

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx + 1$ (1).

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
b) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có 2 điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ).

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình $\sin 2x + 1 = 6 \sin x + \cos 2x$.

Câu 3 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x^3 - 2 \ln x}{x^2} dx$.

Câu 4 (1,0 điểm). a) Giải phương trình $5^{2x+1} - 6 \cdot 5^x + 1 = 0$.

- b) Một tổ có 5 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để làm trực nhật. Tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-4;1;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{3}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng d . Tìm tọa độ điểm B thuộc d sao cho $AB = \sqrt{27}$.

Câu 6 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A , $AB = AC = a$, I là trung điểm của SC , hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC , mặt phẳng (SAB) tạo với đáy 1 góc bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SAB) theo a .

Câu 7 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $A(1;4)$, tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tại D , đường phân giác trong của $\widehat{ADB}$ có phương trình $x - y + 2 = 0$, điểm $M(-4;1)$ thuộc cạnh AC . Viết phương trình đường thẳng AB .

Câu 8 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3\sqrt{xy + x - y^2} - y = 5y + 4 \\ \sqrt{4y^2 - x - 2} + \sqrt{y - 1} = x - 1 \end{cases}$$

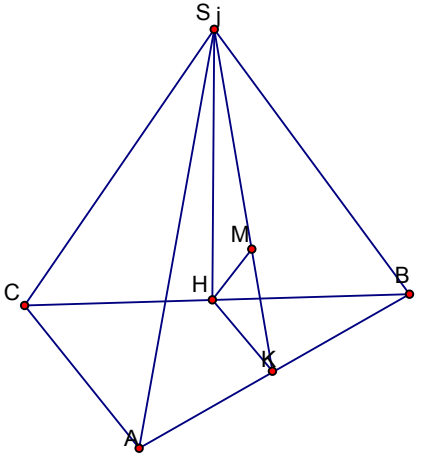
Câu 9 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số dương và $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P = \frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} + \frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} + \frac{ab}{\sqrt{3c+ab}}$$

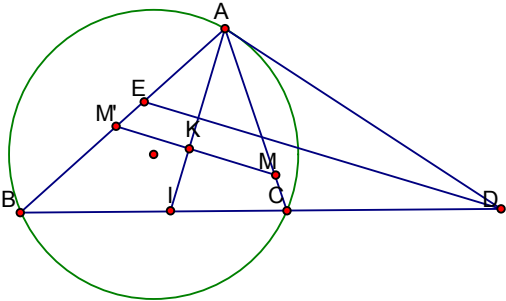
.....Hết.....

ĐÁP ÁN

Câu	Nội dung	Điểm																														
1	a.(1,0 điểm)																															
	Với $m=1$ hàm số trở thành : $y = -x^3 + 3x + 1$ TXĐ: $D = R$ $y' = -3x^2 + 3, y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$	0.25																														
	Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ Hàm số đạt cực đại tại $x = 1, y_{CD} = 3$, đạt cực tiểu tại $x = -1, y_{CT} = -1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$	0.25																														
	* Bảng biến thiên	0.25																														
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>-1</td><td></td><td>1</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td colspan="2" rowspan="2"></td><td>-1</td><td colspan="2" rowspan="2"></td><td>3</td><td colspan="2" rowspan="2"></td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$	y'		+	0	-	0	+		y	$+\infty$			-1			3			$-\infty$				
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$																									
y'		+	0	-	0	+																										
y	$+\infty$			-1			3			$-\infty$																						
	Đồ thị:	0.25																														
	b.(1,0 điểm)																															
	$y' = -3x^2 + 3m = -3(x^2 - m)$ $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - m = 0 (*)$	0.25																														
	Đồ thị hàm số (1) có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ PT (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0 (**)$	0.25																														
	Khi đó 2 điểm cực trị $A(-\sqrt{m}; 1 - 2m\sqrt{m}) , B(\sqrt{m}; 1 + 2m\sqrt{m})$	0.25																														
	Tam giác OAB vuông tại O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 4m^3 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ (TM (**)) Vậy $m = \frac{1}{2}$	0,25																														
2.	(1,0 điểm)																															

	$\sin 2x + 1 = 6\sin x + \cos 2x$ $\Leftrightarrow (\sin 2x - 6\sin x) + (1 - \cos 2x) = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x - 3) + 2\sin^2 x = 0$ $\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x - 3 + \sin x) = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x = 3(Vn) \end{cases}$	0.25
	$\Leftrightarrow x = k\pi$. Vậy nghiệm của PT là $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$	0.25
3	(1,0 điểm)	
	$I = \int_1^2 x dx - 2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{x^2}{2} \Big _1^2 - 2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{3}{2} - 2 \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$	0.25
	Tính $J = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$ Đặt $u = \ln x, dv = \frac{1}{x^2} dx$. Khi đó $du = \frac{1}{x} dx, v = -\frac{1}{x}$ Do đó $J = -\frac{1}{x} \ln x \Big _1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$	0.25
	$J = -\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{x} \Big _1^2 = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2}$	0.25
	Vậy $I = \frac{1}{2} + \ln 2$	0.25
4.	(1,0 điểm)	
	a,(0,5điểm) $5^{2x+1} - 6.5^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 5.5^{2x} - 6.5^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = 1 \\ 5^x = \frac{1}{5} \end{cases}$	0.25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$ Vậy nghiệm của PT là $x = 0$ và $x = -1$	0.25
	b,(0,5điểm) $n(\Omega) = C_{11}^3 = 165$	0.25
	Số cách chọn 3 học sinh có cả nam và nữ là $C_5^2.C_6^1 + C_5^1.C_6^2 = 135$ Do đó xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ là $\frac{135}{165} = \frac{9}{11}$	0.25
5.	(1,0 điểm)	

	Đường thẳng d có VTCP là $\vec{u}_d = (-2; 1; 3)$ Vi $(P) \perp d$ nên (P) nhận $\vec{u}_d = (-2; 1; 3)$ làm VTPT	0.25
	Vậy PT mặt phẳng (P) là : $-2(x+4)+1(y-1)+3(z-3)=0$ $\Leftrightarrow -2x+y+3z-18=0$	0.25
	Vi $B \in d$ nên $B(-1-2t; 1+t; -3+3t)$ $AB = \sqrt{27} \Leftrightarrow AB^2 = 27 \Leftrightarrow (3-2t)^2 + t^2 + (-6+3t)^2 = 27 \Leftrightarrow 7t^2 - 24t + 9 = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=\frac{3}{7} \end{cases}$ Vậy $B(-7; 4; 6)$ hoặc $B\left(-\frac{13}{7}; \frac{10}{7}; -\frac{12}{7}\right)$	0.25
6.	(1,0 điểm)	
		0.25
Gọi K là trung điểm của AB $\Rightarrow HK \perp AB$ (1) Vì $SH \perp (ABC)$ nên $SH \perp AB$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow AB \perp SK$ Do đó góc giữa (SAB) với đáy bằng góc giữa SK và HK và bằng $\widehat{SKH} = 60^\circ$ Ta có $SH = HK \tan \widehat{SKH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$		0.25
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$		0.25
Vì $IH \parallel SB$ nên $IH \parallel (SAB)$. Do đó $d(I, (SAB)) = d(H, (SAB))$ Từ H kẻ $HM \perp SK$ tại M $\Rightarrow HM \perp (SAB) \Rightarrow d(H, (SAB)) = HM$		0.25
Ta có $\frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HK^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $d(I, (SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$		0.25
7.	(1,0 điểm)	

		Gọi AI là phân giác trong của $\widehat{BAC}$ Ta có : $\widehat{AID} = \widehat{ABC} + \widehat{BAI}$ $\widehat{IAD} = \widehat{CAD} + \widehat{CAI}$ Mà $\widehat{BAI} = \widehat{CAI}$, $\widehat{ABC} = \widehat{CAD}$ nên $\widehat{AID} = \widehat{IAD}$ $\Rightarrow \Delta DAI$ cân tại D $\Rightarrow DE \perp AI$	0,25
	PT đường thẳng AI là : $x + y - 5 = 0$		0,25
	Gọi M' là điểm đối xứng của M qua AI $\Rightarrow$ PT đường thẳng MM' : $x - y + 5 = 0$		
	Gọi $K = AI \cap MM' \Rightarrow K(0;5) \Rightarrow M'(4;9)$		0,25
	VTCP của đường thẳng AB là $\overrightarrow{AM'} = (3;5) \Rightarrow$ VTPT của đường thẳng AB là $\vec{n} = (5;-3)$		0,25
	Vậy PT đường thẳng AB là: $5(x-1) - 3(y-4) = 0 \Leftrightarrow 5x - 3y + 7 = 0$		
8.	(1,0 điểm). $\begin{cases} x + 3\sqrt{xy + x - y^2 - y} = 5y + 4(1) \\ \sqrt{4y^2 - x - 2} + \sqrt{y-1} = x-1(2) \end{cases}$		
	Đk: $\begin{cases} xy + x - y^2 - y \geq 0 \\ 4y^2 - x - 2 \geq 0 \\ y-1 \geq 0 \end{cases}$		0.25
	Ta có (1) $\Leftrightarrow x - y + 3\sqrt{(x-y)(y+1)} - 4(y+1) = 0$		
	Đặt $u = \sqrt{x-y}, v = \sqrt{y+1} \quad (u \geq 0, v \geq 0)$		
	Khi đó (1) trở thành : $u^2 + 3uv - 4v^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = -4v(vn) \end{cases}$		
	Với $u = v$ ta có $x = 2y + 1$, thay vào (2) ta được : $\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + \sqrt{y-1} = 2y$		0.25
	$\Leftrightarrow \sqrt{4y^2 - 2y - 3} - (2y-1) + (\sqrt{y-1} - 1) = 0$		
	$\frac{2(y-2)}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{y-2}{\sqrt{y-1} + 1} = 0 \Leftrightarrow (y-2) \left(\frac{2}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{1}{\sqrt{y-1} + 1} \right) = 0$		0.25
	$\Leftrightarrow y = 2$ (vì $\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{1}{\sqrt{y-1} + 1} > 0 \forall y \geq 1$)		0.25
	Với $y = 2$ thì $x = 5$. Đối chiếu Đk ta được nghiệm của hệ PT là $(5;2)$		
9.	(1,0 điểm).		

Vì $a + b + c = 3$ ta có $\frac{bc}{\sqrt{3a+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{a(a+b+c)+bc}} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{bc}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right)$ Vì theo BĐT Cô-Si: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$, dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b = c$	0,25
Tương tự $\frac{ca}{\sqrt{3b+ca}} \leq \frac{ca}{2} \left(\frac{1}{b+a} + \frac{1}{b+c} \right)$ và $\frac{ab}{\sqrt{3c+ab}} \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{c+a} + \frac{1}{c+b} \right)$	0,25
Suy ra $P \leq \frac{bc+ca}{2(a+b)} + \frac{ab+bc}{2(c+a)} + \frac{ab+ca}{2(b+c)} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3}{2}$,	0,25
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Vậy $\max P = \frac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$.	0,25