| SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO<br>**HẢI DƯƠNG**<br><br>ĐỀ CHÍNH THỨC | **KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA**<br>**NĂM HỌC 2022 – 2023**<br>**Môn thi: Toán**<br>Ngày thi: 21 tháng 9 năm 2022<br>*Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề*<br>*Đề thi có 01 trang* |
|---|---|

**Câu 1. (4,0 điểm)** Cho dãy số $(x_n)$ thỏa mãn $x_1 = a > 0$ và

$$\left(x_{n+1} - \sqrt{x_n + 3} + 1\right)\left(2x_{n+1} - \frac{x_n^2 + 3}{x_n + 1}\right) = 0, \forall n \ge 1$$

Chứng minh rằng $(x_n)$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Câu 2. (4,0 điểm)** Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xf(y) + f(y) + f(x)) = y + (y+1)f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Câu 3. (4,0 điểm)** Cho tam giác nhọn không cân $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ và ngoại tiếp đường tròn $(I)$. Gọi $D$ là hình chiếu của $I$ trên $BC$, $AD$ cắt lại $(O)$ tại $G$. Lấy $E$ và $F$ lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ $BC$ và cung lớn $BC$. Hai đường thẳng $ID$ và $FG$ cắt nhau tại điểm $H$. Gọi $M$ là trung điểm cạnh $BC$.

a) Chứng minh rằng điểm $H$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $IBC$.

b) Gọi $P$ là điểm trên đường thẳng $ID$ sao cho $MP = MB$ và $K$ trên đường thẳng $BC$ sao cho $KP \perp PM$, $KI$ cắt $FG$ tại $N$ và $MN$ cắt $AI$ tại $J$. Chứng minh $E$ là trung điểm của $IJ$.

**Câu 4. (4,0 điểm)** Tìm tất cả các bộ số nguyên dương $(a;b;c)$ thỏa mãn: $a^b + 1 \mid (a+1)^c$

**Câu 5. (4,0 điểm)** Bạn A có một số chiếc thẻ thuộc ba loại thẻ: thẻ hai mặt đỏ; thẻ một mặt vàng, một mặt đỏ; thẻ hai mặt vàng. Bạn ấy không phân biệt được màu sắc nên cần một máy scan để quét. Tuy nhiên máy này cũng chỉ có thể phân biệt được tất cả các mặt thẻ úp xuống đưa vào trong máy có đều là màu vàng hay không. Nghĩa là nếu tất cả các mặt úp đều vàng nó sẽ báo vàng, còn chỉ cần có 1 mặt đỏ trong số đó thì nó báo không vàng. Mỗi lần bạn ấy có thể chọn bao nhiêu thẻ để đưa vào cũng được.

a) Chứng minh rằng nếu A có $n$ thẻ gồm 1 thẻ hai mặt đỏ và $n-1$ thẻ hai mặt vàng thì A có thể sử dụng máy để tìm ra thẻ hai mặt đỏ sau nhiều nhất là $[\log_2 n]$ bước.

b) Xét dãy số Fibonacci $(F_n)$ với $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \ge 1$. Với $n \ge 4$, giả sử bạn A có $F_n$ thẻ gồm một thẻ hai mặt đỏ và 1 thẻ một mặt vàng, một mặt đỏ, còn lại là các thẻ hai mặt vàng. Hỏi bạn ấy có thuật toán nào để có thể tìm ra thẻ hai mặt đỏ bằng cách sử dụng máy nhiều nhất $n$ lần hay không?

-HẾT-