

Bài 1. (4,0 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 4x + 2 = \frac{3}{y-4} + 4\sqrt{6-2y} \\ y^3 + 4y + 2 = \frac{3}{z-4} + 4\sqrt{6-2z} \\ z^3 + 4z + 2 = \frac{3}{x-4} + 4\sqrt{6-2x} \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

Bài 2. (6,0 điểm)

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , tồn tại duy nhất một cặp số nguyên dương $(a; b)$

sao cho $n = \frac{1}{2}(a+b-1)(a+b-2) + a$.

b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 5$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ với mọi $n \geq 1$.

Tìm phần nguyên của u_{209} .

Bài 3. (4,0 điểm)

Một nhóm phượt có n thành viên. Năm 2018, họ thực hiện sáu chuyến du lịch mà mỗi chuyến có đúng 5 thành viên tham gia. Biết rằng hai chuyến du lịch bất kì chung nhau không quá 2 thành viên. Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Bài 4. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn không cân có đường trung tuyến AM và đường phân giác trong AD . Qua điểm N thuộc đoạn thẳng AD (N không trùng với A và D), kẻ NP vuông góc với AB (P thuộc cạnh AB). Đường thẳng qua P vuông góc với AD cắt đoạn thẳng AM tại Q . Chứng minh rằng QN vuông góc với BC .

Bài 5. (2,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz(x + y + z)$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2y+1} + \frac{1}{2z+1} \geq 1$.

----- HẾT -----



ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1.

(3 điểm) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 4x + 2 = \frac{3}{y-4} + 4\sqrt{6-2y} \\ y^3 + 4y + 2 = \frac{3}{z-4} + 4\sqrt{6-2z} \\ z^3 + 4z + 2 = \frac{3}{x-4} + 4\sqrt{6-2x} \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \leq 3 \\ y \leq 3 \\ z \leq 3 \end{cases}$$

Xét hàm $f(t) = t^3 + 4t + 2$ và $g(t) = \frac{3}{t-4} + 4\sqrt{6-2t}$ trên $(-\infty; 3]$.

$$\text{Hệ phương trình trở thành } \begin{cases} f(x) = g(y) & (1) \\ f(y) = g(z) & (2) \\ f(z) = g(x) & (3) \end{cases}$$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 4 > 0 \quad \forall t \in (-\infty; 3] \Rightarrow$ Hàm số $f(t) = t^3 + 4t + 2$ đồng biến trên $(-\infty; 3]$.

$g'(t) = -\frac{3}{(t-4)^2} - \frac{4}{\sqrt{6-2t}} < 0 \quad \forall t \in (-\infty; 3] \Rightarrow g(t) = \frac{3}{t-4} + 4\sqrt{6-2t}$ nghịch biến trên $(-\infty; 3]$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \max\{x; y; z\}$. Khi đó ta có $x \geq y; x \geq z$.

$x \geq y$ (*) $\Rightarrow f(x) \geq f(y)$ (vì hàm $f(t)$ đồng biến), kết hợp với hệ phương trình

$\Rightarrow g(y) \geq g(z)$ (vì hàm $g(t)$ nghịch biến), kết hợp hệ phương trình $\Rightarrow y \leq z \Rightarrow f(y) \leq f(z)$

$\Rightarrow g(z) \leq g(x) \Rightarrow z \geq x$ (**).

Từ (*) và (**) ta suy ra $x = z \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow g(y) = g(x) \Rightarrow y = x$.

Vậy ta có $x = y = z$.

Từ hệ phương trình ta suy ra $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^3 + 4x + 2 = \frac{3}{x-4} + 4\sqrt{6-2x}$

$$\Leftrightarrow x^3 + 4x + 2 - \frac{3}{x-4} - 4\sqrt{6-2x} = 0.$$

Xét hàm $h(x) = x^3 + 4x + 2 - \frac{3}{x-4} - 4\sqrt{6-2x}$ trên $(-\infty; 3]$.

$$\text{Ta có } h'(x) = 3x^2 + 4 + \frac{3}{(x-4)^2} + \frac{4}{\sqrt{6-2x}} > 0 \quad \forall x \in (-\infty; 3)$$

$$\Rightarrow \text{hàm số } h(x) = x^3 + 4x + 2 - \frac{3}{x-4} - 4\sqrt{6-2x} \text{ đồng biến trên } (-\infty; 3].$$

$\Rightarrow$ Phương trình $h(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm.

Ta có $h(1) = 0$ nên phương trình $h(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(1; 1; 1)$

Bài 2.

a. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , tồn tại duy nhất một cặp số nguyên dương

$$(a; b) \text{ sao cho } n = \frac{1}{2}(a+b-1)(a+b-2) + a.$$

b. Cho dãy số xác định bởi $u_1 = 5; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm phần nguyên của u_{209} .

Lời giải

a.

Cách 1. Đặt $m = a + b \Rightarrow m \geq 2$.

Phương trình trên trở thành:

$$n = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) + m - b \Leftrightarrow \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m + 1 - b - n = 0 \Leftrightarrow m^2 - m + 2(1 - b - n) = 0 \quad (1).$$

Để tồn tại cặp số nguyên dương $(a; b)$ thì (1) phải có nghiệm nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 2.

Do đó, điều kiện cần là $\Delta_{(1)} > 0$ và phải chính phương.

$$\Delta_{(1)} = 1 - 8(1 - b - n) = 8(b + n) - 7$$

$$\text{Để thấy } \Delta_{(1)} = (2k+1)^2, k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Khi đó } 8(b+n) - 7 = (2k+1)^2 \Leftrightarrow 2(b+n) = k^2 + k + 2.$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{k^2 + k}{2} + 1 - n.$$

$$\text{Khi này, } \sqrt{\Delta_{(1)}} = 2k+1 \text{ và nghiệm nguyên dương duy nhất của (1) là } m = \frac{1+2k+1}{2} = k+1.$$

$$\text{Thay vào được } a = m - b = k + 1 - \left(\frac{k^2 + k}{2} + 1 - n \right) = n - \frac{k^2 - k}{2}.$$

Sử dụng các điều kiện $a \geq 1; b \geq 1$ được hệ

$$\begin{cases} \frac{k^2+k}{2}+1-n \geq 1 \\ n-\frac{k^2-k}{2} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2+k \geq 2n \\ k^2-k+2 \leq 2n \end{cases} \quad (2).$$

Việc còn lại là chỉ ra (2) chỉ có nghiệm duy nhất với $k \in \mathbb{N}$.

Gọi k_0 là số nguyên không âm lớn nhất sao cho $k_0^2 - k_0 + 2 \leq 2n$, lúc này k_0 luôn tồn tại và duy nhất.

Khi đó $(k_0+1)^2 - (k_0+1) + 2 > 2n \Leftrightarrow k_0^2 + k_0 > 2n - 2$.

Vì $k_0^2 + k_0 \geq 2n$ (đpcm).

Vậy với mỗi số nguyên dương n , tồn tại duy nhất một cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho

$$n = \frac{1}{2}(a+b-1)(a+b-2) + a.$$

Cách 2.

Rõ ràng với n cho trước, tồn tại số tự nhiên l để $\frac{l(l+1)}{2} \geq n$.

Ta gọi l_0 là giá trị nhỏ nhất của n thỏa mãn bất phương trình trên.

Khi đó hiển nhiên $\frac{l_0(l_0-1)}{2} < n < \frac{l_0(l_0+1)}{2}$, ta chọn $b = \frac{l_0(l_0+1)}{2} + 1 - n$, với cách chọn này b xác định và duy nhất.

Ta đặt $X = a + b - 2 \Rightarrow a = X - b + 2$ nên ta có: $n = \frac{1}{2}X(X+1) + X - b + 2$

$$\Leftrightarrow X^2 + 3X - 2b + 4 - 2n = 0 \Leftrightarrow X^2 + 3X - 2\left(\frac{l_0(l_0+1)}{2} + 1 - n\right) + 4 - 2n = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + 3X + 2 - l_0(l_0+1) = 0 \quad (*)$$

Ta có: $\Delta_* = 3^2 - 4(2 - l_0(l_0+1)) = (1 + 2l_0)^2$, do đó phương trình (*) có hai nghiệm

$$\begin{cases} X = \frac{-3+1+2l_0}{2} = l_0 - 1 \\ X = \frac{-3-1-2l_0}{2} = -l_0 - 1 < 0 \end{cases} \quad \text{Do vậy phương trình (*) có nghiệm dương duy nhất là}$$

$$X = l_0 - 1$$

$$\Leftrightarrow a + b - 2 = l_0 - 1 \Leftrightarrow a = 1 + l_0 - b = 1 + l_0 - \left[\frac{l_0(l_0+1)}{2} + 1 - n\right] = n - \frac{l_0(l_0-1)}{2}.$$

Theo trên thì $a = n - \frac{l_0(l_0-1)}{2} > 0$.

Vì vậy, các yêu cầu của bài toán đều thỏa mãn. Ta có điều phải chứng minh.

Cách 3

Ta cần chứng minh rằng $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ được cho bởi

$$f(a; b) = \frac{1}{2}(a+b-1)(a+b-2) + a, \quad (\forall a, b \in \mathbb{N}^*) \text{ là một song ánh.}$$

Chứng minh được f là một ánh xạ.

Ta chứng minh f là một đơn ánh. Thật vậy, giả sử $(a_1; b_1), (a_2; b_2) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ thỏa mãn

$$f(a_1; b_1) = f(a_2; b_2)$$

$$\text{Đặt } T(n) = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}^*. \text{ Ta có } f(a; b) - T(a+b-2) = a > 0$$

$$\text{Và } T(a+b-1) - f(a; b) = \frac{(a+b-1)(a+b)}{2} - \frac{(a+b-1)(a+b-2)}{2} - a = b-1 \geq 0.$$

$$\text{Do đó } T(a+b-2) < f(a; b) \leq T(a+b-1).$$

$$\text{Khi đó } T(a_1+b_1-2) < f(a_1; b_1) \leq T(a_1+b_1-1), \dots$$

Kết hợp với dãy $(T(n))$ là dãy tăng ngặt ta chứng minh được f là một đơn ánh.

Ta chứng minh f là một toàn ánh.

Thật vậy, với n là một số nguyên dương tùy ý, vì dãy $(T(n))$ tăng ngặt nên luôn tồn tại một số nguyên dương k thỏa

$$T(k-1) < n \leq T(k) \Leftrightarrow \frac{(k-1)k}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2}.$$

$$\text{Đặt } a = n - \frac{(k-1)k}{2} \text{ và } b = k - a + 1.$$

Chứng minh được a và b là các số nguyên dương và

$$f(a; b) = \frac{1}{2}(a+b-1)(a+b-2) + a = \frac{k(k-1)}{2} + a = n.$$

Vậy f là một song ánh, suy ra điều phải chứng minh.

b. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 5; u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm phần nguyên của

$$u_{209}.$$

Nhận xét: (u_n) là dãy tăng và $u_n \geq u_1 > 0, \forall n$.

$$\text{Ta có: } u_{k+1}^2 = \left(u_k + \frac{1}{u_k}\right)^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1}^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \left(u_k^2 + \frac{1}{u_k^2} + 2\right) \Rightarrow u_n^2 = u_1^2 + 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}.$$

$$\text{Suy ra: } u_n > \sqrt{u_1^2 + 2(n-1)}, \forall n \geq 2, \text{ hay } u_n \geq \sqrt{25 + 2(n-1)}, \forall n \geq 1.$$

$$\text{Mặt khác, } u_k^2 \geq u_1^2 + 2(k-1) \Rightarrow \frac{1}{u_k^2} \leq \frac{1}{u_1^2 + 2(k-1)} \Rightarrow \frac{1}{u_k^4} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_1^2 + 2k-3} - \frac{1}{u_1^2 + 2k-1} \right).$$

$$\text{Suy ra: } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^4} < \frac{1}{u_1^2 - 1} - \frac{1}{u_1^2 + 2n-3} < \frac{1}{2(u_1^2 - 1)} = \frac{1}{48}.$$

Từ đó ta có

$$u_n^2 = u_1^2 + 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} < u_1^2 + 2(n-1) + \sqrt{\frac{n-1}{48}}, \forall n \geq 2.$$

$$\text{Suy ra } u_n < \sqrt{25 + 2(n-1)} + \sqrt{\frac{n-1}{48}}, \forall n \geq 2.$$

$$\text{Hay } u_n \leq \sqrt{25 + 2(n-1)} + \sqrt{\frac{n-1}{48}}, \forall n \geq 1.$$

Khi đó $\sqrt{441} \leq u_{209} \leq \sqrt{441} + \sqrt{\frac{208}{48}}$. Hay $21 \leq u_{209} < 21,5$ nên phần nguyên của u_{209} bằng 21.

Bài 3. Một nhóm phượt có n thành viên. Năm 2018, họ thực hiện sáu chuyến du lịch mà mỗi chuyến có đúng 5 thành viên tham gia. Biết rằng hai chuyến du lịch bất kì chung nhau không quá 2 thành viên. Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Lời giải

Ta xác định bảng ô vuông với cột là thành vượt nhóm phượt được đánh số từ 1 đến n , dòng là các chuyến du lịch $A_1, A_2, \dots, A_6$. Điền số 1 vào ô (i, A_i) nếu người thứ i tham gia chuyến du lịch A_i , điền số 0 vào ô tương ứng trong trường hợp ngược lại.

	1	2	...	n
A_1				
A_2				
...				
A_6				

Gọi c_i là số chuyến du lịch người thứ i tham gia, tức là trên cột i có c_i số 1.

Gọi S là tổng số các cặp số 1 trong bảng. Ta có $\sum_{i=1}^n c_i = 30$.

Vì trên cột i có c_i số 1, suy ra có $C_{c_i}^2$ cặp số 1 trên cột i . Suy ra $S = \sum_{i=1}^n C_{c_i}^2$.

Mặt khác, xét 2 hàng $i \neq j$ bất kì, do $|A_i \cap A_j| \leq 2$ nên hai hàng này có nhiều nhất là 2 cặp số 1, suy ra $S \leq 2C_n^2 \leq 30$.

$$\begin{aligned} \text{Từ đó ta có } S = \sum_{i=1}^n C_{c_i}^2 &\leq 30 \Rightarrow \frac{\left(\sum_{i=1}^n c_i\right)^2}{n} - \sum_{i=1}^n c_i \leq \sum_{i=1}^n c_i^2 - \sum_{i=1}^n c_i \leq 60. \\ &\Rightarrow \frac{900}{n} \leq 90 \Leftrightarrow n \geq 10. \end{aligned}$$

Xét $n = 10$

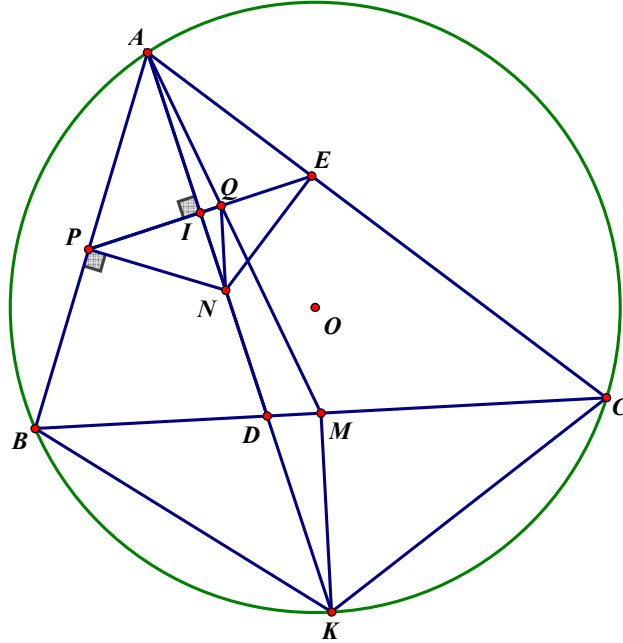
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A_1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
A_2	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
A_3	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
A_4	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1
A_5	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
A_6	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1

Vậy giá trị nhỏ nhất của n bằng 10, khi mỗi chuyến có đúng 5 thành viên tham gia và mỗi cặp thành viên cùng tham gia không quá 2 chuyến.

Bài 4. Cho tam giác ABC nhọn không cân có đường trung tuyến AM và đường phân giác trong AD . Qua điểm N thuộc đoạn thẳng AD (N không trùng với A và D), kẻ NP vuông góc với AB (P

thuộc cạnh AB). Đường thẳng qua P vuông góc với AD cắt đoạn thẳng AM tại Q . Chứng minh rằng QN vuông góc với BC .

Lời giải



Có $PQ \cap AD = I$; $AD \cap (O) = K$; $PQ \cap AC = E$.

Để chứng minh các tam giác cân NPE và KBC đồng dạng.

$$\text{Lại có: } \frac{QE}{QP} = \frac{S_{QAE}}{S_{QAP}} = \frac{\sin \widehat{MAC}}{\sin \widehat{MAB}} = \frac{\sin \widehat{MAC} \cdot AM \cdot AC}{\sin \widehat{MAB} \cdot AM \cdot AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{S_{MAC}}{S_{MAB}} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$

Suy ra $\frac{QE}{QP} = \frac{DB}{DC}$ lại có M, Q lần lượt là trung điểm của BC, PE và $\triangle NPE \sim \triangle CKB$ nên:

$$\triangle QIE \sim \triangle DMK \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{QNI} = \widehat{DKM} \Rightarrow QN \parallel MK \Rightarrow QN \perp BC.$$

Bài 5. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz(x + y + z)$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2y+1} + \frac{1}{2z+1} \geq 1$.

Lời giải

Đặt $a = \frac{1}{2x+1}, b = \frac{1}{2y+1}, c = \frac{1}{2z+1}$ thì $0 < a, b, c < 1$.

Ta có $x = \frac{1-a}{2a}, y = \frac{1-b}{2b}, z = \frac{1-c}{2c}$.

Ta cần chứng minh $a + b + c \geq 1$ (Chứng minh bằng phản chứng).

Giả sử $a + b + c < 1$. Khi đó, ta có $x = \frac{1-a}{2a} > \frac{b+c}{2a}, y = \frac{1-b}{2b} > \frac{c+a}{2b}, z = \frac{1-c}{2c} > \frac{a+b}{2c}$.

Ta có: $xy + yz + zx = xyz(x + y + z) \Leftrightarrow x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

$$\Leftrightarrow 0 = x - \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + z + \frac{1}{z} > \frac{b+c}{2a} - \frac{2a}{b+c} + \frac{c+a}{2b} - \frac{2b}{c+a} + \frac{a+b}{2c} - \frac{2c}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} < 4 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) (1).$$

Ta chứng minh được:

$$4 \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \leq a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + b \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} (2).$$

Từ (1) và (2) ta có điều mâu thuẫn nên ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

---HẾT---