

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Câu 1: (4,0 điểm)

1) Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 3$ (*) và đường thẳng $d : y = 2mx - 4$. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số (*). Tìm m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $\frac{x_1 + m}{x_2 - 1} + \frac{x_2 + m}{x_1 - 1} = -6$.

2) Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là tam giác trung bình của tam giác ABC . Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

Câu 2: (4,0 điểm)

1) Giải phương trình
$$\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x.$$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 4 + \sqrt{x^2 + 8x + 17} = y + \sqrt{y^2 + 1} \\ x + \sqrt{y} + \sqrt{y + 21} + 1 = 2\sqrt{4y - 3x} \end{cases}.$$

Câu 3: (4,0 điểm)

1) Tìm giới hạn
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2021)^3 \sqrt{1 - 2x} - 2021 \sqrt{4x + 1}}{x}.$$

2) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = 16 \\ u_{n+1} + 14 = \frac{15(n \cdot u_n + 1)}{n + 1}, \forall n \geq 1 \end{cases}.$$
 Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nu_n}{2021^n}.$

Câu 4: (4,0 điểm)

1) Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau trong đó có ba chữ số chẵn và ba chữ số lẻ? Trong các số trên có bao nhiêu số mà các chữ số được sắp xếp theo thứ tự tăng dần?

2) Xác định số hạng chứa x^{28} khi khai triển $(1 - x + x^2 - x^3)^{2n}$ thành đa thức, biết rằng

$$C_{2n}^1 + 2^2 C_{2n}^3 + 2^4 C_{2n}^5 + \dots + 2^{2n-2} C_{2n}^{2n-1} = \frac{3^{10} - 1}{4}.$$

Câu 4: (4,0 điểm)

1) Trong hệ tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ cạnh AC có phương trình là: $x + 7y - 31 = 0$, hai đỉnh B, D lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1 : x + y - 8 = 0$, $d_2 : x - 2y + 3 = 0$. Biết rằng diện tích hình thoi bằng 75, đỉnh A có hoành độ âm. Tìm tọa độ các đỉnh hình thoi.

2) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn $BC = 2a$ đáy bé $AD = a$, $AB = b$. Mặt bên SAD là tam giác đều, M là một điểm di động trên AB , mặt phẳng (P) đi qua M và song song với SA, BC .

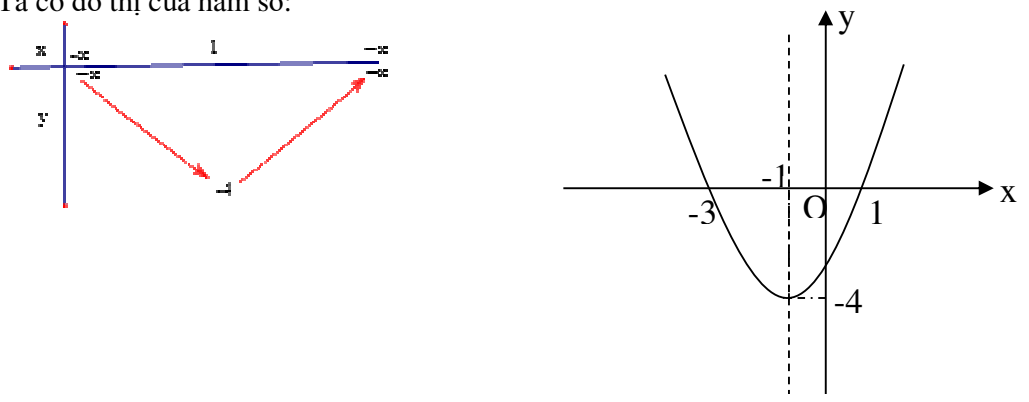
a) Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (P) . Thiết diện là hình gì?

b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x = AM, (0 < x < b)$. Tìm x theo b để diện tích thiết diện lớn nhất.

===== Hết =====

Thí sinh không được sử dụng tài liệu khi làm bài.

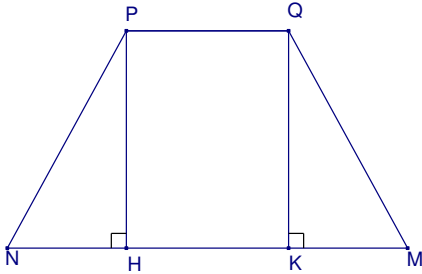
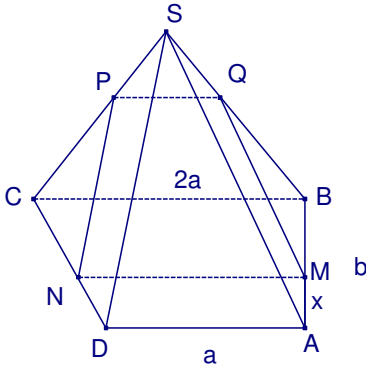
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1		
1	Lập bảng biến thiên và vẽ (P): $y = x^2 + 2x - 3$. Ta có đỉnh $I(-1; -4)$. Ta có bảng biến thiên: - đồ thị là parabol có bề lõm hướng lên có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$. - cắt trục hoành tại điểm $(1; 0); (-3; 0)$ cắt trục tung tại điểm $(0; -3)$. Ta có đồ thị của hàm số: 	1.0
	Đk: $x_1 \neq 1, x_2 \neq 1$ Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + 2x - 3 = 2mx - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + 1 = 0$ (1) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2 \Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \neq 1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 - 1 > 0 \\ 1 - 2(m-1) + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ 4 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 - 1 > 0 \\ 1 - 2(m-1) + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ 4 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}.$ Khi đó theo định lí viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$ $\frac{x_1 + m}{x_2 - 1} + \frac{x_2 + m}{x_1 - 1} = -6 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + (m-1)(x_1 + x_2) - 2m}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = -6$ $\Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + (m-1)(x_1 + x_2) - 2m}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} = -6 \Leftrightarrow \frac{4(m-1)^2 - 2 + 2(m-1)^2 - 2m}{1 - 2(m-1) + 1} = -6$ $\Leftrightarrow 6(m-1)^2 - 2m - 2 = -6(4 - 2m) \Leftrightarrow 3m^2 - 13m + 14 = 0 \Leftrightarrow m = 2, m = \frac{7}{3}.$	0.5 0.5

	Kết hợp với điều kiện ta được $m = \frac{7}{3}$.	
2	Vì dãy các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \dots$ là các tam giác đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác bằng $\text{cạnh} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$. Với $n = 1$ thì tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng 3 nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ có bán kính $R_1 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_1 = \pi \left(3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$. Với $n = 2$ thì tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{3}{2}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ có bán kính $R_2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_2 = \pi \left(3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$. Với $n = 3$ thì tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $\frac{3}{4}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_3B_3C_3$ có bán kính $R_3 = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_3 = \pi \left(3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$. Như vậy tam giác đều $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$ có bán kính $R_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_n = \pi \left(3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2$.	1.0
	Khi đó ta được dãy $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = S_1 = 3\pi$ và công bội $q = \frac{1}{4}$. Do đó tổng $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{u_1}{1-q} = 4\pi$	1.0
Câu 2		
1	Giải phương trình $\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$. Điều kiện : $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 + \tan x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases} \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$. Pt $\Leftrightarrow \frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$ $\Leftrightarrow \frac{\cos x (1 + \sin x + \cos 2x)}{\cos x + \sin x} \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$ $\Leftrightarrow 1 + \sin x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{-1}{2}$ hoặc $\sin x = 1$ (loại).	1.0

	Với $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$ Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là: $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ với $(k \in \mathbb{Z})$.	1.0
2.	$\begin{cases} x+4+\sqrt{x^2+8x+17}=y+\sqrt{y^2+1} & (1) \\ x+\sqrt{y}+\sqrt{y+21}+1=2\sqrt{4y-3x} & (2) \end{cases}$ Điều kiện: $y \geq 0$ $(1) \Leftrightarrow (x-y+4)+\sqrt{x^2+8x+17}-\sqrt{y^2+1}=0 \Leftrightarrow (x-y+4)+\frac{(x+4)^2-y^2}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=0$ $\Leftrightarrow (x-y+4)+\frac{(x+4+y)(x+4-y)}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=0 \Leftrightarrow (x-y+4)\left(1+\frac{(x+4+y)}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}\right)=0$ $\Leftrightarrow y=x+4$	1.0
	Vì: $1+\frac{(x+4+y)}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}=\frac{\sqrt{(x+4)^2+1}+(x+4)+\sqrt{y^2+1}+y}{\sqrt{x^2+8x+17}+\sqrt{y^2+1}}>0 \forall x, y$ Thay $y=x+4$ vào 2 ta được: $(2) \Leftrightarrow x+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+25}+1=2\sqrt{x+16}$ $\Leftrightarrow (\sqrt{x+4}-2)+(\sqrt{x+25}-5)+(x+8-2\sqrt{x+16})=0$ $\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+25}+5}+\frac{x+12}{x+8+2\sqrt{x+16}}\right)=0$ $\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=4 \\ \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+25}+5}+\frac{x+12}{x+8+2\sqrt{x+16}}=0 \quad (vn) \end{cases}$	1.0
Câu 3		
1	Ta có $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x\sqrt[3]{1-2x} + 2021 \frac{\sqrt[3]{1-2x}-1}{x} - 2021 \frac{\sqrt{4x+1}-1}{x} \right)$. $\lim_{x \rightarrow 0} x\sqrt[3]{1-2x} = 0$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-2x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x(\sqrt[3]{(1-2x)^2} + \sqrt[3]{1-2x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{(\sqrt[3]{(1-2x)^2} + \sqrt[3]{1-2x} + 1)} = -\frac{2}{3}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(\sqrt{4x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{4x+1}+1} = 2$ Vậy $L = 0 + 2021 \frac{-2}{3} - 2021 \cdot 2 = \frac{-16168}{3}$.	2.0

2	Cho dãy số (u_n): $u_1 = 16, u_{n+1} + 14 = \frac{15(n.u_n + 1)}{n+1}, \forall n \geq 1$. Ta có $u_{n+1} + 14 = \frac{15(n.u_n + 1)}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)u_{n+1} = 15nu_n - 14n + 1$. Đặt $x_n = nu_n$. Ta có: $x_{n+1} = 15x_n - 14n + 1, x_1 = 16$. Xét $\lambda - 15 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 15$. Ta có $x_n = x_n^0 + x_n^*$. Với $x_n^0 = q.15^n$ Và $x_n^* = an + b$ là nghiệm phương trình $x_{n+1} = 15x_n - 14n + 1$. Tìm đc $x_n^* = -n$. Từ $x_n = x_n^0 + x_n^* = q.15^n + n \Rightarrow x_1 = q.15 + 1 \Rightarrow q = 1$ Vậy $x_n = 15^n + n \Rightarrow u_n = \frac{15^n + n}{n}$.	1.0
	Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nu_n}{2021^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15^n + n}{2021^n} = 0$.	1.0
Câu 4		
1	* Có 5 số lẻ và 4 số chẵn từ chín số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Suy ra có C_5^3 cách chọn 3 số lẻ từ năm số 1, 3, 5, 7, 9, và có C_4^3 cách chọn 3 số chẵn từ bốn số 2, 4, 6, 8. Cứ ba chữ số lẻ ghép với ba chữ số chẵn ta được một tập gồm 6 phần tử. Theo quy tắc nhân có $C_4^3.C_5^3$ cách chọn các tập hợp mà mỗi tập có 3 số chẵn và 3 số lẻ từ các số trên. Ứng với mỗi tập có 6! cách sắp xếp thứ tự các phần tử và mỗi cách sắp xếp thứ tự đó ta được một số thỏa mãn bài toán. Do đó theo quy tắc nhân có $C_4^3.C_5^3.6! = 28800$ số có 6 chữ số khác nhau gồm 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ từ các số trên.	1.0
	* Có $C_4^3.C_5^3$ tập hợp gồm ba chữ số lẻ và ba chữ số chẵn. Ứng với mỗi tập có duy nhất một cách sắp xếp các phần tử theo thứ tự tăng dần. Do đó mỗi tập hợp tương ứng với một số. Vậy có $C_4^3.C_5^3 = 40$ số thỏa mãn.	1.0
2	Xét khai triển $(1+2)^{2n} = C_{2n}^0 + 2C_{2n}^1 + 2^2C_{2n}^2 + 2^3C_{2n}^3 + \dots + 2^{2n-1}C_{2n}^{2n-1} + 2^{2n}C_{2n}^{2n}$ $(1-2)^{2n} = C_{2n}^0 - 2C_{2n}^1 + 2^2C_{2n}^2 - 2^3C_{2n}^3 + \dots - 2^{2n-1}C_{2n}^{2n-1} + 2^{2n}C_{2n}^{2n}$ Trừ hai đẳng thức theo vế ta có $3^{2n} - 1 = 2(2C_{2n}^1 + 2^3C_{2n}^3 + 2^5C_{2n}^5 + \dots + 2^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}) \Leftrightarrow \frac{3^{2n} - 1}{4} = C_{2n}^1 + 2^2C_{2n}^3 + 2^4C_{2n}^5 + \dots + 2^{2n-2}C_{2n}^{2n-1}$ $\Leftrightarrow \frac{3^{2n} - 1}{4} = \frac{3^{10} - 1}{4} \Leftrightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5.$ Ta có $1 - x + x^2 - x^3 = (1-x)(1+x^2) \Rightarrow (1-x+x^2-x^3)^{10} = (1-x)^{10}(1+x^2)^{10}$ $(1-x)^{10} = (C_{10}^0 - C_{10}^1x + C_{10}^2x^2 - \dots + C_{10}^8x^8 - C_{10}^9x^9 + C_{10}^{10}x^{10})$ $(1+x^2)^{10} = (C_{10}^0 + C_{10}^1x^2 + \dots + C_{10}^8x^{16} + C_{10}^9x^{18} + C_{10}^{10}x^{20})$ Suy ra số hạng chứa x^{28} trong khai triển $(1-x+x^2-x^3)^{2n}$ là:	1.0

	$C_{10}^8 x^8 \cdot C_{10}^{10} x^{20} + C_{10}^{10} x^{10} \cdot C_{10}^9 x^{18} = 45x^{28} + 9x^{28} = 55x^{28}.$	
Câu 5		
1	$B \in d_1 \Rightarrow B(b; 8-b), D \in d_2 \Rightarrow (2d-3; d).$ Khi đó $\overrightarrow{BD} = (-b+2d-3; b+d-8)$ và trung điểm của BD là $I\left(\frac{b+2d-3}{2}; \frac{-b+d+8}{2}\right).$ Theo tính chất hình thoi ta có : $\begin{cases} BD \perp AC \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_{AC}} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ I \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8b+13d-13=0 \\ -6b+9d-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ d=1 \end{cases}.$ Suy ra $B(0;8); D(-1;1).$ Khi đó $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right); A \in AC \Rightarrow A(-7a+31; a)$ đk : $a > \frac{31}{7}$ $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \Rightarrow AC = \frac{2S_{ABCD}}{BD} = 15\sqrt{2} \Rightarrow IA = \frac{15}{\sqrt{2}}.$ $\Rightarrow \left(-7a + \frac{63}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{225}{2} \Leftrightarrow \left(a - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(10;3) \text{ (ktm)} \\ A(-11;6) \end{cases}. \text{ Suy ra } C(10;3).$	2.0
2	+ Từ M kẻ đường thẳng song song với BC và SA lần lượt cắt DC tại N, SB tại Q. + Từ Q kẻ đường thẳng song song với BC cắt SC tại P. Thiết diện hình thang cân MNPQ  + tích Ta  Tính diện MNPQ tính được $MQ = NP = \frac{b-x}{b}a, PQ = \frac{2.a.x}{b}; MN = \frac{ab+ax}{b}$ từ đó tính được $QK = \frac{ab-ax}{b} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ Suy ra diện tích MNPQ là: $x S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ) \cdot QK = \frac{\sqrt{3}.a^2}{4b^2}(b-x)(b+3x)$	1.5
	$S_{MNPQ} = \frac{\sqrt{3}.a^2}{4b^2}(b-x)(b+3x) \leq \frac{\sqrt{3}.a^2}{12b^2} \left(\frac{3b-3.x+b+3.x}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}.a^2}{12}$ Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{b}{3}.$	0.5