5 thì ta kiểm tra xem nó có thể tách thành nhân tử nghiệm bội 4 nhân với nhân tử chứa nghiệm đơn hay không.

+ Ngoài ra nếu nghiệm bội cao hơn như thế thì ta vẫn tư duy theo hướng như trên để tìm nhân tử. Và nên làm theo phương pháp nhân liên hợp.

Cách tìm nhân tử chứa nghiệm vô tỷ.

- Cách tìm nhân tử chứa nghiệm vô tỷ dạng $a\pm b\sqrt{c}$

Đây là dạng nghiệm của phương trình bậc 2 nên ta có cách tìm nhân tử như sau:

+ Đối với 1 căn thì nhân tử có dạng $\alpha\sqrt{f(x)}+ax+b$. Khi đó dùng $\boxed{\text{MODE}}\boxed{7}$ với hàm $\alpha\sqrt{f(A)}+XA$ với A là nghiệm vô tỷ của phương trình đầu. Ta cho các dữ kiện máy hỏi theo như ý định của tôi miễn sao tìm được nhân tử là được (tức là tìm được giá trị X làm $F(X)$ hữu tỷ). Nếu không tìm được nhân tử khi cho $\alpha=1$ thì ta tiếp tục nâng hệ số của α lên cho tới khi nào tìm được nhân tử. Thông thường khi giải phương trình mà tìm được nghiệm vô tỷ thì đầu tiên ta nên nghĩ đến trường hợp này vì trong đề thi đại học hay một số đề thi thử thì hầu hết là cho nghiệm dạng này. Để tìm dạng nghiệm chuẩn xác $a\pm b\sqrt{c}$ thì ta dùng $\boxed{\text{MODE}}\boxed{7}$ với hàm $f(X)=\alpha A^2+XA$ sau đó cũng tìm tương tự như trên ta được phương trình bậc 2 chứa nghiệm vô tỷ vừa tìm được.

+ Đối với phương trình vô tỷ 2 căn ta thì nhân tử có dạng như sau $\alpha\sqrt{f(x)}+a\sqrt{g(x)}+b$ sau đó dùng $\boxed{\text{MODE}}\boxed{7}$ với hàm $F(X)=\alpha\sqrt{f(A)}+X\sqrt{g(A)}$ sau đó cũng tìm tương tự như trên thì ta được nhân tử chứa nghiệm vô tỷ.

Nếu trong bài thi ta gặp trường hợp nghiệm vô tỷ kép thì vẫn làm tương tự như trên, chỉ khác là sau khi tìm nhân tử chứa nghiệm vô tỷ đơn thì phải bình phương nhân tử lên.

Cách tìm nhân tử chứa nghiệm hữu tỷ và 1 nghiệm vô tỷ

Ngoài những dạng nhân tử tôi nói ở trên thì dạng này cũng là 1 trong những dạng hay gặp trong đề thi. Tuy nhiên cách làm tổng quát mà người ra đề muốn nhắm tới là chúng ta sẽ lôi được 1 trong hai nghiệm đó ra (thông thường là nghiệm vô tỷ trước) sau đó chúng ta sẽ phải dùng hàm số khảo sát để chỉ ra nghiệm đó. Mặc dù vậy chúng ta vẫn có thể lôi được 2 nghiệm đó cùng một lúc mà nhiều người cho rằng không thể, cụ thể như sau:

Ta xét phương trình tổng quát $f(x)=0$ có thể phân tích ra thành $(x-x_0)(ax^2+bx+c).g(x)=0$ trong đó $g(x)$ luôn vô nghiệm và ax^2+bx+c là một phương trình bậc 2 chứa 1 nghiệm vô tỷ của phương trình đầu. Khi đó để tìm nhân tử chứa 2 nghiệm này(chỉ áp dụng cho 1 căn) ta sẽ làm theo những bước sau:

- **Bước 1:** Ta sẽ tìm nhân tử bậc 2 chứa nghiệm lẻ $X=A$ bằng $\boxed{\text{MODE}}\boxed{7}$ với hàm $f(X)=\alpha A^2+XA$.
- **Bước 2:** Ta sẽ tìm nhân tử căn chứa nghiệm lẻ $X=A$ bằng $\boxed{\text{MODE}}\boxed{7}$ với hàm $f(X)=\alpha\sqrt[n]{f(A)}+XA$.
- **Bước 3:** Khi đó nhân tử có dạng: $\sqrt[n]{f(A)}+ax+b+k(cx^2+dx+e)=0$

  Ta sẽ thay nghiệm hữu tỷ vào và tìm ra được k, khi đó $k=\dfrac{-\sqrt[n]{f(x_0)}+ax_0+b}{cx_0^{\,2}+dx_0+e}$

  Vậy là ta đã tìm xong nhân tử chứa 1 nghiệm vô tỷ bậc 2 và 1 nghiệm hữu tỷ đơn.

III. KỸ THUẬT PHÂN TÍCH TỔNG BÌNH PHƯƠNG.

Vídụ 1: Giải phương trình: $\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=2x^2+2x+2$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 lần 1 – THPT Chuyên ĐH Sư phạm – Hà Nội

- Lời giải ngắn gọn của bài này như sau:

$$\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=2x^2+2x+2$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3x^3+2x^2+2}-1\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}-1\right)^2-\frac{1}{2}(x+1)^2=0$$

Dễ thấy rằng $VT \le 0$ nên dấu "=" chỉ xảy ra khi $\begin{cases}\sqrt{3x^3+2x^2+2}-1=0\\ \sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}-1=0\\ x+1=0\end{cases} \Leftrightarrow x=-1$

Vậy $x=-1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

- Thế nào, sau khi đọc xong có thấy dài hơn cách làm Cauchy không? Thực ra bản chất của cách này cũng chính là dùng bất đẳng thức, tên tiếng Anh là Sum of square hay ta gọi là SOS.
- Đầu tiên để làm theo cách này ta sẽ làm theo các bước sau:(chú ý rằng đang áp dụng cho đa số những bài các căn đang đứng đơn lẻ,đa thức trong các căn cùng bậc và có nghiệm kép)
  1. Tìm nghiệm của phương trình
  2. Tìm nhân tử chứa nghiệm đơn cho từng căn
  3. Xác định dấu của phương trình đầu bằng CASIO
  4. Khi đó phân tích phương trìnhthành:

  $$\alpha\left(\sqrt{f(x)}-a\right)^2+\beta\left(\sqrt{f_1(x)}-b\right)^2+...+\xi\left(\sqrt{f_n(x)}-z\right)^2=0$$

  Với $\alpha,\beta,...,\xi$ cùng dấu, $\sqrt{f(x)}-a;\sqrt{f_1(x)}-b$ là những nhân tử chứa nghiệm đơn vừa tìm được
- Áp dụng vào bài
  1. Ta có khi $x=-1$ thì $\begin{cases}\sqrt{3x^3+2x^2+2}=1\\ \sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=1\end{cases}$
  2. Nhận thấy rằng $VT \le 0$ nên ta sẽ tách phương trình thành:

$$\sqrt{3x^3+2x^2+2}+\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}=2x^2+2x+2$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3x^3+2x^2+2}-1\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}-1\right)^2-\frac{1}{2}(x+1)^2=0$$

Vídụ 2: Giảiphươngtrình: $2\sqrt{x^2-2x-1}+2\sqrt{x^2-2x+2}+3\sqrt{-x^2+2x+3}=0$

Áp dụng cách làm trên ta được:

$$2\sqrt{x^2-2x-1}+2\sqrt{x^2-2x+2}+3\sqrt{-x^2+2x+3}=0$$
$$\Leftrightarrow -\left(\sqrt{x^2-2x-1}-1\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-2x+2}-2\right)^2-\frac{3}{2}\left(\sqrt{-x^2+2x+3}-1\right)^2=0$$

Đến đó là xong rồi đó.

Vídụ 3: Chứng minh rằng:

$$f\left(x\right)=\frac{x^4+x+1+32\sqrt[4]{x^3-4x^2+7x-12}}{x^4+x^2+16x-11}-1\le 0\forall x\in\left[3;+\infty\right)$$

Trích từ cuốn "Những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học" – Trần Phương

- Câu này thì chắc chắn phải làm theo AM – GM nhưng có thể dùng SOS để giải
- Ta có: $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2\left(2\sqrt[4]{x-3}-\sqrt[4]{x^2-x+4}\right)^2-32\left(\sqrt{x-3}-1\right)^2-2\left(\sqrt{x^2-x+4}-4\right)^2}{x^4+x^2+16x-11}\le 0$
- Do đó dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt[4]{x-3}-\sqrt[4]{x^2-x+4}=0\\ \sqrt{x-3}-1=0\\ \sqrt{x^2-x+4}-4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3$
- Vậy bài toán đã được giải quyết!

➢ Bài tập tương tự.

1. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$

   Đ/s: $-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sqrt{4-x}-1\right)^2-\left(x-3\right)^2=0$
2. $\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x+3}+7\sqrt{2x+2}+12\sqrt{5-x}=2x+41$

   Đ/s: $-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+3}-2\right)^2-\frac{7}{4}\left(\sqrt{2x+2}-2\right)^2-3\left(\sqrt{5-x}-2\right)^2=0$
3. $x^4-4x^3+6x^2-3x+3=\sqrt{2x+2}+\sqrt[4]{2x-1}$

   Đ/s: $\left(x-1\right)^2+\frac{1}{4}\left(\sqrt{2x+2}-2\right)^2+\frac{\left(\sqrt[4]{2x-1}-1\right)^2\left(\sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+3\right)}{4}=0$
4. $x+\frac{4}{x}+3x^2=2\sqrt{x^3-4}+4\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^3+4x}$

   Đ/s: $\left(x-\sqrt{x^3-4}\right)^2+\left(x-2\sqrt{x-1}\right)^2+\frac{1}{x}\left(\sqrt{x^3+4x}-2x\right)\left(\left(2x+3\right)\sqrt{x^3+4x}+2x^2+6x\right)=0$
5. $x^2+12x+1=4\sqrt{x^3+x}+2x\sqrt{4x-1}+2\sqrt{4x-x^2}$

   Đ/s: $\left(\sqrt{4x-x^2}-1\right)^2+\left(x-\sqrt{4x-1}\right)^2+\frac{\left(x^2-4x+1\right)^2}{x^2+4x+1+4\sqrt{x^3+x}}=0$

IV. KỸ THUẬT HOÁN ĐỔI NHÂN TỬ

Kỹ thuật hoán đổi nhân tử là kỹ thuật nhằm tìm nghiệm của phương trình đổi dấu trước căn sau đó suy ra nhân tử của phương trình ban đầu. Có lẽ nhiều bạn sẽ không hiểu vì sao sau khi đổi dấu ta tìm được nhân tử vô nghiệm, rất đơn giản phép đổi dấu trước căn là một phép biến đổi giống như phép bình phương, tôi sẽ chứng minh cho các bạn thấy bằng một ví dụ sau đây.

Ví dụ 1 : Giải phương trình: $\left(10x+60\right)\sqrt{x+1}+x^2+37x+60=0$

Theo như những cách làm bên trên thì đầu tiên ta sẽ tìm nghiệm sau đó sẽ tìm nhân tử đúng không? Nhưng tuy nhiên với bài này ta sẽ không làm được gì do nó vô nghiệm mà. Tuy nhiên theo những cách các thầy cô giáo đã dạy thì ta có thể không cần quan tâm tới nghiệm của phương trình mà cứ việc bình phương lên bậc 4 sau đó giải bình thường do đó tôi sẽ bình phương phương trình đầu lên, ta được:

$$\left(10x+60\right)\sqrt{x+1}+x^2+37x+60=0$$

$$\Leftrightarrow \left(10x+60\right)\sqrt{x+1}=-x^2-37x-60$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left(-x^2-37x-60\right)\left(10x+60\right)\ge 0 \\ x^4-26x^3+189x^2-360x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left(-x^2-37x-60\right)\left(10x+60\right)\ge 0 \\ x\left(x-3\right)\left(x-8\right)\left(x-15\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{PTVN}$$

Bản chất của việc bình phương là việc giải phương trình $f\left(x\right)=0$ với $f\left(x\right)$ là biểu thức liên hợp của vế trái, có nghĩa là $f\left(x\right)=-\left(10x+60\right)\sqrt{x+1}+x^2+37x+60$ cho nên khi giải ra phương trình bậc 4 có bằng kia nghiệm thì tức là phương trình $f\left(x\right)=0$ sẽ viết lại thành:

$$f\left(x\right)=-\left(10x+60\right)\sqrt{x+1}+x^2+37x+60=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}-3\right)\left(\sqrt{x+1}-4\right)=0$$

Mặt khác do $f\left(x\right)$ là biểu thức liên hợp của vế trái cho nên tất cả nhân tử phải đổi thành biểu thức liên hợp của chính các nhân tử đó và trở thành:

$$\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)\left(\sqrt{x+1}+3\right)\left(\sqrt{x+1}+4\right)=0$$

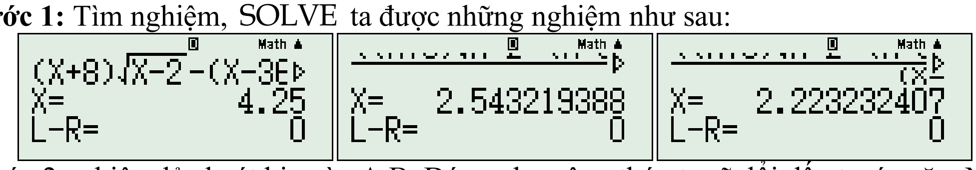
Vậy đến đây ta đã phân tích phương trình đầu thành các nhân tử vô nghiệm rồi đó.
Tuy nhiên thực chất không phải bài nào cũng làm được như vậy, có những bài khi bình phương còn 1 phương trình bậc 3 có nghiệm lẻ thì sao, chẳng lẽ lại dùng cách tìm nhân tử chứa nghiệm của phương trình bậc 3 để tìm à? Thôi tốt nhất đến chỗ mà không tìm được nhân tử của phương trình đổi dấu thì đi chứng minh vô nghiệm còn hơn . À còn một điều nữa, khi đổi dấu chúng ta còn có thể tìm được nghiệm liên hợp để tìm nhân tử mà không cần phải dùng MODE 7, cụ thể ta có ví dụ sau

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\left(x+8\right)\sqrt{x-2}-\left(x-36\right)\sqrt{x+2}-7\sqrt{x^2-4}-2x-63=0$

Đoàn Trí Dũng

Giải

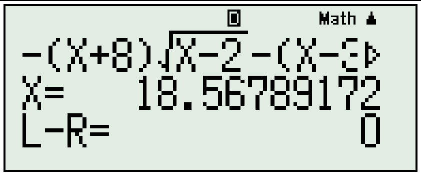
- **Bước 1:** Tìm nghiệm, SOLVE ta được những nghiệm như sau:

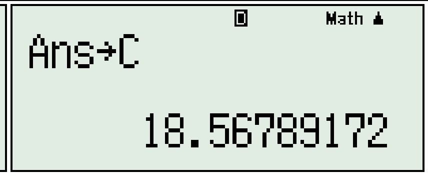


Ta sẽ gán 2 nghiệm lẻ choét kia vào A,B. Đúng như công thức ta sẽ đổi dấu trước căn. Nhưng tuy nhiên ở đây có 2 căn nên ta sẽ đổi dấu từng căn một.

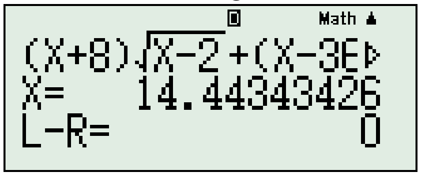
- **Bước 2:** Tìm nghiệm đổi dấu:

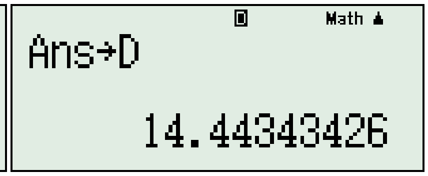
+ Đổi dấu $\sqrt{x-2}$ ta tìm được nghiệm sau:





+ Đổi dấu $\sqrt{x+2}$ ta tìm được nghiệm sau:





+ Đổi dấu 2 căn ta được phương trình vô nghiệm.

- **Bước 3:** Ta nhận thấy rằng $\begin{cases} AD = 32,(1) = \dfrac{289}{9} \\ A + D = 16,(6) = \dfrac{50}{3} \end{cases}; \begin{cases} B + C = \dfrac{190}{9} \\ BC = \dfrac{425}{9} \end{cases}$

Cho nên ta được các nghiệm đổi dấu là nghiệm liên hợp của phương trình đầu.Khi đó nhân tử có dạng $\sqrt{x-2} + a\sqrt{x+2} + b$ chứa lần lượt các nghiệm trên.

+ Với 2 nghiệm B,C ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{B-2} + a\sqrt{B+2} + b = 0 \\ -\sqrt{C-2} + a\sqrt{C+2} + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(\sqrt{B+2} - \sqrt{C+2}\right) + \sqrt{B-2} + \sqrt{C-2} = 0 \\ b = -\sqrt{B-2} - a\sqrt{B+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \end{cases}$$

$\Rightarrow NT: \sqrt{x-2} + 2\sqrt{x+2} - 5$

+ Với 2 nghiệm A, D ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{A-2} + a\sqrt{A+2} + b = 0 \\ \sqrt{D-2} - a\sqrt{D+2} + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(\sqrt{A+2} + \sqrt{D+2}\right) = \sqrt{D-2} - \sqrt{A-2} \\ b = -\sqrt{A-2} - a\sqrt{A+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow NT: 2\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} - 3$

Sở dĩ ta có hệ phương trình như trên là do ta đổi dấu căn nào khi tìm nghiệm thì khi lập hệ, phần hệ số trước căn đó phải đổi lại dấu, các bạn thấy chứ? Qua ví dụ này các bạn lại được thêm 1 cách để tìm nhân tử chứa nghiệm vô tỷ bậc 2 nữa rồi, nhưng tuy nhiên tôi khuyên các bạn nên dùng cách cũ bởi có khi đổi dấu ta sẽ không tìm được nghiệm hoặc nghiệm lẻ thì cách này hết ngon ăn!

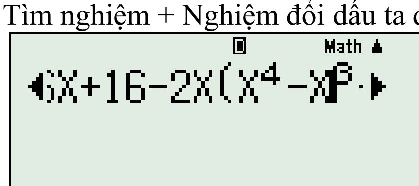
- Khi đó phương trình đầu sẽ được phân tích thành:

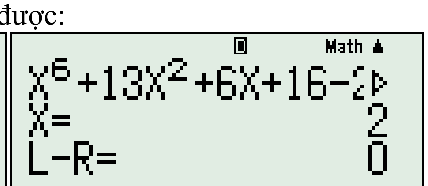
$$(x+8)\sqrt{x-2} - (x-36)\sqrt{x+2} - 7\sqrt{x^2-4} - 2x - 63 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} - 3\right)\left(\sqrt{x-2} + 2\sqrt{x+2} - 5\right)\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} - 1\right) = 0$$

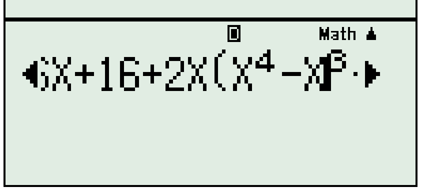
Ví dụ 3: Giải phương trình: $x^6 + 13x^2 + 6x + 16 - 2x\left(x^4 - x^3 + 10\right)\sqrt{x+2} = 0$

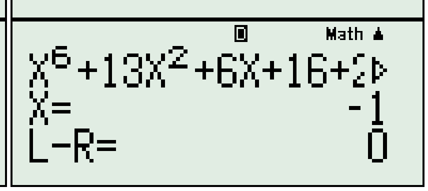
Bài này có thể thấy bậc khá cao nên ta có thể tìm nghiệm đổi dấu để tìm thêm nhân tử.

- **Bước 1:** Tìm nghiệm + Nghiệm đổi dấu ta được:









Có thể nhận thấy $x=2$ là nghiệm của phương trình đầu còn $x=-1$ là nghiệm của phương trình đổi dấu.

- **Bước 2:** Kiểm tra nghiệm bội. Ta có:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^6+13x^2+6x+16-2x\left(x^4-x^3+10\right)\sqrt{x+2}}{x-2}=0$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^6+13x^2+6x+16-2x\left(x^4-x^3+10\right)\sqrt{x+2}}{\left(x-2\right)^2}\neq 0$$
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^6+13x^2+6x+16+2x\left(x^4-x^3+10\right)\sqrt{x+2}}{x+1}=0$$
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^6+13x^2+6x+16+2x\left(x^4-x^3+10\right)\sqrt{x+2}}{\left(x+1\right)^2}\neq 0$$

Vậy cả 2 nghiệm đều là 2 nghiệm kép của 2 phương trình tương ứng.

- **Bước 3:** Tìm nhân tử.

+ Nhân tử chứa nghiệm kép $x=2$ của phương trình đầu là $4\sqrt{x+2}-x-6$

+ Nhân tử chứa nghiệm kép của phương trình đổi dấu là $2\sqrt{x+2}-x-3\Rightarrow$ Nhân tử của phương trình đầu là $2\sqrt{x+2}+x+3$.

- **Bước 4:** Chia căn ta được kết quả là:

$$\frac{x^6+13x^2+6x+16-2x\left(x^4-x^3+10\right)\sqrt{x+2}}{\left(2\sqrt{x+2}+x+3\right)\left(4\sqrt{x+2}-x-6\right)}=2x\sqrt{x+2}-x^4+x^3+x^2+x-8$$

Bằng phép thử ta có thể thấy cục kia luôn âm, mặt khác ta thấy có dạng $2ab$ nên sẽ thử thêm bớt tạo hằng đẳng thức $-\left(a-b\right)^2$ (do đang cần chứng minh âm) ta được:

$$\begin{aligned}&2x\sqrt{x+2}-x^4+x^3+x^2+x-8\\&=-\left(x-\sqrt{x+2}\right)^2-x^4+x^3+2x^2+2x-6\\&=-\left(x-\sqrt{x+2}\right)^2-\left[\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{9}{5}\right)^2+\frac{27}{2}\left(x-\frac{38}{27}\right)^2+\frac{58}{675}\right]<0\end{aligned}$$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 4: Giải phương trình: $\frac{2x^5+3x^4-14x^3}{\sqrt{x+2}}=\left(4x^4+14x^3+3x^2+2\right)\left(1-\frac{2}{\sqrt{x+2}}\right)$

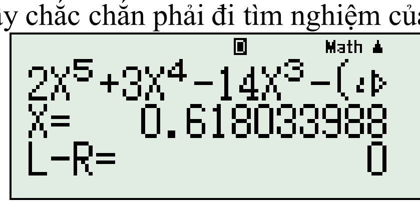
Đề thi thử lần 2 THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh – 2016

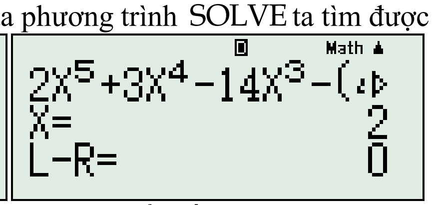
Giải

- Để như thế này thì hơi khó làm do đó ta quy đồng hết lên, ta được phương trình mới:

$$2x^5+3x^4-14x^3=\left(4x^4+14x^3+3x^2+2\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)$$

- Đến đây chắc chắn phải đi tìm nghiệm của phương trình SOLVE ta tìm được 2 nghiệm là:





- Ngoài 2 nghiệm như trên ta còn tìm được 1 nghiệm đổi dấu là $x=1$.
- Tìm nhân tử cho phương trình ta được 3 nhân tử là $\left(\sqrt{x+2}-2\right);\left(\sqrt{x+2}+1\right);\left(\sqrt{x+2}-x-1\right)$.
- Đến đây chia căn ta được:

$$\frac{2x^5+3x^4-14x^3}{\sqrt{x+2}}=\left(4x^4+14x^3+3x^2+2\right)\left(1-\frac{2}{\sqrt{x+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+1\right)\left(\sqrt{x+2}-x-1\right)\left(2x^3+7x^2+2+2x\sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2}-2=0 \Leftrightarrow x=2 \\ \sqrt{x+2}-x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{x+2}+1=0\ \left(\text{PTVN}_0\right) \\ 2x^3+7x^2+2+2x\sqrt{x+2}=0\left(*\right) \end{array}\right.$$

- Giải phương trình $(*)$:

$$2x^3+7x^2+2+2x\sqrt{x+2}=0$$

$$\Rightarrow x^2\left[4x^2\left(x+3\right)\left(x+4\right)+\left(x+2\right)^2+16\right]+4=0\ \left(\text{PTVN}_0\right)$$

V. KỸ THUẬT ẨN PHỤ KHÔNG HOÀN TOÀN

Ta xét phương trình tổng quát: $g\left(x\right)\sqrt{f\left(x\right)}+u\left(x\right)=0$

- Khi đó ta sẽ đặt $\sqrt{f\left(x\right)}=t$ và biến đổi phương trình thành:
  $\alpha t^2-g\left(x\right)t-u\left(x\right)-\alpha.f\left(x\right)=0$
- Công việc cần làm bây giờ là tìm hệ số α để có thể biểu diễn $\sqrt{f\left(x\right)}=t$ qua x. Để làm việc này cần tới sự trợ giúp của CASIO.
- Sau đây là các bước làm tổng quát:

➢ **Bước 1:** Ta có biệt thức $\Delta=\left[g\left(x\right)\right]^2-4\alpha\left(-u\left(x\right)-\alpha.f\left(x\right)\right)$

➢ **Bước 2:** Ta sẽ cần tìm α sao cho $\sqrt{\Delta}$ là một số hữu tỷ. Với lí do đó ta sẽ dùng $\boxed{\text{MODE}}\boxed{7}$ với hàm: $F\left(X\right)=\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(g\left(1000\right)\right)^2-4X\left(-u\left(1000\right)-X.f\left(1000\right)\right)}$. Nên nhớ gán $1000\to A$ trước khi làm. Ta sẽ cho $\begin{cases}\text{Start}=-15\\\text{Step}=14\\\text{End}=1\end{cases}$. Và tìm các giá trị làm $f\left(x\right)$ nguyên.

➢ **Bước 3:** Theo như lí thuyết thì ta sẽ luôn tìm được một số α sao cho $\sqrt{f\left(x\right)}=t$ luôn biểu diễn được qua biến x. Và khi đó ta sẽ có $\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{f\left(x\right)}=\dfrac{g\left(x\right)+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\\t=\sqrt{f\left(x\right)}=\dfrac{g\left(x\right)-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\end{array}\right.$

➢ Sau khi đến đây ta sẽ phân tích được phương trình đầu thành nhân tử!

Ví dụ 1: Giải phương trình:

$$\left(2x^4+x^3+2x^2+x+2\right)\sqrt{x+1}+x^8+x^7+2x^6+2x^5+4x^4+2x^3+2x^2+2x+2=0$$

Giải

Đúng như kịch bản ta sẽ viết phương trình về dạng $\alpha t^2-g\left(x\right).t-u\left(x\right)-\alpha.f\left(x\right)=0$.

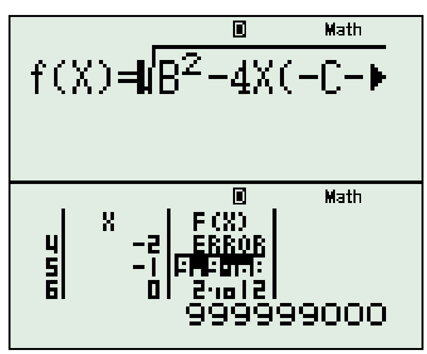
Với $\begin{cases}g\left(x\right)=2x^4+x^3+2x^2+x+2\\u\left(x\right)=x^8+x^7+2x^6+2x^5+4x^4+2x^3+2x^2+2x+2\\f\left(x\right)=x+1\end{cases}$

Ta sẽ gán $1000\to A$, sau đó để giảm bớt sự cồng kềnh khi vào $\text{MODE }7$ thì ta sẽ tính

$\begin{cases}g\left(A\right)\to B\\u\left(A\right)\to C\\f\left(A\right)\to D\end{cases}$

- MODE 7 với hàm:
  $F\left(X\right)=\sqrt{B^2-4X\left(-C-DX\right)}$

- Với $\begin{cases}\text{Start}=-15\\\text{Step}=14\\\text{End}=1\end{cases}$
- Sau khi tiến hành dò tìm ta sẽ được kết quả là



$$\begin{cases} X = \alpha = -1 \\ F(X) = 999999000 = x^3 - x \end{cases}$$

- Khi đó ta sẽ được: $\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{2x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 2 + x^3 - x}{-2} = -x^4 - x^3 - x^2 - 1 \\ t_2 = \dfrac{2x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 2 - x^3 + x}{-2} = -x^4 - x^2 - x - 1 \end{array}\right.$
- Vậy phương trình đầu sẽ được phân tích thành:

$$\left(\sqrt{x+1} + x^4 + x^3 + x^2 + 1\right)\left(\sqrt{x+1} + x^4 + x^2 + x + 1\right) = 0$$

- Còn công việc chứng minh phương trình vô nghiệm thì quá dễ còn gì để nói nữa ! Tự chứng minh nhé!
- Tương tự mở rộng hơn với hệ phương trình ta cũng có thể làm như trên

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (1-y)\sqrt{x^2 + 2y^2} = x + 2y + 3xy \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x^2 + 2y^2} = 2y - x \end{cases}$

Đề thi thử THPT Quốc Gia - Chuyên Hưng Yên – 2015

Giải

- Xuất phát từ phương trình thứ nhất thấy có dạng gần giống với dạng tổng quát của phương trình 1 căn, nên ta cũng có thể biến đổi phương trình về thành:

$$\alpha t^2 - (1-y)t + x + 2y + 3xy - \alpha\left(x^2 + 2y^2\right) = 0$$

Trong đó $t = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ & α là hệ số cần tìm.

- Ta sẽ gán $100 \to B$, $1000 \to A$ với B là y còn A là x. Ta sẽ được biểu thức sau:

$$f(X) = \sqrt{\Delta} = \sqrt{(1-B)^2 - 4X\left(A + 2B + 3AB - X\left(A^2 + 2B^2\right)\right)}$$

- Sau khi dò bằng MODE 7 ta sẽ tìm được $X = -1;\ F(X) = 2301$.
- Vậy tóm lại $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y^2} = \dfrac{1 - y + 2x + 3y + 1}{-2} = -x - y - 1 \\ \sqrt{x^2 + 2y^2} = \dfrac{1 - y - 2x - 3y - 1}{-2} = x + 2y \end{cases}$
- Khi đó lời giải là:

Ta có:

$$PT(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + 2y^2} + x + y + 1\right)\left(\sqrt{x^2 + 2y^2} - x - 2y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 2y^2} + x + y + 1 = 0 \ (PTVN_o) \\ \sqrt{x^2 + 2y^2} = x + 2y \end{array}\right.$$

Kết hợp với phương trình (2) ta được: $\begin{cases} \sqrt{y+1} = -2x \\ \sqrt{x^2 + 2y^2} = x + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

VI. KỸ THUẬT CHIA CĂN.

1. Công thức chia 1 căn.

- Giả sử có phép chia $S=\frac{g(x)\sqrt{f(x)}+h(x)}{a\sqrt{f(x)}+bx+c}=g_1(x)\sqrt{f(x)}+h_1(x)$. Khi đó để tìm các hệ số ta có các bước sau.
- Gán $1000\to X$.
- Nhập biểu thức và thay $X=1000$ vào ta được $\frac{g(x)\sqrt{f(x)}+h(x)}{a\sqrt{f(x)}+bx+c}\to A$
- Đổi dấu trước căn: $\frac{-g(x)\sqrt{f(x)}+h(x)}{-a\sqrt{f(x)}+bx+c}\to B$.
- Khi đó $\begin{cases} g_1(x)=\frac{A-B}{2\sqrt{f(x)}} \\ h_1(x)=\frac{A+B}{2} \end{cases}$.

Ví dụ: Thực hiện phép chia sau: $S=\frac{9x^4-12x^3-7x^2-6x-16+4(x+3)\sqrt{x^2+x+2}}{\left(2\sqrt{x^2+x+2}+x+4\right)\left(4\sqrt{x^2+x+2}-3x-5\right)}$

- Gán $1000\to X$.
- Nhập biểu thức và thay $X=1000$ vào ta được:

$$\left.\frac{9x^4-12x^3-7x^2-6x-16+4(x+3)\sqrt{x^2+x+2}}{\left(2\sqrt{x^2+x+2}+x+4\right)\left(4\sqrt{x^2+x+2}-3x-5\right)}\right|_{x=X}\to A$$

- Đổi dấu trước căn: $\left.\frac{9x^4-12x^3-7x^2-6x-16-4(x+3)\sqrt{x^2+x+2}}{\left(-2\sqrt{x^2+x+2}+x+4\right)\left(-4\sqrt{x^2+x+2}-3x-5\right)}\right|_{x=X}\to B$
- Khi đó thương có dạng $f(x)\sqrt{x^2+x+2}+g(x)$.
- Với $\begin{cases} f(x)=\frac{A-B}{2\sqrt{x^2+x+27}}=5994=\frac{6x-6}{7} \\ g(x)=\frac{A+B}{2}=2143287.143=\frac{15x^2+3x+10}{7} \end{cases}$
- Nhận xét: Để ý thấy khi tính $g(x)$ ta được kết quả lẻthì làm sao biết được mẫu là 7. Câu trả lời đơn giản thôi, vì khi tìm hệ số trước căn ta đã tìm được một phân thức có mẫu là 7 mà những hệ số ban đầu đều nguyên nên chẳng có nghĩa lý nào hệ số cần tìm còn lại cũng nguyên cả, nó phải có mẫu chung với cái vừa tìm được.
- Ngoài ra nếu gặp phải những bài khi thay $X=1000$ vào mà vi phạm ĐKXĐ thì chuyển sang $\boxed{\text{MODE}}\boxed{2}(\text{CMPLX})$ rồi tính như bình thường.

2. Công thức chia 2 căn.

- Ta xé tphép chia tổng quát sau:

$$P=\frac{g(x)+u(x)\sqrt{v(x)}+h(x)\sqrt{f(x)}+t(x)\sqrt{v(v)}\sqrt{f(x)}}{d(x)\sqrt{v(x)}+q(x)\sqrt{f(x)}+p(x)}$$
$$=u_1(x)\sqrt{v(x)}+h_1(x)\sqrt{f(x)}+t_1(x)\sqrt{v(v)}\sqrt{f(x)}+g_1(x)$$

Khi đó để tìm được các hệ số trước căn ta làm như sau:

- Chưa đổi dấu, $\boxed{\text{CALC}}\boxed{\text{X}}\boxed{=}\boxed{1000}$ rồi gán vào A.
$$\frac{g(x)+u(x)\sqrt{v(x)}+h(x)\sqrt{f(x)}+t(x)\sqrt{v(v)}\sqrt{f(x)}}{d(x)\sqrt{v(x)}+q(x)\sqrt{f(x)}+p(x)}\to A$$
- Đổi dấu $\sqrt{v(x)}$, $\boxed{\text{CALC}}\boxed{\text{X}}\boxed{=}\boxed{1000}$ rồi gán vào B
$$\frac{g(x)-u(x)\sqrt{v(x)}+h(x)\sqrt{f(x)}-t(x)\sqrt{v(v)}\sqrt{f(x)}}{-d(x)\sqrt{v(x)}+q(x)\sqrt{f(x)}+p(x)}\to B$$
- Đổi dấu $\sqrt{f(x)}$, $\boxed{\text{CALC}}\boxed{\text{X}}\boxed{=}\boxed{1000}$ rồi gán vào C
$$\frac{g(x)+u(x)\sqrt{v(x)}-h(x)\sqrt{f(x)}-t(x)\sqrt{v(v)}\sqrt{f(x)}}{d(x)\sqrt{v(x)}-q(x)\sqrt{f(x)}+p(x)}\to C$$
- Đổi dấu 2 căn, $\boxed{\text{CALC}}\boxed{\text{X}}\boxed{=}\boxed{1000}$ rồi gán vào D
$$\frac{g(x)-u(x)\sqrt{v(x)}-h(x)\sqrt{f(x)}+t(x)\sqrt{v(v)}\sqrt{f(x)}}{-d(x)\sqrt{v(x)}-q(x)\sqrt{f(x)}+p(x)}\to D$$

Khi đó thương của phép chia có dạng như sau:

$$P=u_1(x)\sqrt{v(x)}+h_1(x)\sqrt{f(x)}+t_1(x)\sqrt{v(v)}\sqrt{f(x)}+g_1(x)$$

Với: $$\begin{cases}u_1(x)=\dfrac{A-B+C-D}{4\sqrt{v(x)}}\\ h_1(x)=\dfrac{A+B-C-D}{4\sqrt{f(x)}}\\ t_1(x)=\dfrac{A-B-C+D}{4\sqrt{v(x)}\sqrt{f(x)}}\\ g_1(x)=\dfrac{A+B+C+D}{4}\end{cases}$$

Và tương tự như phần chia đa thức 1 căn đôi khi gặp phải những trường hợp vi phạm ĐKXĐ của bài toán ,khi đó ta sẽ chuyển sang chế độ số phức $\boxed{\text{MODE}}\boxed{2}$ (CMPLX) để chia như bình thường và áp dụng công thức là xong

Ví dụ : Thực hiện phép chia sau: $S=\dfrac{3x^2+\left(1+x\sqrt{1-x}\right)\left(2+\sqrt{2-3x}\right)-x-2}{\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{2-3x}-1\right)^2}$

- Chuyển sang môi trường số phức $\boxed{\text{MODE}}\boxed{2}$
- Ban đầu: $\left.\dfrac{3x^2+\left(1+x\sqrt{1-x}\right)\left(2+\sqrt{2-3x}\right)-x-2}{\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{2-3x}-1\right)^2}\right|_{X=1000}\to A$

- Đổi dấu $\sqrt{1-x}$: $\left.\dfrac{3x^2+\left(1-x\sqrt{1-x}\right)\left(2+\sqrt{2-3x}\right)-x-2}{\left(-\sqrt{1-x}-\sqrt{2-3x}-1\right)^2}\right|_{X=1000} \to B$

- Đổi dấu $\sqrt{2-3x}$: $\left.\dfrac{3x^2+\left(1+x\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{2-3x}\right)-x-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{2-3x}-1\right)^2}\right|_{X=1000} \to C$

- Đổi dấu 2 căn: $\left.\dfrac{3x^2+\left(1-x\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{2-3x}\right)-x-2}{\left(-\sqrt{1-x}+\sqrt{2-3x}-1\right)^2}\right|_{X=1000} \to D$

- Thương có dạng: $f(x)\sqrt{1-x}+g(x)\sqrt{2-3x}+h(x)\sqrt{3x^2-5x+2}+v(x)$

- Với $\begin{cases} f(x)=\dfrac{A-B+C-D}{4\sqrt{1-x}}=1 \\ g(x)=\dfrac{A+B-C-D}{4\sqrt{2-3x}}=1 \\ h(x)=\dfrac{A-B-C+D}{4\sqrt{3x^2-5x+2}}=\dfrac{1}{2} \\ v(x)=\dfrac{A+B+C+D}{4}=\dfrac{2-3x}{2} \end{cases}$

3. Công thức chia 3 căn.

- Xét phép chia sau:

$$f(x)=\frac{\alpha\sqrt{u}+\beta\sqrt{v}+\gamma\sqrt{t}+\delta\sqrt{u}\sqrt{v}+\varepsilon\sqrt{u}\sqrt{t}+\zeta\sqrt{v}\sqrt{t}+\eta\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{t}+k(x)}{m\sqrt{u}+n\sqrt{v}+p\sqrt{t}+q(x)}$$
$$=a\sqrt{u}+b\sqrt{v}+c\sqrt{t}+d\sqrt{u}\sqrt{v}+e\sqrt{u}\sqrt{t}+f\sqrt{v}\sqrt{t}+g\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{t}+h$$

- Đặt:

1. $\left.\dfrac{\alpha\sqrt{u}+\beta\sqrt{v}+\gamma\sqrt{t}+\delta\sqrt{u}\sqrt{v}+\varepsilon\sqrt{u}\sqrt{t}+\zeta\sqrt{v}\sqrt{t}+\eta\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{t}+k(x)}{m\sqrt{u}+n\sqrt{v}+p\sqrt{t}+q(x)}\right|_{X=1000} \to A$

2. Đổi dấu trước $\sqrt{u}$:

$$\left.\frac{-\alpha\sqrt{u}+\beta\sqrt{v}+\gamma\sqrt{t}-\delta\sqrt{u}\sqrt{v}-\varepsilon\sqrt{u}\sqrt{t}+\zeta\sqrt{v}\sqrt{t}-\eta\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{t}+k(x)}{-m\sqrt{u}+n\sqrt{v}+p\sqrt{t}+q(x)}\right|_{X=1000} \to B$$

3. Đổi dấu trước $\sqrt{v}$:

$$\left.\frac{\alpha\sqrt{u}-\beta\sqrt{v}+\gamma\sqrt{t}-\delta\sqrt{u}\sqrt{v}+\varepsilon\sqrt{u}\sqrt{t}-\zeta\sqrt{v}\sqrt{t}-\eta\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{t}+k(x)}{m\sqrt{u}-n\sqrt{v}+p\sqrt{t}+q(x)}\right|_{X=1000} \to C$$

4. Đổi dấu trước $\sqrt{t}$:

$$\left.\frac{\alpha\sqrt{u}+\beta\sqrt{v}-\gamma\sqrt{t}+\delta\sqrt{u}\sqrt{v}-\varepsilon\sqrt{u}\sqrt{t}-\zeta\sqrt{v}\sqrt{t}-\eta\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{t}+k(x)}{m\sqrt{u}+n\sqrt{v}-p\sqrt{t}+q(x)}\right|_{X=1000} \to D$$

5. Đổi dấu $\sqrt{u}$ & $\sqrt{v}$:

$$\left.\frac{-\alpha\sqrt{u}-\beta\sqrt{v}+\gamma\sqrt{t}+\delta\sqrt{u}\sqrt{v}-\varepsilon\sqrt{u}\sqrt{t}-\zeta\sqrt{v}\sqrt{t}+\eta\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{t}+k(x)}{-m\sqrt{u}-n\sqrt{v}+p\sqrt{t}+q(x)}\right|_{X=1000}\to E$$

6. Đổi dấu $\sqrt{u}$ & $\sqrt{t}$:

$$\left.\frac{-\alpha\sqrt{u}+\beta\sqrt{v}-\gamma\sqrt{t}-\delta\sqrt{u}\sqrt{v}+\varepsilon\sqrt{u}\sqrt{t}-\zeta\sqrt{v}\sqrt{t}+\eta\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{t}+k(x)}{-m\sqrt{u}+n\sqrt{v}-p\sqrt{t}+q(x)}\right|_{X=1000}\to F$$

7. Đổi dấu $\sqrt{v}$ & $\sqrt{t}$:

$$\left.\frac{\alpha\sqrt{u}-\beta\sqrt{v}-\gamma\sqrt{t}-\delta\sqrt{u}\sqrt{v}-\varepsilon\sqrt{u}\sqrt{t}+\zeta\sqrt{v}\sqrt{t}+\eta\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{t}+k(x)}{m\sqrt{u}-n\sqrt{v}-p\sqrt{t}+q(x)}\right|_{X=1000}\to M$$

8. Đổi dấu 3 căn:

$$\left.\frac{-\alpha\sqrt{u}-\beta\sqrt{v}-\gamma\sqrt{t}+\delta\sqrt{u}\sqrt{v}+\varepsilon\sqrt{u}\sqrt{t}+\zeta\sqrt{v}\sqrt{t}-\eta\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{t}+k(x)}{-m\sqrt{u}-n\sqrt{v}-p\sqrt{t}+q(x)}\right|_{X=1000}\to Y$$

- Khi đó $\begin{cases} a=\dfrac{A-B+C+D-E-F+M-Y}{8\sqrt{u}} \\ b=\dfrac{A+B-C+D-E+F-M-Y}{8\sqrt{v}} \\ c=\dfrac{A+B+C-D+E-F-M-Y}{8\sqrt{t}} \\ d=\dfrac{A-B-C+D+E-F-M+Y}{8\sqrt{u}\sqrt{v}} \end{cases}$ & $\begin{cases} e=\dfrac{A-B+C-D-E+F-M+Y}{8\sqrt{u}\sqrt{t}} \\ f=\dfrac{A+B-C-D-E-F+M+Y}{8\sqrt{v}\sqrt{t}} \\ g=\dfrac{A-B-C-D+E+F+M-Y}{8\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{t}} \\ h=\dfrac{A+B+C+D+E+F+M+Y}{8} \end{cases}$.

Ví dụ: Thực hiện phép chia: $S=\dfrac{(5x+4)\sqrt{3x-2}+5\sqrt{2-x}-(6x+1)\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{2-x}-\sqrt{x+3}}$

- Chuyển sang $\boxed{\text{MODE}}\boxed{2}$(CMPLX)
- Ban đầu : $\left.\dfrac{(5x+4)\sqrt{3x-2}+5\sqrt{2-x}-(6x+1)\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{2-x}-\sqrt{x+3}}\right|_{x=1000}\to A$
- Đổi dấu trước $\sqrt{3x-2}$: $\left.\dfrac{-(5x+4)\sqrt{3x-2}+5\sqrt{2-x}-(6x+1)\sqrt{x+3}}{-\sqrt{3x-2}+\sqrt{2-x}-\sqrt{x+3}}\right|_{x=1000}\to B$
- Đổi dấu trước $\sqrt{2-x}$: $\left.\dfrac{(5x+4)\sqrt{3x-2}-5\sqrt{2-x}-(6x+1)\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2-x}-\sqrt{x+3}}\right|_{x=1000}\to C$
- Đổi dấu trước $\sqrt{x+3}$: $\left.\dfrac{(5x+4)\sqrt{3x-2}+5\sqrt{2-x}+(6x+1)\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{2-x}+\sqrt{x+3}}\right|_{x=1000}\to D$
- Đổi $\sqrt{3x-2};\sqrt{2-x}$: $\left.\dfrac{-(5x+4)\sqrt{3x-2}-5\sqrt{2-x}-(6x+1)\sqrt{x+3}}{-\sqrt{3x-2}-\sqrt{2-x}-\sqrt{x+3}}\right|_{x=1000}\to E$
- Đổi $\sqrt{3x-2};\sqrt{x+3}$: $\left.\dfrac{-(5x+4)\sqrt{3x-2}+5\sqrt{2-x}+(6x+1)\sqrt{x+3}}{-\sqrt{3x-2}+\sqrt{2-x}+\sqrt{x+3}}\right|_{x=1000}\to F$
- Đổi $\sqrt{2-x};\sqrt{x+3}$: $\left.\dfrac{(5x+4)\sqrt{3x-2}-5\sqrt{2-x}+(6x+1)\sqrt{x+3}}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2-x}+\sqrt{x+3}}\right|_{x=1000}\to M$

- Đổi 3 căn: $\left.\dfrac{-(5x+4)\sqrt{3x-2}-5\sqrt{2-x}+(6x+1)\sqrt{x+3}}{-\sqrt{3x-2}-\sqrt{2-x}+\sqrt{x+3}}\right|_{x=1000} \to Y$
- Khi đó

$$\begin{cases} a=\dfrac{A-B+C+D-E-F+M-Y}{8\sqrt{3x-2}}=0 \\ b=\dfrac{A+B-C+D-E+F-M-Y}{8\sqrt{2-x}}=0 \\ c=\dfrac{A+B+C-D+E-F-M-Y}{8\sqrt{x+3}}=0 \\ d=\dfrac{A-B-C+D+E-F-M+Y}{8\sqrt{3x-2}\sqrt{2-x}}=-1 \end{cases} \& \begin{cases} e=\dfrac{A-B+C-D-E+F-M+Y}{8\sqrt{3x-2}\sqrt{x+3}}=-1 \\ f=\dfrac{A+B-C-D-E-F+M+Y}{8\sqrt{2-x}\sqrt{x+3}}=0 \\ g=\dfrac{A-B-C-D+E+F+M-Y}{8\sqrt{3x-2}\sqrt{2-x}\sqrt{x+3}}=0 \\ h=\dfrac{A+B+C+D+E+F+M+Y}{8}=3x+3 \end{cases}$$

VII. MỘT KỸ THUẬT NHỎ ĐÁNH GIÁ PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM KÉP.

Bài 1: Giải phương trình: $x^4-x^3-6x+4+2\sqrt{x^6-x+1}=0$

- Bùi Thế Việt – Vted.vn -

Giải

- Đầu tiên ta thấy phương trình có nghiệm kép $x=1$ và nhân tử là $2\sqrt{x^6-x+1}-5x+3\ge 0$ và cùng dấu với bài toán. Bây giờ sẽ cần chứng minh $2\sqrt{x^6-x+1}\ge 5x-3$. Tuy nhiên khá là khó chứng minh và ta sẽ quy về bài toán sau:
- Lấy $2\sqrt{x^6-x+1}-2x^3\ge ax+b$ để triệt tiêu x^6 bởi vì nếu biến đổi trực tiếp thì sẽ hơi dài nên ta sẽ quy về một bài toán đơn giản hơn. Ta có $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x^6-x+1}-2x^3\right)\Big|_{x=1}=-1$ nên $a=-1$.

  Lấy $\sqrt{2x^6-x+1}-2x^3+x\Big|_{x=1}=1$ nên có $b=1$. Vậy cần chứng minh

  $2\sqrt{x^6-x+1}\ge 2x^3-x+1$.
- Ta có $\begin{cases}\sqrt{4\left(x^6-x+1\right)}=\sqrt{\left(2x^3-x+1\right)^2+4x^4-4x^3-x^2-2x+3}\\ 4x^4-4x^3-x^2-2x+3=(x-1)^2\left[4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+2\right]\ge 0\end{cases}$.
- Nên $2\sqrt{x^6-x+1}\ge 2x^3-x+1$
- Khi đó $VT\ge (x-1)^2\left(x^2+3x+5\right)\ge 0$
- Dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{x^9-2x+2}+\sqrt{x^8-x+1}=(2-x)\left(x^3+2x^2+2x-3\right)$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Đầu tiên ta có thể nhận thấy vế trái luôn dương nên dẫn tới điều kiện kéo theo của phương trình sẽ là: $(2-x)\left(x^3+2x^2+2x-3\right)\ge 0$. Nhưng tuy nhiên nghiệm của đa thức bậc 3 là nghiệm lẻ nên ta phải làm như sau . Xét hàm $f(x)=x^3+2x^2+2x-3$, ta có $f'(x)=3x^2+4x+2>0\forall x$ nên hàm $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có tối đa duy nhất một nghiệm. Đến đây ta có 2 hướng đó là chỉ ra nghiệm đó và xác định gần chính xác nghiệm. Đầu tiên với cách làm thứ nhất ta chỉ ra nghiệm đó là:

$$x=x_0=-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt[3]{404+4\sqrt{10233}}+\sqrt[3]{404-4\sqrt{10233}}}{6}$$

Hoặc nhận thấy $f(0,7).f(0,8)<0$ nên phương trình có 1 nghiệm $x=x_0\in[0,7;0,8]$. Đến đây ta được điều kiện kéo theo sẽ là $x\in[x_0;2]$.

Để ý thấy:

1. $\sqrt{x^8-x+1}=\sqrt{\left(x^4-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(x-1)^2\left(4x^3+4x^2+4x+3\right)}\ge \overbrace{x^4-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{f(x)}$

2. $\sqrt{x^9-2x+2}=\sqrt{\left(x^4-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}(x-1)^2\left(4x^7+4x^6+4x^5+4x^4+8x^3+8x^2+8x+7\right)}\ge f(x)$

3. $x^4-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{16}>0\forall x\in\mathbb{R}$

Nên $VT\ge(x-1)^2(3x^2+6x+7)\ge 0$. Dấu "=" chỉ xảy ra khi $x=1$

Bài 3: Giải phương trình: $2\sqrt{x^9-4x+4}-\sqrt{4x^8-4x+1}+x^5-2x^3+x^2+8x-9=0$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Đặt $f(x)=4x^8-4x+1;\ g(x)=x^9-4x+4$.

Ta có : $f'(x)=32x^7-4=0\Leftrightarrow x=\sqrt[7]{\frac{1}{8}}x=x_0$ $g'(x)=9x^8-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt[8]{\frac{4}{9}}=x_1\\ x=-\sqrt[8]{\frac{4}{9}}=x_2\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên cho 2 hàm $f(x);\ g(x)$ ta được:

x	$-\infty$		$\sqrt[7]{\frac{1}{8}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$-\infty$

x	$-\infty$		$-\sqrt[8]{\frac{4}{9}}$		$\sqrt[8]{\frac{4}{9}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(x_1)$	$\searrow$	$g(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

- Ta có: $f(x_0)=-1.60044<0\Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm.
- Mặt khác $\begin{cases}f(0,25).f(0,3)<0\\ f(0,95).f(0,96)<0\end{cases}$. Nên phương trình có 2 nghiệm thuộc 2 khoảng $(0,25;0,3);(0,95;0,96)$
- $g(x_1)=7,21;\ g(x_2)=0,78$ nên phương trình $g(x)=0$ có nghiệm duy nhất thuộc $(-1,3;-1,2)$ do $g(-1,3).g(-1,2)<0$.
- Gọi $x_3;x_4$ là 2 nghiệm của phương trình $f(x)=0$ và x_5 là nghiệm của phương trình $g(x)=0$. Lập bảng xét dấu cho 2 hàm $f(x);g(x)$.

x	$-\infty$		x_5		x_3		x_4		$+\infty$
$f(x)$			$+$		0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0			$+$			

$\Rightarrow$ ĐKXĐ là $x \in [x_5;x_3] \cup [x_4;+\infty)$.

Xét $x \in [x_5;x_3] \Rightarrow -1,3 < x < 0,3$.

Đặt : $h(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 + 8x - 3 \Rightarrow h'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 2x + 8 = 5\left(x^2 - \frac{7}{10}\right)^2 + (x+1)^2 + \frac{91}{20} > 0$

$\Rightarrow h(x)$ đồng biến trên $[-1,3;0,3] \Rightarrow h(-1,3) \le h(x) \le h(0,3) \Rightarrow -17,03 < h(x) < -6,561$.

Lại có $2\sqrt{g(x_5)} = 0$; $2\sqrt{g(x_1)} = 3,69$; $2\sqrt{g(x_2)} = 1,54$; $2\sqrt{g(0,3)} = 2,366$

$\Rightarrow -17,03 < h(x) + 2\sqrt{g(x)} < -1 < 0$. Nên phương trình vô nghiệm trên $[x_5;x_3]$.

Xét: $x \in [x_4;+\infty) \Rightarrow x > 0,95$

Ta có:

$$2\sqrt{x^9 - 2x + 2} = \sqrt{(2x^4 - 3x + 3)^2 + (x-1)^2(4x^7 + 4x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 16x^3 + 16x^2 + 16x + 7)}$$

$\ge 2x^4 - 3x + 3$

Khi đó:

$$\begin{aligned} VT &\ge x^5 + 2x^4 - 2x^3 + x^2 + 5x - 6 - \sqrt{4x^8 - 4x + 1} \\ &= (x-1)^2(x^3 + 2x^2 + x + 1) + 2x^4 + 6x - 7 - \sqrt{4x^8 - 4x + 1} \\ &= (x-1)^2(x^3 + 2x^2 + x + 1) + \frac{(x-1)^2(24x^3 + 20x^2 + 16x + 48)}{2x^4 + 6x - 7 + \sqrt{4x^8 - 4x + 1}} \end{aligned}$$

Nhận thấy:

1. $v(x) = 2x^4 + 6x - 7 \Rightarrow v'(x) = 8x^3 + 6 > 0 \Rightarrow v(x) > v(0,95) > 0$
2. $\begin{cases} x^3 + 2x^2 + x + 1 > 0 \\ 24x^3 + 20x^2 + 16x + 48 > 0 \end{cases}$

Nên $VT \ge 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$

B. KỸ THUẬT NHÂN LIÊN HỢP, PHÂN TÍCH NHÂN TỬ MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ CƠ BẢN VÀ TẦM TRUNG.

I. ĐỀ BÀI.

1. Giải phương trình: $x^3-2x^2+10x-6+\left(x^2-8x+10\right)\sqrt{x-1}-2\left(x+1\right)\sqrt{x^3-1}=0$
2. Giải phương trình: $\dfrac{5x-13-\sqrt{57+10x-3x^2}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{19-3x}}+2\sqrt{x+3}=x^2+2x+9$
3. Giải phương trình: $2\left(x-2\right)\sqrt{5-x^2}+\left(x+1\right)\sqrt{x^2+5}=7x-5$
4. Giải phương trình: $x^2+16x+32-2x\sqrt{x-1}-4\left(x+6\right)\sqrt{x+2}=0$
5. Giải phương trình: $\dfrac{2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\dfrac{1}{x+\sqrt{2x-1}}=\dfrac{2}{1+\sqrt{x\left(2x-1\right)}}$
6. Giải phương trình: $3\sqrt{x+4}+3\sqrt{5x+4}+4x^2-18x-12=0$
7. Giải phương trình: $2\left(5x-3\right)\sqrt{x+1}+5\left(x+1\right)\sqrt{3-x}=3\left(5x+1\right)$
8. Giải phương trình: $x^3+x^2+x\left(1+\sqrt{x^4+x^2+1}\right)=\left(x+1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)$
9. Giải phương trình: $\dfrac{\left(x-4\right)\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{4-x}+x-5}=\dfrac{2+\left(2x-4\right)\sqrt{x-2}}{x-1}$
10. Giải phương trình: $\left(1+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=x\sqrt{x}$
11. Giải phương trình:
$\left(3x-4\right)\sqrt{1-x^2}+\left(5x-3\right)\sqrt{x-2}+15x^2-29x+12+\sqrt{1-x^2}\sqrt{x-2}=0$
12. Giải phương trình: $\dfrac{\left(6-x\right)\left(x^3+x^2+x\right)}{\left(x+1\right)\left(\sqrt{x-2}+2\right)\sqrt{x+1}}=\left(8x-14\right)\left(2\sqrt{x-2}-x+2\right)$
13. Giải phương trình: $\sqrt{7x^2+20x-86}+x\sqrt{31-4x-x^2}=3x+2$
14. Giải phương trình: $\left(5x^2-5x+10\right)\sqrt{x+7}+\left(2x+6\right)\sqrt{x+2}=x^3+13x^2-6x+32$
15. Giải phương trình: $x-\sqrt{x}-2=\sqrt{x^3-4x^2+5x}-\sqrt{x^3-3x^2+4}$
16. Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+4}-1\right)\sqrt{x+2}\geq\dfrac{x^3+4x^2+3x-2\left(x+3\right)\sqrt[3]{2x+3}}{\left(\sqrt[3]{2x+3}-3\right)\left(\sqrt{x+4}+1\right)}$
17. Giải phương trình: $\dfrac{\left(2x-1\right)\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x}+\left(2+\sqrt{x}\right)\sqrt{1-x}+1-x}=1$
18. Giải phương trình: $2\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}=\dfrac{7x^2-2x}{x-3+\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}$
19. Giải phương trình: $\dfrac{x^4+3x^3}{\sqrt{x+3}+1}=\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x+2}\right)$
20. Giải phương trình: $\dfrac{x^2+3x+\sqrt{x+1}+3}{x+5+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}}=\sqrt[4]{\dfrac{x+4}{\left(x+1\right)^2}}$

21. Giải phương trình: $\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)=\frac{9x^2-8x+4}{3x+2\sqrt{2x-1}}$

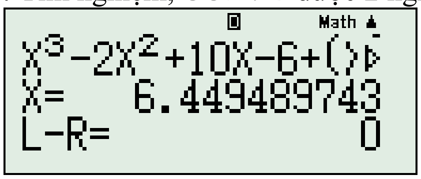
II. HƯỚNG DẪN GIẢI.

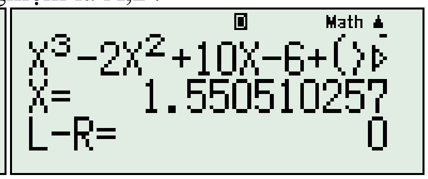
Bài 1: Giải phương trình:

$$x^3-2x^2+10x-6+\left(x^2-8x+10\right)\sqrt{x-1}-2\left(x+1\right)\sqrt{x^3-1}=0$$

Giải

- **Bước 1:** Tìm nghiệm, SOLVE được 2 nghiệm là A,B:

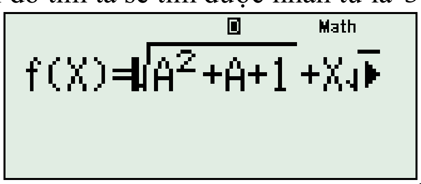


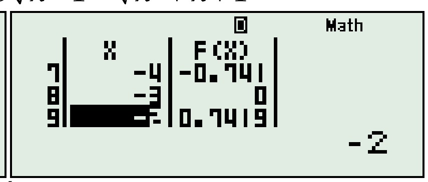


- Dễ dàng nhận thấy $\begin{cases} A+B=8 \\ AB=10 \end{cases}$ nên 2 nghiệm này cùng thuộc 1 phương trình bậc 2. Do đó ta chỉ cần quan tâm đến 1 nghiệm để tìm nhân tử.

- **Bước 2:** Tìm nhân tử :

1. MODE 7 với hàm $F\left(X\right)=\sqrt{A^2+A+1}+X\sqrt{A-1}$.
2. Sau khi dò tìm ta sẽ tìm được nhân tử là $3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+x+1}$





- **Bước 3:** Chia căn: $1000 \to X$. Ta được kết quả là:

$$\frac{x^3-2x^2+10x-6+\left(x^2-8x+10\right)\sqrt{x-1}-2\left(x+1\right)\sqrt{x^3-1}}{3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$=\left(2-x\right)\sqrt{x-1}-x\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^3-1}+3-3x$$

- **Bước 4:** Xét bất phương trình: $\left(2-x\right)\sqrt{x-1}<x\sqrt{x^2+x+1}$

- Nếu $x>2$ thì bất phương trình luôn đúng.
- Nếu $x<2$ ta được:

$$\left(2-x\right)\sqrt{x-1}<x\sqrt{x^2+x+1}$$
$$\Leftrightarrow -x^4-6x^2+8x-4<0$$

$\Leftrightarrow -x^4-6\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{3}<0$ (đúng)

Nên $\left(2-x\right)\sqrt{x-1}-x\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^3-1}+3-3x<0 \forall x\in\left[1;+\infty\right)$

Vậy lời giải là:

$$x^3-2x^2+10x-6+\left(x^2-8x+10\right)\sqrt{x-1}-2\left(x+1\right)\sqrt{x^3-1}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)\left[\left(2-x\right)\sqrt{x-1}-x\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^3-1}+3-3x\right]=0$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+x+1}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=4+\sqrt{6} \\ x=4-\sqrt{6} \end{array}\right.$$

- Ở đây do mình trình bày tắt cho nên khi vào bài vẫn phải chứng minh vô nghiệm cho người chấm thấy nhé.

Bài 2: Giải phương trình: $\dfrac{5x-13-\sqrt{57+10x-3x^2}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{19-3x}}+2\sqrt{x+3}=x^2+2x+9$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 – THPT Phù Cừ

Giải

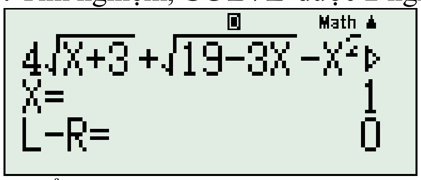
- **Bước 1:** Nhìn thế này có vẻ khá khó làm, nhưng chịu để ý ta thấy rằng:

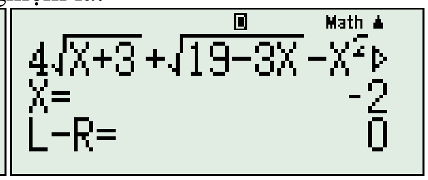
$$\frac{5x-13-\sqrt{57+10x-3x^2}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{19-3x}}=2\sqrt{x+3}+\sqrt{19-3x}$$

Có thể dùng máy tính chia nếu thích. Do đó phương trình trở thành:

$$4\sqrt{x+3}+\sqrt{19-3x}-x^2-2x-9=0$$

- **Bước 2:** Tìm nghiệm, SOLVE được 2 nghiệm là:





- **Bước 3:** Kiểm tra nghiệm bội. Ta có:

$$\lim_{x\to 1}\frac{4\sqrt{x+3}+\sqrt{19-3x}-x^2-2x-9}{x-1}\neq 0$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{4\sqrt{x+3}+\sqrt{19-3x}-x^2-2x-9}{x+2}\neq 0$$

Nên phương trình không có nghiệm bội.

- **Bước 4:** Tìm nhân tử có dạng $\sqrt{x+3}+a\sqrt{19-3x}+b$ chứa 2 nghiệm $x=1;\ x=-2$
- Có hệ $\begin{cases}\sqrt{1+3}+a\sqrt{19-3}+b=0\\ \sqrt{-2+3}+a\sqrt{19+6}+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-6\end{cases}\Rightarrow \text{NT}: \sqrt{x+3}+\sqrt{19-3x}-6.$
- **Bước 5:** Chuyển sang $\boxed{\text{MODE}}\boxed{2}(\text{CMPLX})$. Chia như bình thường được kết quả:

$$\frac{4\sqrt{x+3}+\sqrt{19-3x}-x^2-2x-9}{\sqrt{x+3}+\sqrt{19-3x}-6}$$
$$=\frac{1}{4}\left[(12-x)\sqrt{x+3}+(x+6)\sqrt{19-3x}+3\sqrt{57+10x-3x^2}+3x+31\right]$$

+ Với điều kiện đã cho dễ dàng chứng minh được biểu thức còn lại dương.

- Vậy bài toán đã được giải quyết!
- Bài tập tương tự: Giải phương trình: $\dfrac{3x^3-21x^2+58x-56}{\sqrt{3x^2-6x+19}+3\sqrt{x-1}}=(x-2)\sqrt{x^2+x-6}$

Bài 3: Giải phương trình: $x^2+16x+32-2x\sqrt{x-1}-4(x+6)\sqrt{x+2}=0$

- **Bước 1:** Tìm nghiệm ta được nghiệm $x=2$
- **Bước 2:** Kiểm tra nghiệm bội:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+16x+32-2x\sqrt{x-1}-4(x+6)\sqrt{x+2}=0}{x-2}=0$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+16x+32-2x\sqrt{x-1}-4(x+6)\sqrt{x+2}=0}{(x-2)^2}=0$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+16x+32-2x\sqrt{x-1}-4(x+6)\sqrt{x+2}=0}{(x-2)^3}=0$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+16x+32-2x\sqrt{x-1}-4(x+6)\sqrt{x+2}=0}{(x-2)^4}=0.03$$

Nên phương trình có nghiệm bội 4 $x=2$.

- **Bước 3:** Tìm nhân tử có dạng $\left(\sqrt{x-1}+a\sqrt{x+2}+b\right)^2$

Với $\begin{cases} a=-\dfrac{\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x-1}\right)\Big|_{x=2}}{\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x+2}\right)\Big|_{x=2}}=-2 \\ b=-\sqrt{x-1}+2\sqrt{x+2}=3 \end{cases} \Rightarrow \text{NT}:\left(\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}+3\right)^2$

- **Bước 4:** Chia căn, ta được:

$$\frac{x^2+16x+32-2x\sqrt{x-1}-4(x+6)\sqrt{x+2}}{\left(\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}+3\right)^2}=\frac{1}{9}\left(4\sqrt{x^2+x-2}+5x+16\right)$$

- Vậy lời giải là:

$$x^2+16x+32-2x\sqrt{x-1}-4(x+6)\sqrt{x+2}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{9}\left(\sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}+3\right)^2\left(4\sqrt{x^2+x-2}+5x+16\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}-2\sqrt{x+2}+3=0 \Leftrightarrow x=2$$

Bài 4: Giải phương trình: $\dfrac{2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\dfrac{1}{x+\sqrt{2x-1}}=\dfrac{2}{1+\sqrt{x(2x-1)}}$

Đề thi thử THPT Quốc Gia lần 2 – THPT Minh Châu – Hưng Yên – 2015

Giải

- Đầu tiên nếu để như thế này thì chắc không làm được gì, ta sẽ phải quy đồng lên.
- **Bước 1:** Tìm nghiệm. Ta được $x=1$ là nghiệm kép.
- **Bước 2:** Tìm nhân tử: $2\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}-1$.
- **Bước 3:**Chia căn ta được kết quả:

$$\frac{\left[2\left(x+\sqrt{2x-1}\right)+\left(\sqrt{x}+1\right)^2\right]\left(1+\sqrt{x(2x-1)}\right)-2\left(\sqrt{x}+1\right)^2\left(x+\sqrt{2x-1}\right)}{2\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}-1}$$
$$=\frac{1}{2}\left[(4x+1)\sqrt{2x-1}+(2x+3)\sqrt{x}+5\sqrt{x(2x-1)}+6x-1\right]$$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 5: Giải phương trình: $3\sqrt{x+4}+3\sqrt{5x+4}+4x^2-18x-12=0$

Giải

- Ở bài này ta sẽ tìm được 2 nghiệm là $x=0;\ x=3,791287847$.
- Đối với nghiệm lẻ thì sẽ tìm được nhân tử là $\sqrt{x+4}-\sqrt{5x+4}+2$. Nhưng với nghiệm $x=0$ thì sao? Thông thường nếu không tìm được nghiệm đổi dấu thì sẽ giả sử nhân tử có dạng $\sqrt{x+4}-\sqrt{5x+4}+k;\ \sqrt{x+4}+\sqrt{5x+4}+k$. Ta sẽ thay nghiệm $x=0$ vào rồi chia căn.

1. TH1: Nhân tử là $\sqrt{x+4}-\sqrt{5x+4}$, thực hiện phép chia thấy lẻ choét.
2. TH2: Nhân tử là $\sqrt{x+4}+\sqrt{5x+4}-4$, thực hiện phép chia cũng thấy lẻ choét. Nhưng hãy để ý rằng phương trình $\sqrt{x+4}+\sqrt{5x+4}-4=0$ có 1 nghiệm ngoại lai là $x=12$ mà phương trình đầu không hề có nhân tử này cho nên ta sẽ cần nhân thêm một lượng vào. Thông thường thì sẽ nhân $(x-12)$ vào phương trình đầu thì cũng không sao, nhưng ta nên nhân vào 1 biểu thức vô nghiệm để đỡ phải chia trường hợp. Lại nhận thấy $x-12=\left(\sqrt{x+4}-4\right)\left(\sqrt{x+4}+4\right)$, nên sẽ nhân thêm $\left(\sqrt{x+4}+4\right)$ vào là sẽ chia căn được.

- Khi đó kết quả phép chia là:

$$\frac{\left(\sqrt{x+4}+4\right)\left(3\sqrt{x+4}+3\sqrt{5x+4}+4x^2-18x-12\right)}{\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{5x+4}-4\right)\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{5x+1}+2\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(7x+12+(2x+6)\sqrt{x+4}+9\sqrt{5x+4}+3\sqrt{(x+4)(5x+4)}\right)$$

- **Cách 2:** Liên hợp:

+ Xét $x\neq 5; x\neq 9$ ta có:

$$3\sqrt{x+4}+3\sqrt{5x+4}+4x^2-18x-12=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x+4}+x^2-4x-2\right)+3\sqrt{5x+4}+x^2-6x-6=0$$

$$\Rightarrow \frac{3x\left(x^2-3x-3\right)(5-x)}{\sqrt{x+4}-x^2+4x+2}+\frac{x\left(x^2-3x-3\right)(9-x)}{3\sqrt{5x+4}-x^2+6x+6}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{21}}{2}\end{array}\right. \\ f(x)=\dfrac{3(5-x)}{\sqrt{x+4}-x^2+4x+2}+\dfrac{9-x}{3\sqrt{5x+4}-x^2+6x+6}=0 \end{array}\right.$$

+ Điều kiện có nghiệm của phương trình là $x\in\left[\frac{9-\sqrt{129}}{4};\frac{9+\sqrt{129}}{4}\right]$.

+ Xét $x\in(-0,6;5)$. Nhận thấy

1. $\begin{cases}5-x>0\\ -x^2+4x+2>0\end{cases}\Rightarrow \dfrac{3(5-x)}{\sqrt{x+4}-x^2+4x+2}>0$
2. $\begin{cases}9-x>0\\ -x^2+4x+2>0\end{cases}\Rightarrow \dfrac{9-x}{3\sqrt{5x+4}-x^2+6x+6}>0$.

$$\Rightarrow \frac{3(5-x)}{\sqrt{x+4}-x^2+4x+2}+\frac{9-x}{3\sqrt{5x+4}-x^2+6x+6}>0\forall x\in(-0,6;5) .$$

+ Xét $x\in(5;6)$. Đặt $y=\sqrt{x+4}-x^2+4x+2\Rightarrow y'=\dfrac{2\left(1-x\sqrt{x+4}\right)}{2\sqrt{x+4}}+4-\dfrac{3}{2}x<0\forall x\in(5;6)$.

$\Rightarrow y$ nghịch biến trên $(5;6)$. Mà $y(5)=0 \Rightarrow y \le 0$. Mặt khác

$5-x<0 \Rightarrow \dfrac{3(5-x)}{\sqrt{x+4}-x^2+4x+2}>0$. Cũng có $\begin{cases} 9-x>0 \\ -x^2+4x+2>0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{9-x}{3\sqrt{5x+4}-x^2+6x+6}>0$.

Nên $f(x)>0 \forall x \in (5;6) \Rightarrow$ Đpcm.

Thử lại thấy $x=0;\ x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$ thỏa mãn phương trình.

- **Cách 3:** Liên hợp + hàm số:

$$3\sqrt{x+4}+3\sqrt{5x+4}+4x^2-18x-12=0$$
$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x+4}-x+1\right)+3\left(\sqrt{5x+4}-x-1\right)+4\left(x^2-3x-3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-3\left(x^2-3x-3\right)}{\sqrt{x+4}+x-1}+\frac{-3\left(x^2-3x-3\right)}{\sqrt{5x+4}+x+1}+4\left(x^2-3x-3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x-3=0 \\ f(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{x+4}+x-1}-\dfrac{3}{\sqrt{5x+4}+x+1}+4=0 \end{array}\right.$$

+ Có $f'(x)=\dfrac{6\sqrt{x+4}+3}{2\sqrt{x+4}\left(\sqrt{x+4}+x-1\right)^2}+\dfrac{6\sqrt{5x+4}+15}{2\sqrt{5x+4}\left(\sqrt{5x+4}+x+1\right)^2}>0$.

Nên $f(x)$ đồng biến trên $\left[-\dfrac{5}{4};+\infty\right)$. Lại có $f(0)=0$ nên $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=0;\ x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$

Bài 6: Giải phương trình: $2(5x-3)\sqrt{x+1}+5(x+1)\sqrt{3-x}=3(5x+1)$

Giải

- Đầu tiên ta tìm được nghiệm là $x=3;\ x=0,44;\ x=-0,2$. Khi đó giả sử nhân tử có dạng $\sqrt{x+1}+a\sqrt{3-x}+bx+c$. Thay 3 nghiệm vào ta tìm được nhân tử là $8\sqrt{x+1}-4\sqrt{3-x}-5x-1$.
- Tiến hành chia căn ta được :

$$\frac{2(5x-3)\sqrt{x+1}+5(x+1)\sqrt{3-x}-3(5x+1)}{8\sqrt{x+1}-4\sqrt{3-x}-5x-1}=-\left(2\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}+1\right)$$

- Vậy bài toán đã được giải quyết.

Bài 7: Giải phương trình:

$$x^3+x^2+x\left(1+\sqrt{x^4+x^2+1}\right)=(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)$$

http://k2pi.net.vn

Giải

- Đầu tiên ta sẽ đi tìm nghiệm của phương trình, nhưng tuy nhiên được nghiệm rất lẻ, không thể tìm nhân tử được ta sẽ nghĩ tới việc tìm nghiệm đổi dấu. Đổi dấu 1 trong 2 căn đều thu được nghiệm $x=0$. Nên có nhân tử là $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}$.
- Thực hiện phép chia ta được:

$$\frac{x^3+x^2+x\left(1+\sqrt{x^4+x^2+1}\right)-(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=x\sqrt{x^2+x+1}-x-1$$

- Đến đây sẽ giải phương trình bậc 4 nghiệm căn trong căn. Ta được:

$$x\sqrt{x^2+x+1}-x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+x+1}=x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)\ge 0 \\ x^4+x^3-2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)\ge 0 \\ \left[x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]\left[x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\sqrt{\frac{-1+3\sqrt{5}}{2}}}{2} \\ x=\dfrac{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\sqrt{\frac{-1+3\sqrt{5}}{2}}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\sqrt{\frac{-1+3\sqrt{5}}{2}}}{2}$$

- Ngoài cách chia căn như trên nếu ai tinh ý có thể biến đổi như sau:

$$x^3+x^2+x\left(1+\sqrt{x^4+x^2+1}\right)=(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2+x+1+\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}\right)=(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+x+1}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)=(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(x\sqrt{x^2+x+1}-x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+x+1}-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}+\sqrt{\frac{-1+3\sqrt{5}}{2}}}{2}$$

Bài 9: Giải phương trình: $\dfrac{(x-4)\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{4-x}+x-5}=\dfrac{2+(2x-4)\sqrt{x-2}}{x-1}$

Đề nghị Olympic 30/4/2014 – Chuyên Lê Quý Đôn – Bình Định

Giải

- **Cách 1: Phân tích nhân tử trực tiếp.**

Ta vẫn sẽ làm như bình thường, quy đồng lên và phân tích nhân tử ta được:

$$\frac{(x-4)\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{4-x}+x-5}=\frac{2+(2x-4)\sqrt{x-2}}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left((x-4)\sqrt{x-2}-1\right)=\left(2+(2x-4)\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{4-x}+x-5\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}-2\right)\left((2x-1)\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}+(4-x)\sqrt{x-2}\sqrt{4-x}+x^2-6x+14\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}-2=0 \Leftrightarrow x=3$$

- **Cách 2: Phân tích nhân tử từng thành phần đưa về phương trình đơn giản hơn.**

Ta có:

$$\frac{(x-4)\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{4-x}+x-5}=\frac{2+(2x-4)\sqrt{x-2}}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-3-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+2}+1\right)}{\sqrt{4-x}+x-5}=\frac{\left(\sqrt{x-2}+1\right)\left(-2\sqrt{x-2}+2x-2\right)}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3-\sqrt{x-2}}{\sqrt{4-x}+x-5}=\frac{-2\sqrt{x-2}+2x-2}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x-3-\sqrt{x-2}\right)-\left(\sqrt{4-x}+x-5\right)\left(-2\sqrt{x-2}+2x-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}-2\right)\left((x-5)\sqrt{x-2}+(3-x)\sqrt{4-x}+\sqrt{x-2}\sqrt{4-x}+x+4\right)=0$$

- **Cách 3: Đặt ẩn phụ.**

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x-2} \\ b=\sqrt{4-x} \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=2$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1+(4-x)\sqrt{x-2}}{1+(4-x)-\sqrt{4-x}}=\frac{2+2(x-2)\sqrt{x-2}}{(x-2)+1} \Leftrightarrow \frac{1+ab^2}{1+b^2-b}=\frac{2+2a^3}{a^2+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+ab^2\right)\left(a^2+1\right)=\left(2+2a^3\right)\left(b^2-b+1\right)$$

$$\Leftrightarrow a^2+1+a^3b^2+ab^2=2b^2-2b+2+2a^3b^2-2a^3b+2a^3$$

$$\Leftrightarrow \left(a^3+a^3b^2-2a^3b\right)+2b^2-2b+1+a^3-a^2-ab^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[a^3\left(b^2-2b+1\right)+\left(b^2-2b+1\right)\right]+b^2-ab^2+a^3-a^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(b^2-2b+1\right)\left(a^3+1\right)+2-a^2-a\left(2-a^2\right)+a^3-a^2=0 \ \left(b^2=2-a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow (b-1)^2\left(a^3+1\right)+2(a-1)\left(a^2-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)^2\left(a^3+1\right)+2(a-1)^2(a+1)=0 \ (*)$$

Do $a,b\ge 0 \Rightarrow \begin{cases} a+1>0 \\ a^3+1>0 \end{cases}$, nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=1 \\ \sqrt{4-x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$

Bài 10: Giải phương trình: $\left(1+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=x\sqrt{x}$

Giải

- Tiến hành liên hợp ngược ta được:

$$\left(1+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=x\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+1}+x-1\right)=\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}+x-1=\left(\sqrt{x+1}-1\right)\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}+x+\sqrt{x}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+x+\sqrt{x}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x+\sqrt{x}-1\right)\left(x-\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}}+x+\sqrt{x}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}=-x+\sqrt{x}+1\left(*\right) \end{array}\right.$$

- Giải $(*)$ ta được:

$$\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+x}=-x+\sqrt{x}+1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2x+1}=-x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2+x}+1$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-2x+1=\left(-x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2+x}+1\right)^2$$
$$\Leftrightarrow -2\left(\sqrt{x}-\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x}-x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=0$$

Bài 11: Giải phương trình:

$$\left(3x-4\right)\sqrt{1-x^2}+\left(5x-3\right)\sqrt{x-2}+15x^2-29x+12+\sqrt{1-x^2}\sqrt{x-2}=0$$

Giải

- Nhìn phát thấy ngay phương trình vô nghiệm do ĐKXĐ không thỏa mãn.
- Vậy câu hỏi đặt ra là có thể phân tích phương trình vô tỷ này hay không. Câu trả lời là có!
- Trước tiên ta nhớ rằng $\sqrt{z}=\sqrt{-z}i$, đây là một kiến thức của số phức, ứng dụng của nó rất hay trong
  việc tìm nhân tử không thỏa mãn ĐKXĐ.
- Bây giờ đơn giản là ta sẽ đổi dấu trong căn của phương trìnhđầu. Trước tiên cứ đổi dấu của $\sqrt{x-2} \Rightarrow \sqrt{2-x}$. SOLVE ta được nghiệm $x=1$. Đổi dấu trước căn $\sqrt{2-x}$ ta được nghiệm $x=\frac{14}{9}$. Do đó nhân tử của phương trình đổi dấu trong căn là $\sqrt{2-x}+3x-4$. Trả lại căn ta được nhân tử ban đầu là $\sqrt{x-2}+3x-4$.
- Chia căn ta được kết quả:

$$\frac{\left(3x-4\right)\sqrt{1-x^2}+\left(5x-3\right)\sqrt{x-2}+15x^2-29x+12+\sqrt{1-x^2}\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+3x-4}=\sqrt{1-x^2}+5x-3$$

- Vậy lời giải là:

$$\left(3x-4\right)\sqrt{1-x^2}+\left(5x-3\right)\sqrt{x-2}+15x^2-29x+12+\sqrt{1-x^2}\sqrt{x-2}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1-x^2}+5x-3\right)\left(\sqrt{x-2}+3x-4\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-x^2}+5x-3=0\ \left(PTVN_0\right) \\ \sqrt{x-2}+3x-4=0\ \left(PTVN_0\right) \end{array}\right.$$

Bài 12: Giải phương trình: $\dfrac{\left(6-x\right)\left(x^3+x^2+x\right)}{\left(x+1\right)\left(\sqrt{x-2}+2\right)\sqrt{x+1}}=\left(8x-14\right)\left(2\sqrt{x-2}-x+2\right)$

Đề thi thử THPT Quốc Gia – Sở GD&ĐT tỉnh Bình Phước

Giải

- Ta có:

$$\frac{(6-x)\left(x^3+x^2+x\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x-2}+2\right)\sqrt{x+1}}=(8x-14)\left(2\sqrt{x-2}-x+2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x-2}-2\right)\left(\sqrt{x-2}+2\right)\left(x^3+x^2+x\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x-2}+2\right)\sqrt{x+1}}=(8x-14)\left(\sqrt{x-2}-2\right)\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-2\right)\left[\frac{x^3+x^2+x}{(x+1)\sqrt{x+1}}-(8x-14)\sqrt{x-2}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=2\Leftrightarrow x=6\\ \dfrac{x^3+x^2+x}{(x+1)\sqrt{x+1}}=(8x-14)\sqrt{x-2}\ (*)\end{array}\right.$$

- Giải $(*)$ ta được:

$$\frac{x^3+x^2+x}{(x+1)\sqrt{x+1}}=(8x-14)\sqrt{x-2}\Rightarrow \frac{\left(x^3+x^2+x\right)^2}{(x+1)^3}=(8x-14)^2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow \left(3x^2-4x-8\right)\left(21x^4+26x^3+53x^2-42x-49\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-4x-8=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}\ (t/m)\\ x=\dfrac{2-2\sqrt{7}}{3}\ (L)\end{array}\right.$$

Vì $f(x)=21x^4-26x^3-53x^2+42x+49=21\left(x^2-\frac{13}{21}x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{41}{21}\left(x+\frac{63}{82}\right)^2+\frac{49}{82}>0$

- Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x=6\vee x=\dfrac{2+2\sqrt{7}}{3}$

Bài 13: Giải phương trình: $\sqrt{7x^2+20x-86}+x\sqrt{31-4x-x^2}=3x+2$

Đề thi thử THPT Quốc Gia – Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An – Lần 1 - 2016

Giải

- Ta có:

$$\sqrt{7x^2+20x-86}+x\sqrt{31-4x-x^2}=3x+2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7x^2+20x-86}=3x-2-x\sqrt{31-4x-x^2}$$

$$\Rightarrow 7x^2+20x-86=\left(3x-2-x\sqrt{31-4x-x^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{31-4x-x^2}-1\right)\left(\sqrt{31-4x-x^2}-4\right)\left(\sqrt{31-4x-x^2}+x^2+7\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{31-4x-x^2}-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2+\sqrt{34}\ (t/m)\\ x=-2-\sqrt{34}\ (L)\end{array}\right.\\ \sqrt{31-4x-x^2}-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2-\sqrt{19}\ (t/m)\\ x=-2+\sqrt{19}\ (L)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

- Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=-2+\sqrt{34}\vee x=-2-\sqrt{19}$

Bài 14: Giải phương trình: $\left(5x^2-5x+10\right)\sqrt{x+7}+\left(2x+6\right)\sqrt{x+2}=x^3+13x^2-6x+32$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 lần 2 – THPT Lộc Ninh – Bình Phước

Giải

➤ **Cách 1: Liên hợp + Chứng minh vô nghiệm.**

- Ta có:

$$\left(5x^2-5x+10\right)\sqrt{x+7}+\left(2x+6\right)\sqrt{x+2}=x^3+13x^2-6x+32$$
$$\Leftrightarrow \left(5x^2-5x+10\right)\left(\sqrt{x+7}-3\right)+\left(2x+6\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)-\left(x-2\right)\left(x^2+5\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left[x^2+5-\frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}-\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ f\left(x\right)=x^2+5-\dfrac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}-\dfrac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}=0 \end{array}\right.$$

- Để ý thấy: $\sqrt{x+7}+3\ge\sqrt{5}+3>5$ và $\sqrt{x+2}+2\ge 2$.
- Khi đó: $f\left(x\right)>g\left(x\right)=x^2+5-\dfrac{5x^2-5x+10}{5}-\dfrac{2x+6}{2}=0$
- Nên $f\left(x\right)>0\Rightarrow \text{PT}: f\left(x\right)=0$ vô nghiệm!
- Ngoài ra còn một cách chứng minh nữa đọc ở phần chứng minh vô nghiệm!

➤ **Cách 2: Phân tích nhân tử.**

- Như ở phần trên ta đã biết cách tìm nhân tử vô nghiệm bằng phương pháp đổi dấu trong căn. Áp dụng vào bài này ta sẽ tìm được 1 nhân tử là $\sqrt{x+7}-2$. Do đó sẽ phân tích phương trình thành:

$$\left(5x^2-5x+10\right)\sqrt{x+7}+\left(2x+6\right)\sqrt{x+2}=x^3+13x^2-6x+32$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{x+7}-2\right)\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x+2}-1\right)$$
$$\left(\left(x^2+11\right)\sqrt{x+2}+\left(x^2+4\right)\sqrt{x+7}+3\sqrt{x+2}\sqrt{x+7}-x^2+3x+2\right)\le 0$$
$$\Leftrightarrow x=2$$

- Để ý thấy:

$$\left(x^2+11\right)\sqrt{x+2}+\left(x^2+4\right)\sqrt{x+7}+3\sqrt{x+2}\sqrt{x+7}-x^2+3x+2$$
$$>\left(x^2+4\right)\sqrt{x+7}-x^2+3x+2>2\left(x^2+4\right)-x^2+3x+2>0$$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 15: Giải phương trình: $x-\sqrt{x}-2=\sqrt{x^3-4x^2+5x}-\sqrt{x^3-3x^2+4}$

Giải

- Ta có:

$$x-\sqrt{x}-2=\sqrt{x^3-4x^2+5x}-\sqrt{x^3-3x^2+4}$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)=\frac{-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\sqrt{x^3-4x^2+5x}+\sqrt{x^3-3x^2+4}}$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)=0\Leftrightarrow x=4 \\ 1=\dfrac{-\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x^3-4x^2+5x}+\sqrt{x^3-3x^2+4}}\ (*) \end{array}\right.$$

- Giải $(*)$ ta có điều kiện có nghiệm là $x\in[0;1]$. Ta có:

$$1=\frac{-\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x^3-4x^2+5x}+\sqrt{x^3-3x^2+4}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x^2-4x+5}+1\right)+\sqrt{(x+1)(x-2)^2}+x-2=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4x+5}-1}-\frac{x(x-2)}{\sqrt{x+1}+1}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\sqrt{x}\cdot\left[\underbrace{\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}-1}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+1}}_{<0\forall x\in[0;1]}\right]=0\Leftrightarrow x=0$$

Bài 16: Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+4}-1\right)\sqrt{x+2}\ge\frac{x^3+4x^2+3x-2(x+3)\sqrt[3]{2x+3}}{\left(\sqrt[3]{2x+3}-3\right)\left(\sqrt{x+4}+1\right)}$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 – Hà Huy Tập – Nghệ An

Giải

- Ta có:

$$\left(\sqrt{x+4}-1\right)\sqrt{x+2}\ge\frac{x^3+4x^2+3x-2(x+3)\sqrt[3]{2x+3}}{\left(\sqrt[3]{2x+3}-3\right)\left(\sqrt{x+4}+1\right)}$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+4}-1\right)\left(\sqrt{x+4}+1\right)\sqrt{x+2}\ge\frac{x^3+4x^2+3x-2(x+3)\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[3]{2x+3}}$$
$$\Leftrightarrow(x+3)\sqrt{x+2}\ge\frac{x^3+4x^2-3x-18+6(x+3)-2(x+3)\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[3]{2x+3}-3}$$
$$\Leftrightarrow(x+3)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\ge\frac{x^3+4x^2-3x-18}{\sqrt[3]{2x+3}-3}$$
$$\Leftrightarrow(x+3)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\ge\frac{(x+3)^2\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)}{\sqrt[3]{2x+3}-3}$$
$$\Leftrightarrow 1\ge\frac{(x+3)\left(\sqrt{x+2}-2\right)}{\sqrt[3]{2x+3}-3}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{2x+3}+2x+3\ge(x+3)\sqrt{x+2}$$
$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{2x+3}+\left(\sqrt[3]{2x+3}\right)^3\ge\left(\sqrt{x+2}\right)^3+\left(\sqrt{x+2}\right)\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{2x+3}\right)\ge f\left(\sqrt{x+2}\right)$$

- Xét $f(t)=t^3+t$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Có $f'(t)=3t^2+1>0$. Nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Khi đó:

$$\text{Bpt}\Leftrightarrow\sqrt[3]{2x+3}\ge\sqrt{x+2}$$
$$\Leftrightarrow 2x+3\ge\sqrt{(x+2)^3}\Leftrightarrow\begin{cases}-x^3-2x^2+1\ge0\\ x\ge-\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[-1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

- Bài tập tương tự [THPT Triệu Sơn 1 – Thanh Hóa]: $\sqrt{x+1}=\frac{x^2-x-2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-3}$

Bài 17: Giải phương trình: $\dfrac{(2x-1)\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x}+\left(2+\sqrt{x}\right)\sqrt{1-x}+1-x}=1$

Giải

- Xét $x<\dfrac{1}{2}$, hiển nhiên phương trình vô nghiệm.
- Xét $x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ ta có:

$$\frac{(2x-1)\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x}+\left(2+\sqrt{x}\right)\sqrt{1-x}+1-x}=1$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{x+3}=2\sqrt{x}+\left(2+\sqrt{x}\right)\sqrt{1-x}+1-x$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\left(\sqrt{1-x}\right)^2\left(4x^2+12x-3\right)}{(2x-1)\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}}=\sqrt{1-x}\left(2+\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\left[\frac{-\left(4x^2+12x-3\right)\sqrt{1-x}}{(2x-1)\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}}-2-\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}=0\Leftrightarrow x=1$$

- Chú ý: $\dfrac{-\left(4x^2+12x-3\right)\sqrt{1-x}}{(2x-1)\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}}-2-\sqrt{x}-\sqrt{1-x}<0\forall x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 18: Giải phương trình: $2\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}=\dfrac{7x^2-2x}{x-3+\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}$

Giải

- Bài này nhìn thoáng qua thấy khủng bố nhưng rất là dễ, để ý nhé!
- Ta có:

$$2\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}=\frac{7x^2-2x}{x-3+\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}=\frac{x\left(2\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}\right)\left(2\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}\right)}{x-3+\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}$$

$$\Leftrightarrow x-3+\sqrt{x-1}+\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}=x\left(2\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x-3+\sqrt{x-1}\right)+\left(\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}-x\left(2\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)+\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{x+2}\sqrt{2x}+3x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{3x+1+\sqrt{2x(x+2)}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+1}-\dfrac{3x+1+\sqrt{2x(x+2)}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}=0 \end{array}\right.$$

- Để ý thấy:

6. $\dfrac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+1}-2=\dfrac{-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}<0$.

7. $\dfrac{3x+1+\sqrt{2x(x+2)}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}-2=\dfrac{3x+1+\sqrt{2x(x+2)}-2\sqrt{2x}-2\sqrt{x+2}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+2}}$

8. Xét bất đẳng thức: $\sqrt{2x}\left(\sqrt{x+2}-2\right)\ge 2\sqrt{x+2}-3x-1$

+ Do $2\sqrt{x+2}-3x-1=\dfrac{-9x^2-2x+7}{2\sqrt{x+2}+3x+1}<0\forall x\in\left[1;+\infty\right)$. Nên với $x>2$ thì bđt luôn đúng.

+ Xét $x\in\left[1;2\right]$ có:

$$\sqrt{2x}\left(\sqrt{x+2}-2\right)\ge 2\sqrt{x+2}-3x-1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x}\le\frac{2\sqrt{x+2}-3x-1}{\sqrt{x+2}-2}$$
$$\Leftrightarrow 7x^2-2x+9\ge(4x+4)\sqrt{x+2}$$
$$\Leftrightarrow 49x^4-44x^3+66x^2-116x+49\ge 0$$
$$\Leftrightarrow 49(x-1)^4+152(x-1)^3+228(x-1)^2+80(x-1)+4\ge 0$$

+ Dễ thấy bđt cuối luôn đúng nên có đpcm. Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 19: Giải phương trình: $\dfrac{x^4+3x^3}{\sqrt{x+3}+1}=\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x+2}\right)$

Giải

- Ta có:

$$\frac{x^4+3x^3}{\sqrt{x+3}+1}=\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+5x+6}-\sqrt{x+2}\right)$$
$$\Leftrightarrow x^4+3x^3=\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x+3}-1\right)\left(\sqrt{x+3}+1\right)\sqrt{x+2}$$
$$\Leftrightarrow x^4+3x^3=\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x+2}\right)^3$$
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}+1\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(x\sqrt{x+2}+x^3+3x^2+x+2\right)=0$$

- Điều kiện có nghiệm của phương trình là $x^4+3x^3\ge 0\Leftrightarrow x^3(x+3)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$
- Với ĐK trên ta có $x\sqrt{x+2}+x^3+3x^2+x+2>0$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài 20: Giải phương trình: $\dfrac{x^2+3x+3+\sqrt{x+1}}{x+5+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}}=\sqrt[4]{\dfrac{x+4}{(x+1)^2}}$

Giải

- Nhìn bài này hình thức khá là chầy cối. Ta sẽ tìm được nghiệm $x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$, nhưng tuy nhiên $\sqrt{x+4}$ không thể biểu diễn qua x được nên chắc chắn đến đây sẽ bế tắc do bài này không như những bài trên có thể liên hợp ngược để làm giảm độ cồng kềnh. Hãy để ý thấy với $x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$ thì $\dfrac{x^2+3x+3+\sqrt{x+1}}{x+5+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}}=1$, lúc này đã khử được $\sqrt{x+4}$ nên ta có lời giải sau:

- Ta có:

$$\frac{x^2+3x+3+\sqrt{x+1}}{x+5+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}}=\sqrt[4]{\frac{x+4}{(x+1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+3x+3+\sqrt{x+1}}{x+5+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}}-1+1-\sqrt[4]{\frac{x+4}{(x+1)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x+1-\sqrt{x+4}\right)\left(\sqrt{x+4}+x+2\right)}{x+5+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}}+\frac{x+1-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+4}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1-\sqrt{x+4}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} \\ \underbrace{\dfrac{\sqrt{x+4}+x+2}{x+5+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+4}\right)}}_{>0\forall x\in[1;+\infty)}=0 \end{array}\right.$$

Bài 21:Giải phương trình: $\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)=\frac{9x^2-8x+4}{3x+2\sqrt{2x-1}}$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 – THPT Trần Hưng Đạo – Đăknông

Giải

- Ta có:

$$\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)=\frac{9x^2-8x+4}{3x+2\sqrt{2x-1}}$$

$$\Leftrightarrow \left(2-\frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)=\frac{\left(3x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(3x+2\sqrt{2x-1}\right)}{3x+2\sqrt{2x-1}}$$

$$\Leftrightarrow \left(2-\frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)=3x-2\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)=3x^2-2x\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow 2(2x-3)\sqrt{x-1}+2x\sqrt{2x-1}-3x^2-2x+3=0$$

$$\Leftrightarrow 2(2x-3)\sqrt{x-1}+2x\left(\sqrt{2x-1}-1\right)-(x-1)(3x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left[2(2x-3)+\frac{4x\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}-(3x+3)\sqrt{x-1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f(x)=2(2x-3)+\dfrac{4x\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}+1}-(3x+3)\sqrt{x-1}=0 \end{array}\right.$$

- Để ý thấy $\sqrt{2x-1}>\sqrt{x-1}$ nên :

$$f(x)<2(2x-3)+\frac{4x\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}-(3x+3)\sqrt{x-1}=\frac{(5x-9)\sqrt{x-1}-3x^2+4x-3}{\sqrt{x-1}+1}$$

- Với $x<\frac{9}{5}$ thì hiển nhiên $f(x)<0$.
- Với $x\geq\frac{9}{5}$ ta có:

$$f(x)=\frac{-9x^4+49x^3-149x^2+195x-90}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)\left((5x-9)\sqrt{x-1}+3x^2-4x+3\right)}$$

$$=\frac{-9\left(x^2-\frac{49}{18}x+\frac{44}{25}\right)^2-\frac{45563}{900}x^2+\frac{2719}{25}x-\frac{38826}{625}}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)\left((5x-9)\sqrt{x-1}+3x^2-4x+3\right)}<0$$

- Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$
- Cách 2:

Ta có:

$$\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)=\frac{9x^2-8x+4}{3x+2\sqrt{2x-1}}$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)=3x^2-2x\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-1-\sqrt{x-1}\right)^2+\left(x-\sqrt{2x-1}\right)^2+2\left(\sqrt{x-1}+x-1\right)=0$$

Vế trái luôn dương nên bài toán đã được giải quyết!

C. KỸ THUẬT CHỨNG MINH VÔ NGHIỆM.

I. PHƯƠNG TRÌNH ĐA THỨC.

Phương trình bậc 4.

a) Sử dụng tính chất tam thức bậc 2.

Nền tảng: Ta sẽ phân tích phương trình ban đầu thành $\left(x^2+\frac{ax}{2}+m\right)^2+f(x)$ trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc 2 luôn lớn hơn 0 với mọi $x\in\mathbb{R}$

Ví dụ: Chứng minh phương trình sau vô nghiệm: $x^4+x^3+3x^2+x+7=0$

- **Bước 1:** Đầu tiên ta biến đổi phương trình theo tham số m như sau:

$$x^4+x^3+3x^2+x+7=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{x}{2}+m\right)^2+\left(\frac{11}{4}-2m\right)x^2+(1-m)x+7-m^2=0$$

Nhiều bạn sẽ đặt ra câu hỏi tại sao lại là $x^2+\frac{x}{2}+m$. Rất đơn giản, khi ta khai triển biểu thức $\left(x^2+\frac{x}{2}+m\right)^2$ sẽ xuất hiện ngay x^3 vì $2.x^2.\frac{x}{2}=x^3$. Hiểu rồi chứ, các bài khác cũng tách tương tự được như vậy, chỉ có điều ta phải đưa nó về dạng tổng quát: $x^4+2ax^3+bx^2+cx+d=0$ thì mới tách thành như trên.

- **Bước 2:** Ta tính Δ theo tham số m:

$$\Delta=(1-m)^2-4\left(\frac{11}{4}-2m\right)\left(7-m^2\right)$$

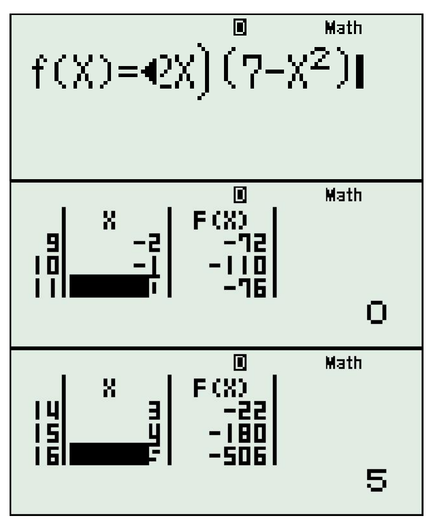
- **Bước 3:** Ta thấy phương trình ban đầu vô nghiệm thì phương trình

$$\left(\frac{11}{4}-2m\right)x^2+(1-m)x+7-m^2=0$$

Phải vô nghiệm. Để phương trình này vô nghiệm thì $\begin{cases}\Delta<0\\ \frac{11}{4}-2m>0\end{cases}$

- Dùng MODE 7 ,nhập hàm sau vào máy:

$$F(X)=(1-X)^2-4\left(\frac{11}{4}-2X\right)\left(7-X^2\right)$$



- $\text{Start}=-10$
- $\text{End}=10$
- $\text{Step}=1$

Sau đó ta tìm các giá trị X làm $F(X)<0\,\&\,\frac{11}{4}-2X>0$

Nhìn vào bảng ta thấy rất nhiều giá trị làm $F(X)<0$, nhưng tuy nhiên ta phải chọn làm sao cho $\frac{11}{4}-2X>0$ và đó phải là một giá trị bé dễ rút gọn. Với lí do như thế tôi sẽ chọn $X=0$ hay $m=0$

- **Bước 4:** Do biết $m=0$ nên phương trình sẽ trở thành:

$$x^4+x^3+3x^2+x+7=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{11}{4}x^2+x+7=0$$

$$\Leftrightarrow\underbrace{\left(x^2+\frac{x}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\left(x+\frac{2}{11}\right)^2+\frac{76}{11}}_{>0\forall x}=0$$

Nên phương trình vô nghiệm!

b) Sử dụng đạo hàm.

Ta xét phương trình tổng quát: $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$

- **Bước 1:** Đạo hàm vế trái: $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$
- **Bước 2:** Giải phương trình $f'(x)=0$. Nếu :

1. Phương trình có 1 nghiệm thì đây là điểm rơi của bài toán.
2. Phương trình có nhiều nghiệm thì thử xem nghiệm nào làm vế trái nhỏ nhất

- **Bước 3:** Tìm k sao cho:

+ $x^4+ax^3+bx^2+cx+d-\left(x^2+\frac{ax}{2}+k\right)^2>0\forall x$

+ $k\approx -x_0{}^2-\frac{a}{2}x_0$ nhất.

Mục tiêu của phương pháp này tương tự như phương pháp ở trên nhưng có vài điểm tối ưu hơn.

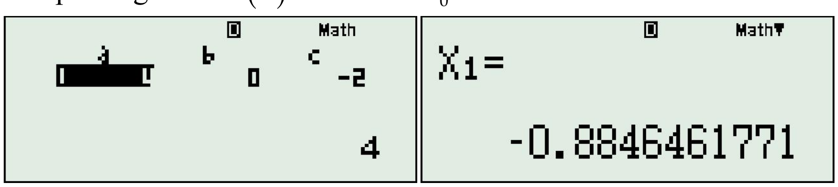
- **Bước 4:** Sau khi ta tìm được k thì chỉ việc lấy :

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d-\left(x^2+\frac{a}{2}x+k\right)^2=mx^2+nx+p>0\forall x$$

Do $f(x)-g(x)=h(x)$ mà trong đó $\begin{cases}h(x)>0\\ g(x)>0\end{cases}$ nên $f(x)>0$. Thế là xong bài!

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $f(x)=x^4-x^2+x+2>0\forall x$

- **Bước 1:** Đạo hàm vế trái $f'(x)=4x^3-2x+1$
- **Bước 2:** Giải phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow x=x_0=-0..8846461771$



- **Bước 3:** Tìm k:

$$k\approx -x_0{}^2-\frac{a}{2}x_0=-0.7825988\Rightarrow k=-0.8=-\frac{4}{5}$$

- **Bước 4:** Ta lấy: $x^4-x^2+x+2-\left(x^2-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{3}{5}x^2+x+1,36>0\forall x$

Do đó phương trình ban đầu vô nghiệm! Nhanh hơn chứ!

Ví dụ 2: Chứng minh rằng : $f(x)=2x^4+x^3-2x^2+x+3>0$

- **Bước 1:** Đạo hàm: $f'(x)=8x^3+3x^2-4x+1\Leftrightarrow x=x_0=-1$
- **Bước 2:** Tìm $k=-x_0{}^2-\frac{a}{2}x_0=-\frac{3}{4}$

- **Bước 3:** Lấy $f(x)-2\left(x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{8}(x+1)^2+1$. Xong!

Ví dụ 3: Chứng minh rằng: $f(x)=4x^4+2x^3-2x^2+x+14>0$

- **Bước 1:** Đạo hàm $f'(x)=16x^3+6x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=x_0=-0,7909677904$
- **Bước 2:** Tìm $k\approx -{x_0}^2-\frac{a}{2}x_0\approx -\frac{1}{2}$
- **Bước 3:** Lấy $f(x)-4\left(x^2+\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{4}\left(x+\frac{4}{7}\right)^2+\frac{87}{7}>0\forall x$

Phương trình bậc 6.

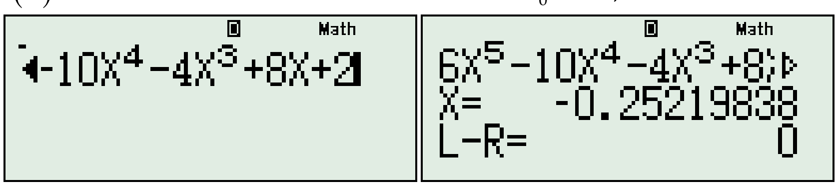
Ta xét phương trình tổng quát sau: $f(x)=x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$

- Ta sẽ thêm bớt biểu thức: $\left(x^3+\frac{a}{2}x^2+mx+n\right)^2$
- Lấy $f(x)-\left(x^3+\frac{a}{2}x^2+mx+n\right)^2=\left(b-\frac{a^2}{4}-2m\right)x^4+...$
- Giải phương trình $f'(x)=0\Leftrightarrow x=x_0$ thỏa mãn $\min_{\mathbb{R}} f(x)=f(x_0)$
- Tìm m thỏa mãn $\begin{cases} m\in\mathbb{Q} \\ b-\frac{a^2}{4}-2m>0 \end{cases}$, thông thường ta sẽ cho $b-\frac{a^2}{4}-2m=1$
- Tìm n thỏa mãn $\begin{cases} n\in\mathbb{Q} \\ {x_0}^3+\frac{a}{x}{x_0}^2+mx_0+n\approx 0 \end{cases}$
- Khi tìm được m,n bài toán coi như được giải quyết!

Sau đây là 2 ví dụ để tìm hiểu rõ cách làm.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $f(x)=x^6-2x^5-x^4+4x^2+2x+1>0$

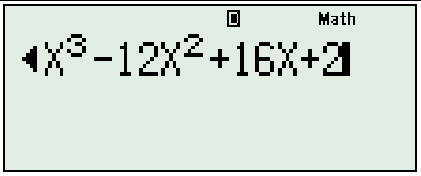
- Ta có $f'(x)=6x^5-10x^4-4x^3+8x+2=0\Leftrightarrow x=x_0=-0,25219838$

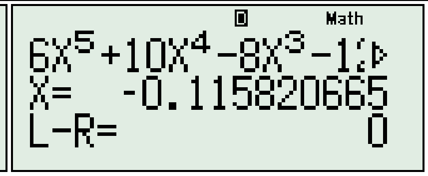


- Lấy $f(x)-\left(x^3-x^2+mx+n\right)^2=(-2-2m)x^4+...$
- Ta tìm m thỏa mãn $-2-2m=1\Leftrightarrow m=-\frac{3}{2}$
- Ta tìm n thỏa mãn ${x_0}^3-{x_0}^2-\frac{3}{2}x_0+n=0\Leftrightarrow n=-\frac{1}{4}$
- Lấy $f(x)-\left(x^3-x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\right)^2=\left(x^2-\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{16}x^2+\frac{11}{16}>0$
- Vậy bài toán đã đượcgiải quyết!

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $f(x)=x^6+2x^5-2x^4-4x^3+8x^2+2x+12>0$

- Ta có $f'(x)=6x^5+10x^4-8x^3-12x^2+16x+2=0\Leftrightarrow x=x_0=-0,115820665$

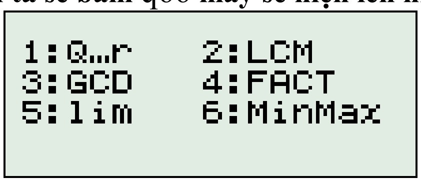


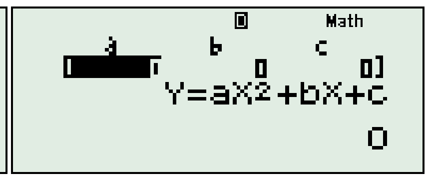


- Lấy $f(x)-\left(x^3+x^2+mx+n\right)^2=(-3-2m)x^4+...$
- Ta tìm m thỏa mãn $-3-2m=1 \Leftrightarrow m=-2$
- Ta tìm n thỏa mãn $x_0^{\,3}+x_0^{\,2}-2x_0+n \approx 0 \Leftrightarrow n \approx -\frac{1}{4}$. Để ý thấy $f(x_0) \approx 11,58 > 0$ rất nhiều nên đây là một bài toán khá lỏng lẻo. Do đó ta có thể coi $n=0$ để tiện rút gọn bằng máy tính.
- Lấy $f(x)-\left(x^3+x^2-2x\right)^2=x^4+4x^2+2x+12>0$
- Vậy bài toán đã được giải quyết hoàn toàn

Phương trình bậc chẵn không chặt.

Phương pháp này chỉ hữu ích cho 2 dòng máy VINACAL 570es PLUS II và CASIO 570VN – PLUS bởi vì 2 dòng máy này có tính năng tính min max của 1 tam thức bậc 2. Đối với máy VINACAL thì ta sẽ bấm q66 máy sẽ hiện lên như sau:





Còn máy CASIO VN thì tích hợp trong chức năng giải phương trình bậc 2.

- ### Nội dung

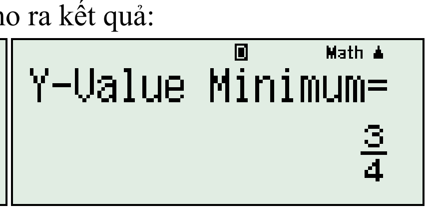
Phương pháp này sẽ dung tính chất cơ bản của tam thức bậc 2 như sau:Xét tam thức $f(x)=ax^2+bx+c$ thì ta luôn có $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}$. Tưởng chừng đơn giản nhưng lại giúp ích khá nhiều!

- ### Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng: $f(x)=x^4+3x^3+3x^2+\frac{3}{4}x+\frac{3}{16}>0\forall x$

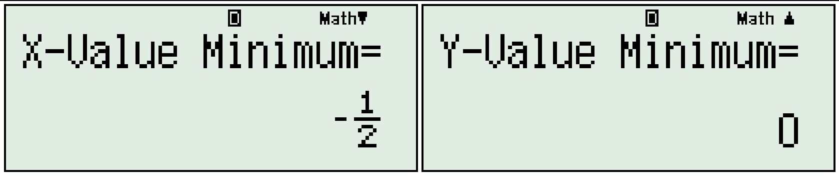
Giải

1. Nếu quen với phương pháp này thì sẽ cho ra kết quả khoảng 15s .
2. Do tôi dùng máy VINACAL nên sẽ khởi động tính năng tìm min max.
3. Nhập vào máy $\boxed{1}\boxed{=}\boxed{3}\boxed{=}\boxed{3}\boxed{=}$, máy sẽ cho ra kết quả:



Vậy ta sẽ có $x^4+3x^3+3x^2=x^2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3x^2}{4}$.

4. Tiếp tục nhập $\boxed{\frac{3}{4}}\boxed{=}\boxed{\frac{3}{4}}\boxed{=}\boxed{\frac{3}{16}}\boxed{=}$ ta lại được kết quả:



Vậy ta sẽ có $\frac{3x^2}{4}+\frac{3}{4}x+\frac{3}{16}=\frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$.

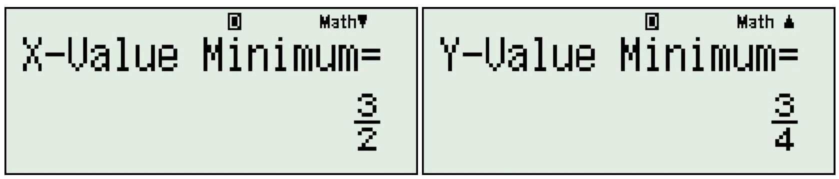
5. Vậy ta được $f(x)=x^2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2>0$. Bài toán đã được giải quyết!

Nhanh chứ!. Đấy vẫn là bình thường ta sẽ chiến một ví dụ tiếp theo!

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $f(x)=x^6-3x^5+3x^4-x^3+2x^2-x+1>0$

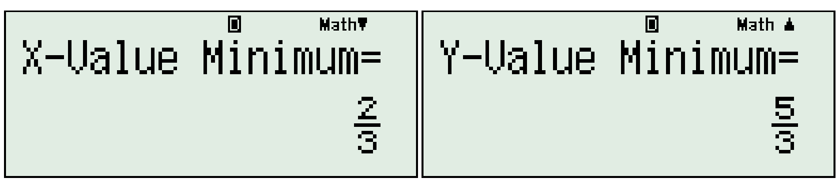
Giải

1. Nhập 3 hệ số đầu vào máy ta sẽ được kết quả:



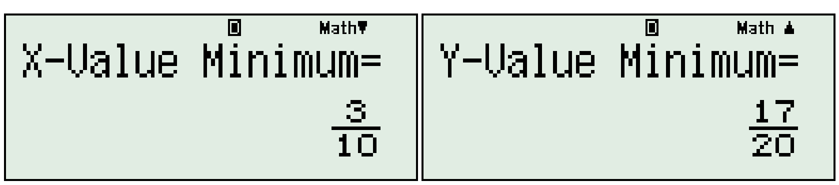
Vậy sẽ có $x^6-3x^5+3x^4=x^4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^4$

2. Nhập vào máy 3 hệ số tiếp theo sẽ được kết quả:



Vậy sẽ có $\frac{3}{4}x^4-x^3+2x^2=\frac{3}{4}x^2\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{3}x^2$

3. Nhập vào máy 3 hệ số cuối sẽ được kết quả:



Vậy sẽ có $\frac{5}{3}x^2-x+1=\frac{5}{3}\left(x-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{17}{20}$

4. Vậy $f(x)=x^4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x^2\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{3}\left(x-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{17}{20}>0\forall x$. Vi diệu chưa □.

Bây giờ sẽ chiến nốt ví dụ cuối cùng!

Ví dụ 3: Chứng minh rằng: $f\left(x\right)=x^8+\frac{2}{3}x^7+3x^6+\frac{4}{3}x^5+\frac{14}{3}x^4-2x^3+3x^2-x+\frac{1}{3}>0\forall x$

Giải

Chỉ cần bấm máy khoảng 1 phút ta sẽ có kết quả dưới đây:

$$f\left(x\right)=x^6\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{26}{9}x^4\left(x+\frac{3}{13}\right)^2+\frac{176}{39}x^2\left(x-\frac{39}{176}\right)^2+\frac{489}{176}\left(x-\frac{88}{489}\right)^2+\frac{119}{489}$$

Tự làm nhé! Cuối cùng hãy thử sức với bài sau đây.

➢ Chứng minh:

$$f\left(x\right)=x^{12}+2x^{11}+18x^{10}-11x^9+18x^8-16x^7+22x^6-17x^5+31x^4-10x^3+20x^2-10x+21>0$$

- **Chú ý rằng:**

1. **Nếu bạn nào không có 2 dòng máy trên thì vẫn có thể tính được như trên nhưng mất thời gian tính $-\frac{b}{2a}\&\frac{-\Delta}{4a}$. Nhưng đừng ngại nhé làm nhiều sẽ tiến bộ.**
2. **Nếu bạn nào có VINACAL hay VN PLUS thì đừng vội mừng, nhiều khi gặp phải những bài hệ số xấu thì cũng phải tính tay thôi vì máy tính không hiển thị được, thế là bằng nhau. Tiêu biểu là bài bên trên tôi cho, vui vẻ nhé.**

Chứng minh trên khoảng.

Đầu tiên xét dạng tổng quát cho các bài toán có điểm rơi không chặt.

Giả sử cần chứng minh phương trình $f\left(x\right)=0$ vô nghiệm trên $\left[b;+\infty\right);\left(-\infty;a\right]$. Ta sẽ CALC sao cho $X+a=1000;X+b=1000$ sau đó khai triển như bình thường. Để hiểu rõ hơn ta sẽ cùng chiến một ví dụ lấy .

Ví dụ 1: Chứng minh rằng : $f\left(x\right)=3x^4-2x^3-2x^2+10x+4>0\forall x\in\left[2;+\infty\right)$

1. ***Cách 1: Hàm số***

- Ta có $f'\left(x\right)=12x^3-6x^2-4x+10\Rightarrow f''\left(x\right)=36x^2-12x-4$
- $f''\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1+\sqrt{5}}{6}\\x=\frac{1-\sqrt{5}}{6}\end{array}\right.$
- Lập bảng biến thiên cho $f'\left(x\right)$ ta được:

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{6}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{6}$		$+\infty$
$f''\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'\left(x\right)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{83+5\sqrt{5}}{9}$	$\searrow$	$\frac{83-5\sqrt{5}}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta có thể thấy phương trình $f'(x)=0$ có 1 nghiệm duy nhất thuộc vào khoảng $(-0,9;-0,8)$ do $f'(-0,9).f'(-0,8)<0$. Giả vờ nghiệm đó là $x=x_0=-0,8997774777$.

Lại tiếp tục lập bảng biến thiên cho $f(x)$ ta được.

x	$-\infty$		x_0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	48	$\nearrow$	$+\infty$

Nhìn vào bảng dễ thấy $f(x)>0\forall x\in[2;+\infty)$. Vậy là hết bài!

2. ***Cách 2: Nhóm thành tổng dựa vào điều kiện.***

Ta dễ dàng nhận thấy $x\ge 2\Rightarrow x-2\ge 0$ nên nảy ra ý tưởng viết $f(x)$ dưới dạng :

$$f(x)=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$$

Và công việc này sẽ nhờ tới sự trợ giúp của thủ thuật CASIO.

- Ta sẽ CALC X sao cho $X-2=1000\Rightarrow X=1002$
- CALC $X=1002$ ta được kết quả $3,022058\times 10^{12}\approx 3(x-2)^4$
- Ghi vào sau $-3(X-2)^4$, CALC $X=1002$ ta được kết quả $2,205807\times 10^{10}\approx 22(x-2)^3$
- Ghi vào sau $-22(X-2)^3$, CALC $X=1002$ ta được kết quả $58074048\approx 58(x-2)^2$
- Ghi vào sau $-58(X-2)^2$, CALC $X=1002$ ta được kết quả $74048=74(x-2)+48$
- Thử lại với $X=\pi$ ta được kết quả là 0. Vậy kết quả luôn đúng
- Vậy $f(x)=3(x-2)^4+22(x-2)^3+58(x-2)^2+74(x-2)+48>0\forall x\in[2;+\infty)$
- Thế là bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $f(x)=x^5-x^4-x^3+4x^2+6x+1<0\forall x\le -1$

Giải

- Đúng như những bước làm bên trên ta sẽ tách thành:

$$f(x)=(x+1)^5-6(x+1)^4+13(x+1)^3-17(x+1)^2+20(x+1)-10$$

- Để ý thấy với $x\le -1\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)^5\le 0\\13(x+1)^3\le 0\\20(x+1)\le 0\end{cases}\Rightarrow f(x)<0\forall x\in(-\infty;-1]$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng: $f(x)=x^7-x^6+x^5-2x^4+8x^3-8x^2+10x-2>0\forall x>1$

Giải

- Do bài này bậc tương đối cao nên ta sẽ cứ làm như bình thường và tìm các hệ số còn lại bằng đồng nhất hệ số.
- Ta có:

$$f(x)=(x-1)^7+6(x-1)^6+16(x-1)^5+23(x-1)^4+a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+f(1)$$

- Lập hệ, cho x lần lượt bằng 1,2,3 sẽ tìm được a,b,c.
- Ta được:

$$f(x)=(x-1)^7+6(x-1)^6+16(x-1)^5+23(x-1)^4+25(x-1)^3+20(x-1)^2+16(x-1)+7$$

- Bài toán đã được giải quyết

Chứng minh trên đoạn.

Bài 1: Chứng minh rằng: $f(x)=x^5-x^4-2x^3-2x^2+5x+3>0\forall x\in[1;+\infty)$

Giải

- Để ý thấy:

1. $f(x)=(x-1)^5+4(x-1)^4+4(x-1)^3-4(x-1)^2-4(x-1)+4$
2. $4(x-1)^4+4(x-1)^3-4(x-1)^2-4(x-1)+4=4\left[\left(x^2-\frac{3x+1}{2}+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{7}{20}\left(x-\frac{9}{7}\right)^2+\frac{58}{175}\right]>0$
3. Nên do đó $f(x)>0\forall x\in[1;+\infty)$ (đpcm). Xong! Hết bài.

Hướng dẫn

- Do ta đang cần chứng minh $f(x)>0\forall x\geq 1$ nên nảy ra ý tưởng tách thành:

$$(x-1)^5+a(x-1)^4+b(x-1)^3+c(x-1)^2+d(x-1)+e$$

- Để tách thành như vậy ta sẽ sử dụng máy tính cầm tay để giải quyết. Để ý thấy với $x\geq 1\Rightarrow x-1\geq 0$ nên ta sẽ nhập vào máy và $\boxed{\text{CALC}}$ sao cho $X-1=1000\Rightarrow X=1001$ và sử dụng kỹ thuật xấp xỉ như khai triển đa thức ta sẽ tách thành dạng như trên. Cụ thể các bước làm như sau:
  1.1. Nhập vào máy biểu thức trên, $\boxed{\text{CALC}}\boxed{X}\boxed{=}\boxed{1000}$ ta được kết quả là $1.0...\times 10^{15}\approx(x-1)^5$.
  1.2. Ghi vào sau $-(X-1)^5$ $\boxed{\text{CALC}}\boxed{X}\boxed{=}\boxed{1000}$ ta được kết quả là $4.0...\times 10^{12}\approx 4(x-1)^4$.
  1.3. Ghi vào sau $-4(X-1)^4$ $\boxed{\text{CALC}}\boxed{X}\boxed{=}\boxed{1000}$ ta được kết quả $3.99...\times 10^9\approx 4(x-1)^3$
  1.4. Ghi vào sau $-4(X-1)^3$ $\boxed{\text{CALC}}\boxed{X}\boxed{=}\boxed{1000}$ ta được kết quả $-4003996\approx -4(x-1)^2$
  1.5. Ghi vào sau $+4(X-1)^2$ $\boxed{\text{CALC}}\boxed{X}\boxed{=}\boxed{1000}$ ta được kết quả $-3996=-4(x-1)+4$.
  1.6.Nhớ rằng để tìm hệ số tự do ta sẽ $\boxed{\text{CALC}}$ giá trị mốc tức là 1 và được kết quả là 4.
- Vậy ta được kết quả $f(x)=(x-1)^5+4(x-1)^4+4(x-1)^3-4(x-1)^2-4(x-1)+4$, thử lại với $x=\pi$ ta thấy kết quả luôn đúng. Đến đây vấn đề đặt ta là tất cả không phải dấu "=" nên ta cần phải xử lý thêm 1 bước nữa. Thật may là biểu thức bậc 4 đằng sau luôn dương nên ta sẽ quy nó về bài toán chứng minh phương trình bậc 4 vô nghiệm với ẩn $y=x-1$. Sử dụng thủ thuật SOS ta sẽ tách nó thành:

$$\begin{aligned}&4(x-1)^4+4(x-1)^3-4(x-1)^2-4(x-1)+4\\&=4\left[\left(x^2-\frac{3x+1}{2}+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{7}{20}\left(x-\frac{9}{7}\right)^2+\frac{58}{175}\right]>0\end{aligned}$$

- Khi đó bài toán đã được giải quyết hoàn toàn!

Nhận xét

Bài toán trên chỉ là dạng đặc biệt do biểu thức $f(x)$ khá là lỏng. Vậy đối với những bài toán chặt khác mà khi tách ra dạng như trên toàn dấu "$-$" thì phải làm như thế nào? Sau đây sẽ là cách giải quyết.

1.1. Thứ nhất ta sẽ cần nới rộng khoảng cần chứng minh ta, có nghĩa là nếu bài toán cho $x \ge 1$ thì ta sẽ chứng minh hẳn nó lớn hơn 0 với $x \ge 3$ chẳng hạn, sau đó sẽ chứng minh nó lớn hơn 0 với $x \in [1;3]$.

1.2. Để chứng minh $f(x) > 0 \forall x \in [1;3]$ ta sẽ sử dụng kỹ thuật chia để trị DAC. (Áp dụng chứng minh vô nghiệm trên đoạn).

1.3. Nội dung phương pháp DAC: Bổ đề: Cho hàm số $f(x,y)$ liên tục và xác định trên $D = [a;b] \times [a;b]$ Hàm số $f(x,y)$ đồng biến theo x và nghịch biến theo y. Khi đó nếu $f(a,b) > 0$ thì $f(x,y) \ge f(a,b) > 0$.

1.4. Chứng minh bổ đề:

+ Do hàm số đồng biến theo x, $x \ge a$ nên $f(x,y) \ge f(a,y) (1)$

+ Do hàm số nghịch biến theo y, $y \le b$ nên $f(a,y) \ge f(a,b) (2)$

+ Từ $(1) \& (2)$ có điều phải chứng minh.

Áp dụng

1. Đối với bài này ta cứ giả vờ tách nó dưới dạng $(x-3)$ ta sẽ được:

$$f(x) = (x-3)^5 + 14(x-3)^4 + 76(x-3)^3 + 196(x-3)^2 + 236(x-3) + 108 > 0 \forall x > 3$$

2. Xét $x \in [1;3]$. Đây là điều quan trọng nhất. Do bổ đề xét tới hàm 2 biến nên ta sẽ biến $f(x)$ thành hàm 2 biến dựa vào tính đồng biến nghịch biến. Ta có:

   2.1. $(x^5)' = 5x^4 > 0 \Rightarrow$ Chỗ này đồng biến ta sẽ đặt là x.

   2.2. $(-x^4)' = -4x^3 < 0 \Rightarrow$ Chỗ này nghịch biến nên đặt là y.

   2.3. Tương tự với các chỗ còn lại. Cuối cùng ta sẽ đặt $g(x,y) = x^5 - y^4 - 2y^3 - 2y^2 + 5x + 3$, hàm này chắc chắn đồng biến theo x và nghịch biến theo y với $x, y \in D = [1;3] \times [1;3]$.

3. Sau khi đặt xong hàm $g(x,y)$ ta cần phải chứng minh nó lớn hơn 0. Do bổ đề phát biểu nếu $f(a,b) > 0 \Rightarrow f(x,y) > 0$ thì nhiều người sẽ tương luôn $x = 1 \& y = 3$, nhưng chớ trêu là nó âm choét ra do ta đánh giá quá mạnh tay, và nhiều bạn sẽ nghĩ bổ đề sai, nhưng hãy để ý rằng phương pháp này có tên chia để trị nên các bạn cần phải chia $[1;3] = [1;a] \cup [a;b] \cup ... \cup [z;3]$ và xét từng khoảng để khi thay 2 cận vào nó luôn dương, hiểu chứ?. Để tìm các khoảng kia phải sử dụng đến tài sản quý báu là chiếc máy tính.

   3.1. Nhập hàm $g(x,y)$ vào máy: $X^5 - Y^4 - 2Y^3 - 2Y^2 + 5X + 3$. Đầu tiên bấm $\boxed{\text{CALC}}$ và nhập $X = 1$ trước do đây là cận nhỏ nhất, sau đó ta thử thay $Y = 3$ vào thấy âm thì sẽ chuyển $Y = 2$ thấy vẫn âm. Chuyển tiếp Y xuống $1,5$ thì thấy vẫn âm, lúc này đừng hoảng ta sẽ tìm được $Y = 1,2$ thì $g(x,y) = \frac{369}{625} > 0$, thế là đã tìm được 1 khoảng đầu tiên.

   3.2. Để tìm tiếp các khoảng tiếp theo ta lại cho $X = 1,2$ và tìm Y. Cứ lặp lại quá trình trên ta sẽ chia được:

$$[1;3] = [1;1,2] \cup [1,2;1,3] \cup [1,3;1,39] \cup [1,39;1,46] \cup [1,46;1,51]$$
$$\cup [1,51;1,56] \cup [1,56;1,6] \cup [1,6;1,64] \cup [1,64;1,67] \cup [1,67;1,7] \cup [1,7;1,73]$$

$\cup[1,73;1,76]\cup[1,76;1,8];[1,8;1,84]\cup[1,84;1,88]\cup[1,88;1,93]\cup[1,93;1,99]\cup[1,99;2]$.

Woa! Thật đẹp mắt. Lúc đến 2 là các bạn sẽ gặp khó khăn do các khoảng càng ngày càng hẹp. Ta lại nảy ý tưởng chứng minh $f(x)>0\forall x>2$. Ta sẽ được:

$$f(x)=(x-2)^5+9(x-2)^4+30(x-2)^3+42(x-2)^2+21(x-2)+5>0$$

Vậy lời giải sơ lược của bài này sẽ như sau:

1. Xét $x>2$ ta có
   $f(x)=(x-2)^5+9(x-2)^4+30(x-2)^3+42(x-2)^2+21(x-2)+5>0$
2. Xét $x\in[1;2]$.

+ Ta có bổ đề sau: Cho hàm số $f(x,y)$ liên tục và xác định trên $D=[a;b]\times[a;b]$ Hàm số $f(x,y)$ đồng biến theo x và nghịch biến theo y. Khi đó nếu $f(a,b)>0$ thì $f(x,y)\ge f(a,b)>0$.

+ Chứng minh:

- Do hàm số đồng biến theo x, $x\ge a$ nên $f(x,y)\ge f(a,y)(1)$
- Do hàm số nghịch biến theo y, $y\le b$ nên $f(a,y)\ge f(a,b)(2)$
- Từ $(1)\&(2)$ có điều phải chứng minh.

+ Xét hàm $g(x,y)=x^5-y^4-2y^3-2y^2+5x+3\Rightarrow f(x)=g(x,x)$.Hàm số đồng biến theo x, nghịch biến theo y, liên tục trên

$[1;1,2];[1,2;1,3];[1,3;1,39];[1,39;1,46];[1,46;1,51]$

$;[1,51;1,56];[1,56;1,6];[1,6;1,64];[1,64;1,67];[1,67;1,7];[1,7;1,73]$

$;[1,51;1,56];[1,56;1,6];[1,6;1,64];[1,64;1,67];[1,67;1,7];[1,7;1,73]$.

+ Lại có $\begin{cases} g(1;1,2)=\dfrac{369}{625}>0 \\ \qquad ... \\ g(1,99;2)\approx 4,1579601>0 \end{cases}$ nên theo bổ đề ta sẽ có

$$\begin{cases} f(x)=g(x,x)>0\forall x\in[1;1,2] \\ \qquad ... \\ f(x)=g(x,x)>0\forall x\in[1,99;2] \end{cases}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh!

**** Lưu ý: Một điều đáng buồn là khi viết trong bài không được ghi "…" mà phải ghi hết ra để người ta công nhận không sẽ bị bắt bẻ ngay lập tức. Nói chung cách làm tổng quát bao giờ cũng dài hơn cách làm dùng IQ mà . Sau đây là một số bài có thể làm theo DAC.***

Bài 2: Chứng minh rằng: $f(x)=x^8-x^5+x^2-x+1>0\forall x\in\mathbb{R}$

Giải

1. **Cách 1: Tạo dựng hằng đẳng thức**

Ta luôn có: $f(x)=x^8-x^5+x^2-x+1=\left(x^4-\frac{1}{2}x\right)^2+\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

2. **Cách 2: DAC**

Nhìn cách 1 có vẻ rất ngắn gọn nhưng sẽ nhiều bạn có thể không nhận thấy dấu hiệu tách hằng đẳng thức thì ta vẫn có thể làm như sau:

- Xét $x<0$ khi đó $-x^5<0$ lại có $\begin{cases} x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \\ x^8\ge 0\end{cases}$ nên có điều phải chứng minh.
- Xét $x>1$ khi đó $x^8-x^5=x^5(x^3-1)=x^5(x-1)(x^2+x+1)>0$ ta cũng có điều phải chứng minh.
- Xét $x\in[0;1]$ đây là khâu quan trọng nhất. Cách làm DAC sẽ như sau:

  + Bước 1: Phát biểu, chứng minh bô đề.

  + Bước 2: Đặt hàm $g(x,y)$ sao cho hợp lí đảm bảo luôn đúng theo bổ đề (rất quan trọng!). Để đặt hàm $g(x,y)$ ta sẽ đạo hàm từng biến một và xét tính đồng biến, nghịch biến.Nhớ là chỗ nào đang đồng sẽ đặt là x, nghịch biến là y.

  ♦ Có: $\begin{cases}(x^8)'=8x^7>0\\(-x^5)'=-5x^4<0\\(x^2)'=2x>0\\(-x)'=-1<0\end{cases}$. Nên sẽ đặt hàm $g(x,y)=x^8-y^5+x^2-y+1$.

  + Chia để trị: Để chứng minh vô nghiệm được ta sẽ phải chia thành các khoảng nhỏ $[a;m];[m;n];...;[y;b]$ làm sao cho khi ta thay cận min bằng x và cận max bằng y thì $g(x,y)>0$. Công việc này có casio để hỗ trợ.

  ♦ Nhập vào máy $X^8-Y^5+X^2-Y+1$. Ta sẽ CALC $X=0$ trước và thử cho với $Y=0$ luôn xem có dương không. Nhưng tiếc là biểu thức bị âm do ta đã đánh giá quá trội, và vì thế cần thu nhỏ khoảng lại. Thử $\boxed{\text{CALC}}$ tiếp và cho $Y=0,5$ xem.Lần này đã dương, nhưng ta có thể nới rộng khoảng hơn nữa thử cho $Y=0,7$ lần này cũng dương nhưng nếu nới rộng ra hơn nữa sẽ bị âm.Thế là đã tìm được một khoảng. Ta sẽ lập lại quá trình trên với $X=0,7$ và sẽ phải tìm Y. Lần lượt tìm được 2 khoảng nữa là $[0,7;0,9]\&[0,9;1]$.

  + Bước 3: Lời giải:

  - Viết lại bước 1.
  - Đặt $g(x,y)=x^8-y^5+x^2-y+1$ liên tục trên các khoảng $[0;0,7];[0,7;0,9];[0,9;1]$. Đồng biến theo x, nghịch biến theo y, có $f(x)=g(x,x)$.
  - Lại có $\begin{cases} g(0;0,7)\approx...>0\Rightarrow f(x)=g(x,x)>0\forall x\in[0;0,7]\\ g(0,7;0,9)\approx...>0\Rightarrow f(x)=g(x,x)>0\forall x\in[0,7;0,9]\\ g(0,9;1)\approx...>0\Rightarrow f(x)=g(x,x)>0\forall x\in[0,9;1]\end{cases}$.
  - Suy ra điều phải chứng minh.

Vậy bài toán đã được giải quyết! Hay chứ . Chiến 1 cái nữa nào!

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $f(x) = -x^6 + x^5 - x^4 + 2x^2 + x + \frac{1}{10} > 0 \forall x \in \left[-\frac{1}{9}; \frac{4}{3}\right]$

Giải

Đây là 1 bài toán khá là chặt nên chắc chắn sẽ phải chia tương đối nhiều khoảng.

1. Xét $x \in \left[-\frac{1}{9}; 0\right]$. Đặt $g(x,y) = -x^6 + x^5 - x^4 + 2y^2 + x + \frac{1}{10}$. Ta sẽ chia được các khoảng là $\left[-\frac{1}{9}; -0,1\right]; [-0,1; -0,05]; [-0,05; 0]$
2. Xét $x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$. Đặt $g(x,y) = -y^6 + x^5 - y^4 + 2x^2 + x + \frac{1}{10}$. Ta sẽ chia được các khoảng là $[1;1,1]; [1,1;1,2]; [1,2;1,25]; [1,25;1,29]; [1,29;1,31]; [1,31;1,32]; \left[1,32; \frac{4}{3}\right]$. Ghê chưa!

Vậy bài toán đã được giải quyết!

❖ Áp dụng làm bài sau: Chứng minh rằng: $f(x) = -x^4 - 3x^2 + 6x - 1 > 0 \forall x \in [0,2;1,1]$

- Thử áp dụng cách làm trên làm các bài sau
  Chứng minh rằng:
  1. $f(x) = -x^6 + x^5 - x^4 + 2x^2 + x + \frac{1}{10} > 0 \forall x \in \left[-\frac{1}{9}; \frac{4}{3}\right]$
  2. $f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0 \forall x$ *(thử dùng DAC nhé).*
  3. $f(x) = x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 + 6x + 1 < 0 \forall x \in (-\infty; -1]$
  4. $f(x) = x^7 - x^6 + x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 10x - 2 > 0 \forall x > 1$
  5. $f(x) = -x^4 - 3x^2 + 6x - 1 > 0 \forall x \in [0,2;1,1]$

II. PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ.

1. Đề bài.

Bài 1: Giải phương trình: $x^2+8x-16-(x-3)\sqrt{3x+1}+(2-x)\sqrt{7x+2}=0$

Bài 2: Giải phương trình: $\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^3+\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+x+6}=2x^3+2x^2-9x+2$

Bài 3: Giải phương trình: $x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x-6-12\sqrt{6-5x}=0$

Bài 4: Chứng minh rằng: $f(x)=4(x-1)\sqrt{x+1}-\dfrac{20x\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x-1}+2}+\dfrac{20\sqrt{x+1}}{\sqrt{9-5x}+2}+1>0\forall x\in\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$

Bài 5: Chứng minh rằng: $f(x)=x^2+5-\dfrac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}-\dfrac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}>0\forall x\in[-2;+\infty)$

Bài 6: Chứng minh rằng:

$$f(x)=2\sqrt{3}+\frac{x-1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{x}{2}\right)}-\frac{x}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right)}>0\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$$

Bài 7: Chứng minh rằng: $x^4-2x^3+3x^2+6x+7-(x-2)\sqrt{2x+5}-(x+1)\sqrt{4x+2}>0\forall x\ge-\dfrac{1}{2}$

Bài 8: Chứng minh rằng: $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-3}+1}+\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+5}+3}-2>0\forall x\in\left[\sqrt{3};+\infty\right)$

Bài 9: Chứng minh rằng: $f(x)=\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x+10}$ vô nghiệm.

Bài 10: Chứng minh rằng: $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+1}-\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-3}+3}+\dfrac{x}{3}-\dfrac{11}{6}>0\forall x\in\left[\sqrt{3};+\infty\right)$

Bài 11: Chứng minh rằng: $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}+2}+\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-2}+1}-\dfrac{19}{7}>0\forall x\in\left[\sqrt{2};+\infty\right)$

Bài 12: Chứng minh rằng: $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{\sqrt{x^2+2}+3}+\dfrac{3(x-2)}{\sqrt{x^2+4}+8}-x-\dfrac{2}{5}>0\forall x\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{4}{5}\right]$

Bài 13: Chứng minh rằng: $f(x)=\dfrac{x^3-1}{\sqrt{8x+5}+x+2}+\dfrac{2x-1}{\sqrt{6x+2}+x+1}+3>0\forall x\in\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$

Bài 14: Giải phương trình: $9x^4-32x^2+5+18\sqrt{4-3x}=0$

Bài 15: Giải phương trình: $\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}$

Bài 16: Chứng minh rằng:

$$f(x)=x\sqrt{x+2}+3x\sqrt{x^4+x^3+x^2+x+1}-\sqrt{\left(3x^6+3x^5+3x^4+3x^2+x+2\right)\left(x^2+3\right)}<0\forall x\ge1$$

Bài 17: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{2x+1}{y}=\sqrt{\dfrac{4\left(x^2+x+1\right)}{y^2+3}}\ (1)\\ x^3(3y-11)=2-\sqrt{(xy-x+2)x}\ (2)\end{cases}$

Bài 18: Giải phương trình: $2\sqrt{(x+3)(3x+1)}-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)=0$

Bài 19: Chứng minh rằng: $f(x)=x^2-x+4-\dfrac{3x+1}{\sqrt{3x^2-2x+3}+2}-\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}+2}>0\forall x\in\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$

Bài 20: Chứng minh rằng:

$$f(x)=\frac{2\left(x^2-x-1\right)}{\sqrt{x^4-x^2+4}+x^2-x+2}-\frac{4\left(x^2+x+1\right)}{\sqrt{x^4+20x^2+4}+x^2+2x+2}-x^2+2x<0\forall x\ge0$$

Bài 21: Giải phương trình: $-x^5-5x^4-2x^3+2x^2-4x-8+\left(x^4+1\right)\sqrt{x^6-x+2}=0$

Bài 22: Giải phương trình: $1+x\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2-x+1}\left(1+\sqrt{x^2-x+2}\right)$

Bài 23: Cho 3 số $a,b,c>0$. Chứng minh rằng: $3\left(a^3+b^3+c^3\right)+2abc\ge 11\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3}$

2. HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 1: Giải phương trình: $x^2+8x-16-(x-3)\sqrt{3x+1}+(2-x)\sqrt{7x+2}=0$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

- Bài này có rất nhiều cách giải khác nhau nhưng ta cứ liên hợp rồi chứng minh vô nghiệm xem sao.
- Ta có:

$$x^2+8x-16-(x-3)\sqrt{3x+1}+(2-x)\sqrt{7x+2}=0$$
$$\Leftrightarrow (x+4)(x-1)-(x-3)\left(\sqrt{3x+1}-2\right)+(2-x)\left(\sqrt{7x+2}-3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+4)(x-1)-\frac{3(x-3)(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{7(2-x)(x-1)}{\sqrt{7x+2}+3}=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f(x)=x+4-\dfrac{3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2}+\dfrac{7(2-x)}{\sqrt{7x+2}+3}=0 \end{array}\right.$$

- Nhiệm vụ là chứng minh $f(x)>0\forall x\ge -\frac{2}{7}$.
- Với $x\ge 3\Rightarrow \begin{cases} -3(x-3)\le 0 \\ 2-x<0 \\ \sqrt{3x+1}+2>5 \end{cases}$. Khi đó có:

$$f(x)>x+4-\frac{3(x-3)}{5}+\frac{7(2-x)}{\sqrt{7x+2}+3}=\frac{(2x+29)\sqrt{7x+2}-29x+157}{5\left(\sqrt{7x+2}+3\right)}$$

1. Với $x\le \frac{157}{29}\Rightarrow f(x)>0$.
2. Với $x>\frac{157}{29}$ thì $f(x)=\dfrac{28x^3-21x^2+15225x-22967}{5\left(\sqrt{7x+2}+3\right)\left((2x+29)\sqrt{7x+2}+29x-157\right)}>0\forall x>\frac{157}{29}$

- Với $x\in\left[-\frac{2}{7};2\right]$ ta có: $\begin{cases} 2-x\ge 0 \\ \sqrt{7x+2}+3<7 \end{cases}$. Khi đó ta có:

$$f(x)>6-\frac{3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2}=\frac{6\sqrt{3x+1}+12-3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2}=\frac{6\sqrt{3x+1}+21-3x}{\sqrt{3x+1}+2}>0$$

- Với $x\in[2;3]$, ta có: $\begin{cases} -3(x-3)\ge 0 \\ 2-x\le 0 \\ \sqrt{7x+2}+3>7 \end{cases}$. Khi đó tương tự như trên ta có:

$$f(x)>6-\frac{3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2}=\frac{6\sqrt{3x+1}+12-3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2}=\frac{6\sqrt{3x+1}+21-3x}{\sqrt{3x+1}+2}>0$$

- Vậy bài toán đã được giải quyết hoàn toàn!.

Nhận xét

- Ngoài cách như trên ta vẫn có thể tinh ý nhóm như sau:

$$f(x)=x+4-\frac{3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{7(2-x)}{\sqrt{7x+2}+3}=\frac{1}{2}x+\frac{7(2-x)}{\sqrt{7x+2}+3}+\frac{1}{2}x+4-\frac{3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2}$$
$$=\frac{x\sqrt{7x+2}-4x+14}{2\left(\sqrt{7x+2}+3\right)}+\frac{(x+8)\sqrt{3x+1}-x+25}{2\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}$$

- Khi đó thích dùng đạo hàm hay dùng bất phương trình phụ thì tùy, tôi sẽ dùng đạo hàm.
- Đặt $\begin{cases} f(x)=x\sqrt{7x+2}-4x+14 \\ g(x)=(x+8)\sqrt{3x+1}-x+25 \end{cases}$.
  - Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{-8\sqrt{7x+2}+21x+4}{2\sqrt{7x+2}}=0\Leftrightarrow x=\frac{280+\sqrt{275968}}{882}$. $f'(x)$ đổi dấu từ $(-)\Rightarrow(+)$ khi qua $\frac{280+\sqrt{275968}}{882}$ nên đạt cực tiểu tại $\frac{280+\sqrt{275968}}{882}$
  $$\Rightarrow f(x)\ge f\left(\frac{280+\sqrt{275968}}{882}\right)\approx 12,99>0$$
  - Chứng minh tương tự ta cũng suy ra $g(x)>0$.
- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 2: Giải phương trình: $\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^3+\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+x+6}=2x^3+2x^2-9x+2$

Đoàn Chí Dũng

Giải

- Ta có:
$$\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^3+\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+x+6}=2x^3+2x^2-9x+2$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2+x+1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-2\right)+\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+x+6}-3\right)-(2x-5)\left(x^2+x-3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2+x-3\right)\left[\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+2}+\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+6}+3}-2x+5\right]=0$$
- Đặt $f(x)=\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+2}+\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+6}+3}-2x+5$.
- Chú ý rằng: $\begin{cases} \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+2}\ge x+a \\ \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+6}+3}\ge x+b \end{cases}$.
- Khi đó dùng lim ta tìm được $\begin{cases} a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+2}-x=-\frac{3}{2} \\ b=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+6}+3}-x=-\frac{7}{2} \end{cases}$
- Ta có:

1. $\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+2}-x+\frac{3}{2}>\frac{2\left(x^2+x+1\right)+(3-2x)\sqrt{x^2+x+1}}{2\left(\sqrt{x^2+x+1}+2\right)}>\frac{3\sqrt{x^2+x+1}}{2\left(\sqrt{x^2+x+1}+2\right)}>0$

2. $\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+x+6}+3}-x+\frac{7}{2}>\frac{2\left(x^2+1\right)+(7-2x)\sqrt{x^2+1}}{2\left(\sqrt{x^2+x+6}+3\right)}>\frac{7\sqrt{x^2+1}}{2\left(\sqrt{x^2+x+6}+3\right)}>0$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 3: Giải phương trình: $x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x-6-12\sqrt{6-5x}=0$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

- Ta có:

$$x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x-6-12\sqrt{6-5x}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^4+8x^3+20x^2+21x+18\right)-12\left(\sqrt{6-5x}-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f(x)=(x+3)\left(x^3+5x^2+5x+6\right)+\dfrac{60}{\sqrt{6-5x}+1}=0 \end{array}\right.$$

- Để ý thấy:

1. Với $x\in(-\infty;x_0]\cup\left[-3;\frac{6}{5}\right]\Rightarrow f(x)>0$. Với x_0 thỏa mãn ${x_0}^3+5{x_0}^2+5x_0+6=0$
2. Với $x\in[x_0;-3]$ ta có:
   - $g(x)=\frac{60}{\sqrt{6-5x}+1}\Rightarrow g'(x)=\frac{300}{2\sqrt{6-5x}\left(\sqrt{6-5x}+1\right)^2}>0\Rightarrow g(x)\ge g(x_0)>9$
   - Khi đó: $f(x)>\left(x^2+4x+1\right)^2+2\left(x+\frac{13}{4}\right)^2+\frac{39}{8}>0$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 4: Chứng minh rằng:

$$f(x)=4(x-1)\sqrt{x+1}-\frac{20x\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x-1}+2}+\frac{20\sqrt{x+1}}{\sqrt{9-5x}+2}+1>0\forall x\in\left[1;\frac{9}{5}\right]$$

Giải

- Để ý thấy:

1. Do $x\in\left[1;\frac{9}{5}\right]$ nên $\sqrt{9-5x}+2<4\Rightarrow\frac{20\sqrt{x+1}}{\sqrt{9-5x}+2}>5\sqrt{x+1}$
2. Khi đó $f(x)>g(x)=4(x-1)\sqrt{x+1}-\frac{20x\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x-1}+2}+5\sqrt{x+1}+1$
3. Lại có: $g(x)=\frac{(x-1)\left(1-2\sqrt{5x-1}\right)^2\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{5x-1}+2\right)^2}{\left(\sqrt{5x-1}+2\right)^2}>0\forall x\in\left[1;\frac{9}{5}\right]$
4. Nên $f(x)>0\forall x\in\left[1;\frac{9}{5}\right]$ (đpcm). Xong!

Hướng dẫn

- Bài này nhìn hình thức khá khủng bố, trông có vẻ rối rắm nhưng khá là đơn giản.
  1. Đầu tiên ta thấy có quá nhiều căn trong bài, điều này làm ta nảy ra ý tưởng đánh giá bớt 1 căn đi để đưa về dạng đơn giản hơn.
  2. Hai là bài này là một bài không được chặt cho lắm vàcác biểu thức trong căn ở bậc nhấtnên nảy ra ý tưởng đánh giá với 1 hằng số nào đó.

3. Ba là thấy trong bài có 2 phân thức nên sẽ thử đánh giá một em xem sao, tôi sẽ chọn cái thứ 2.

- Dễ thấy $\sqrt{9-5x}+2<4\Rightarrow\dfrac{20\sqrt{x+1}}{\sqrt{9-5x}+2}>5\sqrt{x+1}$. Lúc này bài toán chỉ còn 2 căn. Dùng $\boxed{\text{MODE}}\boxed{7}$ nhận thấy $f(x)\ge1$. Điều này chẳng khác nào cho ta biết phương trình: $4(x-1)\sqrt{x+1}-\dfrac{20x\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x-1}+2}+5\sqrt{x+1}=0$ có nghiệm kép. Mà may mắn thay ta lại rút được $\sqrt{x+1}$ ra, lúc này chỉ là giải phương trình 1 căn có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{4}$(tự tìm nhé) và 1 nghiệm $x=1$(không quan tâm) quá dễ dàng, sử dụng liên hợp ngược hoặc chia căn cho nhanh là sẽ ra!
- Ta được: $4(x-1)\sqrt{x+1}-\dfrac{20x\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x-1}+2}+5\sqrt{x+1}=\dfrac{(x-1)\left(1-2\sqrt{5x-1}\right)^2\sqrt{x+1}}{\left(\sqrt{5x-1}+2\right)^2}\ge0$
- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 5: Chứng minh rằng:

$$f(x)=x^2+5-\frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}-\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}>0\forall x\in[-2;+\infty)$$

Giải

- Hướng làm vẫn như bài trước, ta sẽ đánh giá 2 cái mẫu được: $\sqrt{x+7}+3\ge\sqrt{5}+3>5$ và $\sqrt{x+2}+2\ge2$.
- Khi đó: $f(x)>g(x)=x^2+5-\dfrac{5x^2-5x+10}{5}-\dfrac{2x+6}{2}=0$
- Nên $f(x)>g(x)=0\forall x\in[-2;+\infty)$ (đpcm). Xong!

Hướng dẫn

- Bài này không có cái gì để nói hết, trong căn chứa đa thức bậc nhất nên ta sẽ đánh giá với 1 hằng số nào đó và là xong!
- Ngoài ra nếu thích DAC thì cứ việc dùng thử nhé! Ngoài cách này ra còn có một cách khác.
- Ta có: $f(x)=\left(x^2-x+2-\dfrac{5\left(x^2-x+2\right)}{\sqrt{x+7}+3}\right)+\left(x+3-\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x+2}+2}\right)$

$$=\left(x^2-x+2\right)\left(1-\frac{5}{\sqrt{x+7}+3}\right)+(x+3)\left(1-\frac{2}{\sqrt{x+2}+2}\right)>0\forall x\in\left[1;\frac{9}{5}\right]$$

- Đến đây dựa vào điều kiện tự giải thích nhé!

Bài 6: Chứng minh rằng:

$$f(x)=2\sqrt{3}+\frac{x-1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{x}{2}\right)}-\frac{x}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right)}>0\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$$

Giải

- Nhận thấy

1. $g(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{3}\left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{x}{2}\right)$ nghịch biến trên $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ nên $g(x)\ge g(1)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

2. $v(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$ nên $v(x)\ge v\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$

- Khi đó $f(x)>\dfrac{x-1}{\frac{\sqrt{3}}{6}}-\dfrac{x}{\frac{\sqrt{3}}{6}}+2\sqrt{3}=0$
- Vậy ta có điều phải chứng minh.

Hướng dẫn

- Bài này không có gì phải bàn cả. Do dưới mẫu đang có căn chứa đa thức bậc nhất nên ta sẽ đánh giá từng căn với một hằng số, nếu không đánh giá được như vậy thì dùng DAC không có gì khó cả.
- Ở trên tôi trình bày hơi tắt, đáng lẽ phải có phần chứng minh đạo hàm mang 1 dấu nữa, nhưng thôi thời gian có hạn mong thông cảm .

Bài 7: Chứng minh rằng:

$$x^4-2x^3+3x^2+6x+7-(x-2)\sqrt{2x+5}-(x+1)\sqrt{4x+2}>0\forall x\ge -\frac{1}{2}$$

Giải

- Với $x>2$ ta có 2 bổ đề sau (tự chứng minh nhé): $\begin{cases}\sqrt{2x+5}\le \frac{1}{2}x+\frac{9}{4}\\ \sqrt{4x+2}<\frac{9}{4}x+\frac{8}{5}\end{cases}$.Khi đó ta có:

$$f(x)>x^4-2x^3-\frac{9}{10}x^2+\frac{16}{5}x+9,9=\left(x^2-x-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{427}{50}>0$$

- Với $x\in\left[-\frac{1}{2};2\right)$ ta có: $\begin{cases}\sqrt{2x+5}>2\\ \sqrt{4x+2}<4\end{cases}$. Khi đó:

$$f(x)>x^4-2x^3+3x^2+7=x^2(x-1)^2+2x^2+7>0$$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Nhận xét.

- Ở trên tôi có nêu lên 2 bổ đề mà nhiều người đọc sẽ chẳng hiểu được kiếm đâu ra. Sau đây tôi xin trình bày các bước làm.

1. Dễ kiểm tra thấy $f(x)>0$ nên nó sẽ có giá trị nhỏ nhất, việc của ta là tìm được khi x bằng bao nhiêu thì đạt cực tiểu. Rõ ràng nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ chính là giá trị cần tìm do đó ta sẽ giải phương trình $f'(x)=0$, ta được:

$$f'(x)=4x^3-6x^2+6x+6-\frac{3x+3}{\sqrt{2x+5}}-\frac{6x+4}{\sqrt{4x+2}}=0\Leftrightarrow x=x_0=-0,3100436394$$

2. Việc làm tiếp theo là tìm nhân tử chứa nghiệm $x=x_0$, ta sẽ dùng phím $\boxed{\frac{d}{dx}\square}$. Nhân tử có dạng $\sqrt{2x+5}+ax+b$. Với $\begin{cases}a=-\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x+5}\right)\Big|_{x=x_0}\\ b=-\sqrt{2x_0+5}-a\end{cases}$. Do kết quả lẻ nên ta sẽ tìm một số

gần nó và phải đẹp và thay vào phương trình đầu phải thỏa mãn. Với lí do đó chọn $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{9}{4} \end{cases}$. Tương tự cho căn còn lại ta được nhân tử $\sqrt{4x+2}<\dfrac{9}{4}x+\dfrac{8}{5}$.

3. Để ý thấy $\begin{cases} \sqrt{2x+5}\le \dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{4} \\ \sqrt{4x+2}<\dfrac{9}{4}x+\dfrac{8}{5} \end{cases}$, mà $f(x)>0$ nên cần chia làm 2 trường hợp mới đánh giá được . Đến đó chỉ việc đánh giá phương trình bậc 4 là xong!.

Bài 8: Chứng minh rằng: $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-3}+1}+\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+5}+3}-2>0\forall x\in\left[\sqrt{3};+\infty\right)$

Giải

- Ta có: $\sqrt{x^2-3}-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{3}{2}=\dfrac{-28x^2+144x-189}{6\left(6\sqrt{x^2-3}+8x-3\right)}<0\forall x\in\left[\sqrt{3};+\infty\right)$
- Khi đó:

$$f(x)>\frac{x+1}{\frac{4}{3}x-\frac{3}{2}+1}+\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+5}+3}-2=\frac{(12-10x)\sqrt{x^2+5}+16x^2-28x+33}{(8x-3)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$$

- Để ý thấy :

1. $(12-10x)\sqrt{x^2+5}+16x^2-28x+33$

$$=\left(2\sqrt{x^2+5}-\frac{5}{2}x-1\right)^2+16\sqrt{x^2+5}+\frac{23}{4}x^2-33x+12$$

2. $16\sqrt{x^2+5}+\dfrac{23}{4}x^2-33x+12>\dfrac{23}{4}\left(x-\dfrac{66}{23}\right)^2+\dfrac{222}{23}>0\forall x$
3. Vậy $f(x)>0$

Hướng dẫn

- Đầu tiên ta sẽ tìm điểm rơi của bài toán chính là nghiệm của đạo hàm. Ta có:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-3}-x-3}{\sqrt{x^2-3}\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)^2}+\frac{6\sqrt{x^2+5}-x+10}{\sqrt{x^2+5}\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)^2}=0\Leftrightarrow x=A=2,677764402$$

- Tìm 2 nhân tử chứa điểm rơi bằng cách sử dụng phím $\boxed{\dfrac{d}{dx}\square}$. Ta sẽ đưa về 1 căn và sử dụng nhân tử liên quan tới $\sqrt{x^2-3}$ vì điều kiện gắn chặt với con căn này. Nhân tử có dạng như giải phương trình vô tỷ là $\sqrt{x^2-3}+ax+b$.

+ Ta có $\begin{cases} a \approx -\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{f(x)}\right)\Big|_{x=A} \\ b \approx -\left(\sqrt{f(x)}+ax\right) \end{cases}$. Áp dụng vào bài ta có $a=-\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2-3}\right)\Big|_{x=A}=-1.311...\approx -\dfrac{4}{3}$. Vốn dĩ có thể lấy em $-\dfrac{4}{3}$ là vì ta đang cần một số đẹp để tiện biến đổi và đây cũng là bài toán chặt nhưng không phải chặt xít cỡ do $f(A)=0,188421028$. Ngoài nếu thích làm chặt nữa ta có thể lấy là $a=\dfrac{-13}{10};a=\dfrac{-59}{4}$... Đối với bài chặt hơn nữa thì ta cần phải làm như vậy chứ còn bài này thì không cần, chỉ vậy là đủ!

+ Có tiếp $b=-\left(\sqrt{f(x)}+ax\right)=1.528191379\approx\dfrac{3}{2}$. Lúc này nhận thấy là $\sqrt{x^2-3}<\dfrac{4}{3}x-\dfrac{3}{2}$ đúng chiều ta cần do bài toán cần chứng minh lớn hơn 0 và tử đang lớn hơn 0. Nếu nhân tử chưa đúng như ta cần thì ta cần phải làm tròn hệ số tự do làm sao cho đúng chiều dấu chúng ta cần.

- Đến đây mới chỉ đi qua $\dfrac{2}{3}$ chặng đường, còn một phần nữa là chứng minh phần sau chứa một căn lớn hơn 0 bằng SOS.
- Tìm điểm rơi của biểu thức $g(x)=(12-10x)\sqrt{x^2+5}+16x^2-28x+33$. Ta có:
$$g'(x)=\frac{(32x-28)\sqrt{x^2+5}-20x^2+12x-50}{\sqrt{x^2+5}}=0\Leftrightarrow x=x_0=1,961407277$$
- Nhận thấy ta cần tìm nhân tử có dạng $\left(\sqrt{x^2+5}+ax+b\right)^2=2ax\sqrt{x^2+5}+...$Đằng trước đang có $-10x\sqrt{x^2+5}$ nên tìm a thỏa mãn khi ta lấy $g(x)-\left(\sqrt{x^2+5}+ax+b\right)^2$ phải triệt tiêu được $-10x$. Với lí do trên ta sẽ chọn $a=-5\Rightarrow b\approx\dfrac{34}{5}$. Từ đó có nhân tử là $\left(\sqrt{x^2+5}-5x+\dfrac{34}{5}\right)^2$. Nhưng tuy nhiên nhân tử chưa thỏa mãn do thay vào bị âm và ta nâng hệ số trước căn lên 2. Với cách làm tương tự ta có nhân tử sẽ là $\left(2\sqrt{x^2+5}-\dfrac{5}{2}x-1\right)^2$. Đến đây không còn gì phải bàn nhé!

Bài 9: Chứng minh rằng: $f(x)=\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x+10}$ vô nghiệm.

Bùi Thế Việt

Giải

- Dùng Casio nhận thấy $f(x)>0\forall x\in\left[-5;\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]$ và $f(x)<0\forall x\in\left[\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right]$.
- Trường hợp 1: Xét $x\in\left[-5;\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]$.

1. Để ý thấy:

$$\begin{cases}\sqrt[4]{x^4+1}+x>\sqrt[4]{x^4}+x=0\forall x\in\left[-5;\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]\\ -\sqrt{x^2+3x+1}-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{7}{2}=\dfrac{-5(x+3)^2}{4\left(-\sqrt{x^2+3x+1}+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{7}{2}\right)}\ge 0\forall x\in\left[-5;\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]\\ -\sqrt{2x+10}+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}=\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{2x+10}-2\right)^2\ge 0\forall x\in\left[-5;\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]\end{cases}$$

2. Do đó $f(x)>-x+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{7}{2}-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{7}{2}=0$

- Trường hợp 2: $x\in\left[\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right]$

1. Để ý thấy $\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}=\dfrac{-2x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^4+1}+x^2+1\right)}\le 0$

2. Khi đó :

$$f(x)\le\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{2x+10}=\frac{-5x-10-2\sqrt{x^2+3x+1}\sqrt{2x+10}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{2x+10}}<0$$

- Vậy phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm. (đpcm). Xong!

Hướng dẫn

- Bài này phương pháp giống hệt với bài 4. Ta cũng sẽ đi tìm điểm rơi của bài toán.
- Do thấy $f(x)$ luôn dương trên $\left[-5;\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]$ và luôn âm trên $\left[\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$ nên ta sẽ chia làm 2 trường hợp.
- Đối với trường hợp 1 thì không có gì phải bàn, nhưng trường hợp 2 thì có điều phải chú ý!
- Do trên $\left[\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$ thì ta sẽ không tìm được nghiệm của đạo hàm hay lúc này hàm nghịch biến, nên ta sẽ không đi chứng minh đạo hàm âm mà sẽ quy về đánh giá $\sqrt[4]{x^4+1}$ với một $g(x)$ nào đó. Cái này hơi khó nhưng chịu để ý $\begin{cases}\sqrt[4]{x^4+1}>x\\ \sqrt{x^2+1}>x\end{cases}$. Nếu như $\sqrt[4]{x^4+1}\le\sqrt{x^2+1}$ thì thay vào thấy thỏa mãn. Vậy ta sẽ đi chứng minh $\sqrt[4]{x^4+1}\le\sqrt{x^2+1}$, đây không phải 1 câu khó, tôi cũng đã chứng minh rồi. Khi đó chỉ việc liên hợp lên là có điều cần chứng minh.

Bài 10: Chứng minh rằng:

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+1}-\frac{x-3}{\sqrt{x^2-3}+3}+\frac{x}{3}-\frac{11}{6}>0\forall x\in\left[\sqrt{3};+\infty\right)$$

Giải

- Trường hợp 1: Xét $x\in\left[\sqrt{3};3\right]$.

1. Để ý thấy: $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\dfrac{3}{4}-x}{\sqrt{x^2+1}+x+\dfrac{1}{2}}<0\forall x\in\left[\sqrt{3};3\right] \\ \sqrt{x^2-3}-2x+3=\dfrac{-3(x-2)^2}{\sqrt{x^2-3}+2x-3}\le 0\forall x\in\left[\sqrt{3};3\right] \end{cases}$
2. Khi đó:

$$f(x)>\frac{x+1}{x+1+\frac{1}{2}}+\frac{3-x}{2x}+\frac{x}{3}-\frac{11}{6}=\frac{\left(2x^2-14x+9\right)\sqrt{x^2+1}+8x^2-8x+9}{6x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

3. Để ý tiếp:

+ $2x^2-14x+9<0\forall x\in\left[\sqrt{3};3\right]\Rightarrow\left(2x^2-14x+9\right)\sqrt{x^2+1}-8x^2+8x-9<0$

+ Nhân liên hợp ta được:

$$\begin{aligned}&4x^6-56x^5+172x^4-180x^3+105x^2-108x\\ &=x\left[x^4(4x-13)+x^2\left(-43x^2+172x-108\right)-110\left(x-\frac{21}{44}\right)^2-\frac{7299}{88}\right]<0\end{aligned}$$

4. Nên $\left(2x^2-14x+9\right)\sqrt{x^2+1}+8x^2-8x+9>0$

- Trường hợp 2: Xét $x\in[3;+\infty)$.

1. Nhận thấy $\sqrt{x^2-3}+3>5$
2. Khi đó $f(x)>\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+1}+\dfrac{3-x}{5}+\dfrac{x}{3}-\dfrac{11}{6}=\dfrac{(4x-37)\sqrt{x^2+1}+34x-7}{30\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$
3. Đặt $g(x)=(4x-37)\sqrt{x^2+1}+34x-7\Rightarrow g'(x)=\dfrac{34\sqrt{x^2+1}+8x^2-37x+4}{\sqrt{x^2+1}}$.
4. Để ý thấy $g'(x)\ge\dfrac{8\left(x-\dfrac{3}{16}\right)^2+\dfrac{119}{32}}{\sqrt{x^2+1}}>0$ nên $g(x)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{3};+\infty\right)$. Suy ra $g(x)\ge g\left(\sqrt{3}\right)\approx 15,9430585>0$.

- Vậy $f(x)>0\forall x\in\left[\sqrt{3};+\infty\right)$.

Bài 11: Chứng minh rằng: $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}+2}+\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-2}+1}-\dfrac{19}{7}>0\forall x\in\left[\sqrt{2};+\infty\right)$

Bùi Thế Việt

Giải

- Dễ nhận thấy $\sqrt{x^2-1}<x$. Khi đó ta luôn có:

$$f(x)>\frac{x+1}{x+2}+\frac{2x+1}{\sqrt{x^2-2}+1}-\frac{19}{7}=\frac{\overbrace{(-12x-31)\sqrt{x^2-2}+14x^2+23x-17}^{g(x)}}{7(x+2)\left(\sqrt{x^2-2}+1\right)}$$

- Để ý thấy:

1. $g(x)=\frac{75}{11}\left(\sqrt{x^2-2}-\frac{22}{25}x\right)^2+\frac{523}{275}x^2+23x-\frac{37}{11}-31\sqrt{x^2-2}$
2. $\sqrt{x^2-2}-1.123x+0.722=\frac{-0.261129x^2+1.621612x-2.521284}{\sqrt{x^2-2}+1.123x-0.722}<0$
3. Khi đó :

$$\frac{523}{275}x^2+23x-\frac{37}{11}-31\sqrt{x^2-2}>\frac{523}{275}x^2+23x-\frac{37}{11}-31(1.123x-0.422)>0$$

4. Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 12: Chứng minh rằng:

$$f(x)=\frac{4(x+1)}{\sqrt{x^2+2}+3}+\frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2+4}+8}-x-\frac{2}{5}>0\forall x\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{4}{5}\right]$$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

- Để ý thấy:

1. $\sqrt{x^2+4}-\frac{19}{50}x-\frac{231}{125}=\frac{\frac{2139}{2500}x^2-1.40448x+\frac{9139}{15625}}{\sqrt{x^2+4}+\frac{19}{50}x+\frac{231}{125}}>0\forall x\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{4}{5}\right]$
2. Khi đó $f(x)>\frac{\overbrace{475x^2+24890x+11968-\left(475x^2+8750x+12421\right)\sqrt{x^2+2}}^{g(x)}}{5(95x+2462)\left(\sqrt{x^2+2}+3\right)}$
3. Có $g'(x)=\underbrace{950x+24890}_{v(x)}-\frac{\overbrace{1424x^3+17500x^2+14324x+17500}^{u(x)}}{\sqrt{x^2+2}}$
4. Nhận thấy $\begin{cases}\min\limits_{\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{4}{5}\right]}v(x)=v\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx 25561,75144\\ \max\limits_{\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{4}{5}\right]}u(x)=u\left(\frac{4}{5}\right)\approx 25165,00167<\min\limits_{\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{4}{5}\right]}v(x)\end{cases}$
5. Nên $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{4}{5}\right]$.
6. Từ đó có $g(x)>g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2.957051285>0\Rightarrow f(x)>0\forall x\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{4}{5}\right]$.

Bài 13: Chứng minh rằng:

$$f(x)=\frac{x^3-1}{\sqrt{8x+5}+x+2}+\frac{2x-1}{\sqrt{6x+2}+x+1}+3>0\forall x\in\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

- Trường hợp 1: Xét $x>1$

1. Khi đó $f(x)>\frac{x^3+5x+4+3\sqrt{8x+5}}{\sqrt{8x+5}+x+2}>0\forall x\in(1;+\infty)$

- Trường hợp 2: Xét $x \in \left[-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$

1. Khi đó $\begin{cases}\sqrt{8x+5}+x+2>3\\ \sqrt{6x+2}+x+1>\frac{2}{3}\end{cases}$
2. Nên ta có:

$$f(x)>\frac{x^3-1}{3}+\frac{3(2x-1)}{2}+3=\frac{2x^3+18x+7}{6}>\frac{2\left(-\frac{1}{3}\right)^3+18\left(-\frac{1}{8}\right)+7}{6}=\frac{25}{162}>0$$

- Trường hợp 3: Xét $x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

1. Khi đó $\begin{cases}\sqrt{6x+2}+x+1<5\\ \sqrt{8x+5}+x+2>5.5\end{cases}$
2. Nên $f(x)>\frac{2(x^3-1)}{11}+\frac{2x-1}{5}+3=\frac{10x^3+22x+144}{55}>0\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 14: Giải phương trình: $9x^4-32x^2+5+18\sqrt{4-3x}=0$

Lã Duy Tiến

Giải

- Ta có:

$$\begin{aligned}&9x^4-32x^2+5+18\sqrt{4-3x}=0\\ &\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{54}{\sqrt{4-3x}+1}-9x^3-9x^2+23x+23\right]=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ f(x)=\frac{54}{\sqrt{4-3x}+1}-9x^3-9x^2+23x+23=0(*)\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Giải $(*)$:

1. Dễ dàng nhận thấy với $x\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{23}}{3}\right]\cup\left[-1;+\infty\right)$ thì ta thấy $f(x)>0$.
2. Xét $x\in\left[-\frac{\sqrt{23}}{3};-1\right]$, ta có bổ đề sau: $\sqrt{4-3x}<\frac{1}{2}x+\frac{19}{5}$ (bạn đọc tự chứng minh).
3. Khi đó:

$$f(x)>\frac{54}{\frac{1}{2}x+1+\frac{19}{5}}-9x^3-9x^2+23x+23=\frac{-45x^4-477x^3-317x^2+1219x+1644}{5x+48}>0$$

- Vậy PT $\Leftrightarrow x=1$.

Nhận xét

- Câu này mặc dù mẫu chứa căn ở bậc nhất nhưng ta không thể đánh giá được do $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4-3x}=+\infty$. Vì thế ta sẽ đưa về bài toán giống với bài 4.

- Khi ta đạo hàm tìm điểm rơi thì sẽ tìm được 3 nghiệm, nhiều bạn sẽ không biết chọn điểm rơi nào cho phù hợp. Vậy khi gặp những trường hợp thế này thì ta sẽ thì 3 nghiệm của $f'(x)$ vào, nghiệm nào làm $f(x)$ min thì ta sẽ chọn điểm rơi đó.
- Thứ 2 với việc tìm nhân tử, ta có điểm rơi là $x = x_0 = -1,350561897$ khi thay vào $\sqrt{4-3x} - \frac{1}{2}x$ thì sẽ được kết quả là 3.512830189 và nếu ai lấy là 3.5 thì bài toán sẽ sai do $\sqrt{4-3x} - \frac{1}{2}x - \frac{7}{5} > 0$ sẽ ngược chiều với bài toán. Nếu lấy khoảng $3,6;3,7$ thì vẫn chưa được do sẽ bị dương ở một vài giá trị. Mặt khác bài này khá là lỏng nên ta sẽ lấy hẳn lên $\frac{19}{5}$ và kiểm tra bằng MODE 7 có thể thấy luôn âm và thay vào thấy $f(x) > 0$ cho nên đây là nhân tử cần tìm.
- Việc chứng minh $g(x) = -45x^4 - 477x^3 - 317x^2 + 1219x + 1644 > 0$ nhìn có vẻ khó nhưng rất dễ, ta sẽ tách như sau: $g(x) = x^3(-45x - 477) - 317x^2 + 1219x + 1644$, có thể thấy rằng với $x \in \left[-\frac{\sqrt{23}}{3}; -1\right]$ thì $\begin{cases} x^3 < 0 \\ -45x - 477 < 0 \\ -317x^2 + 1219x + 1644 > 0 \end{cases}$ cho nên $g(x) > 0$.

  Và thế là hết bài!

Bài 15: Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{2x+3}} - \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}$

Giải

- Do $x = 1$ là nghiệm của phương trình nên ta tiến hành liên hợp.

$$\frac{1}{\sqrt{2x+3}} - \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+3}\sqrt{x+4}} = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1} + \frac{1}{\sqrt{2x+3}\sqrt{x+4}\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+4}\right)}\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1} + \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}\sqrt{x+4}\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+4}\right)} = 0 \end{array}\right.$$

- Xét $x \in [-1;+\infty]$. Ta có: $\sqrt{x^2-2x+5}-1 = \frac{(x-1)^2+3}{\sqrt{x^2-2x+5}+1} > 0$. Nên bài toán luôn đúng.
- Xét $x \in \left[-\frac{3}{2};-1\right)$.
- Để ý thấy:

1. $(2x+3)\sqrt{x+4} + (x+4)\sqrt{2x+3} \le (2x+3)\sqrt{x+4} + 3$

2. Khi đó $f\left(x\right) > \dfrac{\sqrt{x^2-2x+5}+\left(2x^2+5x+3\right)\sqrt{x+4}+3x+2}{\left(\sqrt{x^2-2x+5}-1\right)\left(\left(2x+3\right)\sqrt{x+4}+3\right)}$

3. $\sqrt{x^2-2x+5}+\left(2x^2+5x+3\right)\sqrt{x+4}+3x+2 > \left(2x+3\right)\underbrace{\left[\dfrac{3}{2}+\left(x+1\right)\sqrt{x+4}\right]}_{u(x)}$

4. $u'\left(x\right)=\dfrac{3x+9}{\sqrt{x+4}}>0$ nên $u\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[-\dfrac{3}{2};-1\right] \Rightarrow u\left(x\right) \ge u\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{6-\sqrt{10}}{4}>0$

5. Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 16: Chứng minh rằng:

$$f\left(x\right)=x\sqrt{x+2}+3x\sqrt{x^4+x^3+x^2+x+1}$$
$$-\sqrt{\left(3x^6+3x^5+3x^4+3x^2+x+2\right)\left(x^2+3\right)}<0 \forall x \ge 1$$

Diễn đàn k2pi.net

Giải

- Đặt $\begin{cases} y=\sqrt{x+2}\left(y \ge \sqrt{3}\right) \\ z=\sqrt{x^4+x^3+x^2+x+1}\left(z \ge \sqrt{5}\right) \end{cases}$
- Khi đó:

$$f\left(x\right)=xy+3xz-\sqrt{\left(3x^2z^2+y^2\right)\left(x^2+3\right)}=\frac{-3\left(y-x^2z\right)^2}{xy+3xz+\sqrt{\left(3x^2z^2+y^2\right)\left(x^2+3\right)}} \le 0$$

- Để ý thấy:

1. $\sqrt{x+2}-x^2\sqrt{x^4+x^3+x^2+x+1}=\dfrac{\overbrace{x^8+x^7+x^6+x^5+x^4-x-2}^{g(x)}}{\sqrt{x+2}+x^2\sqrt{x^4+x^3+x^2+x+1}}$
2. $g\left(x\right)=\left(x-1\right)^8+9\left(x-1\right)^7+36\left(x-1\right)^6+84\left(x-1\right)^5+126\left(x-1\right)^4$
   $+125\left(x-1\right)^3+80\left(x-1\right)^2+29\left(x-1\right)+2>0$
3. Nên $g\left(x\right)>0 \forall x \ge 1$. Vậy dấu "=" không thể xảy ra.
4. Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 17: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{y}=\sqrt{\dfrac{4\left(x^2+x+1\right)}{y^2+3}}\left(1\right) \\ x^3\left(3y-11\right)=2-\sqrt{\left(xy-x+2\right)x}\left(2\right) \end{cases}$

Giải

- ĐKXĐ: $2x^2y+1 \ge 0;\ x \in \left[-1;1\right];\ 1-2x^2y \ge 0$
- Ta có:

$$\left(1\right) \Leftrightarrow \frac{2x+1}{\sqrt{\left(2x+1\right)^2+3}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+3}} \Leftrightarrow f\left(2x+1\right)=f\left(y\right)$$

Xét $f(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Có $f'(t)=\dfrac{3}{(t^2+3)\sqrt{t^2+3}}>0\forall t$. Nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $f(2x+1)=f(y)\Leftrightarrow y=2x+1$

Thế vào phương trình (2) ta được: $6x^4-8x^3=2-\sqrt{(2x^2+2)^3}$

Đặt $f(x)=6x^4-8x^3-2+\sqrt{(2x^2+2)^3}$

- Để ý thấy:

1. $f(x)=5\sqrt{2x^2+2}+5x^4-8x^3+x^2-\dfrac{25}{4}+\left(\sqrt{2x^2+2}+x^2-\dfrac{3}{2}\right)^2$

   $=g(x)+\left(\sqrt{2x^2+2}+x^2-\dfrac{3}{2}\right)^2$

2. $g'(x)=x\left(\dfrac{10}{\sqrt{2x^2+2}}+20x^2-24x+2\right)=x.h(x).\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+2}}$

3. $h'(x)=\dfrac{120x^3-96x^2+84x-48}{\sqrt{2x^2+2}}=\dfrac{v(x)}{\sqrt{2x^2+2}}$

4. $v'(x)=360\left(x-\dfrac{4}{15}\right)^2+\dfrac{292}{5}>0$. Suy ra phương trình $h'(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm là

$$x=x_0=\frac{4}{15}+\frac{\sqrt[3]{\frac{6784}{125}+\sqrt{\frac{2338848}{625}}}+\sqrt[3]{\frac{6784}{125}-\sqrt{\frac{2338848}{625}}}}{6}$$

$\Rightarrow \min\limits_{\mathbb{R}} h(x)=h(x_0)\approx 1.31>0$. Khi đó phương trình $g'(x)=0\Leftrightarrow x=0\left(h(x)>0\right)$.

Mặt khác ta lại có: $\begin{cases}\lim g(x)=+\infty\\ g(0)=\dfrac{-25+20\sqrt{2}}{4}>0\end{cases}\Rightarrow g(x)>0\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)>0$.

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 18: Giải phương trình: $2\sqrt{(x+3)(3x+1)}-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)=0$

Giải

Nhận thấy phương trình đang có 3 căn nên có thể đặt $a=\sqrt{x}$ để giảm bớt độ cồng kềnh của phương trình.

Đặt $a=\sqrt{x}\left(a\ge 0\right)$ phương trình trở thành $2\sqrt{3a^4+10a^2+3}-(a+1)\left(\sqrt{3a^2+1}+\sqrt{a^2+3}\right)=0$.

Ta tìm được nghiệm kép $a=1$ nên sẽ tìm được 2 biểu thức liên hợp là $\begin{cases}\sqrt{3a^2+1}-\dfrac{3}{2}a-\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{a^2+3}-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}\end{cases}$. Khi đó tiến hành nhân liên hợp ta được:

$$2\sqrt{3a^4+10a^2+3}-(a+1)\left(\sqrt{3a^2+1}+\sqrt{a^2+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3a^4+10a^2+3}-2a^2-4a-2-(a+1)\left(\sqrt{3a^2+1}-\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}\right)-(a+1)\left(\sqrt{a^2+3}-\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(a-1)^2(a^2+1)}{2\sqrt{3a^4+10a^2+3}+2a^2+4a+2}-\frac{3(a+1)(a-1)^2}{4\left(\sqrt{3a^2+1}+\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}\right)}-\frac{3(a+1)(a-1)^2}{4\left(\sqrt{a^2+3}+\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ \dfrac{8(a^2+1)}{2\sqrt{3a^4+10a^2+3}+2a^2+4a+2}-\dfrac{3(a+1)}{4\left(\sqrt{3a^2+1}+\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}\right)}-\dfrac{3(a+1)}{4\left(\sqrt{a^2+3}+\frac{1}{2}a+\frac{3}{2}\right)}=0\,(*)\end{array}\right.$$

Nhiệm vụ là sẽ đi chứng minh phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Để ý thấy:

1. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3(a+1)}{4\sqrt{3a^2+1}+6a+2}=\dfrac{48a^2}{\left(4\sqrt{3a^2+1}+4\right)\left(8\sqrt{3a^2+1}+12a+4\right)}>0\forall a\ge 0$

2. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3(a+1)}{4\sqrt{a^2+3}+2a+6}=\dfrac{48}{\left(4\sqrt{a^2+3}+4a\right)\left(8\sqrt{a^2+3}+4a+12\right)}>0\forall a\ge 0$

3. Còn lại ta có:

$$\frac{8(a^2+1)}{2\sqrt{3a^4+10a^2+3}+2a^2+4a+2}-1$$
$$=\frac{(24a^2+24)(a-1)^2}{\left(2\sqrt{3a^4+10a^2+3}+2a^2+4a+2\right)\left(6a^2-4a+6+2\sqrt{3a^4+10a^2+3}\right)}\ge 0$$

Nên do đó phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$

Bài 19: Chứng minh rằng:

$$f(x)=x^2-x+4-\frac{3x+1}{\sqrt{3x^2-2x+3}+2}-\frac{6}{\sqrt{3x+1}+2}>0\forall x\in\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$$

Giải

- **Cách 1:**

- Ta có: $\left(\sqrt{3x^2-2x+3}\right)'=0\Leftrightarrow \dfrac{6x-2}{2\sqrt{3x^2-2x+3}}=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$. Suy ra

  $\sqrt{3x^2-2x+3}>\dfrac{3}{2}$.

- Khi đó:

$$f(x)>x^2-x+4-\frac{6x+2}{7}-\frac{6}{\sqrt{3x+1}+2}=\frac{(7x^2-13x+26)\sqrt{3x+1}+14x^2-26x+10}{7\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}$$

- Để ý thấy:

1. Với $x \in \left[-\frac{1}{3};0\right]$ thì $\begin{cases} 14x^2 - 26x + 10 > 0 \\ 7x^2 - 13x + 26 = 7\left(x - \frac{13}{14}\right)^2 + \frac{559}{28} > 0 \end{cases}$. Do đó có điều phải chứng minh.

2. Với $x > 0$ thì:

$$\left(7x^2 - 13x + 26\right)\sqrt{3x+1} \ge 7x^2 - 13x + 26 \Rightarrow f\left(x\right) \ge \frac{21\left(x - \frac{13}{14}\right)^2 + \frac{501}{28}}{7\left(\sqrt{3x+1} + 2\right)} > 0$$

- Vậy bài toán đã được giải quyết hoàn toàn!.

Bài 20: Chứng minh rằng:

$$f\left(x\right) = \frac{2\left(x^2 - x - 1\right)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 4} + x^2 - x + 2} - \frac{4\left(x^2 + x + 1\right)}{\sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} + x^2 + 2x + 2} - x^2 + 2x < 0 \forall x \ge 0$$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

- Với $x \in \left[0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} < 8 \\ \sqrt{x^4 - x^2 + 4} < 3 \\ x^2 - x - 1 < 0 \end{cases}$

Khi đó:

$$f\left(x\right) < \frac{2\left(x^2 - x - 1\right)}{x^2 - x + 5} - \frac{4\left(x^2 + x + 1\right)}{x^2 + 2x + 10} - x^2 + 2x$$
$$= \frac{-x^4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - x^4 - 12x^2\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{5}{3}x^2 - 38\left(x - \frac{15}{19}\right)^2 - 620}{\left(x^2 - x + 5\right)\left(x^2 + 2x + 10\right)} < 0$$

- Với $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 > 0 \\ \sqrt{x^4 - x^2 + 4} > \frac{14}{5} \\ \sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} < x^2 + 5x - \frac{11}{4} \end{cases}$

Khi đó:

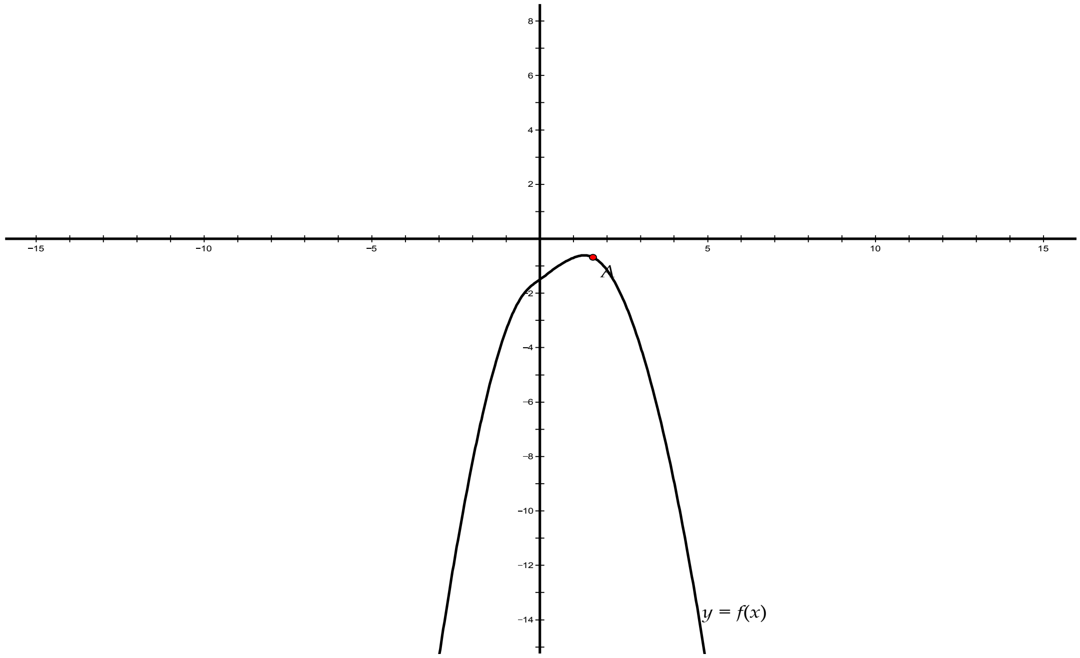
$$f\left(x\right) < \frac{2\left(x^2 - x - 1\right)}{x^2 - x + \frac{24}{5}} - \frac{4\left(x^2 + x + 1\right)}{2x^2 + 7x - \frac{3}{4}} - x^2 + 2x$$
$$= \frac{-40\left(x-1\right)^6 - 260\left(x-1\right)^5 - 537\left(x-1\right)^4 - 761\left(x-1\right)^3 - 389\left(x-1\right)^2 - 281\left(x-1\right) - 690}{\left(5x^2 - 5x + 24\right)\left(8x^2 + 28x - 3\right)} < 0$$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Nhận xét

- Nhiều bạn sẽ đặt ra cấu hỏi vì sao lại đánh giá được $\sqrt{x^4+20x^2+4}<x^2+5x-\frac{11}{4}$. Đơn giản vì:

1. Ta đang cần đưa về chứng minh $\sqrt{x^4+20x^2+4}<x^2+ax+b$ với $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ để đưa về phương trình đa thức. Lại có $a^2>20$ nên sẽ lấy 5.
2. Do hàm đang nghịch biến nên điểm rơi sẽ là $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Có thể kiểm tra bằng Mode 7 hoặc có đồ thị của hàm $y=f(x)$ như sau:



- Có thể thấy điểm $A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ đang nằm ở phần đi xuống của đồ thị nên $f(x)$ sẽ nghịch biến. Do đó nhân tử là $\sqrt{x^4+20x^2+4}<x^2+5x-\frac{11}{4}$. Phần còn lại không phải nói nhiều!

Bài 21: Giải phương trình: $-x^5-5x^4-2x^3+2x^2-4x-8+\left(x^4+1\right)\sqrt{x^6-x+2}=0$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

- Ta có:

$$-x^5-5x^4-2x^3+2x^2-4x-8+\left(x^4+1\right)\sqrt{x^6-x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x^3+2\right)+\left(x^4+1\right)\left(\sqrt{x^6-x+2}-2x-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x^3+2\right)+\frac{\left(x^4+1\right)\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x^4+x^3+3x^2+5x+7\right)}{\sqrt{x^6-x+2}+2x+4}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(x-2\right)\left[x^3+2+\frac{\left(x^4+1\right)\left(x^4+x^3+3x^2+5x+7\right)}{\sqrt{x^6-x+2}+2x+4}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(x+1\right)\left(x-2\right)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2\\ f\left(x\right)=x^3+2+\dfrac{\left(x^4+1\right)\left(x^4+x^3+3x^2+5x+7\right)}{\sqrt{x^6-x+2}+2x+4}=0\end{array}\right.$$

- Đặt $g\left(x\right)=x^6-x+2 \Rightarrow g'\left(x\right)=6x^5-1=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[5]{\frac{1}{6}}$. $g'\left(x\right)$ đổi dấu khi qua $\sqrt[5]{\frac{1}{6}}$ nên

  $g\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $\sqrt[5]{\frac{1}{6}} \Rightarrow g\left(x\right)\ge g\left(\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right)\approx 1,41>0$.

- Đặt $h\left(x\right)=\sqrt{x^6-x+2}+2x+4$.

  1. Với $x\ge -2 \Rightarrow h\left(x\right)>0$.
  2. Với $x<-2 \Rightarrow \sqrt{x^6-x+2}>\sqrt{x^6}=-x^3 \Rightarrow h\left(x\right)>x\left(-x^2+2\right)>0$

- Khi đó có:

$$f\left(x\right)>\frac{x^3+2+\left(x^3+2\right)\left(2x+4\right)+x^4+x^3+3x^2+5x+7}{\sqrt{x^6-x+2}+2x+4}$$

$$=\frac{3\left(x^2+x-0,75\right)^2+\dfrac{9}{2}\left(x+1,5\right)^2+\dfrac{83}{16}}{\sqrt{x^6-x+2}+2x+4}>0$$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 22: Giải phương trình: $1+x\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2-x+1}\left(1+\sqrt{x^2-x+2}\right)$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 – Anh Sơn 2 – Nghệ An.

Giải

- Ta có:

$$1+x\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2-x+1}\left(1+\sqrt{x^2-x+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1-\sqrt{x^2-x+1}+x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{\left(x-1\right)\left(2x^2-x+2\right)}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}}>0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left[\frac{2x^2-x+2}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}}-\frac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}\right]>0$$

- Để ý thấy: $1+x\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2-x+1}\left(1+\sqrt{x^2-x+2}\right)>\dfrac{\sqrt{21}+2\sqrt{3}}{4}>0 \Rightarrow x>0$

- Khi đó ta có:

$$f(x)=\frac{2x^2-x+2}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2-x+1)(x^2-x+2)}}-1$$

$$=\frac{2x^2-x+2-x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{(x^2-x+1)(x^2-x+2)}}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2-x+1)(x^2-x+2)}}$$

$$\frac{2x^2-x+2-x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{(x^2-x+1)(x^2-x+2)}}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2-x+1)(x^2-x+2)}}$$

$$>\frac{2x^2-2x+3-2\sqrt{(x^2-x+1)(x^2-x+2)}}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2-x+1)(x^2-x+2)}}=g(x)$$

$$g(x)=\frac{1}{\left(2x^2-2x+3+2\sqrt{(x^2-x+1)(x^2-x+2)}\right)\left(x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2-x+1)(x^2-x+2)}\right)}>0$$

- Lại có:

1. $1-\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+1-x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}$
2. Xét bất phương trình: $\sqrt{x^2-x+1}+1-x>0$
   - Với $x<1\Rightarrow$ bất phương trình luôn đúng.
   - Với $x\ge 1$ ta có: $\sqrt{x^2-x+1}+1-x>0\Leftrightarrow x>0$ luôn đúng.
3. Do đó $1-\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}>0$.

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 23: Cho 3 số $a,b,c>0$**.** Chứng minh rằng: $3\left(a^3+b^3+c^3\right)+2abc\ge 11\sqrt{\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3}$

Chứng minh

Đặt $f(a,b,c)=3\left(a^3+b^3+c^2\right)+2abc-11\sqrt{\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3}$. Do $f(a,b,c)$ là hàm thuần nhất bậc 3, nên không mất tính tổng quát ta chuẩn hóa $a^2+b^2+c^2=3$ và giả sử $a=\min\{a,b,c\}$. Khi đó ta cần chứng minh $f(a,b,c)=3\left(a^3+b^3+c^3\right)+2abc-11\ge 0$

Đặt $f\left(a,\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2}}\right)=3\left(a^3+2\left(\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{2}}\right)^3\right)+a\left(b^2+c^2\right)-11$. Ta có:

$$f(a.b.c)-f\left(a,\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left[3\left(2\left(b^3+c^3\right)-\left(b^2+c^2\right)\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}\right)-a(b-c)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[3\left(\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}-b-c\right)\left(\left(b+c\right)\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+2bc\right)-a\left(b-c\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}.\left(b-c\right)^2\left[\frac{3\left(\left(b+c\right)\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+2bc\right)}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}-a\right]$$

Do $a=\min\{a,b,c\}$ nên $\begin{cases}a\in[0;1]\\ b+c\ge 2\end{cases}$. Khi đó ta cần phải chứng minh được:

$$g\left(a,b,c\right)=\frac{3\left(\left(b+c\right)\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+2bc\right)}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}-a>0$$

$$\frac{3\left(\left(b+c\right)\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+2bc\right)}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}-a\ge\frac{3\left(\left(b+c\right)\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+2bc\right)}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}-1$$

$$=\frac{\left(3b+3c-1\right)\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+6bc-b-c}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}\ge\frac{5\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}-b-c+6bc}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}$$

$$>\frac{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}-b-c+6bc}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}=\frac{\dfrac{\left(b-c\right)^2}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}+6bc}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+b+c}\ge 0$$

Vậy $f\left(a,b,c\right)\ge f\left(a,\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)=f\left(a,\sqrt{\frac{3-a^2}{2}},\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}\right)$

Ta có: $f\left(a,\sqrt{\frac{3-a^2}{2}},\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}\right)=3\left(a^3+2\left(\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}\right)^3\right)+2a.\frac{3-a^2}{2}-11$

$$f\left(a,t,t\right)\ge 0\Leftrightarrow 3\left(a^3+2\left(\sqrt{\frac{3-a^2}{2}}\right)^3\right)+2a.\frac{3-a^2}{2}-11\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3a^3+\frac{3\left(\sqrt{3-a^2}\right)^3}{\sqrt{2}}+a\left(3-a^2\right)-11\ge 0\Leftrightarrow\frac{3\left(\sqrt{3-a^2}\right)^3}{\sqrt{2}}+9a-15+\left(2a+4\right)\left(a-1\right)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(a-1\right)^2\left[2a+4-\frac{3\left(a^4+2a^3-6a^2-14a+23\right)}{\sqrt{2}\left(\left(\sqrt{3-a^2}\right)^3+\left(5-3a\right)\sqrt{2}\right)}\right]\ge 0\,(*)$$

Đặt $g\left(a\right)=\left(2a+4\right)\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{3-a^2}\right)^3+2\left(5-3a\right)\right)-3\left(a^4+2a^3-6a^2-14a+23\right)$

$$=\left(-2a^3-4a^2+6a+12\right)\sqrt{6-2a^2}-3a^4-6a^3+6a^2+38a-29$$

Ta có bổ đề: $\sqrt{6-2a^2}>\frac{61}{25}-\frac{22}{25}a\Leftrightarrow 6-2a^2>\left(\frac{61}{25}-\frac{22}{25}a\right)^2\Leftrightarrow-\frac{1734}{625}a^2+\frac{2684}{625}a+\frac{29}{625}>0$. Dễ thấy bổ đề đúng với $a\in[0;1]$.

Mặt khác $-2a^3-4a^2+6a+12=2a\left(1-a\right)\left(a+3\right)+12>0\forall a\in[0;1]$, nên ta được:

$$g(a) > \left(-2a^3-4a^2+6a+12\right)\left(\frac{61}{25}-\frac{22}{25}a\right)-3a^4-6a^3+6a^2+38a-29$$

$$=\frac{-31a^4-184a^3-226a^2+1052a+7}{25}=\frac{-31a^4-184a^3+215a^2-441a^2+1052a+7}{25}$$

Do

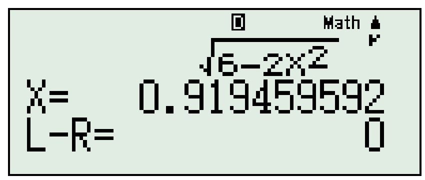
$$\begin{cases} -31a^4-184a^3+215a^2>0\forall a\in[0;1] \\ -441a^2+1052a+7>0\forall a\in[0;1] \\ \sqrt{2}\left(\left(\sqrt{3-a^2}\right)^3+(5-3a)\sqrt{2}\right)>0 \end{cases} \Rightarrow g(a)>0 \Rightarrow 2a+4-\frac{3\left(a^4+2a^3-6a^2-14a+23\right)}{\sqrt{2}\left(\left(\sqrt{3-a^2}\right)^3+(5-3a)\sqrt{2}\right)}>0$$

Vậy $(*)$ luôn đúng $\Rightarrow$ $f(a,t,t)\ge 0 \Rightarrow f(a,b,c)\ge 0$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=1$

- Bây giờ vấn đề đặt ra là kiếm đâu ra cái bổ đề kia. Để làm được điều này ta sẽ dùng tiếp tuyến để tìm ra nó dưới sự giúp đỡ của CASIO. Nhưng tuy nhiên làm sao ta có thể đánh giá được $\sqrt{6-2a^2}>ax+b$ khi chưa có manh mối gì? Để giải quyết vấn đề này ta sẽ tìm điểm rơi của bất đẳng thức đang cần chứng minh. Ta có:

$$g'(a)=\frac{16a^4+24a^3-60a^2-72a+36}{\sqrt{6-2a^2}}-12a^3-18a^2+12a+38$$



Phương trình $g'(a)=0$ có 1 nghiệm là :

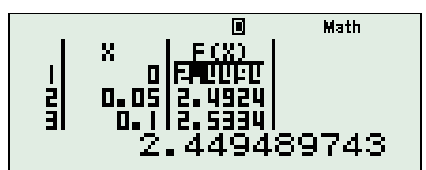
$$X=A=0,919459592$$

Bây giờ ta cần đánh giá được biểu thức trước căn là $-2a^3-4a^2+6a+12$. Dễ thấy rằng:

$$-2a^3-4a^2+6a+12=a(1-a)(a+3)+12>0$$

Vậy bây giờ cần chứng minh $\sqrt{6-2a^2}>ax+b$. Ta sẽ sử dụng phím $\boxed{\frac{d}{dx}\square}$.

Ta được $a=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{6-2X^2}\right)\Big|_{X=A}=-0,8858596433$. Bây giờ ta sẽ lấy a làm sao cho bất đẳng thức không bị đánh giá quá trội và vừa đồng thời là một số hữu tỷ đẹp vừa để về sau dễ đánh giá hơn. Do đó mình sẽ lấy $a=-0,88=\frac{-22}{25}$. Bây giờ cần tìm b,do đang cần chứng minh trên đoạn$[0;1]$ nên ta sẽ dùng MODE 7 để tìm ra b. MODE 7 với hàm $F(X)=\sqrt{6-2X^2}+\frac{22}{25}X$ trên $[0;1]$ ta được:



Để ý thấy là $\sqrt{6-2x^2}+\frac{22}{25}x>2,449489742$. Bây giờ ta sẽ chọn b là một số hữu tỷ vừa đẹp vừa gần số $2,449$ nhất. Ta sẽ chọn số $b=2,44=\frac{61}{25}$, đồng thời thay vào bài toán ta thấy nhân tử này thỏa mãn. Vậy ta tìm được nhân tử là $\sqrt{6-2a^2}+\frac{22}{25}a-\frac{61}{25}$.

Chú ý rằng chắc mấy bạn khi tìm được a thì thay luôn $X=A$ vào để tìm ra b và tìm được $b=2,884982846$, hiển nhiên là nhân tử này là sai. Đối với bài mà chứng minh trên đoạn thì ta thường sẽ dùng MODE 7

để tìm ra b, còn những bài chứng minh trên khoảng
thì ta mới dùng cách thay trực tiếp nhân tử vào, nếu có thời gian hãy thử chứng minh những bài sau thì sẽ rõ. Ngoài ra nếu giải phương trình đạo hàm bằng 0 mà nhiều nghiệm thì ta chọn nghiệm nào làm phương trình đầu min max

D. KỸ THUẬT SỬ DỤNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU.

I. Kiến thức cần nhớ.

Định lý 1.

Xét phương trình $f\left(x\right)=a$. Nếu $f\left(x\right)$ xác định, liên tục và đơn điệu trên TXĐ của nó thì phương trình $f\left(x\right)=a$ có tối đa 1 nghiệm.

Định lý 2.

Cho phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$, trong đó $f\left(x\right),g\left(x\right)$ cùng xác định trên D đồng thời có tính đơn điệu ngược nhau trên D thì phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ có tối đa 1 nghiệm.

Định lý 3.

Nếu hàm số $f\left(x\right)$ đơn điệu, không liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f\left(x\right)=a$ có tối đa $\left(n+1\right)$ nghiệm, với n là số điểm gián đoạn của đồ thị hàm số.

II. Bài toán minh họa.

Nội dung chủ yếu của phương pháp này là ta sẽ chứng minh đạo hàm của hàm số ban đầu mang một dấu để chỉ ra nghiệm duy nhất của phương trình đầu. Để hiểu rõ hơn ta cùng đi vào các bài cụ thể.

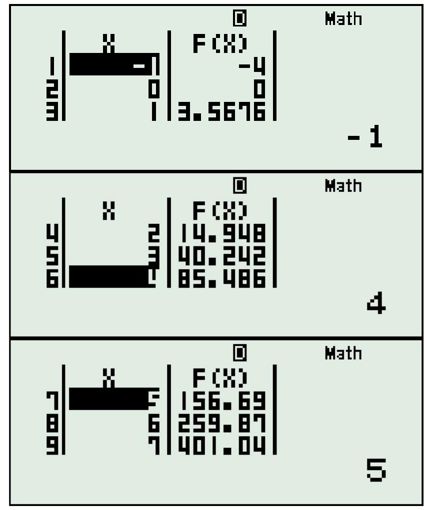
Bài 1: Giải phương trình: $x^3+x^2+x+3\sqrt[4]{x+1}=3$

Phân tích

Đầu tiên để định hướng hướng giải ta sẽ dùng máy tính kiểm tra tính đơn điệu của hàm số $f(x)=x^3+x^2+x-3+3\sqrt[4]{x+1}$ bằng MODE 7.

Nhập vào máy hàm số trên rồi cho:

- $\text{START}=-1$
- $\text{END}=20$
- $\text{STEP}=1$



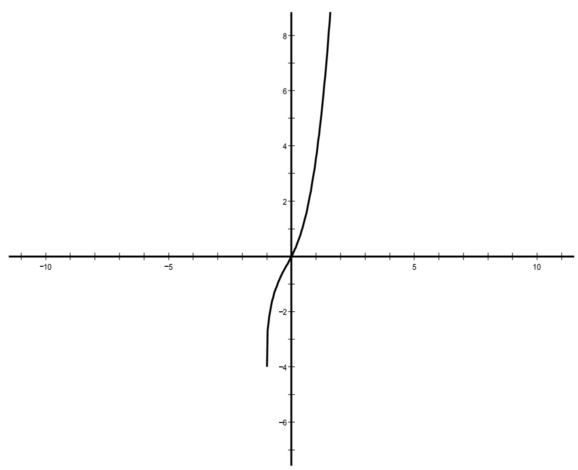
Ta được bảng như bên. Nhìn vào bảng ta thấy hàm có 1 nghiệm duy nhất là $x=0$ và có vẻ như đang đồng biến trên $[-1;+\infty)$ cho nên ta được $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bằng các giá trị của TABLE ta có thể vẽ được đồ thì của hàm số như bên.

Nhìn vào đồ thị ta có thể thấy nó luôn liên tục, đồng biến và cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.

Nếu muốn kiểm tra kỹ hơn ta có thể dùng máy tính chia nhỏ khoảng ra để kiểm chứng điều này.

UA



Bằng các giá trị của TABLE ta có thể vẽ được đồ thì của hàm số như bên.

Nhìn vào đồ thị ta có thể thấy nó luôn liên tục, đồng biến và cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.

Vậy khi đó ta chỉ cần chứng minh đạo hàm của hàm $f(x)=x^3+x^2+x-3+3\sqrt[4]{x+1}$ lớn hơn 0 là ta có thể giải quyết được bài toán này.

Ta có lời giải như sau:

Lời giải.

ĐKXĐ: $x\in[-1;+\infty)$.

Đặt $f(x)=x^3+x^2+x-3+3\sqrt[4]{x+1}$ liên tục trên $[-1;+\infty)$.

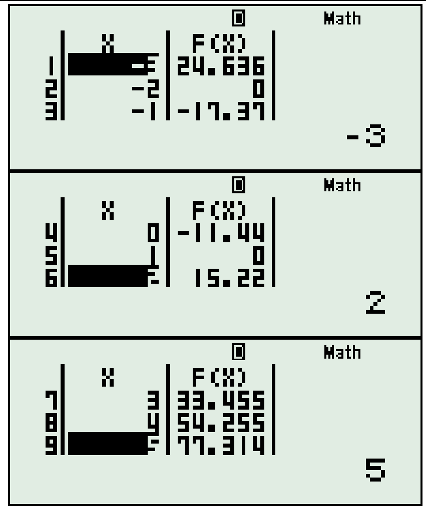
Ta có: $f'(x)=3x^2+2x+1+\dfrac{3}{4\left(\sqrt[4]{x+1}\right)^3}>0\forall x\in[-1;+\infty)$. Do đó $f(x)$ đồng biến trên $[-1;+\infty)$.

Suy ra phương trình $f(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm. Lại có $f(0)=0$ nên $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 2: Giải phương trình: $(4x-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{3x+5}\right)=4x+8$

Phân tích

Đầu tiên để định hướng hướng giải ta sẽ dùng máy tính kiểm tra tính đơn điệu của hàm số $f(x)=(4x-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{3x+5}\right)-4x-8$ bằng MODE 7.

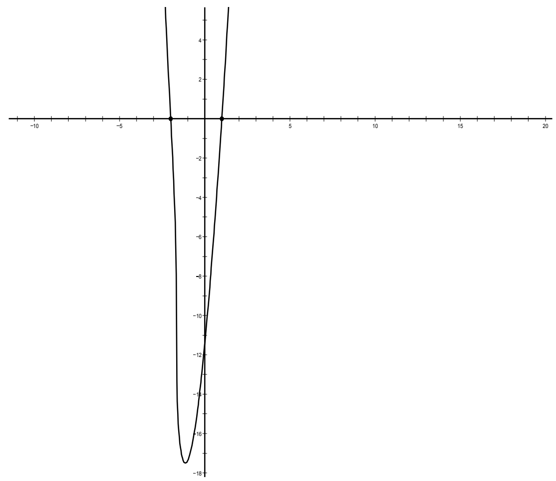


Nhập vào máy hàm số trên rồi cho:

- $START = -3$
- $END = 20$
- $STEP = 1$

Ta được bảng như hình bên. Nhìn vào bảng ta dễ thấy rằng phương trình đầu có 2 nghiệm $x = -2; x = 1$ và không phải hàm đơn điệu.

Đến đây chỉ có 2 cách là đạo hàm $f(x)$ lên và xét dấu của $f'(x)$ sau đó chỉ ra 2 nghiệm trên 2 khoảng mà ta đã xét tính đơn điệu của nó. Cách thứ 2 là sử dụng định lý 2 để giải quyết nó.



Để dễ hình dung ta có thể vẽ đồ thị như sau:
Nhìn vào đồ thị ta thấy $f'(x)$ bị đổi dấu khi qua một điểm. Để giải quyết bài toán bằng cách 1 thì khá là khó vì:

$$f'(x) = 4\left(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}\right)$$
$$+(4x-1)\left[\frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\left(\sqrt[3]{3x+5}\right)^2}\right] - 4$$

Rất khó để xét dấu của nó. Chỉ còn cách là chứng minh vô nghiệm trên 1 khoảng chứa điểm rơi, còn 2 khoảng còn lại ta dễ dàng xét dấu của nó. Ta sẽ thử làm 2 cách.

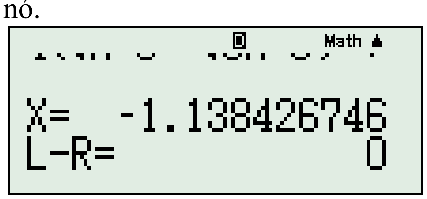
Giải

Cách 1: Hàm số.

Đặt $f(x) = (4x-1)\left(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}\right) - 4x - 8$ liên tục trên $[-3; +\infty)$

Ta có: $f'(x) = 4\left(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}\right) + (4x-1)\left[\frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\left(\sqrt[3]{3x+5}\right)^2}\right] - 4$

Đến đây để tìm khoảng chứa điểm rơi ta sẽ dùng CASIO để tìm nó.



Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1,138426746$

Đến đây ta sẽ chứng minh phương trình đầu vô nghiệm trong khoảng $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$. Ta được:

Với $x \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right]$ thì $(4x-1) < 0$, $\left(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}\right) > 0 \Rightarrow VT < 0$.

Mặt khác $(8x+4) > 0 \forall x \in \left[\frac{-3}{2}; -1\right]$ nên phương trình vô nghiệm trên $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$

Đặt $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\left(\sqrt[3]{3x+5}\right)^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{-1}{4\left(\sqrt{x+3}\right)^3} - \frac{2}{\left(\sqrt[3]{3x+5}\right)^5} < 0 \forall x \geq -1$

Với $x \in \left[-1; \frac{1}{4}\right]$ thì $4x - 1 < 0$, $g(x) \leq g(-1) < 1$. Khi đó ta có:

$$f'(x) > 4\left(\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{3x+5}\right)+4x-5 > 4\left(\sqrt{1+3}+\sqrt[3]{3+5}\right)-5+4>0$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[-1;\frac{1}{4}\right] \Rightarrow f(-1)\le f(x)\le f\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow -18 < f(x) \le -9 < 0$. Vậy phương trình vô nghiệm trên $\left[-1;\frac{1}{4}\right]$.

Với $x \ge \frac{1}{4}$ thì $4x-1\ge 0 \Rightarrow f'(x) \ge 4\left(\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{3x+5}\right)-4 > 10 > 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{4};+\infty\right) \Rightarrow$ phương trình $f(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm. Lại có $f(1)=0$ nên phương trình có 1 nghiệm là $x=1$.

Với $x \in \left[-3;-\frac{3}{2}\right]$ thì $\begin{cases} 4x-1<0 \\ 2\sqrt{x+3}<2,5 \\ \left(\sqrt[3]{3x+5}\right)^2 < 2,5 \end{cases}$. Khi đó ta được:

$$\begin{aligned} f'(x) &< 4\left(\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{3x+5}\right)+\frac{4(4x-1)}{5}-4 \\ &\le 4\left(\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{3x+5}\right)-9,6 \le 4\left(\sqrt{-1,5+3}+\sqrt[3]{3.(-1,5)+5}-9,6\right)<0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $\left[-3;-\frac{3}{2}\right]$, do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm thuộc $\left[-3;-\frac{3}{2}\right]$. Lại có $f(-2)=0$ nên $x=-2$ là 1 nghiệm của phương trình đầu.

Kết luận: Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x=-2$ và $x=1$.

Cách 2: Hàm số.

Do $x=\frac{1}{4}$ không là nghiệm của phương trình nên xét $x\ne\frac{1}{4}$ thì phương trình tương đương:

$$(4x-1)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{3x+5}\right)=4x+8 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt[3]{3x+5}=\frac{4x+8}{4x-1}$$

Đặt $f(x)=\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{3x+5}-\frac{4x+8}{4x-1}$ liên tục trên $\left[-3;\frac{1}{4}\right)$ và $\left(\frac{1}{4};+\infty\right]$.

Có: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}+\frac{1}{\left(\sqrt[3]{3x+5}\right)^2}+\frac{36}{(4x-1)^2}>0$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\left[-3;\frac{1}{4}\right)$ và $\left(\frac{1}{4};+\infty\right]$. Vậy phương trình $f(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm trên mỗi khoảng trên.

Từ đó chỉ ra 2 nghiệm là $x=-2$ và $x=1$ là xong bài!

Ta có thể thấy rằng cách 1 có vẻ là dài và phức tạp hơn so với cách 2 nhưng tuy nhiên sẽ có nhiều bài lại nhanh hơn, sau đây là một ví dụ.

Bài 3: Giải phương trình: $9x^4-32x^2+5+18\sqrt{4-3x}=0$

Thầy Lã Duy Tiến - THPT Bình Minh

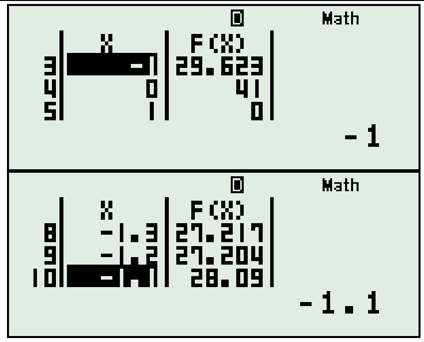
Đề thi chọn học sinh giỏi THPT Bình Minh khóa 2015 – 2018

Giải

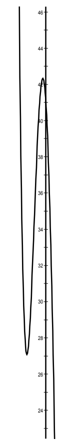
Vẫn như những bài trước ta sẽ dùng MODE 7 để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

MODE 7 với hàm $f(x)=9x^4-32x^2+5+18\sqrt{4-3x}$ trên $[-15;2]$. Ta được:

Nhìn vào bảng thì ta thấy hàm có vẻ nghịch biến, nhưng nếu khảo sát kỹ hơn thì ta thấy rằng nó sẽ tăng trên khoảng $\left[-1;3;-1,1\right]$ do đó hàm này không hề đơn điệu một chiều trên $\left[-\infty;\frac{4}{3}\right)$.



Ta có thể vẽ đồ thị của nó như sau:
Hình ở bên là nhánh phía trên của đồ thị. Ta có thể thấy rằng nó không hề đơn điệu một chiều và có tới 2 điểm đổi chiều. Do đó để giải được bài này ta cần phải chứng minh nó vô nghiệm trên một khoảng nào đó. Dễ thấy là $\left(-\infty;0\right]$.



Xét $x\in\left(-\infty;0\right]$ ta có $\sqrt{4-3x}>2$, do đó

$$\begin{aligned}f(x)&=9x^4-32x^2+5+18\sqrt{4-3x}\\&\ge 9x^4-32x^2+36\\&=9\left(x^2-\frac{16}{9}\right)^2+\frac{68}{9}>0\end{aligned}$$

Vậy phương trình vô nghiệm trên $\left(-\infty;0\right]$.

Xét $x\in\left[0;\frac{4}{3}\right]$, ta có:

$f'(x)=36x^3-64x-\frac{27}{\sqrt{4-3x}}$. Dễ thấy $36x^3-64x=x\left(36x^2-64\right)<0\forall x\in\left[0;\frac{4}{3}\right]$ nên $f'(x)<0$.

Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $\left[0;\frac{4}{3}\right]$, do đó phương trình $f(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm trên $\left[0;\frac{4}{3}\right]$.

Lại có $f(1)=0$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ngoài ra nếu ai thích cũng có thể liên hợp để giải quyết bài toán này. Ta có:

$$9x^4-32x^2+5+18\sqrt{4-3x}=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{54}{\sqrt{4-3x}+1}-9x^3-9x^2+23x+23\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ f(x)=\frac{54}{\sqrt{4-3x}+1}-9x^3-9x^2+23x+23=0\,(*)\end{array}\right.$$

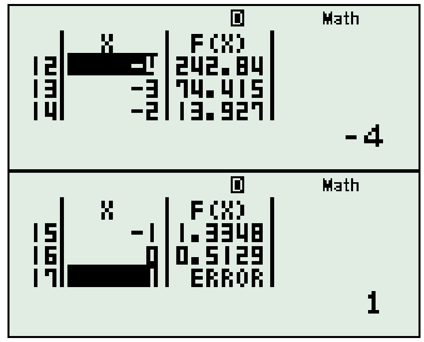
Do ta đã chứng minh phương trình vô nghiệm trên $\left(-\infty;0\right]$ nên ta chỉ cần chứng minh $f(x)>0\forall x\in\left[0;\frac{4}{3}\right]$. Điều này quá là dễ bởi vì $(x+1)\left(-9x^2+23\right)>0\forall x\in\left[0;\frac{4}{3}\right]$ do đó phương trình $f(x)=0$ sẽ vô nghiệm trên $\left[0;\frac{4}{3}\right]$. Bài toán đã được giải quyết!

Bài 4: Giải phương trình: $\frac{x^2}{3}+\left(\frac{2}{3}-x^2\right)^2+\sqrt{2-3x}-\frac{109}{81}=0$

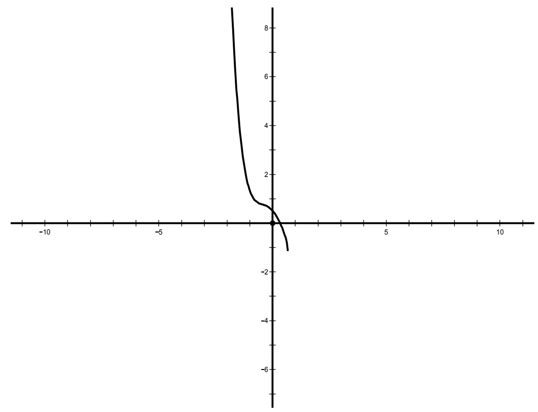
Đề thi thử THPT Quốc Gia – Phú Yên – 2015.

Phân tích

MODE 7 với hàm: $F(X)=\frac{X^2}{3}+\left(\frac{2}{3}-X^2\right)^2+\sqrt{2-3X}-\frac{109}{81}$ trên $[-15;1]$ ta được:



Nhìn vào bảng thì ta sẽ thấy hàm có vẻ nghịch biến, khảo sát kỹ hơn ở khoảng $\left[0;\frac{2}{3}\right]$ ta sẽ thấy phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left[0;\frac{2}{3}\right]$. Giải phương trình ta sẽ được nghiệm $x=\frac{1}{3}$, do đó ta sẽ dùng phương pháp hàm số để giải nó. Ta có thể vẽ đồ thị của hàm như hình bên. Nhìn vào đồ thị ta thấy rằng hàm số $f(x)$ chắc chắn nghịch biến, nên ta sẽ đi chứng minh điều này.



Ta có: $f'(x)=\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}+4x^3-2x$.

Nếu $x\in\left(-\infty;\frac{-\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ thì $4x^3-2x<0$, khi đó $f'(x)<0$.

Nếu $x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right]$ thì $2\sqrt{2-3x}<5$, suy ra:

$f'(x)<4x^3-2x-\frac{3}{5}=g(x)$. Có $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$. Mặt khác ta lại có $g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3}{5}$

$g(0)=-\frac{3}{5}$ và $g\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=\frac{-27+10\sqrt{5}}{45}<0$, nên $f'(x)<g(x)<0\forall x\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right]$.

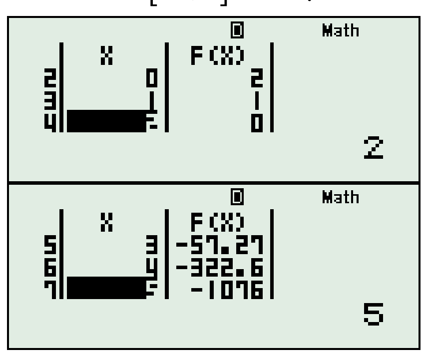
Vậy $f(x)$ nghịch biến trên $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$, do đó $x=\frac{1}{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 5: Giải phương trình: $2x^4-4x+1-\left(x^3-x-1\right)\sqrt{3x^3+1}=0$

Phân tích

Bài này là một bài khá là khó, nhưng trước hết ta cứ phải khảo sát hàm số và vẽ đồ thị trước đã.

MODE 7 với hàm $F(X)=2X^4-4X+1-\left(X^3-X-1\right)\sqrt{3X^3+1}$ trên $[-1;5]$ ta được.

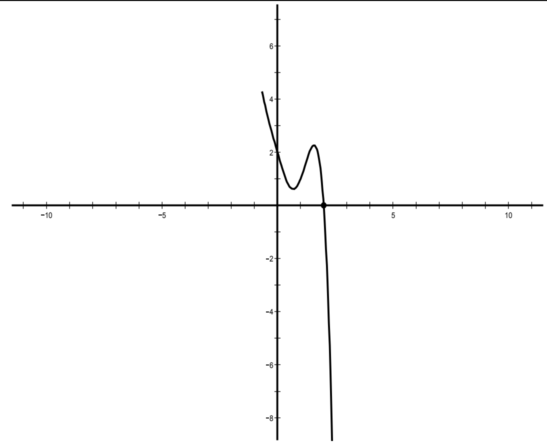


Nhìn vào bảng thấy rằng hàm có vẻ nghịch biến, nhưng khảo sát kỹ hơn trên $\left[-\sqrt[3]{\frac{1}{3}};1\right]$ ta sẽ thấy hàm lúc tăng lúc giảm, do đó như những bài trên mình sẽ lại phải chứng minh vô nghiệm trên một khoảng nào đó rồi! Dễ dàng dò bằng CASIO thì ta thấy hàm sẽ nghịch biến trên khoảng $\left[\frac{9}{5};+\infty\right)$, do đó ta sẽ chứng minh phương trình vô nghiệm trên $\left[-\sqrt[3]{\frac{1}{3}};\frac{9}{5}\right]$.

Trước hết ta vẽ được đồ thị như bên.

Nhìn vào đồ thị ta có thể chắc chắn rằng khi

$x \in \left[\frac{9}{5};+\infty\right)$ thì hàm nghịch biến và cắt trục hoành tại duy nhất một điểm tại $x=2$. Sau khi định hướng được hướng giải rồi ta sẽ đi giải quyết nó thôi! Nhưng ta lại gặp phải một vấn đề là biểu thức phía trước căn thức là một đa thức bậc 3 khá là khó xét dấu của nó để có thể khử căn nên ta sẽ chia làm 2 trường hợp.



Trường hợp 1: Nếu $\begin{cases} x^3-x-1>0 \\ x\in\left[-\sqrt[3]{\frac{1}{3}};\frac{9}{5}\right]\end{cases}$. Khi đó $\sqrt{3x^3+1}\le\frac{34\sqrt{10}}{25}<\frac{9}{2}$. Suy ra được:

$$f(x)=2x^4-4x+1-\left(x^3-x-1\right)\sqrt{3x^3+1}$$
$$>2x^4-4x+1-\frac{9}{2}\left(x^3-x-1\right)=\frac{4x^4-9x^3+x+11}{2}$$
$$=\frac{4\left(x^2-\frac{9}{8}x-\frac{9}{10}\right)^2+\frac{171}{80}x^2-\frac{71}{10}x+\frac{194}{25}}{2}>0$$

Vậy phương trình vô nghiệm khi $\begin{cases} x^3-x-1>0 \\ x\le\frac{9}{5}\end{cases}$.

Trường hợp 2: Nếu $\begin{cases} x^3-x-1<0 \\ x\in\left[-\sqrt[3]{\frac{1}{3}};\frac{9}{5}\right]\end{cases}$. Đến đây nếu ta cho $\sqrt{3x^3+1}\ge 0$ thì không hẳn $f(x)>0$

Do đó ta cần đánh giá $\sqrt{3x^3+1}\ge ax+b$. Đến đây sử dụng tiếp tuyến và điểm rơi của $f(x)$.

Ta có: $f'(x)=8x^3-4-\frac{27x^5-15x^3-3x^2-2}{2\sqrt{3x^3+1}}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0,678262158\to A \\ x=1,581810582\to B\end{array}\right.$.

Ta thấy $f(A)=0,6112465178; f(B)=2,256666123$ do đó $x=A$ là điểm rơi của $f(x)$.

Khi đó $a=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3x^3+1}\right)\Big|_{x=A}\approx\frac{3}{2}$. Ta sẽ dùng MODE 7 để tìm b.

MODE 7 với hàm $f(X)=\sqrt{3X^3+1}-\frac{3}{2}X$ ta sẽ tìm được min xấp xỉ $0,36=\frac{9}{25}$. Vậy đánh giá cần tìm là $\sqrt{3x^3+1}>\frac{3}{2}x+\frac{9}{25}(1)$

- Nếu $x\in\left[-\sqrt[3]{\frac{1}{3}};-\frac{6}{25}\right]$ thì (1) luôn đúng.
- Nếu $x\in\left[\frac{-6}{25};\frac{9}{5}\right]$ thì $(1)\Leftrightarrow 3x^3-\frac{9}{4}x^2-\frac{27}{25}x+\frac{544}{625}>0\Leftrightarrow g(x)>0$

- $g'(x)=9x^2-\frac{9}{2}x-\frac{27}{25}=0 \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{73}}{20}$
- $g\left(-\frac{6}{25}\right)\approx 0,95>0; g\left(\frac{9}{5}\right)=\frac{22831}{2500}>0; g\left(\frac{5+\sqrt{73}}{20}\right)\approx 0,0388>0 \; g\left(\frac{5-\sqrt{73}}{20}\right)\approx 0,97>0$

Vậy (1) luôn đúng.

Khi đó $f(x)>2x^4-4x+1-\left(x^3-x-1\right)\left(\frac{3}{2}x+\frac{9}{25}\right)$

$$=\frac{25x^4-18x^3+75x^2-107x+68}{25}=\frac{25x^2\left(x-\frac{9}{25}\right)^2+\frac{19}{25}x^2+71\left(x-\frac{107}{142}\right)^2+\frac{7863}{284}}{25}>0$$

Vậy phương trình vô nghiệm trên $\left[-\sqrt[3]{\frac{1}{3}};\frac{9}{5}\right]$.

Trường hợp 3: Nếu $x\ge\frac{9}{5}$.

Ta có:

$$f'(x)=8x^3-4-\frac{27x^5-15x^3-3x^2-2}{2\sqrt{3x^3+1}}=\frac{2\left(8x^3-4\right)\sqrt{3x^3+1}-\left(27x^5-15x^3-3x^2-2\right)}{2\sqrt{3x^3+1}}$$

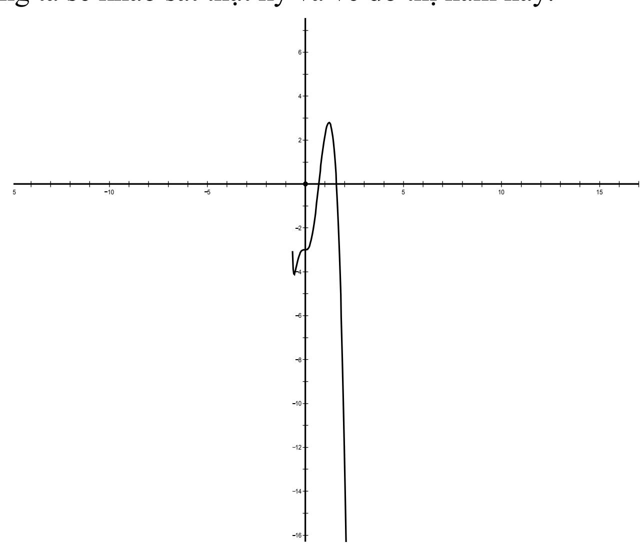
Để ý thấy: $8x^3-4>0\forall x\ge\frac{9}{5}$

$$27x^5-15x^3-3x^2-2=27(x-1)^5+135(x-1)^4+255(x-1)^3+222(x-1)^2+84(x-1)+7>0$$

Khi đó ta chỉ cần đi chứng minh $\sqrt{3x^3+1}$ nhỏ hơn một biểu thức nào đó.

Nếu đánh giá $\sqrt{3x^3+1}<ax+b$ thì không khả thi do $\deg\left(\sqrt{3x^3+1}\right)=\frac{3}{2}$ - deg là bậc của đa thức – lớn hơn 1. Ta cần phải đánh giá $\sqrt{3x^3+1}<x^2+ax+b$ (ở đây ta chọn luôn hệ số của x^2 là 1 cho dễ đánh giá), nhưng ta lại phải đi tìm điểm rơi của $f'(x)$. Nhưng hãy để ý khi ta dò MODE 7 thì dường như $f'(x)$ nghịch biến. Để kiểm chứng ta sẽ khảo sát thật kỹ và vẽ đồ thị hàm này.

Nhìn vào đồ thị có thể thấy rằng khi $x\ge\frac{9}{5}=1,8$ thì hàm $f'(x)$ nghịch biến. Vậy điểm rơi sẽ là $x=\frac{9}{5}$.



Khi đó ta sẽ tìm được:

$$\begin{cases} b=-\dfrac{\left.\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3x^3+1}\right)\right|_{x=\frac{9}{5}}}{\left.\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\right|_{x=\frac{9}{5}}}\approx\dfrac{-1}{5} \\ c=\left.\sqrt{3x^3+1}-x^2+\frac{1}{5}x\right|_{x=\frac{9}{5}}\approx\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy có đánh giá $\sqrt{3x^3+1}<x^2-\frac{1}{5}x+\frac{3}{2}(*)$

Bây giờ sẽ đi chứng minh $(*)$ luôn đúng.

Ta có:

$$\sqrt{3x^3+1} < x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^4 - \frac{17}{5}x^3 + \frac{76}{25}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{5}{4} > 0 \Leftrightarrow x^2\left(x - \frac{17}{10}\right)^2 + \frac{3}{20}(x-2)^2 + \frac{13}{20} > 0$$

Vậy $(*)$ luôn đúng.

Khi đó $f'(x) < \left(-55x^5 - 16x^4 + 195x^3\right) + \left(-25x^2 + 8x - 50\right) < 0$.

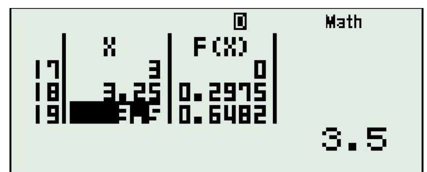
Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $\left[\frac{9}{5};+\infty\right)$. Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 6: Giải phương trình: $\sqrt{x+1} - 2\sqrt{4-x} = \dfrac{5(x-3)}{2x^2+18}$

Đề thi thử Đại học – Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương 2013

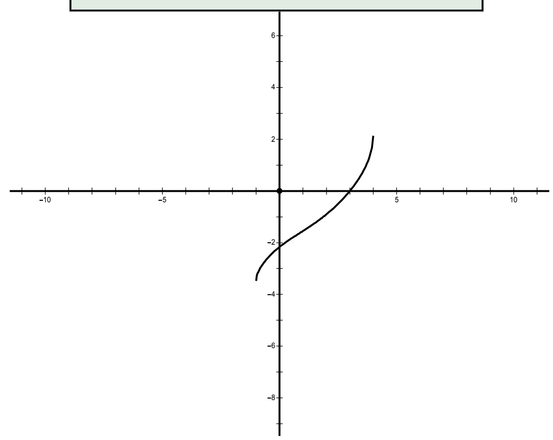
Phân tích

MODE 7 với hàm $f(x) = \sqrt{x+1} - 2\sqrt{4-x} - \dfrac{5(x-3)}{2x^2+18}$ ta được.



Nhìn vào bảng ta thấy hàm có vẻ đồng biến và có nghiệm là $x = 3$. Để kiểm chứng điều này ta sẽ vẽ đồ thị của hàm này.

Nhìn vào đồ thị trăm phần trăm là hàm đồng biến nên ta sẽ đi chứng minh điều này.



Ta có: $f(x) = \sqrt{x+1} - 2\sqrt{4-x} - \dfrac{5(x-3)}{2x^2+18}$ liên tục trên $[-1;4]$.

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x}} + \dfrac{10x^2-60x-90}{\left(2x^2+18\right)^2}$ Bây giờ ta cần chứng minh $f'(x) > 0 \forall x \in [-1;4]$.

Để chứng minh điều này ta cần dùng máy tính khảo sát tìm min, max của $f'(x)$ trên $[-1;4]$.

Ta được $\dfrac{10x^2-60x-90}{\left(2x^2+18\right)^2} < \dfrac{-1}{2}$ và

$\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x}} > \dfrac{1}{2}$. Ta sẽ đi chứng minh 2 điều này.

Ta có:

1. $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{5-2\sqrt{x+1}}{10\sqrt{x+1}} = \dfrac{21-4x}{10\sqrt{x+1}\left(5+2\sqrt{x+1}\right)} > 0$

2. $\dfrac{1}{\sqrt{4-x}} - \dfrac{3}{10} = \dfrac{10-3\sqrt{4-x}}{10\sqrt{4-x}} = \dfrac{9x+64}{10\left(10-3\sqrt{4-x}\right)\sqrt{4-x}} > 0$

3. $\dfrac{10x^2-60x-90}{\left(2x^2+18\right)^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4x^4+92x^2-120x+144}{2\left(2x^2+18\right)^2} = \dfrac{4x^4+92\left(x-\frac{15}{23}\right)^2+\frac{2412}{23}}{2\left(2x^2+18\right)^2} > 0$

Vậy $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[-1;4]$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Ngoài ra ta cũng có thể giải bài này bằng phương pháp nhân liên hợp.

$$\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}=\frac{5(x-3)}{2x^2+18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(x-3)}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{4-x}}=\frac{5(x-3)}{2x^2+18}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2\sqrt{4-x}}=\dfrac{1}{2x^2+18}(*) \end{array}\right.$$

Đặt $f(x)=2x^2+18-\sqrt{x+1}-2\sqrt{4-x}$

Với $x\in[-1;4]$ thì $\begin{cases}\sqrt{x+1}<3 \\ 2\sqrt{4-x}<5\end{cases}\Rightarrow f(x)>2x^2+10>0$.

$\Rightarrow$ phương trình $(*)$ vô nghiệm!

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 7: Giải phương trình: $x^2+8x-16-(x-3)\sqrt{3x+1}+(2-x)\sqrt{7x+2}=0$

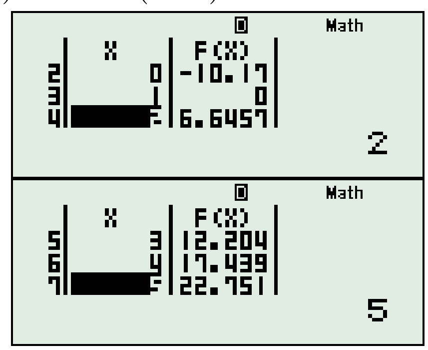
Nguyễn Minh Tuấn

Phân tích

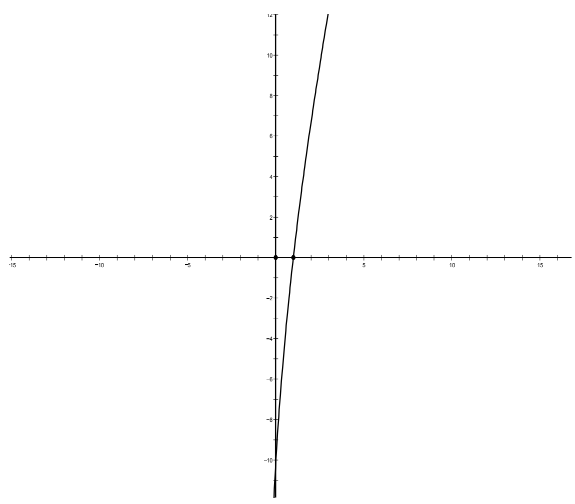
Dùng MODE 7 khảo sát hàm $f(x)=x^2+8x-16-(x-3)\sqrt{3x+1}+(2-x)\sqrt{7x+2}$.

Nhập vào máy hàm số trên rồi cho:

- $\text{START}=-1$
- $\text{END}=20$
- $\text{STEP}=1$



Ta được bảng như bên. Nhìn vào bảng thì ta thấy hàm có vẻ đồng biến và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 0. Để chắc chắn thì ta sẽ đi vẽ đồ thị, ta được như bên. Nhìn vào đồ thị ta chắc chắn rằng hàm đồng biến nên ta sẽ đi chứng minh điều này.



Ta có:

$$f'(x)=2x+8-\frac{9x-7}{2\sqrt{3x+1}}-\frac{21x-10}{2\sqrt{7x+2}}$$

Để chứng minh $f'(x)>0\forall x\geq -\frac{2}{7}$ cũng không phải là điều khó khăn gì. Trước hết ta cần phải chia trường hợp thì mới làm được.

Trường hợp 1: $x\in\left[-\frac{2}{7};\frac{10}{21}\right]$.

Khi đó thì $\begin{cases}21x-10\leq 0 \\ 9x-7<0 \\ 2x+8>0\end{cases}$. Cho nên $f'(x)>0$.

Trường hợp 2: $x\in\left[\frac{10}{21};\frac{7}{9}\right]$. Khi đó $\begin{cases}21x-10>0 \\ 9x-7\leq 0\end{cases}\Rightarrow f(x)>2x+8-\frac{21x-10}{2\sqrt{7x+2}}-\frac{9x-7}{2\sqrt{3x+1}}$

Mặt khác ta lại có:

$$2x+8-\frac{21x-10}{2\sqrt{7x+2}}=\frac{2(2x+8)\sqrt{7x+2}-21x+10}{2\sqrt{7x+2}}>\frac{40-21x+10}{2\sqrt{7x+2}}>0\forall x\in\left[\frac{10}{21};\frac{7}{9}\right]$$

$\Rightarrow f(x)>0\forall x\in\left[\frac{10}{21};\frac{7}{9}\right]$

Trường hợp 3: $x \ge \frac{7}{9}$. Khi đó ta có:

1. $x+4-\frac{9x-7}{2\sqrt{3x+1}}=\frac{2(x+4)\sqrt{3x+1}-9x+7}{2\sqrt{3x+1}}=\frac{\frac{12x^3+19x^2+224x+64}{2(x+4)\sqrt{3x+1}+9x}+7}{2\sqrt{3x+1}}>0$

2. $x+4-\frac{21x-10}{2\sqrt{7x+2}}=\frac{2(x+4)\sqrt{7x+2}-21x+10}{2\sqrt{7x+2}}=\frac{\frac{28x^3-209x^2+512x+128}{2(x+4)\sqrt{7x+2}+21x}+10}{2\sqrt{7x+2}}>0$

$\Rightarrow f'(x)>0 \forall x \ge \frac{7}{9}$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\left[-\frac{2}{7};+\infty\right)$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 8: Giải phương trình: $\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)=\frac{9x^2-8x+4}{3x+2\sqrt{2x-1}}$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 – THPT Trần Hưng Đạo – Đăknông

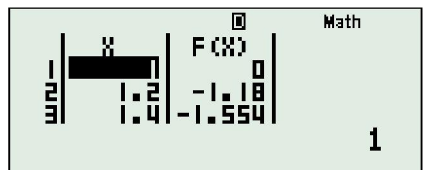
Phân tích

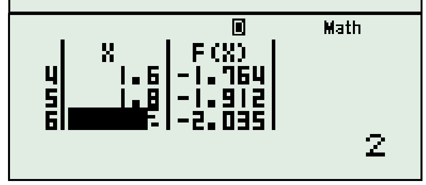
Vẫn như mọi khi ta vẫn đi khảo sát và vẽ đồ thị hàm số thôi!

MODE 7 với hàm $f(x)=\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)-\frac{9x^2-8x+4}{3x+2\sqrt{2x-1}}$.

Nhập vào máy hàm số trên rồi cho:

- $\text{START}=1$
- $\text{END}=5$
- $\text{STEP}=0,2$

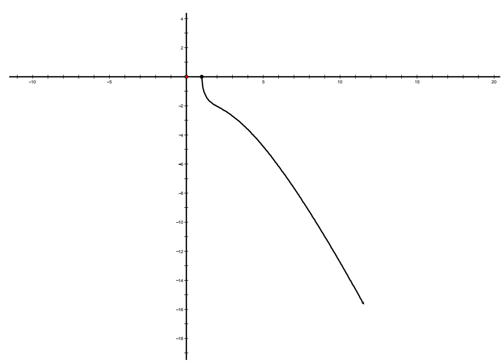




Nhìn vào bảng ta thấy luôn phương trình đầu có nghiệm là $x=1$ và hàm có dấu hiệu nghịch biến. Để biết chính xác ta sẽ đi vẽ đồ thị. Ta thấy rằng đồ thị có dấu hiệu đi xuống, vậy hàm là nghịch biến. Do đó nếu ta chứng minh được hàm nghịch biến là OK.

Ta có:

$$f'(x)=\frac{2x^2+3x-6-3\sqrt{x-1}}{x^2\sqrt{x-1}}-\frac{(27x^2-12)\sqrt{2x-1}+54x^2-52x+8}{\left(3x+2\sqrt{2x-1}\right)^2\sqrt{2x-1}}$$



Nhìn đã thấy choáng rồi! Việc chứng minh không phải đơn giản chút nào! Nhưng hãy để ý rằng:

$$9x^2-8x+4=\left(3x+2\sqrt{2x-1}\right)\left(3x-2\sqrt{2x-1}\right)$$

Khi đó phương trình sẽ đơn giản hơn rất nhiều. Ta sẽ không phải đi chứng minh con " ép phẩy" kia! Ta có:

$$\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)=\frac{9x^2-8x+4}{3x+2\sqrt{2x-1}}$$

$$\Leftrightarrow \left(2-\frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)=\frac{\left(3x-2\sqrt{2x-1}\right)\left(3x+2\sqrt{2x-1}\right)}{3x+2\sqrt{2x-1}}$$

$$\Leftrightarrow\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)=3x-2\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow(2x-3)\left(2\sqrt{x-1}-1\right)=3x^2-2x\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow 2(2x-3)\sqrt{x-1}+2x\sqrt{2x-1}-3x^2-2x+3=0$$

Bây giờ đặt $f(x)=2(2x-3)\sqrt{x-1}+2x\sqrt{2x-1}-3x^2-2x-3$.

Ta có:

1. $f'(x)=\frac{6x-7}{\sqrt{x-1}}+\frac{6x-2}{\sqrt{2x-1}}-6x-2$

2. $\frac{6x-7}{\sqrt{x-1}}-3x-1=\frac{\left(6\sqrt{x-1}-3x-1\right)\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}=\frac{\frac{\left(-9x^2+30x-37\right)\sqrt{x-1}}{6\sqrt{x-1}+3x+1}-1}{\sqrt{x-1}}<0$

3. $\frac{6x-2}{\sqrt{2x-1}}-3x-1=\frac{6x-2-(3x+1)\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}}=\frac{-18x^3+33x^2-15x-5x+5}{\left(6x-2+(3x+1)\sqrt{2x-1}\right)\sqrt{2x-1}}<0$

Suy ra $f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $[1;+\infty)$. Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đầu.

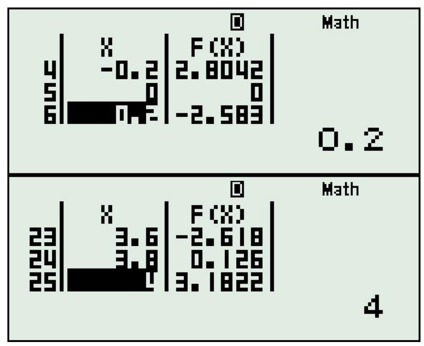
Bài 9: Giải phương trình: $3\sqrt{x+4}+3\sqrt{5x+4}+4x^2-18x-12=0$

Phân tích

MODE 7 với hàm $f(x)=3\sqrt{x+4}+3\sqrt{5x+4}+4x^2-18x-12$

Nhập vào máy hàm số trên rồi cho:

- $\text{START}=-0,8$
- $\text{END}=5$
- $\text{STEP}=0,2$



Ta được bảng như bên. Nhìn vào bảng thì ta thấy rõ ràng phương trình không chỉ có 1 nghiệm duy nhất $x=0$ mà còn có 1 nghiệm nữa thuộc khoảng $[3,6;4]$. Tất nhiên là ta phải chia 3 trường hợp rồi. Trước tiên để xác định các trường hợp thì ta có thể dùng MODE 7 thì có lẽ hàm này đồng biến khi $x\ge 3$ và nghịch biến khi $x<1$.

Và phương trình đầu vô nghiệm trên $[1;3]$.

Vậy là ta đã có định hướng để giải bài này. Nếu: $x\in[1;3]$.Khi đó $\begin{cases}3\sqrt{x+4}<8\\3\sqrt{5x+4}<14\end{cases}$

$\Rightarrow f(x)<4x^2-18x+10<0\forall x\in[1;3]$

Vậy phương trình vô nghiệm trên $[1;3]$.

Ta có: $f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{x+4}}+\frac{15}{2\sqrt{5x+4}}+8x-18$

Nếu $x\ge 3$ thì hiển nhiên $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[3;+\infty)$.

Nếu $x\in\left[-\frac{4}{5};1\right]$ thì ta nhận thấy rằng chưa chắc hàm đã nghịch biến do $\lim\limits_{x\to-\frac{4}{5}^+}\frac{15}{2\sqrt{5x+4}}=+\infty$

Lúc này không thể nào có chuyện $f'(x)<0$ được. Để thấy được hàm đổi chiều thì hãy khảo sát hàm này trên $[-0,8;-0,7]$ với $\text{STEP}=\frac{0,1}{29}$ ta sẽ thấy nó đổi dấu ngay. Vậy để khắc phục ta lại chia nhỏ khoảng $\left[-\frac{4}{5};1\right]$ hơn nữa. Khi đó ta sẽ xét 2 trường hợp sau:

Nếu $x\in\left[-\frac{4}{5};-\frac{1}{2}\right]$ thì $\begin{cases}3\sqrt{x+4}>5\\3\sqrt{5x+4}\ge 0\end{cases}\Rightarrow f(x)>4x^2-18x-7>0\forall x\in\left[-\frac{4}{5};-\frac{1}{2}\right]$

Nếu $x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$ khi đó $\begin{cases}2\sqrt{x+4}>3,5\\2\sqrt{5x+4}>2\end{cases}\Rightarrow f'(x)<8x-\frac{135}{14}<0$. Vậy hàm nghịch biến trên $\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

Vậy phương trình sẽ có 1 nghiệm trên $[3;+\infty)$ và 1 nghiệm trên $\left[-\frac{1}{2};1\right]$. Lúc này chỉ ra 2 nghiệm là $x=0$ và $x=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ là xong!

Ngoài cách làm ở trên ta cũng có thể làm theo cách liên hợp lôi 1 nghiệm ra còn một nghiệm dùng hàm số để giải quyết. Ta cùng làm thử cả 2 hướng xem sao.

- **HƯỚNG 1:** Lôi nghiệm $x=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ ra trước.

Ta có:

$$3\sqrt{x+4}+3\sqrt{5x+4}+4x^2-18x-12=0$$
$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x+4}-x+1\right)+3\left(\sqrt{5x+4}-x-1\right)+4\left(x^2-3x-3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-3\left(x^2-3x-3\right)}{\sqrt{x+4}+x-1}+\frac{-3\left(x^2-3x-3\right)}{\sqrt{5x+4}+x+1}+4\left(x^2-3x-3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-3x-3=0\\ f(x)=\frac{-3}{\sqrt{x+4}+x-1}-\frac{3}{\sqrt{5x+4}+x+1}+4=0\end{array}\right.$$

Có $f'(x)=\frac{6\sqrt{x+4}+3}{2\sqrt{x+4}\left(\sqrt{x+4}+x-1\right)^2}+\frac{6\sqrt{5x+4}+15}{2\sqrt{5x+4}\left(\sqrt{5x+4}+x+1\right)^2}>0$.

Nên $f(x)$ đồng biến trên $\left[-\frac{5}{4};+\infty\right)$. Lại có $f(0)=0$ nên $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x)=0$.

- **HƯỚNG 2:** Lôi nghiệm $x=0$ ra trước.

Ta có:

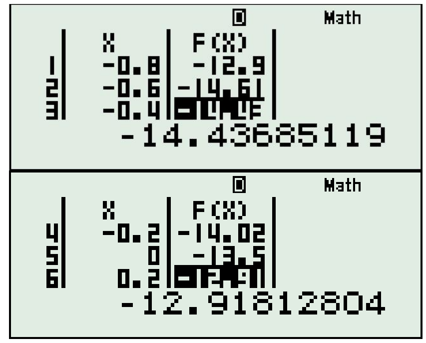
$$3\sqrt{x+4}+3\sqrt{5x+4}+4x^2-18x-12=0$$
$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x+4}-2\right)+3\left(\sqrt{5x+4}-2\right)+4x^2-18x=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ f(x)=\frac{3}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{15}{\sqrt{5x+4}+2}+4x-18=0\end{array}\right.$$

Bây giờ ta sẽ dùng cả MODE 7 và vẽ đồ thị để kiểm tra xem $f(x)$ có đơn điệu không.

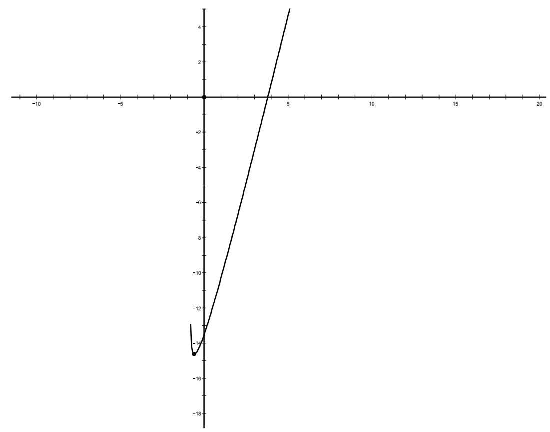
MODE 7 với hàm $f\left(x\right)=\dfrac{3}{\sqrt{x+4}+2}+\dfrac{15}{\sqrt{5x+4}+2}+4x-18$

Nhập vào máy hàm số trên rồi cho:

- $START=-0,8$
- $END=5$
- $STEP=0,2$



Ta có bảng như bên. Nhìn vào thấy rằng hàm không đơn điệu trên $\left[-\dfrac{4}{5};+\infty\right)$ mà bị đổi chiều trong khoảng $\left[-0,8;0\right]$ nên ta sẽ phải chứng minh vô nghiệm trên khoảng này. Để hình dung rõ hơn ta có đồ thị như bên.



Nhìn vào đồ thị ta thấy rằng đúng là hàm bị đổi chiều một ít và còn lại là đồng biến nên ta sẽ đi chứng minh vô nghiệm trước.

Nếu $x\in\left[-0;8;0\right]$ thì: $\begin{cases}\sqrt{x+4}>1,5\\ \sqrt{5x+4}\ge 0\end{cases}$

$$\Rightarrow f\left(x\right)<4x-\frac{135}{14}<0\forall x\in\left[-0,8;0\right]$$

Nếu $x\ge 0$ ta có:

$$f'\left(x\right)=\frac{-3}{2\left(\sqrt{x+4}+2\right)^2\sqrt{x+4}}-\frac{75}{2\left(\sqrt{5x+4}+2\right)^2\sqrt{5x+4}}+4$$

Dễ thấy với $x\ge 0$ thì: $\begin{cases}2\left(\sqrt{x+4}+2\right)^2\sqrt{x+4}\ge 64\\ 2\left(\sqrt{5x+4}+2\right)^2\sqrt{5x+4}\ge 64\end{cases}$.

Khi đó $f'\left(x\right)\ge\dfrac{89}{32}>0\Rightarrow f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$.

Vậy đến đây bài toán đã được giải quyết!

Bài 10: Giải phương trình: $x^4-6x^2+2x-9+\left(x^3+2x+1\right)\sqrt{x^2-x-1}=0$

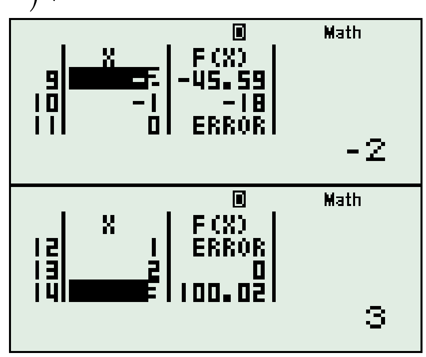
Nguyễn Minh Tuấn

Phân tích

MODE 7 với hàm số $f\left(x\right)=x^4-6x^2+2x-9+\left(x^3+2x+1\right)\sqrt{x^2-x-1}$

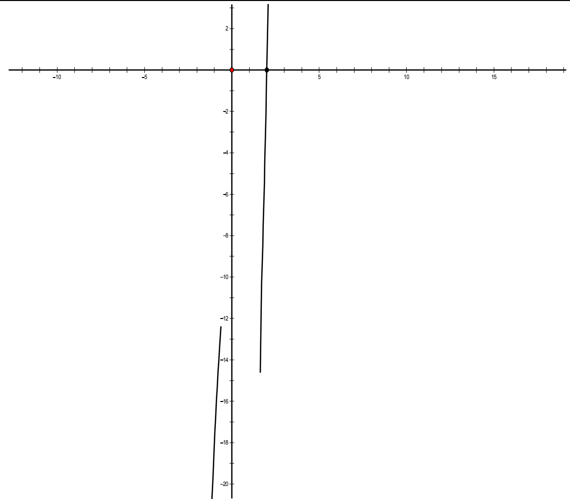
Nhập vào máy hàm số trên rồi cho:

- $START=-10$
- $END=10$
- $STEP=1$



Ta được bảng như bên. Nếu ở trên máy tính các bạn thì có thể thấy rằng hàm này có vẻ đồng biến trên $\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$ và $\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$. Có thể thấy rõ điều này khi ta vẽ đồ thị. Nhìn vào đồ thị ta thấy rằng hàm có nghiệm duy nhất là

$x=2$ liên tục và đồng biến trên $\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$ và $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.



Bây giờ ta sẽ đi giải quyết nó!

Có:

$$f'(x)=4x^3-12x+2+\frac{8x^4-7x^3+2x^2-4x-5}{2\sqrt{x^2-x-1}}$$

Trường hợp 1: $x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$

Ta cần chứng minh $f'(x)>0$.

Để ý thấy: $\underbrace{\left(8x^4-7x^3+2x^2-4x-5\right)}_{g(x)}'=32x^3-21x^2+4x-4<0$

$\Rightarrow 8x^4-7x^3+2x^2-4x-5>1>0$

Vậy ta cần có một đánh giá kiểu như $\sqrt{x^2-x-1}<ax+b$

- Nếu ta chọn $a=1$ thì khi đó $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x-1}-x=+\infty$ ta không thể xác định được b
- Nếu ta chọn $a=-1$ thì ta dễ dàng dò bằng MODE 7 để tìm được $b=\frac{1}{2}$.

Vậy ta cần đánh giá: $\sqrt{x^2-x-1}<-x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{5}{4}>0$ luôn đúng với $x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$.

Khi đó $f'(x)>\frac{8x^4-10x^3+28x^2-24x-8}{1-2x}>0$

Vì $\begin{cases}28x^2-24x-8>0\forall x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\\1-2x>0\forall x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\\8x^4-10x^3\forall x\in\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\end{cases}$.

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\Rightarrow f(x)\le f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)<0$.

Trường hợp 2: $x\ge\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Để ý thấy:

$g'(x)=32x^3-21x^2+4x-4=32(x-1)^3+75(x-1)^2+58(x-1)+11>0\Rightarrow g(x)>0$.

Vẫn như trường hợp 1 ta vẫn cần đánh giá $\sqrt{x^2-x-1}<ax+b$.

Lần này chọn luôn $a=1$, dùng MODE 7 ta tìm được $b=-\frac{1}{2}$

Vậy ta đi chứng minh $\sqrt{x^2-x-1}<x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{5}{4}>0$ luôn đúng.

$$\Rightarrow f'(x)>\frac{16x^4-11x^3-22x^2+12x-7}{2x-1}=\frac{h(x)}{2x-1}$$

Để ý rằng:

$$h'(x)=64x^3-33x^2-44x+12=64\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+255\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+289\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{351}{4}>0$$

$\Rightarrow h(x)\ge h\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)>17>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 11: Giải phương trình: $\frac{39x}{2}-21+5\sqrt{x^3-2x^2+16}+5\sqrt{x+2}=0$

Bùi Thế Việt – Vted.vn

Giải

ĐKXĐ: $\begin{cases}x^3-2x^2+16\ge 0\\ x+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -2$

Đặt $f(x)=\frac{39x}{2}-21+5\sqrt{x^3-2x^2+16}+5\sqrt{x+2}$ liên tục trên $[x_0;+\infty)$.

Có $f'(x)=\frac{39}{2}+\frac{5(3x^2-4x)}{2\sqrt{x^3-2x^2+16}}+\frac{5}{2\sqrt{x+2}}$

- Nếu $x\in[-2;0]\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$ thì $5(3x^2-4x)\ge 0\Rightarrow f'(x)>0$
- Nếu $x\in\left[0;\frac{4}{3}\right]$ thì $2\sqrt{x^3-2x^2+16}\ge\frac{40\sqrt{3}}{9}>\frac{15}{2}$

$$\Rightarrow f'(x)>\frac{39}{2}+\frac{2(3x^2-4x)}{3}+\frac{5}{2\sqrt{x+2}}=\frac{(24x^2-32x+234)\sqrt{x+2}+30}{12\sqrt{x+2}}>0$$

Vậy $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[-2;+\infty)$. Suy ra $x=\frac{49-5\sqrt{105}}{8}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 12: Giải phương trình: $x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x-6-12\sqrt{6-5x}=0$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Do $\sqrt{6-5x}>5$ nên điều kiện có nghiệm của phương trình sẽ là:

$$x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x-6>0$$

$$\Rightarrow x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x>6>-210$$

$$\Rightarrow (x+5)(x^4+2x^3+2x^2-9x+42)>0$$

$$\Rightarrow x\ge -5\left(\text{do}: x^4+2x^3+2x^2-9x+42=(x+1)^2+(x-4,5)^2+21,75>0\right)$$

Trường hợp 1: Nếu $x\in[-5;-4]$.

Khi đó đặt $VT=f(x)$ thì ta được:

$$f(x)<x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x-66=x^3(x+4)(x+3)+x^2-3x-66<0$$

Trường hợp 2: Nếu $x\in[-4;-2]$ thì $\sqrt{6-5x}\ge 4$. Khi đó ta có:

$$f(x)\le x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x-54$$

$$=x^5+7x^4+12x^3-20+x^2-3x-34$$

$$=(x-1)(x^4+8x^3+20x^2+20x+20)+x^2-3x-34<0$$

Vì $\begin{cases} x^4+8x^3+20x^2+20x+20=\left(x^2+4x+1\right)^2+2\left(x+3\right)^2+1>0 \\ x^2-3x-34<0\forall x\in\left[-4;-2\right] \end{cases}$

Trường hợp 3: Nếu $x\in\left[-2;0\right]$ thì $\sqrt{6-5x}>2$ khi đó:

$$f\left(x\right)<x^5+7x^4+12x^3+x^2-3x-30<0$$

Vì $\begin{cases} x^5+7x^4+12x^3=x^3\left(x+3\right)\left(x+4\right)\le 0 \\ x^2-3x-30=\left(x+2\right)\left(x-5\right)-20<0 \end{cases}$

Trường hợp 4: Nếu $x\in\left[0;\frac{6}{5}\right]$ ta có:

$$f'\left(x\right)=5x^4+28x^3+36x^2+2x-3+\frac{30}{\sqrt{6-5x}}>0\forall x\in\left[0;\frac{6}{5}\right]$$

Vì $-3+\frac{30}{\sqrt{6-5x}}=\frac{30-3\sqrt{6-5x}}{\sqrt{6-5x}}=\frac{45x+846}{\left(30+3\sqrt{6-5x}\right)\sqrt{6-5x}}>0$

$\Rightarrow f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[0;\frac{6}{5}\right]$.

Do vậy nên phương trình đầu sẽ có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 13: Giải phương trình: $2x-1-\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{\left(2-x\right)\left(x^2-x+1\right)}}=0$

Giải

Đặt: $f\left(x\right)=2x-1-\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}+\frac{1}{\sqrt{\left(2-x\right)\left(x^2-x+1\right)}}$ liên tục trên $\left(-1;2\right)$

Có $f'\left(x\right)=2+\frac{3x^2-6x+3}{2\sqrt{\left(2-x\right)\left(x^2-x+1\right)}}+\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}>0$

Vậy $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 14: Giải phương trình: $x^4+x^2+10x-19+\left(x^3-7x+13\right)\sqrt{x^2+x-1}=0$

Giải

Đặt $f\left(x\right)=x^4+x^2+10x-19+\left(x^3-7x+13\right)\sqrt{x^2+x-1}$ liên tục trên $\left(-\infty;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$ và $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

Có $f'\left(x\right)=4x^3+2x+10+\frac{8x^4+7x^3-34x^2+5x+27}{2\sqrt{x^2+x-1}}$

Với $x\ge\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ta cần chứng minh $g\left(x\right)=8x^4+7x^3-34x^2+5x+27>0$

- Nếu $x\in\left[0;1\right]$ thì theo AM – GM ta có $\begin{cases} 8x^4+8\ge 2\sqrt{8.8.x^4}=16x^2 \\ 7x^3+7\ge 14\sqrt{x^3}>14x^2 \end{cases}$.

  $\Rightarrow g\left(x\right)>-4x^2+5x+12>0$

- Nếu $x>1\Rightarrow g(x)>8(x-1)^4+39(x-1)^3+35\left(x-\frac{8}{7}\right)^2+\frac{86}{7}>0$

Vậy $f'(x)>0\forall x\in\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right]$

Với $x\le\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ta cần chứng minh rằng:

$$u(x)=2\left(4x^3+2x+10\right)\sqrt{x^2+x-1}+8x^4+7x^3-34x^2+5x+27<0$$

- Nếu $x\in\left[-2;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$ thì $\begin{cases}8x^4+7x^3-20x^2<0\\-14x^2+5x+27<0\\4x^3+2x+10<0\end{cases}\Rightarrow u(x)<0$

- Nếu $x\le-2$.
  Ta thấy rằng $-12x^2+5x+27<0$ nên chỉ cần chứng minh:
  $$A=2\left(4x^3+2x+10\right)\sqrt{x^2+x-1}+8x^4+7x^3-22x^2<0$$
  Để ý thấy: $20\sqrt{x^2+x-1}-10x^2=\frac{10\left(\left(-x^4+4x^2\right)+4x-4\right)}{x^2+\sqrt{x^2+x-1}}<0$ nên lại chuyển về chứng minh:
  $$2\left(4x^3+2x\right)\sqrt{x^2+x-1}<-8x^4-7x^3+12x^2$$
  $$\Leftrightarrow x\left[2\left(4x^2+2\right)\sqrt{x^2+x-1}+8x^3+7x^2-12x\right]<0$$
  $$\Leftrightarrow 2\left(4x^2+2\right)\sqrt{x^2+x-1}+8x^3+7x^2-12x>0$$
  $$\Leftrightarrow -48x^5+143x^4+232x^3-192x^2+16x-16>0$$
  Đặt $f_1(x)=-48x^5+143x^4+232x^3-192x^2+16x-16$
  Có $f_1'(x)=-24x^4+572x^3+696x^2-384x+16$
  $=-24x^4+16+x\left(572x^2+696x-384\right)<0\forall x\le-2$
  Suy ra $f_1(x)$ nghịch biến $\Rightarrow f_1(x)\ge f(-2)=1152>0$. Suy ra $A<0$

Vậy $f'(x)<0\forall x\le-2$

Kết luận phương trình có tối đa 2 nghiệm trên TXĐ là $x=1;x=-2$.

Nhìn chung bài này đánh giá khá là trầy cối! Ta thử liên hợp có nhanh không nhé.

$$x^4+x^2+10x-19+\left(x^3-7x+13\right)\sqrt{x^2+x-1}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x^3-7x+13\right)\left(\sqrt{x^2+x-1}-1\right)+(x-1)(x+2)\left(x^2+3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow(x-1)(x+2)\left[\frac{x^3-7x+13}{\sqrt{x^2+x-1}+1}+x^2+3\right]=0$$

Đặt $f(x)=\frac{x^3-7x+13}{\sqrt{x^2+x-1}+1}+x^2+3$.

- Nếu $x\ge\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $x^3-7x+13>0$ (cái này dễ tự chứng minh)
- Nếu $x\le\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Để ý thấy:

- $f\left(x\right)=\dfrac{x^3-7x+13}{\sqrt{x^2+x-1}+1}+x^2+3=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x-1}+2\right)\left(x^2-2x+7+\left(x-2\right)\sqrt{x^2+x-1}\right)}{\sqrt{x^2+x-1}+1}$
- $x^2-2x+7+\left(x-2\right)\sqrt{x^2+x-1}=\dfrac{-x^3+19x^2-36x+53}{x^2-2x+7-\left(x-2\right)\sqrt{x^2+x-1}}>0$

Đến đây bài toán đã được giải quyết!

-- Hết --

E. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC

I. CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN CẦN NHỚ.

Bất đẳng thức Cauchy – AM – GM .

Cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ khi đó ta có $a_1 + a_2 + ... + a_n \ge \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$

Bất đẳng thức AM – GM dạng cộng mẫu số cho n số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \ge \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n} a_1}$

Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

Bất đẳng thức Bunhiacopxki – Cauchy – Schwarz (BCS).

Cho 2 bộ số $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$. Khi đó ta có: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \ge \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$

Ngoài ra cần phải chú ý đến bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng cộng mẫu Engel:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{\,2}}{b_i} \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

Bất đẳng thức trên còn có thể gọi là bất đẳng thức Svacxơ.

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$. Riêng dạng cộng mẫu thì cần thêm điều kiến là $b_1, b_2, ..., b_n > 0$

Bất đẳng thức Minkowski.

Tổng quát: Cho mọi số thực $r \ge 1$ và mọi số dương $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ thì ta có:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^r\right]^{\frac{1}{r}} \le \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right]^{\frac{1}{r}} + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

Ở đây chỉ xét trường hợp cho 2 bộ số $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$. Khi đó ta có:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i} \ge \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Bất đẳng thức Holder.

Cho các số dương $x_{i,j}\left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right)$.

Khi đó với mọi số $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n \ge 0$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$ ta có: $\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{i,j}\right)^{\omega_j} \ge \sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n} x_{i,j}^{\omega_j}\right)$

Ở đây ta chỉ xét trường hợp đơn giản nhất cho 3 dãy số gồm $(a,b,c);(m,n,p);(x,y,z)$. Ta có:

$$\left(a^3 + b^3 + c^3\right)\left(x^3 + y^3 + z^3\right)\left(m^3 + n^3 + p^3\right) \ge (axm + byn + czp)^3$$

Dấu "=" xảy ra khi 3 dãy tương ứng tỷ lệ.

II. ĐỀ BÀI.

Bài 1: Giải phương trình: $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$

Bài 2: Giải phương trình: $x^3-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$

Bài 3: Giải phương trình: $x\sqrt{x}+\dfrac{32}{x\sqrt{x}}=6\sqrt[3]{3x-4}$

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=x^2-x+2$

Bài 5: Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{2\left(x^2+1\right)}{3}}=x\sqrt{x-\dfrac{1}{3}}+\sqrt{1-x}$

Bài 6: Giải phương trình: $x^4-12x^3+38x^2-12x-67+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}=0$

Bài 7: Giải phương trình: $9\sqrt{x+2}+\dfrac{32\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)}{\left(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)^2}=24$

Bài 8: Giải phương trình:

$$12x^2+16x+1-2\sqrt{24x^3+12x^2-6x}-4\sqrt{x^2-x}-4\sqrt{8x^3+9x^2+x}=0$$

Bài 9: Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{x+1}+x^2+x+4=\left(2\sqrt{2}+3\right)\left(x^2-x^3+2x\right)$

Bài 10: Giải phương trình: $\sqrt[4]{x^4+x^2-1}+\sqrt[4]{x^4-x^2+1}=2x$

Bài 11: Giải phương trình: $x^4-4x^3+6x^2-3x+3=\sqrt{2x+2}+\sqrt[4]{2x-1}$

Bài 12: Giải phương trình: $x+\dfrac{4}{x}+3x^2=2\sqrt{x^3-4}+4\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^3+4x}$

Bài 13: Giải phương trình: $6\sqrt[3]{x-1}+6\sqrt[4]{2x-3}+5\sqrt[5]{(x-1)(2x-3)}=8x+1$

Bài 14: Giải phương trình: $2(x+5)\sqrt{1-3x}+3x-10=\dfrac{5\left(x^2+4x+9\right)}{2\sqrt{10-6x}+\sqrt{4+3x}+1}$

Bài 15: Giải phương trình:

$$(x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}+(1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1}+(2x+1)\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x}=3$$

Bài 16: Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{2x+1}}{x+2}+\dfrac{49\sqrt{x-3}}{2x+6}=\dfrac{11x-8}{9}$

Bài 17: Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(7x^2-x+4\right)$

Bài 18: Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}{x+5+\sqrt{2\left(x^2+1\right)}}=\sqrt{(1-x)^3}+\dfrac{3-2\sqrt{x}}{2}$

Bài 19: Giải phương trình: $3x^3+x^2-2x+4=2\sqrt{3\left(x^5+x^4+1\right)}$

Bài 20: Giải phương trình: $\sqrt[6]{x^6+x^3-2x-1}+\sqrt[6]{x^6-x^3+2x+1}=2x$

Bài 21: Giải phương trình: $x=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$

Bài 22: Giải phương trình: $x^4+x^2+1=\sqrt{3\left(x^7+x^3+x^2\right)}$

Bài 23: Giải phương trình: $4x+\sqrt{x^2+\left(1+\sqrt{2}\right)x+1}+\sqrt{x^2+\left(1-\sqrt{2}\right)x+1}=2\sqrt{5x+1}$

Bài 24: Giải phương trình: $(x-1)^2(x-2)^2+\sqrt[4]{x^2-3x+3}+\dfrac{x-5}{4}=0$

Bài 25: Giải phương trình: $x^2+4x+5-\frac{3x}{x^2+x+1}=(x-1)\left(1-\frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)$

Bài 26: Giải phương trình: $\frac{2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}+\frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}=\frac{2}{1+\sqrt{x(2x-1)}}$

Bài 27: Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{x}{\sqrt{2x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{3x+1}+1}=1$

Bài 28: Giải phương trình: $\frac{x^2+x+1}{\left(x^2+\sqrt{x+1}\right)^2}+\frac{x^2+x+2}{\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)^2}+\frac{x^2+x+3}{\left(x^2+\sqrt{x+3}\right)^2}=3$

Bài 29: Giải phương trình: $\frac{3}{\sqrt{x^2+2x-2}}+\sqrt{-x^2+2x+3}=\sqrt{85-60x}$

Bài 30: Giải phương trình: $\left(1+\sqrt{3x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{5x}\right)=\left(1+\sqrt[3]{15x^3+35x^2+10x}\right)$

Bài 31: Giải phương trình: $x\sqrt{x^2+x+2}+3x\sqrt{x^5-1}=\sqrt{\left(x^2+3\right)\left(3x^7-2x^2+x-2\right)}$

Bài 32: Giải phương trình: $2(x-2)\sqrt{5-x^2}+(x+1)\sqrt{x^2+5}=7x-5$

Bài 33: Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2(x-1)^2\left(2x^2-4x+1\right)$

Bài 34: Giải phương trình: $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}=\sqrt[3]{\frac{3x-13}{4}}$

Bài 35: Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}}\le 2\forall a,b>0$

Bài 36: Giải phương trình: $\frac{4\sqrt{1-x}}{x}+\frac{\sqrt{2x-1}}{1-x}=3\sqrt{3}$

Bài 37: Giải phương trình: $6\sqrt[6]{2x-1}+6\sqrt[6]{2-x}-7\sqrt[7]{(2x-1)(2-x)}=5$

Bài 38: Giải phương trình:

$$\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-\left(\sqrt{3}-1\right)x+1}+\sqrt{2x^2+\left(\sqrt{3}+1\right)x+1}=3$$

Bài 39: Giải phương trình: $\sqrt{2\left(x^2-4x+5\right)}+\frac{3-x}{2}\cdot\sqrt{x^3+\frac{3}{x}}=4\sqrt{2-x}$

Bài 40: Giải phương trình: $\frac{1}{1+\sqrt{x^2+3x+1}}+\frac{1}{1+\sqrt{x^2-3x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Bài 41: Giải phương trình: $x^4-x^3-6x+4+2\sqrt{x^6-x+1}=0$

Bài 42: Giải phương trình: $\sqrt{x^9-2x+2}+\sqrt{x^8-x+1}=(2-x)\left(x^3+2x^2+2x-3\right)$

Bài 43: Giải phương trình: $\frac{2x\left(1+x\sqrt{2x-1}\right)}{\left(x-\sqrt{x}+1\right)\left(1+(2x-1)\sqrt{2x-1}\right)}=2$

Bài 44: Giải phương trình: $\left(1+\sqrt{x+6}\right)\left(1+\frac{\sqrt{28x-3}}{\sqrt{x+6}}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt[4]{28x-3}}\right)^2=256$

Bài 45: Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{2-x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\left[\sqrt[4]{\frac{2-x}{x-1}}-\sqrt[4]{\frac{x-1}{2-x}}\right]^2=2\sqrt{2}$

Bài 46: Giải phương trình: $1+\frac{2\left(\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{3-x}\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}=\frac{1+\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}{\sqrt[4]{(x-1)(3-x)}}$

Bài 47: Giải phương trình:

$$\left(1+\sqrt{3-x}\right)^2\left[1+\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right]^2+\left(1+\sqrt{x-2}\right)^2\left[1+\frac{1}{\sqrt{3-x}}\right]^2=17+2\sqrt{2}$$

Bài 48: Giải phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}+\frac{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^4-64}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^4}=0$

Bài 49: Giải phương trình:

$$\left(4x+7+2\sqrt{8x+7}\right)\left(4x+5+2\sqrt{x+1}\right)=2\left(4\sqrt{x+1}+1\right)\left(2\sqrt{8x+7}+1\right)$$

Bài 50: Giải phương trình: $\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^3}+\frac{x\sqrt{x}}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}+(2x-1)\sqrt{2x-1}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\frac{x}{2x-1}}+\sqrt{2x-1}$

Bài 51: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2+x+1}\sqrt{1-x}+\sqrt[3]{x^2-x+1}\sqrt{x+1}=x^2+2$

Bài 52: Giải phương trình: $\sqrt{3-2x^2}+\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}=1+\frac{\left(x^2+4x+1\right)^4}{16x^4}$

III. CÁC BÀI TOÁN.

Bài 1: Giải phương trình: $13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}=16$

Tiến sĩ Trần Nam Dũng – Đại học khoa học tự nhiên – ĐHQG TP.HCM

Đề nghị Olympic 30/4/2011 – THPT Chuyên Lê Hồng Phong – TH.HCM

Giải

Với $\alpha,\beta>0$. Ta sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$13\sqrt{x^2-x^4}=\frac{13}{\alpha}\sqrt{\alpha^2x^2\left(1-x^2\right)}\le\frac{13}{\alpha}\cdot\frac{\alpha^2x^2+\left(1-x^2\right)}{2}=\frac{13\left(\alpha^2-1\right)x^2+13}{2\alpha}$$

$$9\sqrt{x^2+x^4}=\frac{13}{\beta}\sqrt{\beta^2x^2\left(1+x^2\right)}\le\frac{9}{\beta}\cdot\frac{\beta^2x^2+\left(1+x^2\right)}{2}=\frac{9\left(\beta^2+1\right)x^2+9}{2\beta}$$

$$\Rightarrow 13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}\le\left[\frac{13\left(\alpha^2-1\right)}{2\alpha}+\frac{9\left(\beta^2+1\right)}{2\beta}\right]x^2+\frac{13}{2\alpha}+\frac{9}{2\beta}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\left(\alpha^2+1\right)x^2=\left(\beta^2-1\right)x^2=1$

Chọn $\alpha,\beta>0$ thỏa mãn $\begin{cases}\alpha^2+1=\beta^2-1\\ \dfrac{13\left(\alpha^2-1\right)}{2\alpha}+\dfrac{9\left(\beta^2+1\right)}{2\beta}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{2}\\ \beta=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow VT\le 16=VP$

Dấu "=" xảy ra $x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ngoài ra ta có thể dùng đạo hàm giải bài này. Đặt $f\left(x\right)=13\sqrt{x^2-x^4}+9\sqrt{x^2+x^4}$ hàm $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;1\right]$. Ta có: $f'\left(x\right)=\dfrac{13\left(-2x^3+x\right)}{\sqrt{x^2-x^4}}+\dfrac{9\left(2x^3+x\right)}{\sqrt{x^2+x^4}}$.

$$f'\left(x\right)=\frac{13\left(-2x^3+x\right)}{\sqrt{x^2-x^4}}+\frac{9\left(2x^3+x\right)}{\sqrt{x^2+x^4}}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}13\left(2x^2-1\right)\sqrt{x^2+1}=9\left(2x^2+1\right)\sqrt{1-x^2}\\ x=0\left(L\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right]\\ \left(5x^2-4\right)\left(200x^4+160x^2-22\right)=0\end{cases}$$

Dễ thấy với $x\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};1\right]$ thì $200x^4+160x^2-22\ge 108>0$, nên $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Do hàm $f'\left(x\right)$ đổi dấu từ $\left(+\right)\Rightarrow\left(-\right)$ khi qua $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ nên đạt cực đại tại $x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow f\left(x\right)\le f\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)=16=VP$.

Bài toán đã được giải quyết!

Bài 2: Giải phương trình: $x^3-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4}=0$

Trích đề thi HSG Quốc Gia – Bảng A – 1995

Đề nghị Olympic 30/4/2014 – THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Ninh Thuận

Giải

Ta dễ dàng thấy phương trình có nghiệm $x=3$ nên ta sẽ dùng bất đẳng thức Cauchy để khử căn.

Ta có: $8\sqrt[4]{4x+4}=\sqrt[4]{(4x+4).16.16.16}\overset{\text{Cauchy}}{\le} x+13$.

Khi đó $VT\ge x^3-3x^2-8x+40-(x+13)=(x-3)^2(x+3)\ge 0\forall x\ge -1$. Vậy dấu "=" xảy ra khi $x=3$

Bài 3: Giải phương trình: $x\sqrt{x}+\dfrac{32}{x\sqrt{x}}=6\sqrt[3]{3x-4}$

Giải

Nhìn vào phương trình ta thấy $VT>0$ nên điều kiện có nghiệm là $x>\dfrac{4}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $x\sqrt{x}+\dfrac{32}{x\sqrt{x}}=\dfrac{x\sqrt{x}}{2}+\dfrac{x\sqrt{x}}{2}+\dfrac{32}{x\sqrt{x}}\overset{\text{AM-GM}}{\ge}6\sqrt{x}$

Khi đó ta cần chứng minh : $\sqrt{x}\ge\sqrt[3]{3x-4}\Leftrightarrow x\sqrt{x}\ge 3x-4\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-2\right)^2\left(\sqrt{x}+1\right)\ge 0$ luôn đúng.

Vậy $VT\ge VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x=4$

Bài 4: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=x^2-x+2$

Giải

Cách 1: Dùng bất đẳng thức dạng $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$.

Ta có: $\begin{cases}\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{1.\left(x^2+x-1\right)}\overset{\text{Cauchy}}{\le}\dfrac{x^2+x}{2}\\ \sqrt{-x^2+x+1}=\sqrt{1.\left(-x^2+x+1\right)}\overset{\text{Cauchy}}{\le}\dfrac{-x^2+x+2}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow VT\le x+1$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\sqrt{x^2+x-1}=1\\ \sqrt{-x^2+x+1}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Lại có $VP=x^2-2x+1+x+1=(x-1)^2+(x+1)\ge x+1$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$. Nên $VT\le VP$. Dấu "=" xảy ra tại $x=1$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Cách 2: Dùng bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Ta có: $\begin{cases}VT=1.\sqrt{x^2+x-1}+1.\sqrt{-x^2+x+1}\overset{\text{Bunhiacopxki}}{\le}\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(x^2+x-1+x-x^2+1\right)}=2\sqrt{x}\\ VP-2\sqrt{x}=x^2-x+2-2\sqrt{x}=x^2-2x+1+x-2\sqrt{x}+1=(x-1)^2+\left(\sqrt{x}-1\right)^2\ge 0\end{cases}$

Do đó dấu "=" chỉ xảy ra khi $x=1$.

Cách 3: Phân tích tổng bình phương SOS.

Ta có:

$$x^2-x+2-\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{-x^2+x+1}=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+x-1}-1\right)^2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{-x^2+x+1}-1\right)^2+(x-1)^2=0$$

Dễ dàng nhận thấy $VP - VT \ge 0$. Nên dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{x^2+x-1} = 1 \\ \sqrt{-x^2+x+1} = 1 \\ x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Bài 5: Giải phương trình: $\sqrt{\dfrac{2\left(x^2+1\right)}{3}} = x\sqrt{x-\dfrac{1}{3}} + \sqrt{1-x}$

Giải

Bài này khá là cơ bản áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz là ra ngay. Ta có:

$$x\sqrt{x-\frac{1}{3}} + \sqrt{1-x} \le \sqrt{\left(x^2+1\right)\left(x-\frac{1}{3}+1-x\right)} = \sqrt{\frac{2\left(x^2+1\right)}{3}} = VT$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{x}{\sqrt{x-\dfrac{1}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow x\sqrt{x-1} = \sqrt{x-\dfrac{1}{3}} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x + \dfrac{1}{3} = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^3 = -2x^3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 6: Giải phương trình: $x^4 - 12x^3 + 38x^2 - 12x - 67 + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} = 0$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 – Lần 2 – Chuyên Vĩnh Phúc

Giải

Cách 1: Dùng bất đẳng thức Cauchy.

Ta có: $\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} = \dfrac{1}{2}.2\sqrt{x+1} + \dfrac{1}{2}.2\sqrt{7-x} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+5}{2} + \dfrac{11-x}{2}\right) = 4$.

Khi đó $VT \le \left(x-3\right)^2\left(x^2-6x-7\right) = \left(x-3\right)^2\left(x+1\right)\left(x-7\right) \le 0$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{x+1} = 2 \\ \sqrt{7-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Cách 2: Phân tích tổng bình phương:

Ta có:

$$x^4 - 12x^3 + 38x^2 - 12x - 67 + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{7-x}-2\right)^2 - \left(x-3\right)^2\left(x+1\right)\left(7-x\right) = 0$$

Không khó để nhận ra với $x \in \left[-1;7\right]$ thì $VT \le 0$. Do đó dấu "=" xảy ra khi $x = 3$

Vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 7: Giải phương trình: $9\sqrt{x+2} + \dfrac{32\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)}{\left(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)^2} = 24$

Giải

Ý tưởng của bài toán này vẫn như các bài toán khác, ta vẫn sẽ đánh giá $VT \ge 24$. Nhưng tuy nhiên để nguyên như thế này thì chưa làm ăn được gì, ta sẽ liên hợp tử của phân thức.

Ta có:

$$9\sqrt{x+2}+\frac{32\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)}{\left(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)^2}=24\Leftrightarrow 9\sqrt{x+2}+\frac{96}{\left(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)^2\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)}=24$$

$$\Leftrightarrow 6\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)+3\left(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)+\frac{96}{\left(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)^2\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)}=24$$

Khi đó áp dụng Cauchy cho 4 số: $6a=6\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right);\frac{3}{2}b=\frac{3}{2}\left(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)$

$\frac{3}{2}b=\frac{3}{2}\left(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right);\frac{96}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)\left(2\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\right)^2}=\frac{96}{ab^2}$ ta được:

$$6a+\frac{3}{2}b+\frac{3}{2}b+\frac{96}{ab^2}\overset{\text{Cauchy}}{\geq}4\sqrt[4]{\frac{6.3.3.96.a.b.b}{ab^2}}=24=VP$$

Vậy dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}6a=\frac{3}{2}b\\ 6a=\frac{96}{ab^2}\end{cases}\Leftrightarrow b=4a\Leftrightarrow x=2$

Bài 8: Giải phương trình:

$12x^2+16x+1-2\sqrt{24x^3+12x^2-6x}-4\sqrt{x^2-x}-4\sqrt{8x^3+9x^2+x}=0$

Giải

Ta có:

$$12x^2+16x+1-2\sqrt{24x^3+12x^2-6x}-4\sqrt{x^2-x}-4\sqrt{8x^3+9x^2+x}=0$$

$$\Leftrightarrow 12x^2+16x+1-2\sqrt{6x\left(4x^2+2x-1\right)}-2\sqrt{4\left(x^2-x\right)}-2\sqrt{4\left(x^2+x\right)\left(8x+1\right)}=0$$

Phương trình có nghiệm $x=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\begin{cases}6x=4x^2+2x-1\\ 4\left(x^2-x\right)=1\\ 8x+1=4\left(x^2+x\right)\end{cases}$. Nên ta áp dụng bất đẳng thức

AM – GM ta được: $\begin{cases}2\sqrt{6x\left(4x^2+2x-1\right)}\leq 4x^2+8x-1\\ 2\sqrt{4\left(x^2-x\right)}\leq 4\left(x^2-x\right)+1\\ 2\sqrt{4\left(x^2+x\right)\left(8x+1\right)}\leq 4x^2+4x+8x+1\end{cases}$

Khi đó $VT\geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Ngoài ra nếu không thích ta có thể sử dụng cách ghép hằng đẳng thức như sau:

$$12x^2+16x+1-2\sqrt{24x^3+12x^2-6x}-4\sqrt{x^2-x}-4\sqrt{8x^3+9x^2+x}=0$$

$$\Leftrightarrow 6x-2\sqrt{6x\left(4x^2+2x-1\right)}+4x^2+2x-1+1-2\sqrt{4x^2-4x}+4x^2-4x$$

$$+4x^2+4-2\sqrt{\left(4x^2+4x\right)\left(8x+1\right)}+8x+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{6x}-\sqrt{4x^2+2x-1}\right)^2+\left(\sqrt{4x^2-4x}-1\right)^2+\left(\sqrt{4x^2+4x}-\sqrt{8x+1}\right)^2=0$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết!

Bài 9: Giải phương trình: $(x+3)\sqrt{x+1}+x^2+x+4=\left(2\sqrt{2}+3\right)\left(x^2-x^3+2x\right)$

Giải

Ở đây do $VT-VP\ge 0$ mà nếu sử dụng Cauchy cho $\sqrt{x+1}$ thì bất đẳng thức bị ngược chiều, để khắc phục ta sẽ tìm nhân tử cho $(x+3)\sqrt{x+1}$, ta được $(x+3)\sqrt{x+1}-2\sqrt{2}(x+1)$. Nhân tử này cùng chiều với bài toán nên ta sẽ dùng Cauchy để chứng minh.

Ta có: $(x+3)\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}\right)^3+2\sqrt{x+1}\overset{\text{Cauchy}}{\ge}2\sqrt{2\left(\sqrt{x+1}\right)^3\sqrt{x+1}}=2\sqrt{2}(x+1)$

Khi đó $VT-VP=(x-1)^2\left[(2x+2)\sqrt{2}+3x+4\right]\ge 0$

Dấu "=" xảy ra khi $\left(\sqrt{x+1}\right)^2=2\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x=1$.

Bài 10: Giải phương trình: $\sqrt[4]{x^4+x^2-1}+\sqrt[4]{x^4-x^2+1}=2x$

Giải

Cách 1: Đặt $\begin{cases}\sqrt[4]{x^4+x^2-1}=a\\ \sqrt[4]{x^4-x^2+1}=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=2x\\ a^4+b^4=2x^4\end{cases}\Rightarrow(a+b)^4=8\left(a^4+b^4\right)$

Ta có: $\dfrac{(a+b)^4}{8}=\dfrac{\left(a^2+2ab+b^2\right)^2}{8}\overset{\text{Cauchy}}{\le}\dfrac{\left(a^2+b^2\right)}{2}=\dfrac{a^4+b^4+2a^2b^2}{2}\le a^4+b^4$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b\Leftrightarrow\sqrt[4]{x^4+x^2-1}=\sqrt[4]{x^4-x^2+1}\Leftrightarrow x=1$

Cách 2:

Ta có:

1. $\left(\sqrt[4]{x^4+x^2-1}+\sqrt[4]{x^4-x^2+1}\right)^2\overset{\text{Bunhiacopxki}}{\le}2\left(\sqrt{x^4+x^2-1}+\sqrt{x^4-x^2+1}\right)$
2. $2\left(\sqrt{x^4+x^2-1}+\sqrt{x^4-x^2+1}\right)\overset{\text{Bunhiacopxki}}{\le}2\sqrt{2\left(x^4+x^2-1+x^4-x^2+1\right)}=4x^2$
3. Do đó $VT\le VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Bài 11: Giải phương trình: $x^4-4x^3+6x^2-3x+3=\sqrt{2x+2}+\sqrt[4]{2x-1}$

Giải

Ta có: $\begin{cases}2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(x+1)}\overset{\text{Cauchy}}{\le}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4+2x+2}{2}=\dfrac{3+x}{2}\\ \sqrt[4]{2x-1}=1.1.1.\sqrt[4]{2x-1}\overset{\text{Cauchy}}{\le}\dfrac{2x-1+3}{4}=\dfrac{x+1}{2}\end{cases}$

Khi đó $VT-\dfrac{x+3}{2}-\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{2(x-1)^4}{2}\ge 0$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Bài 12: Giải phương trình: $x+\dfrac{4}{x}+3x^2=2\sqrt{x^3-4}+4\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^3+4x}$

Giải

Đầu tiên ta sẽ nhân x lên để tiện đánh giá. Khi đó phương trình trở thành:

$$3x^3+x^2+4=2x\sqrt{x^3-4}+4x\sqrt{x-1}+2x\sqrt{x^3+4x}$$

Bây giờ ta cần phải chứng minh $VT-VP\ge 0$. Ta sẽ biến đổi như sau:

$$3x^3+x^2+4=2x\sqrt{x^3-4}+4x\sqrt{x-1}+2x\sqrt{x^3+4x}$$

$$\Leftrightarrow 3x^3+x^2+4-2x\sqrt{x^3-4}-4x\sqrt{x-1}-2x\sqrt{x^3+4x}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{x^3-4}+x^3-4+x^2+4x\sqrt{x-1}+4(x-1)+2x^3-x^2-4x+12-2x\sqrt{x^3+4x}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x^3-4}\right)^2+\left(x-2\sqrt{x-1}\right)^2+2x^3-x^2-4x+12-2x\sqrt{x^3+4x}=0$$

Ta đi chứng minh $2x^3-x^2-4x+12-2x\sqrt{x^3+4x}\ge 0$.
Thật vậy:

$$2x^3-x^2-4x+12-2x\sqrt{x^3+4x}\overset{\text{Cauchy}}{\ge}2x^3-x^2-4x+12-\frac{4x^2+x^3+4x}{2}=\frac{(x-2)^2(3x+6)}{2}\ge 0$$

Khi đó $VT\ge 0$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x-\sqrt{x^3-4}=0\\ x-2\sqrt{x-1}=0\Leftrightarrow x=2\\ 2x=\sqrt{x^3+4x}\end{cases}$

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Bài toán đã được giải quyết!

Bài 13: Giải phương trình: $6\sqrt[3]{x-1}+6\sqrt[4]{2x-3}+5\sqrt[5]{(x-1)(2x-3)}=8x+1$

Giải

Ta sẽ đi chứng minh $\begin{cases}6\sqrt[3]{x-1}\le 2x+2\\ 6\sqrt[4]{2x-3}\le 3x\\ 5\sqrt[5]{(x-1)(2x-3)}\le 3x-1\end{cases}$

Thật vậy, ta có: $\begin{cases}6\sqrt[3]{x-1}\overset{\text{Cauchy}}{\le}6\cdot\dfrac{x-1+1+1}{3}=2x+2\\ 6\sqrt[4]{2x-3}\overset{\text{Cauchy}}{\le}6\cdot\dfrac{2x-3+3}{4}\\ 5\sqrt[5]{(x-1)(2x-3)}\overset{\text{Cauchy}}{\le}5\cdot\dfrac{x-1+2x-3+3}{5}=3x-1\end{cases}$.

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức trên ta sẽ được $VT\le VP$
Dấu "=" xảy ra khi $x=2$.

Bài 14: Giải phương trình: $2(x+5)\sqrt{1-3x}+3x-10=\dfrac{5\left(x^2+4x+9\right)}{2\sqrt{10-6x}+\sqrt{4+3x}+1}$

Giải

Ta có:

1. $2\sqrt{10-6x}+\sqrt{4+3x}=2\sqrt{10-6x}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6x+8}\overset{\text{Bunhiacopxki}}{\le}\sqrt{18}\sqrt{4+\dfrac{1}{2}}=9$
2. Do đó $\dfrac{1}{2\sqrt{10-6x}+\sqrt{4+3x}+1}\ge\dfrac{1}{10}\Rightarrow\dfrac{5\left(x^2+4x+9\right)}{2\sqrt{10-6x}+\sqrt{4+3x}+1}\ge\dfrac{x^2+4x+9}{2}$

Lại có: $\dfrac{x^2+4x+9}{2}-2(x+5)\sqrt{1-3x}+3x-10=\dfrac{\left(x+5-2\sqrt{1-3x}\right)^2}{2}\ge 0$
Nên $VT\le VP$
Dấu "=" xảy ra khi $x=-1$

Bài 15: Giải phương trình:

$$\left(x+1\right)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}+\left(1-3x\right)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1}+\left(2x+1\right)\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x}=3$$

Bùi Thế Việt – Vted.vn

Giải

Cách 1.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x+1} \\ b=\sqrt{2x+1} \\ c=\sqrt{1-3x} \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2+c^2=3$.

Phương trình trở thành: $a^3b+ac^3+cb^3=3 \Leftrightarrow 3\left(a^3b+ac^3+cb^3\right)=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$

Đặt $\begin{cases} b=x+a \\ c=y+a \end{cases}$ để đưa về phương trình bậc 2 ẩn a, phương trình trở thành :

$$\left(x^2-xy+y^2\right)a^2-\left(x^3-5x^2y+4xy^2+y^3\right)a+x^4-3x^3y+2x^2y^2+y^4=0$$

Có $\Delta=\left(x^3-5x^2y+4xy^2+y^3\right)^2-4\left(x^2-xy+y^2\right)\left(x^4-3x^3y+2x^2y^2+y^4\right)$. Do đang ở dạng đẳng cấp nên ta có thể đặt $t=\dfrac{x}{y}$. Quy về giải phương trình:

$$-3t^6+6t^5+9t^4-18t^3-6t^2+12t-3=0$$

Nhưng tuy nhiên phương trình này có nghiệm thuộc phương trình bậc 3 nên có thể giả sử

$$-3t^6+6t^5+9t^4-18t^3-6t^2+12t-3=-3\left(t^3+at^2+bt+c\right)^2$$

Đồng nhất hệ số ta sẽ có: $\Delta=-3\left(x^3-x^2y-2xy+y^3\right)^2\le 0$. Do đó $VT\le VP$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=0$

Ngoài cách đồng nhất hệ số ta có thể tìm đủ 3 nghiệm của phương trình rồi dùng viet cho phương trình bậc 3

Cách 2.

Bài toán xuất phát từ đẳng thức sau:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)=\sum_{cyc}\frac{1}{2}\left(a^2-2ab+bc+ca-c^2\right)^2\ge 0$$

Chứng minh:

Đặt $\begin{cases} x=a^2-ab+bc \\ y=b^2-cb+ca \\ z=c^2-ca+ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy+yz+xz=a^3b+b^3c+c^3a \\ x+y+z=a^2+b^2+c^2 \end{cases}$

Khi đó có:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)=\left(x+y+z\right)^2-3\left(xy+yz+xz\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(x-y\right)^2+\frac{1}{2}\left(y-z\right)^2+\frac{1}{2}\left(x-z\right)^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(a^2-2ab+bc+ca-c^2\right)^2+\frac{1}{2}\left(b^2-2bc+ca+ab-a^2\right)^2+\frac{1}{2}\left(c^2-2ca+ab+bc-b^2\right)^2$$

Bây giờ ta áp dụng: Đặt $a=\sqrt{x+1};b=\sqrt{2x+1};c=\sqrt{1-3x}$

Khi đó ta có:

$$(x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}+(1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1}+(2x+1)\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x}=3$$

$$\Leftrightarrow 6(x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}+6(1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1}+6(2x+1)\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x}-18=0$$

$$\Leftrightarrow -\left(4x-2\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\sqrt{1-3x}+\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x}\right)^2$$

$$-\left(x+\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\sqrt{1-3x}-2\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x}\right)^2$$

$$-\left(5x-\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}+2\sqrt{x+1}\sqrt{1-3x}-\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x=0$$

Cách 3.

Ta có:

$$(x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}+(1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1}+(2x+1)\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x}$$

$$\overset{\text{Bunhiacopxki}}{\leq}\sqrt{\left[(x+1)^2+(2x+1)^2+(1-3x)^2\right]\left[(x+1)(2x+1)+(2x+1)(1-3x)+(1-3x)(x+1)\right]}$$

$$=\sqrt{9-7x^2\left(14x^2-3\right)}$$

Nếu $14x^2-3\geq 0$ thì bài toán coi như được giải quyết!

Nếu $14x^2-3\leq 0\Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2};-\sqrt{\frac{3}{14}}\right]$.

1. Khi đó áp dụng Cauchy ta có:

$$(x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1}+(1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1}+(2x+1)\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x}$$

$$\overset{\text{Cauchy}}{\leq}\frac{(x+1)(3x+2)}{2}+\frac{(2x+1)(2-x)}{2}+(1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1}$$

$$=(1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1}+\frac{x^2}{2}+4x+2=3-\frac{1}{8}\left(7\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1}+17x-1\right)\left(\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1}+x-1\right)$$

2. Lại có : $\begin{cases}\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1}+x-1\overset{\text{Cauchy}}{\leq}\dfrac{2-2x}{2}+x-1=0\\ 7\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1}+17x-1\leq 0\Leftrightarrow x\in\left(-1;\dfrac{-8-14\sqrt{7}}{109}\right)\end{cases}$

3. Nên $VT\leq 3\Rightarrow$ đpcm

Cách 4.

Ta có:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)=\left[\sum_{cyc}a^4-\sum_{cyc}a^2b^2\right]+3\left[\sum_{cyc}a^2b^2-\sum_{cyc}a^2bc\right]-3\left[\sum_{cyc}a^3b-\sum_{cyc}a^2bc\right]$$

- $$3\left[\sum_{cyc}a^3b-\sum_{cyc}a^2bc\right]=3\left[\sum_{cyc}b^3c-\sum_{cyc}a^2bc\right]=-3\sum_{cyc}bc\left(a^2-b^2\right)$$
$$=-3\sum_{cyc}bc\left(a^2-b^2\right)+\sum_{cyc}(ab+bc+ca)\left(a^2-b^2\right)$$
$$=\sum_{cyc}\left(a^2-b^2\right)(ab+ca-2bc)$$

- $$3\left[\sum_{cyc}a^2b^2-\sum_{cyc}a^2bc\right]=\frac{1}{2}\sum_{cyc}(ab+ac-2bc)^2$$

- $$\sum_{cyc}a^4-\sum_{cyc}a^2b^2=\frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(a^2-b^2\right)^2$$

Vậy ta thu được đẳng thức:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(a^2-b^2\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(ab+ac-2bc\right)^2-\sum_{cyc}\left(a^2-b^2\right)\left(ab+ac-2bc\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(a^2-b^2-ab-ac+2bc\right)^2\ge 0$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 16: Giải phương trình: $\frac{\sqrt{2x+1}}{x+2}+\frac{49\sqrt{x-3}}{2x+6}=\frac{11x-8}{9}$

Giải

Do bài toán có nghiệm $x=4$ nên ta sẽ dùng bất đẳng thức Cauchy như sau:

Ta có: $\begin{cases}\frac{1}{3}.3.\sqrt{2x+1}\overset{Cauchy}{\le}\frac{x+5}{3}\\ 49\sqrt{x-3}\overset{Cauchy}{\le}\frac{49\left(x-2\right)}{2}\end{cases}$

Khi đó $VT-VP\le\frac{\frac{x+5}{3}}{x+2}+\frac{\frac{49\left(x-2\right)}{2}}{2x+6}-\frac{11x-8}{9}=-\frac{\left(x-4\right)^2\left(44x+87\right)}{18\left(x+2\right)\left(2x+6\right)}\le 0$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=4$

Bài 17: Giải phương trình: $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(7x^2-x+4\right)$

Giải

Ta sẽ áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho toàn bộ vế trái của phương trình

Ta có:

$$\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}\overset{Bunhiacopxki}{\le}\sqrt{\left(1^2+1^2+x^2\right)\left(3x^2-1+x^2-x+x^2+1\right)}$$
$$\Rightarrow\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}\le\sqrt{\left(5x^2-x\right)\left(x^2+2\right)}$$

Mặt khác $\sqrt{\left(5x^2-x\right)\left(x^2+2\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(5x^2-x\right).2\left(x^2+2\right)}\le\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{7x^2-x+4}{2}=VP$

Nên dấu "=" chỉ xảy ra khi $x=-1$

Bài 18: Giải phương trình: $\frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}}{x+5+\sqrt{2\left(x^2+1\right)}}=\sqrt{\left(1-x\right)^3}+\frac{3-2\sqrt{x}}{2}$

Giải

Đặt $f\left(x\right)=\sqrt{\left(1-x\right)^3}+\frac{3-2\sqrt{x}}{2}\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{-3x^2+6x-3}{2\sqrt{\left(1-x\right)^3}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}<0$. Nên $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left[0;1\right]\Rightarrow f\left(x\right)\ge f\left(1\right)=\frac{1}{2}$.

Ta có:

1. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\overset{Bunhiacopxki}{\le}2\sqrt{2\left(x+1\right)}\overset{Cauchy}{\le}x+3=\frac{x+5+x+1}{2}\overset{Bunhiacopxki}{\le}\frac{x+5+\sqrt{2\left(x^2+1\right)}}{2}$

2. Khi đó $VT \le \frac{1}{2} \le VP$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Bài 19: Giải phương trình: $3x^3+x^2-2x+4=2\sqrt{3\left(x^5+x^4+1\right)}$

Giải

Dễ thấy nếu áp dụng bất đẳng thức Cauchy luôn thì ta được: $2\sqrt{3\left(x^5+x^4+1\right)} \overset{Cauchy}{\le} x^5+x^2+4$.

Khi đó $VT-VP \ge 3x^3+x^2-2x+4-x^5-x^2-4=\left(x-1\right)^2\left(-x^3-3x^2-2x\right)$, ta chưa thể xác định được dấu của bất đẳng thức. Do đó nảy ra ý tưởng phân tích đa thức trong căn thành nhân tử thì khi đó sẽ dễ dàng dùng bất đẳng thức đánh giá được. Để phân tích được ta sẽ làm như sau:

Do $f\left(x\right)=x^5+x^4+1=0$ không có nghiệm hữu tỷ tức là không phân tích được dưới dạng $\left(ax+b\right).f\left(x\right)$ nên ta sẽ giả sử $f\left(x\right)=\left(x^2+ax+1\right)\left(x^3+bx+c+1\right)$. Có thể giả sử như vậy do:

1. Phương trình chỉ có 1 nghiệm lẻ duy nhất mà nghiệm này không cùng thuộc 1 phương trình bậc 2 nào nên nếu phân tích được dưới dạng một đa thức bậc 2 nhân với một đa thức bậc 3 thì đa thức bậc 2 phải vô nghiệm.
2. Do hệ số tự do bằng 1 và kết hợp với lí do trên ta sẽ viết được phương trình dưới dạng trên.

Khi đó có:

$$\left(x^2+ax+1\right)\left(x^3+bx+c+1\right)=x^5+x^4\left(a+b\right)+x^3\left(ab+c+1\right)+x^2\left(ac+b+1\right)+x\left(a+c\right)+1$$

Đồng nhất hệ số ta được: $\begin{cases} a+b=1 \\ ab+c+1=0 \\ ac+b+1=0 \\ a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c+b-bc+c=0 \\ 2b-c^2-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\left(1-c\right)=0 \\ 2b-c^2-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-1 \end{cases}$

Vậy $x^5+x^4+1=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x+1\right)$

Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$2\sqrt{3\left(x^5+x^4+1\right)}=2\sqrt{3\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x+1\right)} \overset{Cauchy}{\le} 2\cdot\frac{x^2+x+1+3\left(x^3-x+1\right)}{2}=VT$$

Dấu "=" xảy ra khi $x^2+x+1=3\left(x^3-x+1\right) \Leftrightarrow \left(x-1\right)\left(3x^2+2x-2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{-1+\sqrt{7}}{3} \\ x=-\frac{1+\sqrt{7}}{3} \end{array}\right.$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 20: Giải phương trình: $\sqrt[6]{x^6+x^3-2x-1}+\sqrt[6]{x^6-x^3+2x+1}=2x$

Giải

Đặt $\begin{cases} \sqrt[6]{x^6+x^3-2x-1}=a\left(a>0\right) \\ \sqrt[6]{x^6-x^3+2x+1}=b\left(b>0\right) \end{cases} \Rightarrow \left(a+b\right)^6=32\left(a^6+b^6\right)$

Dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức sau: $\frac{\left(a+b\right)^6}{32} \le a^6+b^6 \Leftrightarrow 32\left[\left(a^2\right)^3+\left(b^2\right)^3\right] \ge \left(a+b\right)^6$

Sử dụng bất đẳng thức $4\left(a^3+b^3\right) \ge \left(a+b\right)^3 \Leftrightarrow 3\left(a-b\right)^2\left(a+b\right) \ge 0$ ta cần chứng minh được:

$8\left(a^2+b^2\right)^3 \ge \left(a^2+b^2+2ab\right)^3$. Theo AM – GM có $ab \le \frac{a^2+b^2}{2}$ nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Từ đó suy ra được dấu "=" xảy ra khi $\sqrt[6]{x^6+x^3-2x-1} = \sqrt[6]{x^6-x^3+2x+1} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bài 21: Giải phương trình: $x = \sqrt{x-\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}$

MO Yogoslavia

Giải

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{x-\frac{1}{x}} = \sqrt{1\left(x-\frac{1}{x}\right)} \overset{\text{Cauchy}}{\le} \dfrac{1+x-\frac{1}{x}}{2} \\ \sqrt{1-\frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{1}{x}(x-1)} \overset{\text{Cauchy}}{\le} \dfrac{\frac{1}{x}+x-1}{2} \end{cases}$

Khi đó $VP \le x$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 1 = x-\frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Bài 22: Giải phương trình: $x^4+x^2+1 = \sqrt{3\left(x^7+x^3+x^2\right)}$

Giải

Bài này tương tự như bài 14. Ta sẽ phân tích $x^7+x^3+x^2 = x^2\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)$

Khi đó ta có:

$$x^4+x^2+1 = \sqrt{3\left(x^7+x^3+x^2\right)}$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right) = \sqrt{3x^2\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right)}$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{3x^2\left(x^3-x^2+1\right)}$$

Lại có:

1. $\sqrt{3x^2\left(x^3-x^2+1\right)} \overset{\text{Cauchy}}{\le} \dfrac{\sqrt{3}\left(x^3+1\right)}{2} = \dfrac{\sqrt{3}(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{2}$
2. $\sqrt{x^2+x+1} - \dfrac{\sqrt{3}(x+1)}{2} = \dfrac{\frac{1}{4}(x-1)^2}{\sqrt{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}(x+1)}{2}} \ge 0$
3. $\left(x^2-x+1\right)\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{3x^2\left(x^3-x^2+1\right)} \le \dfrac{\sqrt{3}(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{2}$

Nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ngoài ra nếu để ý ta thấy bài này có thể đưa về bài toán giống bài 15 bằng cách đặt $a = x^2; b = x; c = 1$. Khi đó phương trình trở thành: $a^2+b^2+c^2 = \sqrt{3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)}$

Ta biết rằng: $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 - 3\left(a^3b+b^3c+c^3a\right) = \sum_{cyc}\frac{1}{2}\left(a^2-2ab+bc+ca-c^2\right)^2 \ge 0$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 23: Giải phương trình: $4x+\sqrt{x^2+\left(1+\sqrt{2}\right)x+1}+\sqrt{x^2+\left(1-\sqrt{2}\right)x+1}=2\sqrt{5x+1}$

Giải

Ta có: $4x-2\sqrt{5x+1}\overset{\text{Cauchy}}{\geq}-x-2$

Khi đó ta có:

$$\sqrt{x^2+\left(1+\sqrt{2}\right)x+1}+\sqrt{x^2+\left(1-\sqrt{2}\right)x+1}\geq x+2\Leftrightarrow 2\sqrt{x^4+2x^3+x^2+2x+1}\geq -x^2+2x+2$$

Nếu $x\in\left[1-\sqrt{3};-\dfrac{1}{5}\right]\cup\left[1+\sqrt{3};+\infty\right)$ thì bài toán đã được giải quyết

Nếu $x\in\left[-\dfrac{1}{5};1+\sqrt{3}\right]$ ta có:

$$2\sqrt{x^4+2x^3+x^2+2x+1}\geq -x^2+2x+2\Leftrightarrow x^2\left(3x^2+12x+4\right)\geq 0\forall x\in\left[-\frac{1}{5};1+\sqrt{3}\right]$$

Từ đó suy ra $VT\geq VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x=0$

Bài toán đã được giải quyết hoàn toàn!

Bài 24: Giải phương trình: $(x-1)^2(x-2)^2+\sqrt[4]{x^2-3x+3}+\dfrac{x-5}{4}=0$

Giải

Xét $x\leq -5$ ta có:

$$(x-1)^2(x-2)^2+\frac{x-5}{4}=\frac{4(x+5)^4-103(x+5)^3+1001(x+5)^2-4337(x+5)+7046}{4}>0$$

$\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm trên $(-\infty;-5]$

Xét $x\geq -5$, ta đi chứng minh $\sqrt[4]{x^2-3x+3}\geq\dfrac{5-x}{4}$

Nếu $x\geq 5$ thì bài toán đã được chứng minh.

Nếu $x\in[-5;5]$ ta có:

$$\sqrt[4]{x^2-3x+3}\geq\frac{5-x}{4}\Leftrightarrow -x^4+20x^3+106x^2-268x+143\geq 0\Leftrightarrow (x-1)^2\left(-x^2+18x+143\right)\geq 0$$

Không khó để nhận ra bất đẳng thức cuối luôn đúng với $x\in[-5;5]$.

Vậy $VT\geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Bài 25: Giải phương trình: $x^2+4x+5-\dfrac{3x}{x^2+x+1}=(x-1)\left(1-\dfrac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 – Chuyên Quốc học Huế

Giải

Ta có:

$$x^2+4x+5-\frac{3x}{x^2+x+1}=(x-1)\left(1-\frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x^2+4x+5\right)\left(x^2+x+1\right)-3x}{x^2+x+1}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+1}-2\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+4x+5\right)\left(x^2+x+1\right)-3x=(x-1)\left(x^2+x+1-2\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{1-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^4+4x^3+10x^2+6x+6+2(x-1)\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{1-x}=0$$

Để ý thấy: $2(x-1)\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{1-x} \overset{\text{Cauchy}}{\geq} 2.(x-1)\cdot\frac{x^2+2}{2}$.

Nên $VT \geq (x+2)^2(x^2+x+1) \geq 0$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=-2$

Bài 26: Giải phương trình: $\frac{2}{(\sqrt{x}+1)^2}+\frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}=\frac{2}{1+\sqrt{x(2x-1)}}$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2015 – Lần 1 – THPT Minh Châu – Hưng Yên

Giải

Bài này đã cố tình che giấu đi mẫu của phân thức thứ 2 để làm đánh lạc hướng người làm do đó ta cần có 1 bước biến đổi: $x+\sqrt{2x-1}=\frac{1}{2}(\sqrt{2x-1}+1)^2$

Khi đó phương trình tương đương: $\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2}+\frac{1}{(\sqrt{2x-1}+1)^2}=\frac{1}{1+\sqrt{x(2x-1)}}$

Nhìn thế này ta sẽ nghĩ ngay tới bất đẳng thức AM – GM dạng cộng mẫu số, ta có:

$$\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2}+\frac{1}{(\sqrt{2x-1}+1)^2} \geq \frac{4}{(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{2x-1}+1)^2}$$

Bài toán sẽ được giải quyết nếu ta chứng minh được:

$$\frac{4}{(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{2x-1}+1)^2} \geq \frac{1}{1+\sqrt{x(2x-1)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-3x+4\sqrt{x(2x-1)}-2(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}{(1+\sqrt{x(2x-1)})\left[(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{2x-1}+1)^2\right]} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}-1)(2\sqrt{x}+5\sqrt{2x-1}-1)}{2(1+\sqrt{x(2x-1)})\left[(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{2x-1}+1)^2\right]} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\sqrt{x}-1)^2\left[\frac{4x-1}{2\sqrt{x}+1}+5\sqrt{2x-1}\right]}{2\left[\frac{4x-1}{2\sqrt{x}+1}+\sqrt{2x-1}\right]2(1+\sqrt{x(2x-1)})\left[(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{2x-1}+1)^2\right]} \geq 0$$

Dễ thấy bất đẳng thức cuối đúng với $x \geq \frac{1}{2}$ nên $VT-VP \geq 0$, dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Ngoài ra nếu ta đặt $\begin{cases}\sqrt{x}=a\\ \sqrt{2x-1}=b\end{cases}$ thì khi đó ta cần chứng minh $\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$.

Ta có đẳng thức sau đây: $\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}-\frac{1}{1+ab}=\frac{ab(a-b)^2+(1-ab)^2}{(a+1)^2(b+1)^2(1+ab)} \geq 0$. Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Ta cũng có thể dùng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz chứng minh được. Ta có:

$$\begin{cases}(ab+1)\left(\frac{a}{b}+1\right) \geq (a+1)^2\\ (ab+1)\left(\frac{b}{a}+1\right) \geq (b+1)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{(a+1)^2} \geq \frac{b}{(a+b)(ab+1)}\\ \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{a}{(a+b)(ab+1)}\end{cases}$$

Cộng lại có điều cần chứng minh!

Nếu áp dụng luôn thì phương trình ban đầu trở thành:

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt{2x-1}\left(\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}\right)^2+\left(1-\sqrt{x(2x-1)}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2\left(\sqrt{2x-1}+1\right)^2\left(1+\sqrt{x(2x-1)}\right)}=0$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}=0\\ 1-\sqrt{x(2x-1)}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Bài 27: Giải phương trình: $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\dfrac{x}{\sqrt{2x+1}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}+1}=1$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM dạng cộng mẫu ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{x}{\sqrt{2x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{3x+1}+1}\ge\frac{4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}+2}+\frac{x}{\sqrt{2x+1}+1}$$

Áp dụng tiếp bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có: $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}\le 2\sqrt{2x+1}$

Khi đó $VT\ge\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1}+\dfrac{x}{\sqrt{2x+1}+1}=\dfrac{x+2}{\sqrt{2x+1}+1}$

Bây giờ nhiệm vụ của chúng ta là phải chứng minh được:

$$\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}+1}\ge 1\Leftrightarrow x+2\ge\sqrt{2x+1}+1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1}-1\right)^2\ge 0$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Dấu "=" xảy ra khi $x=0$

Bài 28: Giải phương trình: $\dfrac{x^2+x+1}{\left(x^2+\sqrt{x+1}\right)^2}+\dfrac{x^2+x+2}{\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)^2}+\dfrac{x^2+x+3}{\left(x^2+\sqrt{x+3}\right)^2}=3$

Giải

Ta có: $\dfrac{x^2+x+1}{\left(x^2+\sqrt{x+1}\right)^2}\le 1\Leftrightarrow x^2+x+1\le\left(x^2+\sqrt{x+1}\right)^2\Leftrightarrow x^2\sqrt{x+1}\left((x-1)\sqrt{x+1}+2\right)\ge 0$

Nếu $x\ge 1$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Nếu $x<1$ thì : $(x-1)\sqrt{x+1}+2=\dfrac{-x^3+x^2+x+3}{2+(1-x)\sqrt{x+1}}=\dfrac{x^2(1-x)+x+3}{2+(1-x)\sqrt{x+1}}>0$

Do đó $\dfrac{x^2+x+1}{\left(x^2+\sqrt{x+1}\right)^2}\le 1$. Thiết lập các bất đẳng thức còn lại tương tự ta cũng sẽ được

$$\frac{x^2+x+2}{\left(x^2+\sqrt{x+2}\right)^2}\le 1;\ \frac{x^2+x+3}{\left(x^2+\sqrt{x+3}\right)^2}\le 1$$

Cộng 3 bất đẳng thức ta được $VT\le VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x=0$

Bài 29: Giải phương trình: $\frac{3}{\sqrt{x^2+2x-2}}+\sqrt{-x^2+2x+3}=\sqrt{85-60x}$

Giải

Theo bất đẳng thức $AM-GM$ ta có: $\begin{cases}\sqrt{x^2+2x-2}.1\le\frac{x^2+2x-1}{2}\\ \frac{1}{5}.5\sqrt{85-60x}\le 11-6x\end{cases}$

Khi đó :

$$\begin{aligned}VT-VP&\ge\frac{6x^3+x^2-28x+17+\left(x^2+2x-1\right)\sqrt{-x^2+2x+3}}{x^2+2x-1}\\&=\frac{\left(2-\sqrt{-x^2+2x+3}\right)\left(\left(6x+15\right)\sqrt{-x^2+2x+3}-x^2+10x+31\right)}{x^2+2x-1}\\&=\frac{\left(x-1\right)^2\left(\left(6x+15\right)\sqrt{-x^2+2x+3}-x^2+10x+31\right)}{\left(x^2+2x-1\right)\left(2+\sqrt{-x^2+2x+3}\right)}\end{aligned}$$

Để ý thấy với $x\in\left[-1+\sqrt{3};\frac{17}{12}\right]$ thì $\begin{cases}6x+15>0\\-x^2+10x+31>0\\x^2+2x-1>0\end{cases}$ nên $VT-VP\ge 0$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Bài 30: Giải phương trình: $\left(1+\sqrt{3x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{5x}\right)=\left(1+\sqrt[3]{15x^3+35x^2+10x}\right)$

Giải

Nhìn thấy dạng tích là sẽ nghĩ ngay tới bất đẳng thức Holder, trước hết ra sẽ đi chứng minh nó.
Có bổ đề sau$\left[\text{Holder}\right]$: Cho các số thực dương a,b,c,x,y,z,m,n,p khi đó ta luôn có:

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)\ge\left(axm+byn+czp\right)^3$$

Chứng minh: Theo $AM-GM$ ta có:

1. $\frac{a^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{m^3}{m^3+n^3+p^3}+\frac{x^3}{x^3+y^3+z^3}\ge\frac{3axm}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)}}$
2. $\frac{b^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{n^3}{m^3+n^3+p^3}+\frac{y^3}{x^3+y^3+z^3}\ge\frac{3byn}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)}}$
3. $\frac{c^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{p^3}{m^3+n^3+p^3}+\frac{z^3}{x^3+y^3+z^3}\ge\frac{3cpz}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(m^3+n^3+p^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)}}$

Cộng 3 bất đẳng thức trên có điều phải chứng minh.

Quay lại bài, ta để ý thấy $15x^3+35x^2+10x=5x\left(3x+1\right)\left(x+2\right)$. Nên sẽ đặt $\begin{cases}a=\sqrt{3x+1}\\b=\sqrt{x+2}\\c=\sqrt{5x}\end{cases}$. Khi đó phương trình trở thành: $\left(a+1\right)\left(b+1\right)\left(c+1\right)=\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)$

Theo bất đẳng thức Holder ta có: $\prod_{cyc}\left(\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3+\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{a}\right)^3\right)\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)$

Vậy dấu "=" xảy ra khi $a=b=c \Leftrightarrow \sqrt{3x+1}=\sqrt{x+2}=\sqrt{5x} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Bài 31: Giải phương trình: $x\sqrt{x^2+x-2}+3x\sqrt{x^5-1}=\sqrt{\left(x^2+3\right)\left(3x^7-2x^2+x-2\right)}$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$x\sqrt{x^2+x-2}+3x\sqrt{x^5-1}=x\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{3}.\sqrt{3}x\sqrt{x^5-1}\le\sqrt{\left(x^2+3\right)\left(3x^7-2x^2+x-2\right)}=VP$$

Nhìn có vẻ dễ nhưng đến đây mới có vấn đề nảy sinh. Dấu "=" xảy ra khi:

$$\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x}=x\sqrt{x^5-1}\Leftrightarrow x^9-x^4-x^2-x+2=0$$

Phương trình không thật sự dễ giải cho lắm, chắc phải dùng đến hàm số.

Đặt: $f\left(x\right)=x^9-x^4-x^2-x+2$ liên tục trên $\left[1;+\infty\right)$.

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=9x^8-4x^3-2x-1=9x^8-9x^3+2x^3-2x+3x^3-1>0\forall x\ge1$$

Vậy $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$. Lại có $f\left(1\right)=0$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bên cạnh hàm số ta cũng có thể phân tích $f\left(x\right)$ thành nhân tử. Ta được:

$$f\left(x\right)=x^9-x^4-x^2-x+2=\left(x-1\right)\left(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4-x-2\right)$$

$$x^8+x^7+x^6+x^5+x^4-x-2=x^8+x^7+\left(x^6+x^5-2\right)+x\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)>0\forall x\ge1$$

Khi đó phương trình $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1$

Bài 32: Giải phương trình: $2\left(x-2\right)\sqrt{5-x^2}+\left(x+1\right)\sqrt{x^2+5}=7x-5$ *Trích báo THTT*

Giải

- **Cách 1: Bất đẳng thức.**
- Kiểm tra thấy phương trình có 2 nghiệm là $x=2\ \&\ x=-1$, mặt khác ta lại có:

$$\lim_{x\to-1}\frac{2\left(x-2\right)\sqrt{5-x^2}+\left(x+1\right)\sqrt{x^2+5}-7x+5}{x+1}\ne0$$

$$\lim_{x\to2}\frac{2\left(x-2\right)\sqrt{5-x^2}+\left(x+1\right)\sqrt{x^2+5}-7x+5}{x-2}=0$$

$$\lim_{x\to2}\frac{2\left(x-2\right)\sqrt{5-x^2}+\left(x+1\right)\sqrt{x^2+5}-7x+5}{\left(x-2\right)^2}\ne0$$

Nên $x=2$ là nghiệm kép, $x=-1$ là nghiệm đơn, do đó sẽ liên hợp lôi nghiệm đơn ra trước, còn nghiệm kép sẽ dùng bất đẳng thức đánh giá. Ta có:

$$2\left(x-2\right)\sqrt{5-x^2}+\left(x+1\right)\sqrt{x^2+5}=7x-5$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x-2\right)\left(\sqrt{5-x^2}-2\right)+\left(x+1\right)\sqrt{x^2+5}-3\left(x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left[\frac{2\left(x-2\right)\left(1-x\right)}{\sqrt{5-x^2}+2}+\sqrt{x^2+5}-3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ f\left(x\right)=\dfrac{2\left(x-2\right)\left(1-x\right)}{\sqrt{5-x^2}+2}+\sqrt{x^2+5}-3=0\ \left(*\right)\end{array}\right.$$

- Giải phương trình $\left(*\right)$, ta có:

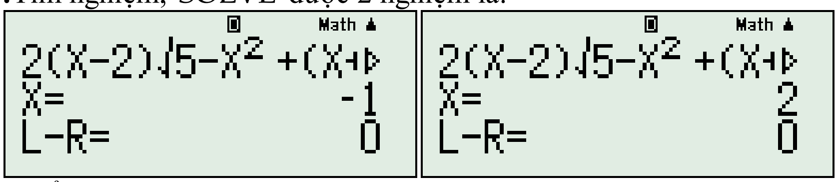
$$f\left(x\right)=\frac{2\left(x-2\right)\left(1-x\right)}{\sqrt{5-x^2}+2}+3.\frac{1}{3}\sqrt{x^2+5}-3\overset{AM-GM}{\leq}\frac{x^2+14}{6}-3+\frac{2\left(x-2\right)\left(1-x\right)}{\sqrt{5-x^2}+2}$$

$$\frac{x^2+14}{6}-3+\frac{2\left(x-2\right)\left(1-x\right)}{\sqrt{5-x^2}+2}=\left(x-2\right)\left[\frac{\left(x+2\right)\sqrt{5-x^2}-10x+16}{6\left(\sqrt{5-x^2}+2\right)}\right]$$

$$=\frac{-\left(x-2\right)^2\left[\frac{\left(x+2\right)^2}{\sqrt{5-x^2}+1}+9\right]}{6\left(\sqrt{5-x^2}+2\right)}\leq 0$$

Vậy $f\left(x\right)\leq 0$, dấu "=" xảy ra khi $x=2$

- Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=-1;x=2$
- **Cách 2: Liên hợp.**
- **Bước 1:** Tìm nghiệm, SOLVE được 2 nghiệm là:



- **Bước 2:** Kiểm tra nghiệm bội: Ta có:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2\left(x-2\right)\sqrt{5-x^2}+\left(x+1\right)\sqrt{x^2+5}-7x+5}{x+1}\neq 0$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{2\left(x-2\right)\sqrt{5-x^2}+\left(x+1\right)\sqrt{x^2+5}-7x+5}{x-2}=0$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{2\left(x-2\right)\sqrt{5-x^2}+\left(x+1\right)\sqrt{x^2+5}-7x+5}{\left(x-2\right)^2}\neq 0$$

Vậy $x=-1$ là nghiệm đơn, $x=2$ là nghiệm kép.

- Ta sẽ tiến hành nhân liên hợp do bài này chia căn rất lẻ. Ta có:

$$2\left(x-2\right)\sqrt{5-x^2}+\left(x+1\right)\sqrt{x^2+5}=7x-5$$
$$\Leftrightarrow 6\left(x-2\right)\sqrt{5-x^2}+3\left(x+1\right)\sqrt{x^2+5}+3\left(5-7x\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x-2\right)\left(3\sqrt{5-x^2}+x-5\right)+\left(x+1\right)\left(3\sqrt{x^2+5}-2x-5\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{-20\left(x-2\right)^2\left(x+1\right)}{3\sqrt{5-x^2}+5-x}+\frac{5\left(x+1\right)\left(x-2\right)^2}{3\sqrt{x^2+5}+2x+5}=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\vee x=-1\\ f\left(x\right)=\dfrac{5}{3\sqrt{x^2+5}+2x+5}-\dfrac{20}{3\sqrt{5-x^2}+5-x}=0\end{array}\right.$$

- Để ý thấy:

$$\frac{1}{2}-\frac{20}{3\sqrt{5-x^2}+5-x}=\frac{3\sqrt{5-x^2}-x-35}{3\sqrt{5-x^2}+5-x}=\frac{-10x^2-70x-1180}{\left(3\sqrt{5-x^2}+x+35\right)\left(3\sqrt{5-x^2}+5-x\right)}<0$$

$$\frac{5}{3\sqrt{x^2+5}+2x+5}-\frac{1}{2}=\frac{5-2x-3\sqrt{x^2+5}}{3\sqrt{x^2+5}+2x+5}=\frac{-5\left(x+2\right)^2}{\left(3\sqrt{x^2+5}+2x+5\right)\left(3\sqrt{x^2+5}-2x+5\right)}<0$$

- Do đó phương trình $f\left(x\right)=0$ vô nghiệm.
- **Cách 3: Phân tích tổng bình phương.**

$$2\left(x-2\right)\sqrt{5-x^2}+\left(x+1\right)\sqrt{x^2+5}=7x-5$$

$$\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left[3-\sqrt{x^2+5}+\frac{2\left(x-2\right)\left(x-1\right)}{2+\sqrt{5-x^2}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left[\frac{\left(x-2\right)\left[9\left(x-2\right)+\left(x+2\right)\left(1-\sqrt{5-x^2}\right)\right]}{6\left(\sqrt{5-x^2}+2\right)}+\frac{1}{6}\left(3-\sqrt{x^2+5}\right)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x+1\right)\left[\frac{\left(x-2\right)^2\left[\frac{\left(x+2\right)^2}{1+\sqrt{5-x^2}}+9\right]}{6\left(\sqrt{5-x^2}+2\right)}+\frac{1}{6}\left(3-\sqrt{x^2+5}\right)^2\right]=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=2$$

Bài 33: Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2\left(x-1\right)^2\left(2x^2-4x+1\right)$

Giải

Để đơn giản ta sẽ đặt $\sqrt{2x-x^2}=t\left(t\in\left[0;2\right]\right)\Rightarrow\left(x-1\right)^2=x^2-2x+1=1-t^2$

Phương trình trở thành: $\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}=2\left(1-t^2\right)\left(1-2t^2\right)\quad\left(*\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\sqrt{t+1}+\sqrt{1-t}\ge2\sqrt{\left(t+1\right)\left(1-t\right)}$

Khi đó ta có:

$$VT-VP\ge2\sqrt{\left(t+1\right)\left(1-t\right)}-2\left(1-t^2\right)\left(1-2t^2\right)=2\sqrt{1-t^2}\left(1-\left(1-2t^2\right)\sqrt{1-t^2}\right)$$

Mặt khác ta luôn có:

$$1-\left(1-2t^2\right)\sqrt{1-t^2}\overset{AM-GM}{\ge}1-\frac{\left(1-2t^2\right)\left(2-t^2\right)}{2}=\frac{t^2\left(5-2t^2\right)}{2}\ge0$$

- Vậy $VT-VP\ge0$. Dấu "=" xảy ra khi $x=0$
- Ngoài ra ta còn có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy ở phương trình $\left(*\right)$. Ta có:

1. $\sqrt{t+1}+\sqrt{1-t}\ge2\sqrt{1-t^2}$
2. $2\sqrt{1-t^2}\ge2\left(1-t^2\right)\Leftrightarrow1\ge\sqrt{1-t^2}\Leftrightarrow t^2\ge0$
3. Do đó $VT-VP\ge2\left(1-x^2\right)\left(1-1+2x^2\right)=2\left(1-x^2\right)x^2\ge0$

- Dấu "=" xảy ra khi $t=0\Rightarrow\sqrt{2x-x^2}=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2$
- Bên cạnh với cách sử dụng bất đẳng thức ta có thể làm theo 3 cách sau, hơi trầy cối!

Cách 1.

$$\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2\left(x-1\right)^2\left(2x^2-4x+1\right)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}$$
$$=2\left(1-\sqrt{2x-x^2}\right)\left(1+\sqrt{2x-x^2}\right)\left(2\left(1-\sqrt{2x-x^2}\right)\left(1+\sqrt{2x+x^2}\right)-1\right)$$

- Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} \\ b=\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=2$. Phương trình trở thành:

$$a+b=2a^2b^2\left(2a^2b^2-1\right)$$

- Khi đó ta giải hệ sau:

$$\begin{cases} a+b=2a^2b^2\left(2a^2b^2-1\right) \\ a^2+b^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a+b\right)^2-2ab=2 \\ a+b=2a^2b^2\left(2a^2b^2-1\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab=\dfrac{\left(a+b\right)^2-2}{2}=\dfrac{t^2-2}{2} \\ t=\dfrac{\left(t^2-2\right)^2}{2}\left(\dfrac{\left(t^2-2\right)^2}{2}-1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=\dfrac{\left(a+b\right)^2-2}{2}=\dfrac{t^2-2}{2} \\ \left(t-2\right)\left(\underbrace{t^7+2t^6-4t^5-8t^4+6t^3+12t^2-4}_{f(t)}\right)=0\left(*\right) \end{cases}$$

Theo giả thiết suy ra $t>1$. Cần chứng minh $f\left(t\right)>0$. Ta có:

$$f\left(t\right)=\left(t-1\right)^7+9\left(t-1\right)^6+29\left(t-1\right)^5+37\left(t-1\right)^4+9\left(t-1\right)^3$$
$$-7\left(t-1\right)^2+9\left(t-1\right)+5>0$$

$$9\left(t-1\right)^3-7\left(t-1\right)^2+9\left(t-1\right)=\left(t-1\right)\left(9\left(x-\frac{25}{18}\right)^2+\frac{275}{36}\right)>0$$

Vậy ta được:

$$\left(*\right)\Leftrightarrow t=2\Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases} \Rightarrow a=b=1\Rightarrow \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=\sqrt{1+\sqrt{2x+x^2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Cách 2.

$$\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2\left(x-1\right)^2\left(2x^2-4x+1\right)$$
$$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{\left(x-1\right)^2}=\left(2\left(x-1\right)^2\left(2x^2-4x+1\right)\right)^2$$
$$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{\left(x-1\right)^2}=\left[2\sqrt{\left(x-1\right)^2}^2\left[2\sqrt{\left(x-1\right)^2}^2-1\right]\right]^2$$

Đặt $t=\sqrt{\left(x-1\right)^2}\left(t\geq 0\right)$, phương trình trở thành:

$$2+2t=\left(2t^2\left(2t^2-1\right)\right)^2\Leftrightarrow 8t^8-8t^6+2t^4-t-1=0$$
$$\Leftrightarrow \left(t-1\right)\left(8t^7+8t^6+2t^3+2t^2+2t+1\right)=0\Leftrightarrow t=1$$

Với $t=1$ ta có $\sqrt{\left(x-1\right)^2}=1\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

Cách 3: Liên hợp. Ta có:

$$\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}=2(x-1)^2(2x^2-4x+1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}-1+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}-1+x(2-x)(4x^2-8x+6)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1}-\frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+1}+x(2-x)(4x^2-8x+6)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \vee x=2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+1}+(4x^2-8x+6)\sqrt{2x-x^2}=0 \end{array}\right.$$

- Lại có:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1}-\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+1}=\frac{\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}-\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}}{\left(\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1\right)\left(\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+1\right)}$$

$$=\frac{-2\sqrt{2x-x^2}}{\left(\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1\right)\left(\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+1\right)\left(\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}\right)}$$

- Do đó ta cần chứng minh:

$$f(x)=2x^2-4x+3$$
$$-\frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1\right)\left(\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+1\right)\left(\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}\right)}>0$$

- Do $\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}\geq 0$ nên ta được:

$$f(x)\geq 2x^2-4x+3-\frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1\right)\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}}$$

$$>\frac{(2x^2-4x+3)\left(1+\sqrt{2x-x^2}\right)-2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1\right)\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}}$$

$$=\frac{\left(1-\sqrt{2x-x^2}\right)\left(4\sqrt{2x-x^2}-2x^2+4x+1\right)}{\left(\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1\right)\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}}\geq 0 \forall x\in[0;2]$$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Cách 4: Bất đẳng thức

Ta có: $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} \overset{AM-GM}{\geq} 2\sqrt{(x-1)^2}$

Khi đó $VT-VP \geq 2\sqrt{(x-1)^2}-2(x-1)^2\left(2(x-1)^2-1\right)$

Đặt $|x-1|=t\left(t\in[0;1]\right)$, khi đó cần chứng minh:

$$2t-2t^2\left(2t^2-1\right)\geq 0 \Leftrightarrow -2t(t-1)\left(2t^2+2t+1\right)\geq 0$$

Vậy $VT-VP\geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x=0;x=2$

Bài 34: Giải phương trình: $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}=\sqrt[3]{\dfrac{3x-13}{4}}$

Giải

Để căn bậc 3 thì hơi khó đánh giá nên ta sẽ lũy thừa lên. Ta có:

$$\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}=\sqrt[3]{\frac{3x-13}{4}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1}\right)^3-\frac{3x-13}{4}=0$$

Theo AM – GM ta có:

$$VT\leq\left(\frac{x-1}{2}-\sqrt{x+1}\right)^3-\frac{3x-13}{4}=\frac{1}{8}\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2\left(x^2-4x+1-2(x+1)\sqrt{x+1}\right)$$

Đến đây ta sẽ cần chứng minh $f(x)=x^2-4x+1-2(x+1)\sqrt{x+1}<0$, nhưng có vẻ ta cần tìm thêm điều kiện thì mới có thể chứng minh được. Để ý thấy $\sqrt{x-2}<\sqrt{x+1}$ nên điều kiện có nghiệm sẽ là $x\in\left[2;\dfrac{13}{3}\right]$.

Ta có: $f'(x)=2x-4-3\sqrt{x+1}=\dfrac{4x^2-25x+7}{2x-4+3\sqrt{x+1}}<0\forall x\in\left[2;\dfrac{13}{3}\right]$ từ đó suy ra

$f\left(\dfrac{13}{3}\right)\leq f(x)\leq f(2)$. Mà $\begin{cases} f\left(\dfrac{13}{3}\right)\approx -22,189 \\ f(2)=-3-6\sqrt{3}\end{cases}$ nên $f(x)<0$. Vậy $VT\leq 0$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=3$

Bài 35: Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}+\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}}\leq 2\forall a,b>0$

Giải

Do bất đẳng thức đang ở dạng đẳng cấp nên ta sẽ chia cả tử và mẫu cho $\sqrt{b}$ và đặt $x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}(x>0)$. Ta cần chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x+3}}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{3x+1}}\leq 2\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+3)(3x+1)}-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)\geq 0$$

Bài này khá là nhiều căn nên ta sẽ nghĩ cách làm giảm bớt căn, tuy nhiên khá là bế tắc. Ở bài này sẽ dùng bất đẳng thức $a+b\leq\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$. Ta có:

$$\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\leq\sqrt{2(4x+4)}=2\sqrt{2}\sqrt{x+1}$$

Khi đó $VT\geq 2\sqrt{(x+3)(3x+1)}-2\sqrt{2}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x}+1\right)=f(x)$

Ta có: $f\left(x\right)=\dfrac{4\left(\sqrt{x}-1\right)^4}{2\sqrt{\left(x+3\right)\left(3x+1\right)}+2\sqrt{2}\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x}+1\right)}\ge 0$

Do đó dấu "=" xảy ra khi $x=1 \Leftrightarrow a=b$. Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh!
Ngoài ra ta có thể đánh giá bằng AM – GM như sau. Ta có:

$$\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a+3b}}\le\frac{a}{a+b}+\frac{a+b}{a+3b};\ \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}\le\frac{1}{2}+\frac{2b}{a+3b}\Rightarrow\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}}\le\frac{3}{4}+\frac{a}{2\left(a+b\right)}$$

$$\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}}\le\frac{b}{a+b}+\frac{a+b}{b+3a};\ \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b+3a}}\le\frac{1}{2}+\frac{2a}{b+3a}\Rightarrow\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}}\le\frac{3}{4}+\frac{b}{2\left(a+b\right)}$$

Cộng hai bất đẳng thức trên với nhau ta có điều phải chứng minh.
Ngoài ra ta có thể giải phương trình bằng liên hợp như sau:

Nhận thấy phương trình đang có 3 căn nên có thể đặt $a=\sqrt{x}$ để giảm bớt độ cồng kềnh của phương trình.

Đặt $a=\sqrt{x}\left(a\ge 0\right)$ phươngtrình trở thành:

$2\sqrt{3a^4+10a^2+3}-\left(a+1\right)\left(\sqrt{3a^2+1}+\sqrt{a^2+3}\right)=0$. Ta tìm được nghiệm kép $a=1$ nên sẽ tìm được 2 biểu thức liên hợp là $\begin{cases}\sqrt{3a^2+1}-\dfrac{3}{2}a-\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{a^2+3}-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{2}\end{cases}$. Khi đó tiến hành nhân liên hợp ta được:

$$2\sqrt{3a^4+10a^2+3}-\left(a+1\right)\left(\sqrt{3a^2+1}+\sqrt{a^2+3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3a^4+10a^2+3}-2a^2-4a-2$$
$$-\left(a+1\right)\left(\sqrt{3a^2+1}-\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}\right)-\left(a+1\right)\left(\sqrt{a^2+3}-\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{8\left(a-1\right)^2\left(a^2+1\right)}{2\sqrt{3a^4+10a^2+3}+2a^2+4a+2}-\frac{3\left(a+1\right)\left(a-1\right)^2}{4\left(\sqrt{3a^2+1}+\dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{2}\right)}-\frac{3\left(a+1\right)\left(a-1\right)^2}{4\left(\sqrt{a^2+3}+\dfrac{1}{2}a+\dfrac{3}{2}\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\ \dfrac{8\left(a^2+1\right)}{2\sqrt{3a^4+10a^2+3}+2a^2+4a+2}-\dfrac{3\left(a+1\right)}{4\sqrt{3a^2+1}+6a+2}-\dfrac{3\left(a+1\right)}{4\sqrt{a^2+3}+2a+6}=0\left(*\right)\end{array}\right.$$

Nhiệm vụ là sẽ đi chứng minh phương trình $\left(*\right)$ vô nghiệm.

Để ý thấy:

4. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3\left(a+1\right)}{4\sqrt{3a^2+1}+6a+2}=\dfrac{48a^2}{\left(4\sqrt{3a^2+1}+4\right)\left(8\sqrt{3a^2+1}+12a+4\right)}>0\forall a\ge 0$

5. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3\left(a+1\right)}{4\sqrt{a^2+3}+2a+6}=\dfrac{48}{\left(4\sqrt{a^2+3}+4a\right)\left(8\sqrt{a^2+3}+4a+12\right)}>0\forall a\ge 0$

6. Còn lại ta có:

$$\frac{8\left(a^2+1\right)}{2\sqrt{3a^4+10a^2+3}+2a^2+4a+2}-1$$
$$=\frac{\left(24a^2+24\right)\left(a-1\right)^2}{\left(2\sqrt{3a^4+10a^2+3}+2a^2+4a+2\right)\left(6a^2-4a+6+2\sqrt{3a^4+10a^2+3}\right)}\ge 0$$

Nên do đó phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$

Bài 36: Giải phương trình: $\dfrac{4\sqrt{1-x}}{x}+\dfrac{\sqrt{2x-1}}{1-x}=3\sqrt{3}$

Giải

Cách 1.

Đầu tiên nhìn thấy bài này có dạng phân số nên ta sẽ thử dùng bất đẳng thức BCS dạng cộng mẫu số Engel. Ta có bổ đề sau: $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}\ge\dfrac{\left(a+b\right)^2}{x+y}$.

Chứng minh: $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}=\dfrac{1}{x+y}\left(\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2\right)\left[\left(\dfrac{a}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(\dfrac{b}{\sqrt{y}}\right)^2\right]\ge\dfrac{\left(a+b\right)^2}{x+y}$

Áp dụng vào bài ta có:

$$VT-VP=\frac{\left(2\sqrt{1-x}\right)^2}{x\sqrt{1-x}}+\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^2}{\left(1-x\right)\sqrt{2x-1}}-3\sqrt{3}\ge\frac{\left(2\sqrt{1-x}+\sqrt{2x-1}\right)^2}{\sqrt{1-x}\left(x+\sqrt{\left(1-x\right)\left(2x-1\right)}\right)}-3\sqrt{3}$$

Ta cần chứng minh $f\left(x\right)=\left(2\sqrt{1-x}+\sqrt{2x-1}\right)^2-3\sqrt{3}\sqrt{1-x}\left(x+\sqrt{\left(1-x\right)\left(2x-1\right)}\right)\ge 0$.

Ta có:

$$f\left(x\right)=\left(2\sqrt{1-x}+\sqrt{2x-1}\right)^2-3\sqrt{3}\sqrt{1-x}\left(x+\sqrt{\left(1-x\right)\left(2x-1\right)}\right)$$
$$=\frac{\left(3x-2\right)^2\left(3\sqrt{3}\sqrt{1-x}-4\right)}{2\left(2\sqrt{\left(1-x\right)\left(2x-1\right)}+x\right)}+\frac{\left(3x-2\right)^2\left(27x+9\right)}{2\left(6+9x\sqrt{3}\sqrt{1-x}\right)}$$

Đặt : $g\left(x\right)=\dfrac{3\sqrt{3}\sqrt{1-x}-4}{2\left(2\sqrt{\left(1-x\right)\left(2x-1\right)}+x\right)}+\dfrac{27x+9}{2\left(6+9x\sqrt{3}\sqrt{1-x}\right)}$

$$=\frac{2\left(3\sqrt{3}\sqrt{1-x}-4\right)\left(6+9x\sqrt{3}\sqrt{1-x}\right)+2\left(27x+9\right)\left(2\sqrt{\left(1-x\right)\left(2x-1\right)}+x\right)}{4\left(2\sqrt{\left(1-x\right)\left(2x-1\right)}+x\right)\left(6+9x\sqrt{3}\sqrt{1-x}\right)}$$
$$=\frac{36\sqrt{3}\left(1-2x\right)\sqrt{1-x}-162x^2+162x-48+54x^2+18x+4\left(27x+9\right)\sqrt{\left(1-x\right)\left(2x-1\right)}}{4\left(2\sqrt{\left(1-x\right)\left(2x-1\right)}+x\right)\left(6+9x\sqrt{3}\sqrt{1-x}\right)}$$
$$=\frac{-108x^2+180x-48+\sqrt{\left(1-x\right)\left(2x-1\right)}\left(-36\sqrt{3}\sqrt{2x-1}+4\left(27x+9\right)\right)}{4\left(2\sqrt{\left(1-x\right)\left(2x-1\right)}+x\right)\left(6+9x\sqrt{3}\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\frac{-108x^2+180x-48+\sqrt{(1-x)(2x-1)}\left[\frac{11664x^2+5184}{36\sqrt{3}\sqrt{2x-1}+4(27x+9)}\right]}{4\left(2\sqrt{(1-x)(2x-1)}+x\right)\left(6+9x\sqrt{3}\sqrt{1-x}\right)}$$

Ta luôn có: $-108x^2+180x-48=-12(3x-4)(3x-1)>0\forall x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$. Nên $g(x)>0$. Do đó $f(x)\geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{2}{3}$

Cách 2.

- Bước đầu tiên bao giờ cũng là đi tìm nghiệm. Ta được 1 nghiệm $x=\frac{2}{3}$.
- Kiểm tra nghiệm bội ta có:

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{4(1-x)\sqrt{1-x}+x\sqrt{2x-1}-3\sqrt{3}x(1-x)}{3x-2}=0$$
$$\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{4(1-x)\sqrt{1-x}+x\sqrt{2x-1}-3\sqrt{3}x(1-x)}{(3x-2)^2}\neq 0$$

$\Rightarrow x=\frac{2}{3}$ là nghiệm kép.

- Tìm nhân tử từng cụm, giả sử nhân tử có dạng: $\begin{cases}4(1-x)\sqrt{1-x}+ax+b=0\\ x\sqrt{2x-1}+cx+d=0\end{cases}$.

  Khi đó sẽ tìm được 2 nhân tử là: $\begin{cases}x\sqrt{2x-1}-\sqrt{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{9}=0\\ 4(1-x)\sqrt{1-x}+2\sqrt{3}x-\frac{16\sqrt{3}}{9}=0\end{cases}$.

- Phân tích nhân tử từng cụm 1 sử dụng công thức chia 2 căn ta được:

1. $4(1-x)\sqrt{1-x}+2\sqrt{3}x-\frac{16\sqrt{3}}{9}=\left(\frac{4}{9}\sqrt{1-x}+\frac{2\sqrt{3}}{27}\right)\left(3\sqrt{1-x}-\sqrt{3}\right)^2$
2. $x\sqrt{2x-1}-\sqrt{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{9}=\frac{\left(3\sqrt{2x-1}-\sqrt{3}\right)^3}{54}$

- Nhìn vào rõ ràng thấy nhân tử thứ 2 không có cùng dấu với bài toán do chứa nghiệm bội 3 nên ta sẽ làm mạnh tay hơn là phân tích nhân tử cả cụm:

$-3\sqrt{3}x(1-x)-2\sqrt{3}x+\frac{16\sqrt{3}}{9}+x\sqrt{2x-1}$ với hy vọng cả cụm đó sẽ luôn dương. Thật vậy ta được: $-3\sqrt{3}x(1-x)-2\sqrt{3}x+\frac{16\sqrt{3}}{9}+x\sqrt{2x-1}$

$$=\left(\sqrt{2x-1}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\left(2\sqrt{2x-1}+\frac{(9x-4)\sqrt{3}}{6}\right)\geq 0$$

- Vậy lời giải là:

$$4\left(1-x\right)\sqrt{1-x}+x\sqrt{2x-1}=3\sqrt{3}x\left(1-x\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{1-x}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\underbrace{\left(2\sqrt{3}\sqrt{1-x}+1\right)}_{>0}+\left(\sqrt{2x-1}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\underbrace{\left(2\sqrt{2x-1}+\frac{\left(9x-4\right)\sqrt{3}}{6}\right)}_{>0}=0$$

- Dễ thấy $VT \ge 0$ nên dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\sqrt{1-x}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=0\\ \sqrt{2x-1}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$

Cách 3.

1. Tìm nghiệm: Phương trình có nghiệm kép $x=\dfrac{2}{3}$
2. Tìm nhân tử chứa nghiệm: $2\sqrt{1-x}+\sqrt{2x-1}-\sqrt{3}$
3. Chia căn ta được kết quả:

$$\frac{f\left(x\right)}{2\sqrt{1-x}+\sqrt{2x-1}-\sqrt{3}}=\underbrace{-x\sqrt{3}\sqrt{1-x}-2\sqrt{1-x}\sqrt{2x-1}+\frac{\sqrt{3}\left(x+2\right)}{2}\sqrt{2x-1}-\frac{3x-2}{2}}_{g\left(x\right)}$$

4. Để ý thấy với $x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ thì $g\left(x\right)<0$. Nên phương trình $g\left(x\right)=0$ vô nghiệm!

Cách 4. Liên hợp

$$4\left(1-x\right)\sqrt{1-x}+x\sqrt{2x-1}=3\sqrt{3}x\left(1-x\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\sqrt{1-x}+\frac{2\sqrt{3}}{27}\right)\left(3\sqrt{1-x}-\sqrt{3}\right)^2+\frac{1}{54}\left(3\sqrt{2x-1}-\sqrt{3}\right)^3+\frac{\sqrt{3}}{3}\left(3x-2\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(3x-2\right)^2=0\\ \dfrac{12\sqrt{1-x}+2\sqrt{3}}{3\left(3\sqrt{1-x}+\sqrt{3}\right)^2}+\dfrac{4\left(3x-2\right)}{\left(3\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}\right)^3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=0\left(*\right)\end{array}\right.$$

1. Để ý thấy :

$$\frac{4\left(3x-2\right)}{\left(3\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}\right)^3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{12\left(3x-2\right)+\sqrt{3}\left(3\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}\right)^3}{3\left(3\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}\right)^3}\ge\frac{36x-15}{3\left(3\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}\right)^3}$$

2. Nên phương trình $\left(*\right)$ vô nghiệm.
3. Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{2}{3}$.

Cách 5. Liên hợp

$$4\left(1-x\right)\sqrt{1-x}+x\sqrt{2x-1}=3\sqrt{3}x\left(1-x\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(1-x\right)\left(\sqrt{1-x}+\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)+x\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\sqrt{3}\left(6x^2-8x+\frac{8}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(1-x\right)\frac{-\frac{3}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{x}{2}\right)}+x\frac{-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right)}+6\sqrt{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3} \\ f\left(x\right)=\frac{x-1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{x}{2}\right)}-\frac{x}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right)}+2\sqrt{3}=0\left(*\right) \end{array}\right.$$

+ Nhận thấy

3. $g\left(x\right)=\sqrt{1-x}+\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{x}{2}\right)$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$ nên $g\left(x\right)\geq g\left(1\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$

4. $v\left(x\right)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};1\right]$ nên $v\left(x\right)\geq v\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}$

+ Khi đó $f\left(x\right)>\frac{x-1}{\frac{\sqrt{3}}{6}}-\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{6}}+2\sqrt{3}=0$

Cách 6: Bất đẳng thức.

- Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{2x-1} \\ b=\sqrt{1-x} \end{cases}\Rightarrow a^2+2b^2=1$. Phương trình trở thành: $\frac{a}{b^2}+\frac{4b}{a^2+b^2}=3\sqrt{3}$
- Ta có:

$$\frac{a^4}{a^2.b^2.b^2}\overset{AM-GM}{\geq}\frac{a^4}{\frac{\left(a^2+b^2+b^2\right)^3}{27}}=\frac{a^4}{\frac{1}{27}}\Rightarrow\frac{a^2}{b^4}\geq 27a^4\Rightarrow\frac{a}{b^2}\geq 3\sqrt{3}a^2$$

$$\frac{16b^4}{2b^2\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+b^2\right)}\overset{AM-GM}{\geq}\frac{16b^4}{\left(\frac{2b^2+a^2+a^2+b^2+b^2}{3}\right)^3}=\frac{16b^4}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}$$

$$\Rightarrow\frac{16b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}\geq 108b^4\Rightarrow\frac{4b}{a^2+b^2}\geq 3\sqrt{3}.2b^2$$

- Cộng lại ta được $VT\geq 3\sqrt{3}=VP$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=\frac{2}{3}$.

Bài 37: Giải phương trình: $6\sqrt[6]{2x-1}+6\sqrt[6]{2-x}-7\sqrt[7]{(2x-1)(2-x)}=5$

Giải

Do phương trình có nghiệm kép nên ta dùng phương pháp đánh giá. Ta có:

1. $f(x)=6\sqrt[6]{2x-1}+1+6\sqrt[6]{2-x}+1-7\sqrt[7]{(2x-1)(2-x)}-7$
2. $6\sqrt[6]{2x-1}+1\overset{AM-GM}{\geq}7\sqrt[7]{2x-1}$
3. $6\sqrt[6]{2-x}+1\overset{AM-GM}{\geq}7\sqrt[7]{2-x}$

Do đó ta được:

$$f(x)\geq 7\sqrt[7]{2x-1}+7\sqrt[7]{2-x}-7\sqrt[7]{(2x-1)(2-x)}-7=7\left(\sqrt[7]{2x-1}+\sqrt[7]{2-x}-\sqrt[7]{(2x-1)(2-x)}-1\right)$$

$$=7\left(\sqrt[7]{2x-1}-1\right)\left(1-\sqrt[7]{2-x}\right)=\frac{14(x-1)^2}{\sum_{i=0}^{6}\left(\sqrt[7]{2x-1}\right)^i.\sum_{j=0}^{6}\left(\sqrt[7]{2-x}\right)^j}$$

Mà $\begin{cases}\sqrt[7]{2x-1}\geq 0\\ \sqrt[7]{2-x}\geq 0\end{cases}$, nên $f(x)\geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Bài 38: Giải phương trình: $\sqrt{2x^2-2x+1}+\sqrt{2x^2-\left(\sqrt{3}-1\right)x+1}+\sqrt{2x^2+\left(\sqrt{3}+1\right)x+1}=3$

Giải

Nhìn dạng này ta sẽ dùng bất đẳng thức vectơ. Cho 2 vectơ $\vec{v}(x;y)$ và $\vec{u}(a;b)$, khi đó ta có:

$$\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\geq\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2}\geq\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$. Ngoài ra có thể mở rộng cho 3 vectơ, thêm $\vec{a}(m;n)$:

$$\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|+\left|\vec{a}\right|\geq\left|\vec{u}+\vec{v}+\vec{a}\right|\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{m^2+n^2}\geq\sqrt{(x+a+m)^2+(y+b+n)^2}$$

Bây giờ vấn đề là phân tích các biểu thức trong căn thành các tổng bình phương như thế nào để có thể áp dụng bất đẳng thức trên được. Ta có:

1. $\sqrt{2x^2-2x+1}=\sqrt{x^2+x^2-2x+1}=\sqrt{x^2+(x-1)^2}$
2. $\sqrt{2x^2-\left(\sqrt{3}-1\right)x+1}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+x^2-x\sqrt{3}+\frac{3}{4}}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-x\right)^2}$
3. $\sqrt{2x^2+\left(\sqrt{3}+1\right)x+1}=\sqrt{x^2+x+1+x^2+x\sqrt{3}}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

Đến đây nếu áp dụng bất đẳng thức trên ta sẽ được:

$$VT\geq\sqrt{\left(x+x+\frac{1}{2}+x+\frac{1}{2}\right)^2+(x-1+x+x)^2}=\sqrt{18x^2+2}$$

Dễ thấy $\sqrt{18x^2+2}$ chưa phải luôn lớn hơn 3, với lại hãy để ý điểm rơi của bất đẳng thức nó không phải là $x=0$ nên ta đã đánh giá sai. Để đánh giá đúng hãy để ý nếu ta áp dụng cho 2 căn ở sau thì điểm rơi là $x=0$, nên ta sẽ xử 2 căn đằng sau trước, ta được:

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-x\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\geq\sqrt{4x^2+4x+4}\geq\sqrt{x^2+4x+4}=|x+2|$$

Chú ý: Nếu ban đầu ta viết là $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ thì điểm rơi lúc này cũng không phải là $x=0$ nên để điểm rơi là $x=0$ thì ta phải đổi $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \to \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-x\right)^2$.

Còn lại để xuất hiện con 3 ta cần phải biến đổi căn còn lại, ta được:

$$\sqrt{2x^2-2x+1}=\sqrt{x^2+x^2-2x+1}=\sqrt{x^2+(x-1)^2}=\sqrt{x^2+(1-x)^2}\ge|1-x|$$

Vậy $VT\ge|x+2|+|1-x|\ge 3=VP$

Dấu "=" xảy ra khi $x=0$.

Bài 40: Giải phương trình: $\sqrt{2\left(x^2-4x+5\right)}+\frac{3-x}{2}\cdot\sqrt{x^3+\frac{3}{x}}=4\sqrt{2-x}$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta được:

$$\sqrt{2\left(x^2-4x+5\right)}+\frac{3-x}{2}\cdot\sqrt{x^3+\frac{3}{x}}=\sqrt{2\left((2-x)^2+1\right)}+\frac{(2-x)+1}{2}\cdot\sqrt{x^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}$$

$$\overset{AM-GM}{\ge} 2\sqrt{2-x}+\frac{2\sqrt{2-x}}{2}\cdot\sqrt{4\cdot\sqrt[4]{x^3\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}}=4\sqrt{2-x}$$

Vậy $VT\ge VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Bài 41: Giải phương trình: $\frac{1}{1+\sqrt{x^2+3x+1}}+\frac{1}{1+\sqrt{x^2-3x+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Diễn đàn k2pi.net

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

1. $\frac{1}{1+\sqrt{x^2+3x+1}}+\frac{1}{1+\sqrt{x^2-3x+1}}\ge\frac{4}{2+\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}}$
2. $\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}\le\sqrt{2\left(2x^2+2\right)}=2\sqrt{x^2+1}$
3. $\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^2}\ge 0$

Vậy $VT\ge VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x=0$.

Bài 42: Giải phương trình: $x^4-x^3-6x+4+2\sqrt{x^6-x+1}=0$

Bùi Thế Việt – Vted.vn

Giải

Đầu tiên ta dùng tiếp tuyến thì sẽ tìm được đánh giá là: $2\sqrt{x^6-x+1}\ge 5x-3$.

- Nếu $x<\frac{3}{5}$ thì bất đẳng thức đúng.
- Nếu $x\ge\frac{3}{5}$ thì $2\sqrt{x^6-x+1}\ge 5x-3\Leftrightarrow(x-1)^2\left(4x^4+8x^3+12x^2+16x-5\right)\ge 0$.

Dễ thấy bất đẳng thức cuối đúng nên ta được :

$$x^4-x^3-6x+4+2\sqrt{x^6-x+1}\ge x^4-x^3-6x+4+5x-3=(x-1)^2(x^2+x+1)=VP$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 43: Giải phương trình: $\sqrt{x^9-2x+2}+\sqrt{x^8-x+1}=(2-x)(x^3+2x^2+2x-3)$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Phương trình này có nghiệm là $x=1$ nên ta sẽ có 2 đánh giá: $\begin{cases}\sqrt{x^9-2x+2}\ge \frac{7}{2}x-\frac{5}{2}\\ \sqrt{x^8-x+1}\ge \frac{7}{2}x-\frac{5}{2}\end{cases}$

Nếu $x<\frac{5}{7}$ thì 2 đánh giá là đúng.

Nếu $x\ge\frac{5}{7}$ thì ta được:

1. $\sqrt{x^8-x+1}\ge\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}\Leftrightarrow(x-1)^2(4x^6+8x^5+12x^4+16x^3+20x^2+24x-21)\ge 0$
2. $\sqrt{x^9-2x+2}\ge\frac{7}{2}x-\frac{5}{2}\Leftrightarrow(x-1)^2(4x^7+8x^6+12x^5+16x^4+20x^3+24x^2+28x-17)\ge 0$

Dễ thấy rằng với $x\ge\frac{5}{7}$ thì đương nhiên 2 bất đẳng thức luôn đúng vì: $\begin{cases}20x^2+24x-21>0\\ 24x^2+28x-17>0\end{cases}$

Vậy $VT-VP\ge(x-1)^2(x+1)^2\ge 0$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Bài 44: Giải phương trình: $\dfrac{2x\left(1+x\sqrt{2x-1}\right)}{\left(x-\sqrt{x}+1\right)\left(1+(2x-1)\sqrt{2x-1}\right)}=2$

Giải

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x}\\ b=\sqrt{2x-1}\end{cases}$ thì phương trình trở thành: $\dfrac{(b^2+1)(1+a^2b)}{(a^2-a+1)(1+b^3)}=2$

Ta có bổ đề: $(a+1)(b+1)(c+1)\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$ - Đã chứng minh ở bài trên.

Áp dụng ta có:

$$(1+a^3)(1+a^3)(1+b^3)\ge(1+a^2b)^3$$
$$(1+1)(1+1)(a^3+1)\ge(1+a)^3$$
$$(1+1)(1+b^3)(1+b^3)\ge(1+b^2)^3$$

Nhân vế theo vế ta được:

$$8(1+a^3)^3(1+b^3)^3\ge(1+a^2b)^3(1+a)^3(1+b^2)^3$$

$$\Leftrightarrow\frac{(1+a^2b)^3(1+a)^3(1+b^2)^3}{(1+a^3)^3(1+b^3)^3}\le 8\Leftrightarrow\frac{(1+a^2b)(1+a)(1+b^2)}{(a^3+1)(b^3+1)}\le 2\Leftrightarrow\frac{(1+a^2b)(1+b^2)}{(a^2-a+1)(b^3+1)}\le 2$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 45: Giải phương trình: $\left(1+\sqrt{x+6}\right)\left(1+\dfrac{\sqrt{28x-3}}{\sqrt{x+6}}\right)\left(1+\dfrac{9}{\sqrt[4]{28x-3}}\right)^2=256$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Cách 1: Bất đẳng thức Holder.

Nhìn thấy dạng tích lại nghĩ đến bất đẳng thức Holder. Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x+6} \\ b=\sqrt{28x-3} \end{cases}$, phương trình trở thành:

$$\left(1+a\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2=256.$$

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Holder cho 4 dãy số:

$$\left(1+a\right)\left(1+b\right)\left(1+c\right)\left(1+d\right)\ge\left(1+\sqrt[4]{abcd}\right)^4$$

Ta được: $\left(1+a\right)\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{9}{\sqrt{b}}\right)\left(1+\dfrac{9}{\sqrt{b}}\right)\ge\left(1+\sqrt[4]{a\cdot\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{9}{\sqrt{b}}\cdot\dfrac{9}{\sqrt{b}}}\right)^4=256=VP$

Dấu "=" xảy ra khi $a=3;b=9\Rightarrow x=3$

Cách 2: Bất đẳng thức AM – GM.

Theo AM – GM ta có:

$$\left(1+a\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2=\left(1+a+b+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2\ge\left(2\sqrt{b}+b+1\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2=\left(\sqrt{b}+1\right)^2\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2$$

$$\left(\sqrt{b}+1\right)^2\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2=\left(\sqrt{b}+\frac{9}{\sqrt{b}}+1+9\right)^2\ge\left(2\sqrt{\sqrt{b}\cdot\frac{9}{\sqrt{b}}}+10\right)^2=256$$

Vậy $VT\ge VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x=3$.

Cách 3: Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

Ta có: $\left(1+a\right)\left(1+\dfrac{b}{a}\right)\left(1+\dfrac{9}{\sqrt{b}}\right)\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\ge}\left(\sqrt{b}+1\right)^2\left(1+\dfrac{9}{\sqrt{b}}\right)\ge256$

Vậy $VT\ge VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x=3$.

Cách 4:

Chú ý rằng ta luôn có đẳng thức sau:

$$\left(1+a\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2=256+32\left(\frac{3}{\sqrt[4]{b}}-\sqrt[4]{b}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt[4]{b}}-\sqrt[4]{b}\right)^4+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{a}\right)^2\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2$$

Áp dụng luôn vào bài thì ta được:

$$\left(1+\sqrt{x+6}\right)\left(1+\frac{\sqrt{28x-3}}{\sqrt{x+6}}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt[4]{28x-3}}\right)^2-256$$

$$=32\left(\frac{3}{\sqrt[8]{28x-3}}-\sqrt[8]{28x-3}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt[8]{28x-3}}-\sqrt[8]{28x-3}\right)^4+\left(\sqrt[4]{\frac{28x-3}{x+6}}-\sqrt[4]{x+6}\right)^2\left(1+\frac{9}{\sqrt[4]{28x-3}}\right)^2\ge0$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=3$

Bài 46: Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{2-x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\left[\sqrt[4]{\frac{2-x}{x-1}}-\sqrt[4]{\frac{x-1}{2-x}}\right]^2=2\sqrt{2}$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{2-x} \\ b=\sqrt{x-1} \end{cases} \Rightarrow a^2+b^2=1$, phương trình trở thành: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=2\sqrt{2}$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}+2-2\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow a+b+2ab \ge 2\sqrt{2}ab+1$$

$$\Leftrightarrow a+b+(a+b)^2-1 \ge \sqrt{2}(a+b)^2+1-\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{2}\right)\left(a+b-\sqrt{2}\right)(a+b-1) \ge 0$$

Do $a^2+b^2=1 \Rightarrow (a+b) \in \left[1;\sqrt{2}\right]$. Vậy bất đẳng thức cuối đúng.

Dấu "=" xảy ra khi $a=b \Rightarrow x=3$

Bài 47: Giải phương trình: $1+\frac{2\left(\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{3-x}\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}=\frac{1+\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}{\sqrt[4]{(x-1)(3-x)}}$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Ta có:

$$1+\frac{2\left(\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{3-x}\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}=\frac{1+\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}{\sqrt[4]{(x-1)(3-x)}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)\sqrt[4]{(x-1)(3-x)}+2\left(\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{3-x}\right)\sqrt[4]{(x-1)(3-x)}$$

$$=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\right)+\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\right)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)^2}{2} \ge \frac{2\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)\sqrt[4]{(x-1)(3-x)}}{2}$$

$$\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)^2}{2}+\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right) \ge \frac{4\sqrt[4]{(x-1)(3-x)}+\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\right)^2}{2}$$

$$\ge 2\left(\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[4]{3-x}\right)\sqrt[4]{(x-1)(3-x)}$$

Cộng 2 vế ta được $VT \le VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x=3$.

Bài 48: Giải phương trình: $\left(1+\sqrt{3-x}\right)^2\left[1+\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right]^2+\left(1+\sqrt{x-2}\right)^2\left[1+\frac{1}{\sqrt{3-x}}\right]^2=17+2\sqrt{2}$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\left(1+\sqrt{3-x}\right)^2\left[1+\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right]^2+\left(1+\sqrt{x-2}\right)^2\left[1+\frac{1}{\sqrt{3-x}}\right]^2$$

$$\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq}\frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{3-x}\right)\left[1+\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right]+\left(1+\sqrt{x-2}\right)\left[1+\frac{1}{\sqrt{3-x}}\right]\right]^2$$

Cách 1: Phân tích nhân tử.

$$\frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{3-x}\right)\left[1+\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right]+\left(1+\sqrt{x-2}\right)\left[1+\frac{1}{\sqrt{3-x}}\right]\right]^2\geq 17+12\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\left(1+\sqrt{3-x}\right)\left[1+\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right]+\left(1+\sqrt{x-2}\right)\left[1+\frac{1}{\sqrt{3-x}}\right]\right]^2\geq 34+24\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{1}{\sqrt{3-x}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}+\sqrt{3-x}+\sqrt{x-2}+\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}}+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}}+2\right]^2\geq 34+24\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{1}{\sqrt{3-x}}+\sqrt{3-x}-\frac{x\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}+\sqrt{x-2}+\frac{x\sqrt{2}}{2}-\frac{11\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}}+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}}+2+3\sqrt{2}\right]^2$$
$$\geq 34+24\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{\left(2\sqrt{3-x}-\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{2(3-x)}+4\right)}{8\sqrt{3-x}}+\frac{\left(2\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)^2\left(\sqrt{2(x-2)}+4\right)}{8\sqrt{x-2}}+\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}}+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}}+2+3\sqrt{2}\right]^2$$
$$\geq 34+24\sqrt{2}$$

Bài toán sẽ được giải quyết nếu ta chứng minh được: $\left[\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}}+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}}+2+3\sqrt{2}\right]^2\geq 34+24\sqrt{2}$

Thật không may là:

$$\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}}+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}}\overset{\text{AM-GM}}{\geq}2\Rightarrow\left[\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}}+\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}}+2+3\sqrt{2}\right]^2\geq\left(4+3\sqrt{2}\right)^2=34+24\sqrt{2}=VP$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{5}{2}$

Cách 2: Bất đẳng thức.

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{3-x}\\ b=\sqrt{x-2}\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2=1$, ta đi chứng minh $\frac{1}{2}\left[(1+a)\left[1+\frac{1}{b}\right]+(1+b)\left[1+\frac{1}{a}\right]\right]^2\geq VP$

$$\left[(1+a)\left[1+\frac{1}{b}\right]+(1+b)\left[1+\frac{1}{a}\right]\right]^2$$

$$=\left[2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right]^2=\left[\frac{a\left[b^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]+b\left[a^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]}{ab}+\left[\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right]+2\right]^2$$

$$\overset{\text{AM-GM}}{\geq}\left[\frac{3a\sqrt[3]{\frac{b^2}{4}}+3b\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}}}{ab}+\left[\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right]+2\right]^2$$

$$\overset{\text{AM-GM}}{\geq}\left[\frac{6\sqrt{ab\sqrt[3]{\frac{a^2}{4}\cdot\frac{b^2}{4}}}}{ab}+4\right]^2=\left[\frac{6}{\sqrt[6]{16}\sqrt[6]{ab}}+2\right]^2\geq\left[\frac{6}{\sqrt[6]{16}\sqrt[6]{\frac{a^2+b^2}{2}}}+2\right]^2=2\left(17+12\sqrt{2}\right)$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Bài 49: Giải phương trình: $\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}+\frac{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^4-64}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^4}=0$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}+\frac{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^4-64}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^4}=0\Leftrightarrow\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{2-x}\right)^2}+2-\frac{64}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^4}=0$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{2-x}\right)^2}+\frac{4}{\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2}=\frac{32\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2\right]}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^4}$$

Lại có: $\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{2-x}\right)^2}+\frac{4}{\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2}$

$$=\frac{\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2\right]^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{2-x}\right)^2\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2\right]}+\frac{4\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{2-x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{2-x}\right)^2\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2\right]}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\frac{\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2\right]^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{2-x}\right)^2\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2\right]}+\frac{4\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{2-x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{2-x}\right)^2\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2\right]}$$

$$\geq\frac{\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2+2\sqrt{x(2-x)}\right]^2}{2\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{2-x}\right)^2\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2\right]}=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^4}{2\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{2-x}\right)^2\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2\right]}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^4}{2\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{2-x}\right)^2\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2\right]}\ge\frac{32\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2\right]}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^4}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^8\ge 64\left(\sqrt{x}\right)^2\left(\sqrt{2-x}\right)^2\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2\right]^2$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)^4\ge 8\left[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{2-x}\right)^2\right]\sqrt{x\left(2-x\right)}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-\sqrt{2-x}\right)^4\ge 0$$

Vậy $VT\ge VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Bài 50: Giải phương trình:

$$\left(4x+7+2\sqrt{8x+7}\right)\left(4x+5+2\sqrt{x+1}\right)=2\left(4\sqrt{x+1}+1\right)\left(2\sqrt{8x+7}+1\right)$$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Ta có:

$$\left(4x+7+2\sqrt{8x+7}\right)\left(4x+5+2\sqrt{x+1}\right)=2\left(4\sqrt{x+1}+1\right)\left(2\sqrt{8x+7}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\sqrt{\frac{8x+7}{4}}+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8x+7}{4}+\sqrt{x+1}+\frac{3}{4}\right)=\left(2\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}\right)\left(2\sqrt{\frac{8x+7}{4}}+\frac{1}{2}\right)$$

Chú ý rằng:

$$\left(\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\frac{1}{4}\ge\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}\right)^2+\sqrt{\frac{8x+7}{4}}+\frac{3}{4}\ge\sqrt{x+1}+\sqrt{\frac{8x+7}{4}}+\frac{1}{2}$$

$$\left(\sqrt{\frac{8x+7}{4}}-\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{8x+7}{4}}\right)^2+\frac{1}{4}\ge\sqrt{\frac{8x+7}{4}}\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{8x+7}{4}}\right)^2+\sqrt{x+1}+\frac{3}{4}\ge\sqrt{\frac{8x+7}{4}}+\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}$$

Do đó $VT\ge\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{\frac{8x+7}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2$. Mà theo AM – GM ta luôn có:

$$\left(2\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}\right)\left(2\sqrt{\frac{8x+7}{4}}+\frac{1}{2}\right)\le\frac{\left(2\sqrt{x+1}+2\sqrt{\frac{8x+7}{4}}+1\right)^2}{4}=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{\frac{8x+7}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2\le VT$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x+1}=\sqrt{\frac{8x+7}{4}}=-\frac{3}{4}$.

Bài 51: Giải phương trình: $\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^3}+\frac{x\sqrt{x}}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}+\left(2x-1\right)\sqrt{2x-1}=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{\frac{x}{2x-1}}+\sqrt{2x-1}$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^3}+1+1\ge\frac{3}{\sqrt{x}};\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}+1+1\ge\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}}$$

$$\left(\sqrt{2x-1}\right)^3+1+1\ge3\sqrt{2x-1};\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x-1}\ge3$$

Cộng lại ta được: $VT+6\ge3\left[\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x-1}\right]\ge\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}}+\sqrt{2x-1}=VP$

Vậy dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}=\sqrt{2x-1}=1\Leftrightarrow x=1$

Bài 52: Giải phương trình: $\sqrt[3]{x^2+x+1}\sqrt{1-x}+\sqrt[3]{x^2-x+1}\sqrt{x+1}=x^2+2$

Diễn đàn k2pi.net.vn

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM phát một là ra. Ta có:

$$\begin{aligned}VT&=\sqrt[6]{\left(x^2+x+1\right)^3\left(1-x\right)^2}+\sqrt[6]{\left(x^2-x+1\right)^3\left(x+1\right)^2}\\&\le\frac{3\left(x^2+x+1\right)+2\left(1-x\right)+1}{6}+\frac{3\left(x^2-x+1\right)+2\left(x+1\right)+1}{6}=x^2+2\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=0$.

Bài 52: Giải phương trình: $\sqrt{3-2x^2}+\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}=1+\frac{\left(x^2+4x+1\right)^4}{16x^4}$

Đề nghị 30/4/2014 – THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Vũng Tàu

Giải

ĐKXĐ: $x\in\left[-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{-\sqrt{6}}{3}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$. Theo AM – GM ta có: $\begin{cases}\sqrt{3-2x^2}\le2-x^2\\\sqrt{3-\frac{2}{x^2}}\le2-\frac{1}{x^2}\end{cases}$. Từ đó suy ra:

$$VP-VT\ge\frac{\left(x^2+4x+1\right)^4}{16x^4}+x^2+\frac{1}{x^2}-3=\frac{\left(x+1\right)^2\left(x^6+14x^5+87x^4+116x^3+87x^2+14x+1\right)}{16x^6}$$

Lại có: $x^6+14x^5+87x^4+116x^3+87x^2+14x+1$

$$=x^4\left(x^2+14x+16\right)+71x^2\left(x+\frac{58}{71}\right)^2+\frac{2813}{71}x^2+14x+1>0\forall x\in\left[-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{-\sqrt{6}}{3}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$$

Vậy $VP\ge VT$. Dấu "=" xảy ra khi $x=-1$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Tuyển chon 410 hệ phương trình* – Nguyễn Minh Tuấn
2. *Tư duy sáng tạo, tìm tòi lời giải PT – HPT – BPT* – Lê Văn Đoàn.
3. *Tuyển tập phương trình – hệ phương trình* – Diễn đàn Boxmath
4. *Tuyển tập phương trình – hệ phương trình* – Diễn đàn K2pi.net
5. *Những viên kim cương trong bất đẳng thức toán học* – Trần Phương.
6. *Sáng tạo phương trình bất phương trình, hệ phương trình* – Nguyễn Tài Chung
7. *Phương pháp sử dụng máy tính CASIO trong giải toán phương trình, bất phương trình, hệ phương trình* – Đoàn Trí Dũng, Bùi Thế Việt.