

DẠNG TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN GIAO ĐIỂM CỦA HAI ĐỒ THỊ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

- ♦ $f(x) = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$, $y = m$. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$, $y = m$.
- ♦ $f(x) = g(x)$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$. Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$.

- Bảng đạo hàm các hàm số cơ bản

Hàm x	Hàm hợp
1. $c' = 0$ 2. $x' = 1$	
3. $(x^n)' = n.x^{n-1} (n \in \mathbb{N}; n > 1)$	4. $(u^n)' = n.u^{n-1}.u' (n \in \mathbb{N}; n > 1)$
5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \forall x > 0$	6. $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, \forall u > 0$
7. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \forall x \neq 0$	8. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, \forall u \neq 0$
9. $(k.x)' = k$	10. $(k.u)' = k.u'$
11. $(\cos x)' = -\sin x$	12. $(\cos u)' = -u' \sin u$
13. $(\sin x)' = \cos x$	14. $(\sin u)' = u' \cos u$
15. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	16. $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
17. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	18. $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

- Đạo hàm của hàm hợp: $y = f(u(x)) \Rightarrow y' = u'(x).f'(u(x))$
- Đạo hàm của hàm tổng: $y = f(u(x)) \Rightarrow y' = u'(x).f'(u(x))$

BÀI TẬP MẪU

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 8.

*Phân tích hướng dẫn giải***1. DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán liên quan đến giao điểm của hai đồ thị.**2. HƯỚNG GIẢI:****B1:** Từ phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ chuyển về phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị

$$y = f(u), y = C.$$

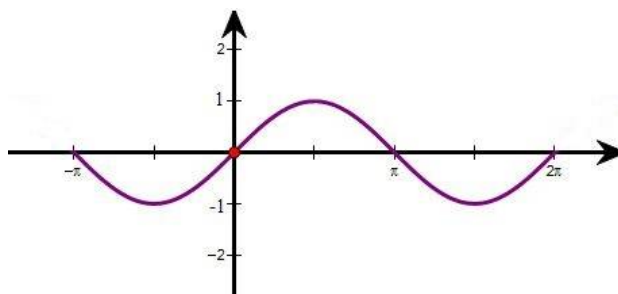
B2: Dựa vào đồ thị $y = f(x) \Rightarrow$ giá trị của $u = \sin x \Rightarrow$ giá trị của x .**B3:** Chọn đáp án.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } 2f(\sin x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(\sin x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a_1 \in (-\infty; -1) & (1) \\ \sin x = a_2 \in (-1; 0) & (2) \\ \sin x = a_3 \in (0; 1) & (3) \\ \sin x = a_4 \in (1; +\infty) & (4) \end{cases}$$

Các phương trình (1) và (4) đều vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên $[-\pi; 2\pi]$ Ta thấy phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt và phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt đồng thời trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau. Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$.**Trình bày theo hướng khác:***Phân tích hướng dẫn giải***1. DẠNG TOÁN:** Đây là dạng toán dùng BBT của hàm số $f(x)$ để tìm số nghiệm thuộc đoạn $[a; b]$ của

PT $c.f(g(x)) + d = m$.

2. HƯỚNG GIẢI:**B1:** Đặt ẩn phụ $t = g(x)$. Với $x \in [a; b] \Rightarrow t \in [a'; b']$ **B2:** Với $c.f(g(x)) + d = m \Rightarrow f(t) = k$

B3: Sử dụng BBT của hàm số $y = f(t)$ để giải bài toán số nghiệm thuộc đoạn $[a'; b']$ của PT $f(t) = k$

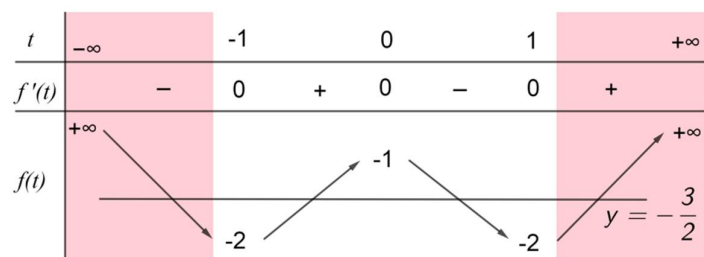
Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

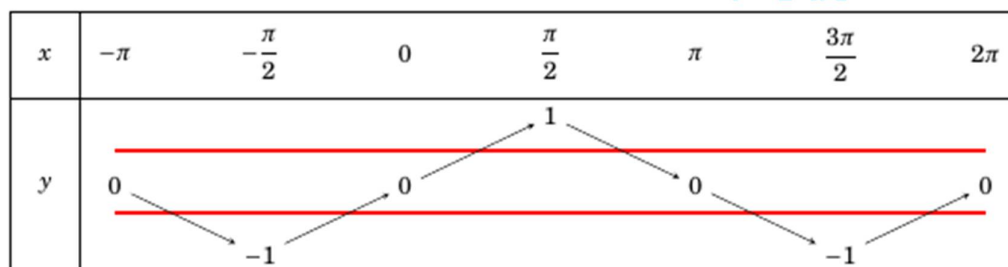
Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]$ thì PT $2f(\sin x) + 3 = 0$ (1) trở thành $2f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{3}{2}$ (2).

BBT hàm số $y = f(t), t \in [-1; 1]$:



Dựa vào BBT, số nghiệm $t \in [-1; 1]$ của PT (1) là 2 nghiệm phân biệt $t_1 \in (-1; 0), t_2 \in (0; 1)$.

BBT hàm số $f(x) = \sin x, x \in [-\pi; 2\pi]$



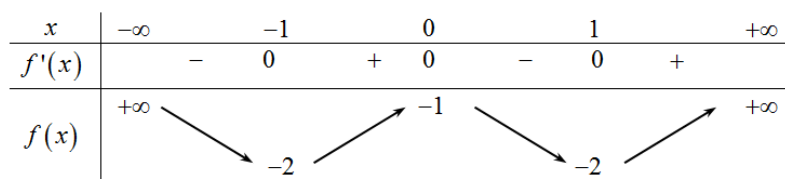
+ Với $t_1 \in (-1; 0) \Rightarrow \sin x = t_1 \in (-1; 0) \Rightarrow$ PT có 4 nghiệm $x \in [-\pi; 2\pi]$.

+ Với $t_2 \in (0; 1) \Rightarrow \sin x = t_2 \in (0; 1) \Rightarrow$ PT có 2 nghiệm $x \in [-\pi; 2\pi]$.

Vậy số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là $2 + 4 = 6$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Câu 45.1: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 3\pi]$ của phương trình $2f(\cos x) + 3 = 0$ là

A. 6 .

B. 8 .

C. 3 .

D. 10 .

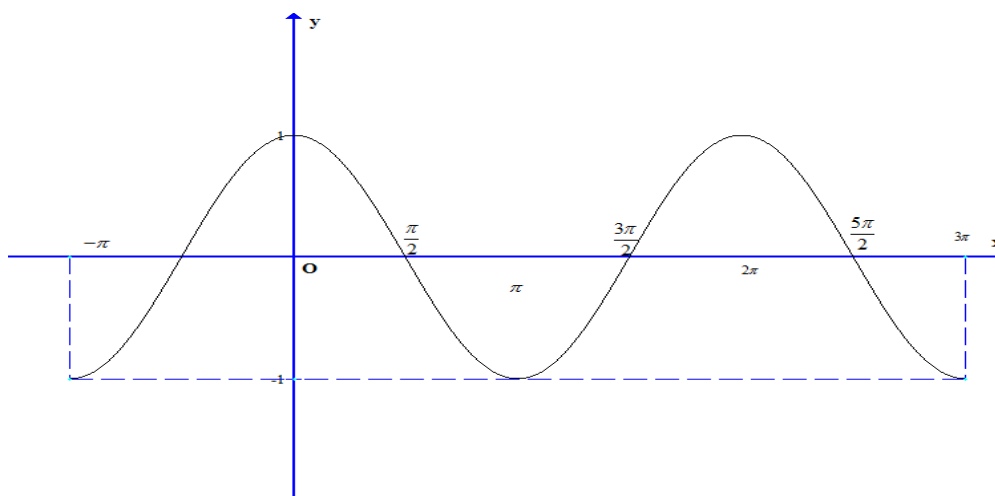
Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 2f(\cos x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(\cos x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a_1 \in (-\infty; -1) & (1) \\ \cos x = a_2 \in (-1; 0) & (2) \\ \cos x = a_3 \in (0; 1) & (3) \\ \cos x = a_4 \in (1; +\infty) & (4) \end{cases}$$

Các phương trình (1) và (4) đều vô nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $[-\pi; 3\pi]$



Ta thấy phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt và phương trình (3) có 4 nghiệm phân biệt đồng thời trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau. Vậy phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 3\pi]$.

Câu 45.2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0
$f(x)$	$+\infty$	-2	-1	-2	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 3\pi]$ của phương trình $2f(-\cos x + 2) - 1 = 0$ là

A. 6 .

B. 8 .

C. 7 .

D. 9 .

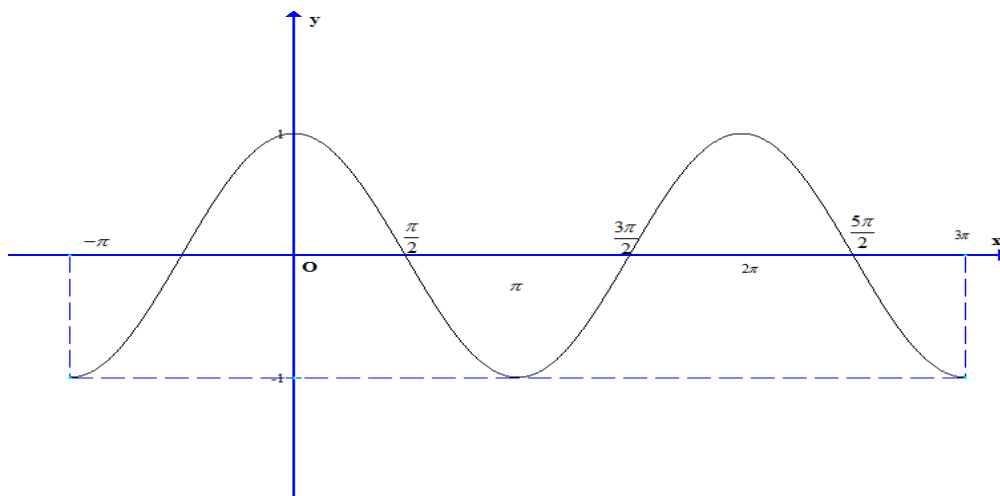
Lời giải**Chọn C**

$$\text{Ta có } 2f(-\cos x + 2) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(-\cos x + 2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -\cos x + 2 = a_1 \in (-\infty; -1) \\ -\cos x + 2 = a_2 \in (-1; 0) \\ -\cos x + 2 = a_3 \in (0; 1) \\ -\cos x + 2 = a_4 \in (1; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 2 - a_1 < -1 \\ \cos x = 2 - a_2 > 1 \\ \cos x = 2 - a_3 > 1 \\ \cos x = 2 - a_4, a_4 \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 2 - a_1 < -1 \\ \cos x = 2 - a_2 > 1 \\ \cos x = 2 - a_3 > 1 \\ \begin{cases} \cos x = 2 - a_4, a_4 \in (1; 3] \\ \cos x = 2 - a_4, a_4 \in (3; +\infty) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = (2 - a_1) < -1 \\ \cos x = (2 - a_2) > 1 \\ \cos x = (2 - a_3) > 1 \\ \begin{cases} \cos x = (2 - a_4) \in [-1; 1] \\ \cos x = (2 - a_4) < -1 \end{cases} \end{cases}$$

Chỉ có phương trình $\cos x = (2 - a_4) \in [-1; 1)$ có nghiệm.

Xét đồ thị hàm số $y = \cos x$ trên $[-\pi; 3\pi]$



Ta thấy $\begin{cases} 2 - a_4 = -1 \\ 2 - a_4 = m \in (-1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_4 = 3 \\ a_4 = 2 - m \end{cases}$

+) Với $a_4 = 3 \Rightarrow PT: \cos x = (2 - a_4) = -1$ có 3 nghiệm.

+) Với $\begin{cases} a_4 = 2 - m \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Rightarrow PT: \cos x = m$ có 4 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 3\pi]$.

Câu 45.3: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	$+\infty$	$\searrow$ -3	$\nearrow$ 1	$\searrow$ -1	$\nearrow$ $+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 3\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 1 = 0$ là

A. 4 .

B. 3.

C. 1.

D. 6.

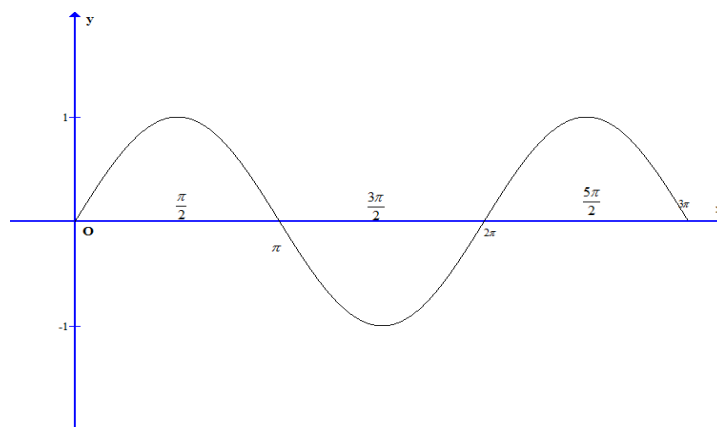
Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 2f(\sin x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(\sin x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a_1 \in (-\infty; -2) \\ \sin x = a_2 \in (-2; 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a_1 < -2 \\ \sin x = a_2 \in (-2; -1) \\ \sin x = a_2 \in (-1; 0) \\ \sin x = a_2 = -1 \\ \sin x = a_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = a_2 \in (-1; 0) \quad (1) \\ \sin x = a_2 = -1 \quad (2) \end{cases}$$

Xét đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên $[-\pi; 2\pi]$



Ta thấy: Phương trình (1) có 2 nghiệm.

Phương trình (2) có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$.

Câu 45.4: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		0		$-\infty$
					
		-2			

Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x - 1) + 4 = 0$ là

A. 0.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$2f(\sin x - 1) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(\sin x - 1) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - 1 = 1 \\ \sin x - 1 = m \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 2 > 1 \quad (1) \\ \sin x = m + 1 > 3 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow$$

Các phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 0 thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

Câu 45.5: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	0,5 5 -2 1				

Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình $3f(\tan x) + 1 = 0$ là

A. 2 .

B. 3.

C. 4.

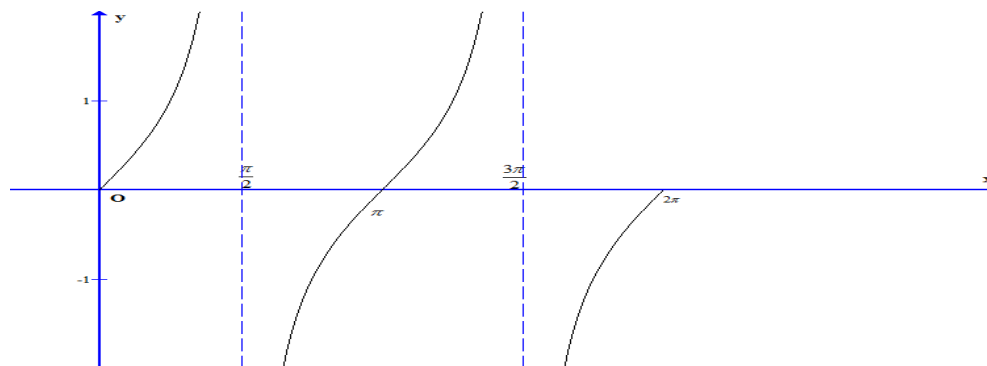
D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 3f(\tan x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\tan x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0,58 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = m \in (1; 2) & (1) \\ \tan x = n \in (2; +\infty) & (2) \end{cases}$$

Xét đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên $[0; 2\pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$: $f(0) = 0$, $f(2\pi) = 0$.



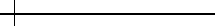
Ta thấy: Phương trình (1) có 2 nghiệm.

Phương trình (2) có 2 nghiệm.

Đồng thời trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$.

Câu 45.6: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình $3f(\cot x) + 1 = 0$ là

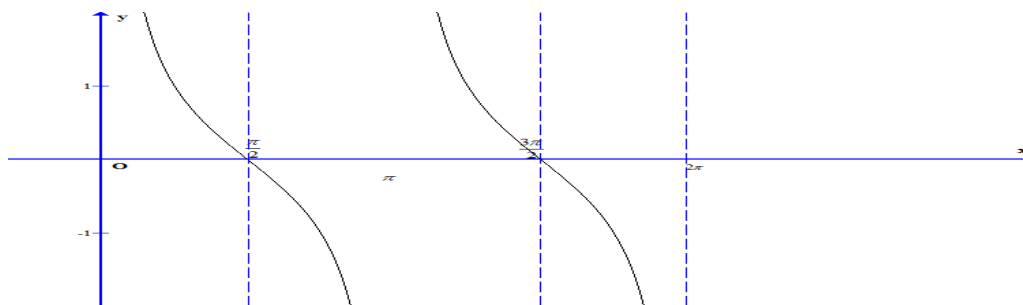
- A. 2 . B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 3f(\cot x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\cot x) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0,58 \Leftrightarrow \begin{cases} \cot x = m \in (-1; 2) & (1) \\ \cot x = n \in (2; +\infty) & (2) \end{cases}$$

Xét đồ thị hàm số $y = \cot x$ trên $[0; 2\pi] \setminus \{0; \pi; 2\pi\}$.



Ta thấy: Phương trình (1) có 2 nghiệm.

Phương trình (2) có 2 nghiệm.

Đồng thời trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi] \setminus \{0; \pi; 2\pi\}$

Câu 45.7: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 5$	$\searrow -7$	$\nearrow 1$	

Số nghiệm thuộc đoạn $[-3; 3]$ của phương trình $2f(x^2 - 2x) + 1 = 0$ là

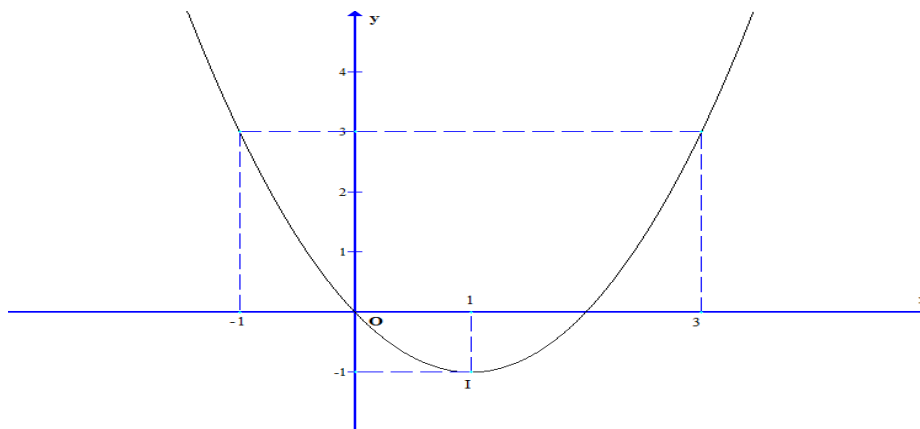
- A. 2 . B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 2f(x^2 - 2x) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x^2 - 2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = a_1 \in (-\infty; -1) & (1) \\ x^2 - 2x = a_2 \in (-1; 3) & (2) \\ x^2 - 2x = a_3 \in (3; +\infty) & (3) \end{cases}$$

Xét đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$ trên $[-3; 3]$.



Ta thấy: Phương trình (1) vô nghiệm.

Phương trình (2) có 2 nghiệm.

Phương trình (3) có 2 nghiệm không thuộc $[-3; 3]$.

Đồng thời trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-3; 3]$.

Câu 45.8: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	5	$-\frac{3}{2}$	1	

Số nghiệm thuộc nửa khoảng $(-\infty; 2020]$ của phương trình $2f(f(2x-1)) + 3 = 0$ là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

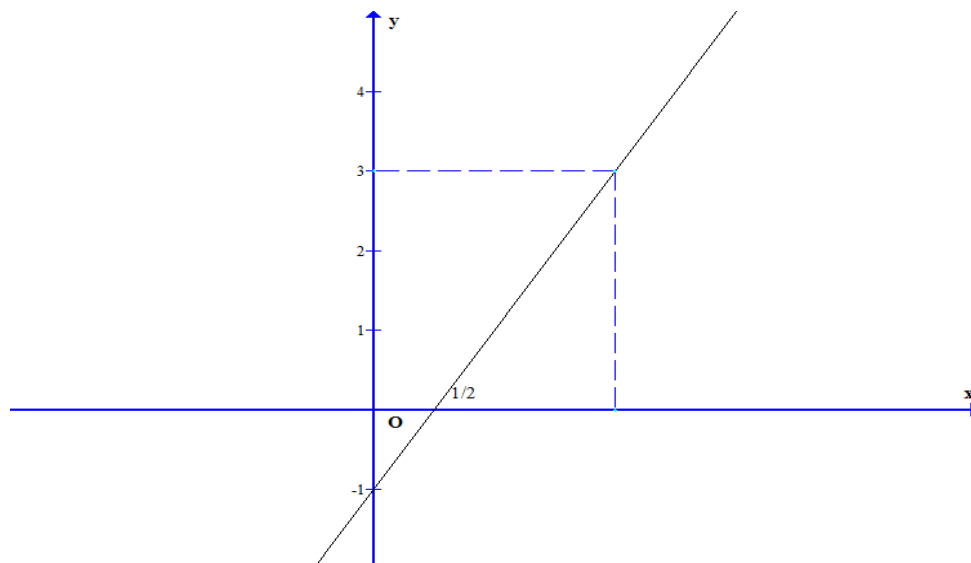
Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 2f(f(2x-1)) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(f(2x-1)) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2x-1) = a \in (-\infty; -2) & (1) \\ f(2x-1) = 3(2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = b_1 \in (-\infty; -2) & (1) \\ 2x-1 = b_2 \in (-\infty; -2), b_2 > b_1 & (2) \\ 2x-1 = b_3 \in (-2; 3), b_3 > b_2 & (3) \end{cases}$$

Xét đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ trên $(-\infty; 2020]$.



Ta thấy: Phương trình (1) có 1 nghiệm.

Phương trình (2) có 1 nghiệm.

Phương trình (3) có 1 nghiệm thuộc $(0; 3)$.

Đồng thời trong số chúng không có 2 nghiệm nào trùng nhau.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-3; 3]$.

Câu 45.9: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-3	1	-1	$+\infty$

Số nghiệm dương của phương trình $2f(f(x-1))+3=0$ là

A. 3.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } 2f(f(x-1))+3=0 \Leftrightarrow f(f(x-1))=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x-1)=a \in (-\infty; -1) & (1) \\ f(x-1)=b \in (-1; 0) & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=b_1 \in (-\infty; -1) & (1) \\ x-1=b_2 \in (-1; 0) & (2) \\ x-1=d \in (-\infty; -1) & (3) \\ x-1=e \in (-1; 0) & (4) \\ x-1=f \in (0; 2) & (5) \\ x-1=g \in (2; +\infty) & (6) \end{cases}$$

Suy ra phương trình có các nghiệm dương:
$$\begin{cases} x=b_2+1 \\ x=e+1 \\ x=f+1 \end{cases}$$

Câu 45.10: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-3	1	-1	$+\infty$

Số nghiệm dương của phương trình $2f(\sqrt{x^2-2x})-5=0$ là

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

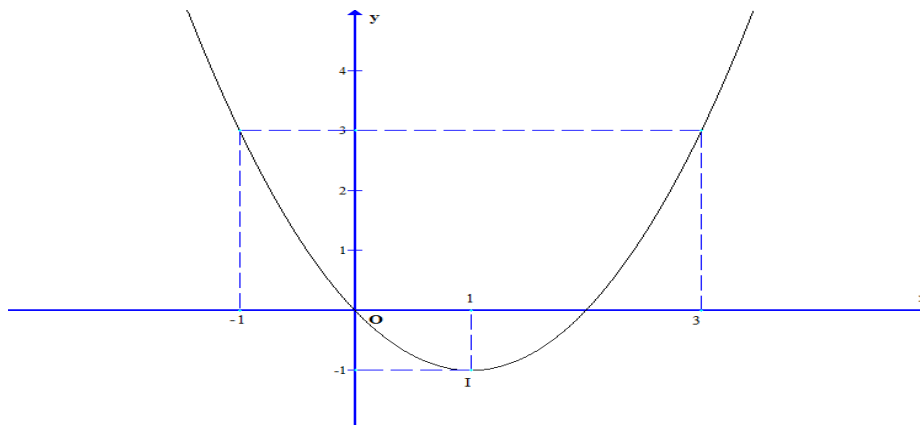
Chọn A

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Ta có $2f(\sqrt{x^2-2x})-5=0 \Leftrightarrow f(\sqrt{x^2-2x})=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-2x}=a \in (-\infty; -1) & (1) \\ \sqrt{x^2-2x}=b \in (2; +\infty) & (2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x}=b \in (2; +\infty) \Leftrightarrow x^2-2x-b^2=0, b \in (2; +\infty)$

Xét đồ thị hàm số $y=x^2-2x$

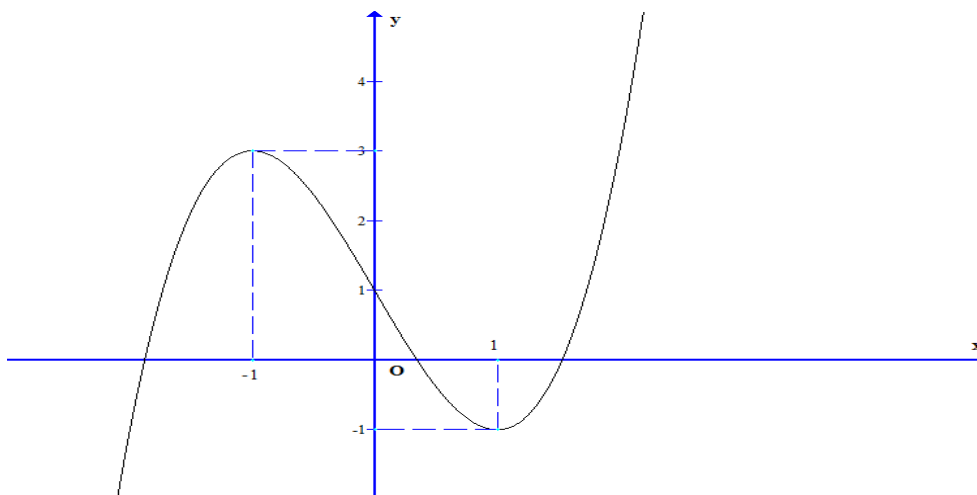


Suy ra phương trình $x^2 - 2x = b^2$, $b \in (2; +\infty)$ có hai nghiệm trái dấu.

Trong đó nghiệm dương: $x > 1 + \sqrt{5}$ (TM : $x \geq 2$)

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 45.11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng.



A. -9.

B. -10.

C. -6.

D. -5.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta có $f(x) = x^3 - 3x + 1$; $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Đặt $u = \sin x$ ($-1 \leq u \leq 1$).

Xét hàm số $u = \sin x$ ($-1 \leq u \leq 1$).

$$u' = \cos x; u' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ do } x \in (0; \pi) \text{ (gt)} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

Bảng biến thiên :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	
$u'(x)$		+	0	-
$u(x)$	0	1	0	

Suy ra $x \in (0; \pi) \Rightarrow u \in (0; 1] \Rightarrow 0 < u \leq 1$.

Vậy dựa vào bảng biến thiên ta có với mỗi $u \in (0; 1) \Rightarrow pt: \sin x = u$ có 2 nghiệm $x \in (0; \pi)$

Và $u = 1 \Rightarrow \sin x = u = 1$ có một nghiệm kép $x = \frac{\pi}{2}$.

Khi đó phương trình $f(\sin x) = 3\sin x + m \Leftrightarrow f(u) = 3u + m \Leftrightarrow f(u) - 3u = m$

Xét hàm số: $g(x) = f(x) - 3x$

$$g'(x) = f'(x) - 3; g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

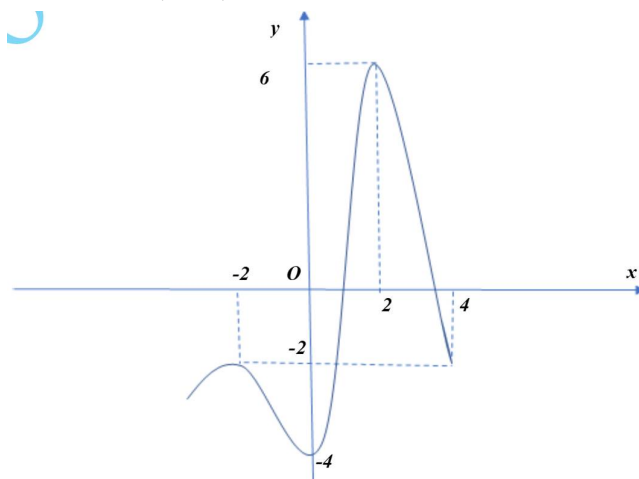
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+
$g(x)$	$-\infty$	$1 + 4\sqrt{2}$	1	-4	$1 - 4\sqrt{2}$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có với $x \in (0; 1]$ thì phương trình $f(x) - 3x = m$ có nghiệm khi:

$$g(1) \leq m < g(0) \Leftrightarrow -4 \leq m < 1 \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1; 0\}$$
 tổng các giá trị của m : 10.

Câu 45.12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2} - 1\right) + x = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$



A. 8.

B. 9.

C. 10.

D. 11.

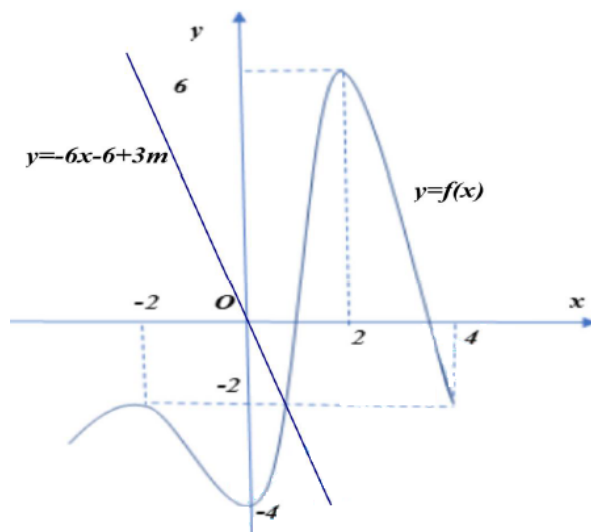
Lời giải

Chọn A

+) Đặt $t = \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow t' = \frac{1}{2} > 0$; với $x \in [-2; 2] \Rightarrow t \in [0; 2]$

+) Khi đó phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}-1\right) + x = m \Leftrightarrow f(t) = -6t - 6 + 3m$

Xét hàm số $y = f(x)$, $y = g(x) = -6x - 6 + 3m$ trên $[0; 2]$ có đồ thị như sau :



Với $x \in [0; 2] \Rightarrow d : y = -6x - 6 + 3m$ thay đổi và đi qua từ điểm $A(0; -4)$ tới điểm $B(2; 6)$ và luôn có giao điểm với $y = f(x)$:

$$\Rightarrow g(0) = -6 \cdot 0 - 6 + 3m = -4 \Rightarrow m = \frac{2}{3}, \quad g(2) = -6 \cdot 2 - 6 + 3m = 6 \Rightarrow m = 8$$

Vậy giá trị của m cần tìm để phương trình thỏa mãn yêu cầu bài toán có nghiệm : $\frac{2}{3} \leq m \leq 8$

$\Rightarrow$ 8 giá trị của m là số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 45.13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = m(x - 4)$ cắt đồ thị của hàm số $y = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$ tại bốn điểm phân biệt?

A. 1.

B. 5.

C. 3.

D. 7.

Lời giải**Chọn B**

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$(x^2 - 1)(x^2 - 9) = m(x - 4) \Rightarrow \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 9)}{(x - 4)} = m \quad (1), \quad (x \neq 4).$$

Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-9)}{(x-4)}$ và

$$y = m.$$

Ta có:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-9)(x-4) + 2x(x^2-1)(x-4) - (x^2-9)(x^2-1)}{(x-4)^2} = \frac{3x^4 - 16x^3 - 10x^2 + 80x - 9}{(x-4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^4 - 16x^3 - 10x^2 + 80x - 9 = 0$$

Giải phương trình bằng MTBT ta được 4 nghiệm $\begin{cases} x_1 \approx -2,169 \\ x_2 \approx 0,114 \\ x_3 \approx 2,45 \\ x_4 \approx 4,94 \end{cases}$. Các nghiệm này đã được lưu

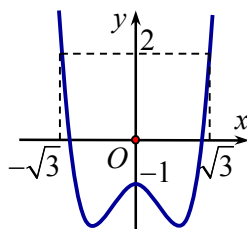
chính xác ở trong bộ nhớ của MTBT.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	4	x_4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	2,58	-2,28	9,67	$+\infty$	383,5	$+\infty$

Từ BBT và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Câu 45.14: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ



Đặt $g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x - m$, với m là tham số thực. Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $g(x) \geq 0$ đúng với $\forall x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ là

A. $m \leq 3f(\sqrt{3})$. **B.** $m \leq 3f(0)$. **C.** $m \geq 3f(1)$. **D.** $m \geq 3f(-\sqrt{3})$.

Lời giải

Chọn A

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3f(x) - x^3 + 3x - m \geq 0 \Leftrightarrow 3f(x) - x^3 + 3x \geq m.$$

Đặt $h(x) = 3f(x) - x^3 + 3x$. Ta có $h'(x) = 3f'(x) - 3x^2 + 3$. Suy ra

$$\begin{cases} h'(-\sqrt{3}) = 3f'(-\sqrt{3}) - 6 = 0 \\ h'(\sqrt{3}) = 3f'(\sqrt{3}) - 6 = 0 \\ h'(0) = 3f'(0) = 0 \\ h'(1) = 3f'(1) < 0 \end{cases}$$

Từ đó ta có bảng biến thiên

x	$-\sqrt{3}$		0		1		$\sqrt{3}$
h'		$-$	0		$-$		
h	$h(-\sqrt{3})$	↘		$h(0)$	↘		$h(\sqrt{3})$

$$\text{Vậy } g(x) \leq m \Leftrightarrow g(x) \leq h(\sqrt{3}) = 3f(\sqrt{3}).$$

Câu 45.15: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$. Số các giá trị tham số m để đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB nằm trên đường tròn $x^2 + y^2 - 3y = 4$ là

A. 1 .

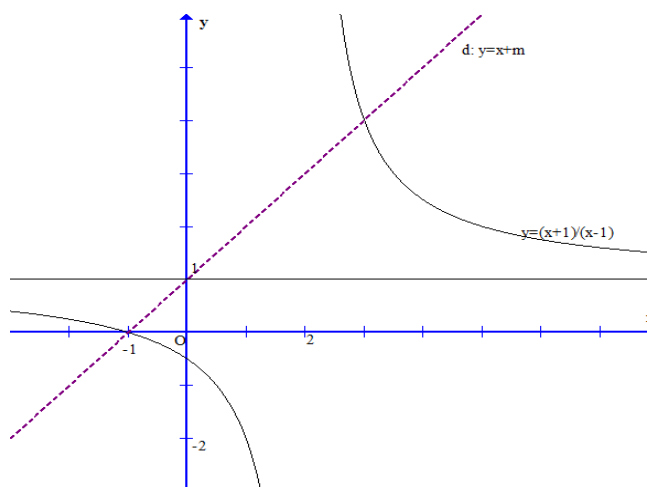
B. 0 .

C. 3 .

D. 2 .

Lời giải

Chọn D



$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } \frac{x+1}{x-2} = x+m \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - 2m - 1 = 0 (*)$$

Theo yêu cầu bài toán : (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 4 + (m-3)2 - 2m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 2m + 13 > 0, \forall m$$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ suy ra G là trọng tâm của tam giác OAB :

$$G\left(\frac{x_1+x_2}{3}, \frac{y_1+y_2}{3}\right) = G\left(\frac{x_1+x_2}{3}, \frac{x_1+x_2+2m}{3}\right) = G\left(\frac{3-m}{3}, \frac{3-m+2m}{3}\right) = G\left(\frac{3-m}{3}, \frac{3+m}{3}\right)$$

Ta có

$$G\left(\frac{3-m}{3}, \frac{3+m}{3}\right) \in (C): x^2 + y^2 - 3y = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3-m}{3}\right)^2 + \left(\frac{3+m}{3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3+m}{3} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = \frac{15}{2} \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 45.16: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			5		-3		$+\infty$
	$-\infty$						

Phương trình $|f(1-3x)+1|=3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4.

B. 3.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào BBT ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow f(-1) = 5 \\ x = 3 \Rightarrow f(3) = -3 \end{cases}$

Xét hàm số $g(x) = f(1-3x) + 1$. Ta có:

$$g'(x) = -3f'(1-3x). \text{ Suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1-3x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x = -1 \\ 1-3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

$$g\left(\frac{2}{3}\right) = f(-1) + 1 = 6; \quad g\left(-\frac{2}{3}\right) = f(3) + 1 = -2.$$

Mặt khác $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$. Do đó $f'(1-3x) < 0$

$$\Leftrightarrow -1 < 1-3x < 3 \Leftrightarrow -2 < -3x < 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$$

Suy ra: $g'(x) = -3f'(1-3x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$ nên ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$			
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		
$g(x)$	$+\infty$	-2	6	$-\infty$			
$ g(x) $	$+\infty$	0	2	0	6	0	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $|f(1-3x)+1|=3$ có 4 nghiệm.

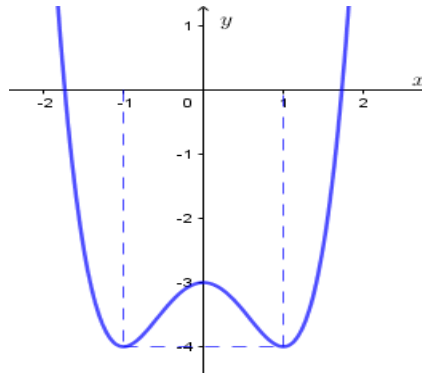
☞ Chú ý: Ta có thể làm nhanh như sau:

- $f(x) \rightarrow f(1-3x)$ chỉ thay đổi tính đơn điệu và cực trị ngược lại: $y_{CT} = 5$, $y_{CD} = -3$.
- $f(1-3x) \rightarrow f(1-3x)+1$: Tịnh tiến lên trên 1 đơn vị nên $y_{CT} = 6$, $y_{CD} = -2$.
- $f(1-3x)+1 \rightarrow |f(1-3x)+1|$: Lật dưới lên trên sẽ được như hình sau:

$f(1-3x)+1$	$+\infty$																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																									
-------------	-----------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Dựa vào bảng suy ra phương trình $|f(1-3x)+1|=3$ có 4 nghiệm.

Câu 45.17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong như hình dưới đây. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.



A. $-4 < m < -3$.

B. $0 < m < 3$.

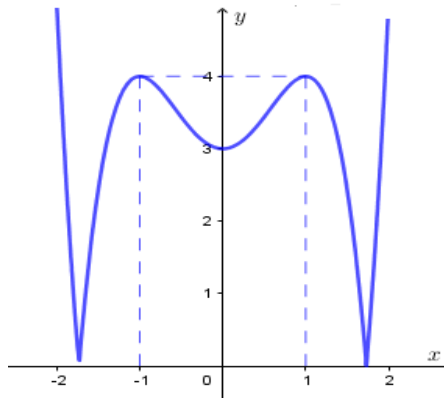
C. $m > 4$.

D. $3 < m < 4$.

Lời giải

Chọn D

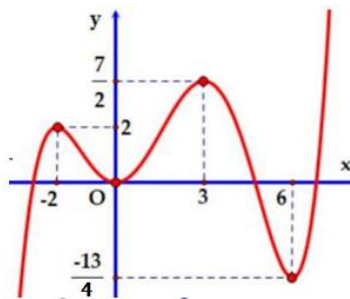
Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có được bằng cách: giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ nằm trên trục hoành, lấy đối xứng phần dưới trục hoành qua trục hoành.



Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x)|$, phương trình có 6 nghiệm khi $3 < m < 4$.

Câu 45.18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(2x^3 - 6x + 2) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x) = 2x^3 - 6x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$.

$$g(x) = 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên như sau

x	-1	1	2	
$g'(x)$	0	-	0	+
$g(x)$	6		-2	6

Đặt $t = 2x^3 - 6x + 2$, với $x \in [-1; 2]$ thì $t \in [-2; 6]$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có nhận xét với mỗi giá trị $t_0 \in (-2; 6]$ thì phương trình

$t_0 = 2x^3 - 6x + 2$ có hai nghiệm phân biệt $x \in [-1; 2]$ và tại $t_0 = -2$ thì phương trình

$t_0 = 2x^3 - 6x + 2$ có một nghiệm duy nhất.

Với nhận xét trên và đồ thị hàm số trên đoạn $[-2; 6]$ thì phương trình $f(2x^3 - 6x + 2) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 3 nghiệm phân biệt trên nửa khoảng $(-2; 6]$.

Câu 45.19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	-2	-1	1	4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	0	3	-1	1	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(3\cos x + 1) = -\frac{m}{2}$ có nghiệm?

A. 8.

B. 6.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 3\cos x + 1 \leq 4$.

Đặt $t = 3 \cos x + 1$, khi đó đề phương trình $f(3 \cos x + 1) = -\frac{m}{2}$ có nghiệm thì phương trình

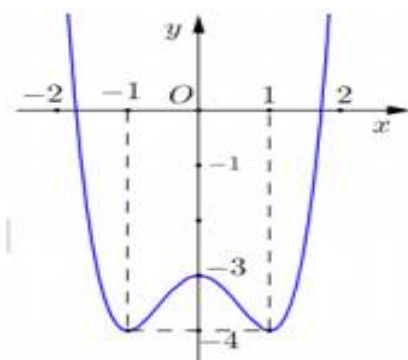
$$f(t) = -\frac{m}{2} \text{ có nghiệm } t \in [-2; 4].$$

Từ bảng biến thiên suy ra yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -1 \leq -\frac{m}{2} \leq 3 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq 2$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy, có tất cả 9 giá trị thỏa mãn.

Câu 45.20: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình sau.



Tìm m để phương trình $f(e^{x^2}) = m^2 + 5m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m = -4$.

B. $m > -3$.

C. $m > -4$.

D. $\begin{cases} m < -4 \\ m > -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = e^{x^2} \geq e^0 = 1$. Khi đó ứng với mỗi nghiệm $t > 1$, ta được hai nghiệm x .

Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$, ta thấy phương trình $f(t) = m^2 + 5m$ có đúng một nghiệm

$$t > 1 \text{ khi và chỉ khi } m^2 + 5m > -4 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ m > -1 \end{cases}.$$

Câu 45.21: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{1}{5}$	1	$-\infty$	

Số nghiệm thực của phương trình $5f(1-2x)+1=0$ là

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $5f(1-2x)+1=0 \Leftrightarrow f(1-2x)=-\frac{1}{5}$ (1).

Đặt $1-2x=t$ ($t \in \mathbb{R}$). Khi đó phương trình (1) trở thành phương trình $f(t)=-\frac{1}{5}$ (2).

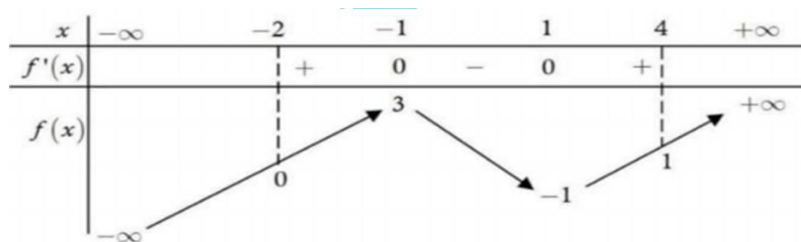
Số nghiệm x của phương trình (1) bằng số nghiệm t của phương trình (2).

Số nghiệm của phương trình (2) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(t)$ và đường thẳng $y=-\frac{1}{5}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=-\frac{1}{5}$ và đồ thị hàm số $y=f(t)$ có đúng 2 giao điểm phân biệt nên phương trình (2) có 2 nghiệm t phân biệt.

Vậy số nghiệm của phương trình $5f(1-2x)+1=0$ là 2.

Câu 45.22: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(3\cos x+1)=-\frac{m}{2}$ có nghiệm trên đoạn $[0;2\pi]$?

A. 8.

B. 6.

C. 7.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3\cos x+1$. Phương trình trở thành $f(t)=-\frac{m}{2}$ (*).

Khi $x \in [0;2\pi]$ thì $t \in [-2;4]$, do đó phương trình đã cho có nghiệm $x \in [0;2\pi]$ khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm $t \in [-2;4]$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $t \in [-2;4]$ thì tập giá trị của hàm số $f(t)$ là đoạn $[-1;3]$, nên phương trình (*) có nghiệm $t \in [-2;4]$ khi và chỉ khi $-1 \leq -\frac{m}{2} \leq 3 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq 2$.

Mà m nguyên nên có tất cả 9 giá trị.

Câu 45.23: Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm bậc ba có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'		0	0	
y	$+\infty$		4	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(e^{x^2}) = m$ có đúng ba nghiệm phân biệt?

A. 3.

B. Vô số.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t = e^{x^2}$, điều kiện $t = e^{x^2} \geq e^0 = 1$. Khi đó phương trình $f(e^{x^2}) = m$ (1) trở thành $f(t) = m$ (2).

Ta có sự tương ứng giữa t và x như sau: mỗi giá trị $t > 1$ cho tương ứng 2 giá trị x , với $t = 1$ thì chỉ có một giá trị tương ứng là $x = 0$, với $t < 1$ thì không cho giá trị x nào tương ứng.

Do đó phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 = 1 < t_2$, các nghiệm còn lại khác hai nghiệm trên (nếu có) thì phải bé hơn 1.

Vì phương trình (2) có một nghiệm $t_1 = 1$ nên $m = f(1) = 1$. Khi đó dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m = 1$ thỏa mãn bài toán. Vậy có một giá trị nguyên của m .

Câu 45.24: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $3|f(2x-1)| - 10 = 0$ là

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'		-	0	+
y	$+\infty$		3	$+\infty$

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $t = 2x - 1$, phương trình đã cho trở thành $|f(t)| = \frac{10}{3}$. Với mỗi giá trị t thì tương ứng có một giá trị $x = \frac{t+1}{2}$ nên số nghiệm t của phương trình $|f(t)| = \frac{10}{3}$ bằng số nghiệm x của phương trình $3|f(2x-1)| - 10 = 0$.

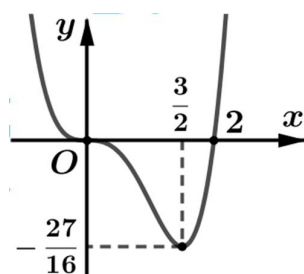
Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta suy ra được bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$	x_0	0	1	$+\infty$	
y'	-		+	-	0	+
y	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$

trong đó x_0 là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục hoành.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $|f(t)| = \frac{10}{3}$ có 4 nghiệm t phân biệt nên phương trình $3|f(2x-1)| - 10 = 0$ có 4 nghiệm x phân biệt.

Câu 45.25: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$?

A. 3.

B. 4.

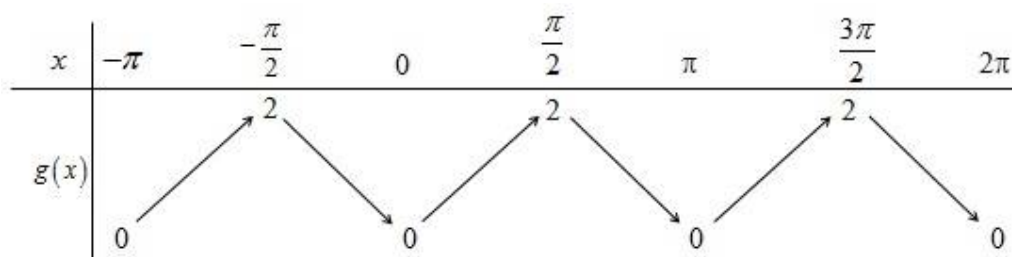
C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = 2|\sin x|$ trên đoạn $[-\pi; 2\pi]$



Phương trình $f(2|\sin x|) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có đúng 12 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt $t \in (0; 2)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra phương trình $f(t) = f\left(\frac{m}{2}\right)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$t \in (0; 2) \text{ khi và chỉ khi } -\frac{27}{16} < f\left(\frac{m}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \frac{m}{2} < 2 \\ \frac{m}{2} \neq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \neq 3 \end{cases}.$$

Do m nguyên nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 45.26: Cho hàm hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x^2 + 1)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

A. 12.

B. 198.

C. 6.

D. 190.

Lời giải

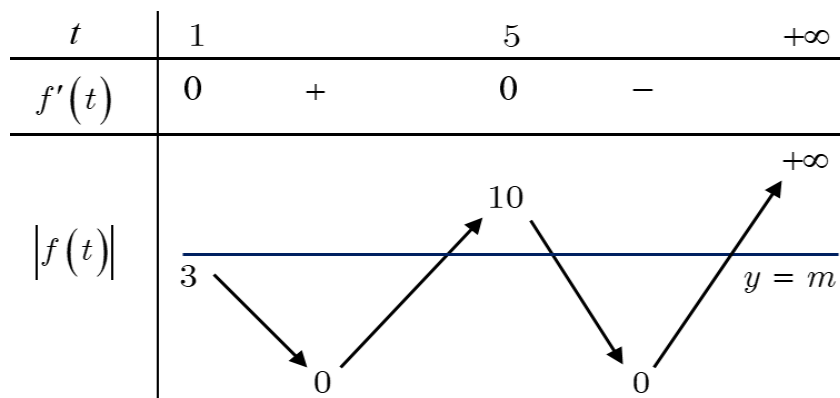
Chọn C

Đặt $t = x^2 + 1$, điều kiện $t \geq 1$, từ đó phương trình trở thành $|f(t)| = m, t \geq 1$.

Do $t \geq 1$ nên ta xét bảng biến thiên của hàm $y = f(t)$ trên $[1; +\infty)$ như sau:

t	1		5		$+\infty$
$f'(t)$	0	+	0	-	
$f(t)$					

Bảng biến thiên của hàm số $y = |f(t)|$ trên $[1; +\infty)$ là



Cứ mỗi nghiệm $t > 1$ cho được hai nghiệm x , do vậy để phương trình $|f(x^2 + 1)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $|f(t)| = m$ cần có 3 nghiệm $t > 1$. Dựa bảng biến thiên của hàm $y = |f(t)|$ ở trên ta có điều kiện $3 < m < 10$, mặt khác m nguyên nên $m \in \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên m thỏa mãn bài toán.

Câu 45.27: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-2018	2018	$-\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x + 2017) - 2018| = m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

A. 4034.

B. 4035.

C. 4036.

D. 4037.

Chọn B

Xét hàm số $y = f(x + 2017) - 2018$ có đồ thị bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang trái 2017 đơn vị, sau đó tịnh xuống dưới 2018 đơn vị. Ta được bảng biến thiên của hàm số $y = g(x) = f(x + 2017) - 2018$ như sau:

x	$-\infty$	-2017	-2016	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	-4036	0	$-\infty$

Khi đó đồ thị hàm số $y = |f(x + 2017) - 2018|$ gồm hai phần:

+ Phần 1: Giữ nguyên toàn bộ phần đồ thị hàm số $y = g(x)$ nằm phía trên trục hoành.

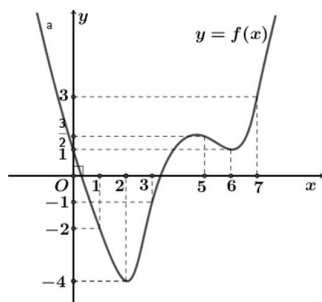
+ Phần 2: Lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành của đồ thị hàm số $y = g(x)$ qua Ox .

Vậy ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |g(x)|$ như sau:

x	$-\infty$	x_0	-2017	-2016	$+\infty$
$ g(x) $	$+\infty$	0	4036	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có đề phương trình $|f(x+2017)-2018|=m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 4036$ mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có 4035 giá trị m cần tìm. Chọn đáp án **B**

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $\left| f\left(\frac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right) \right| = m$ có nghiệm.

A. $-4 \leq m \leq -2$

B. $m > -4$

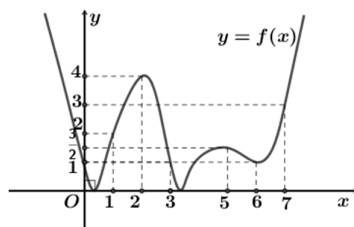
C. $2 < m < 4$

D. $2 \leq m \leq 4$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị đã cho ta có đồ thị của hàm $y = |f(x)|$ là



$$\text{Đặt } t = \frac{3x^2+2x+3}{2x^2+2} \Rightarrow t' = \frac{-4x^2+4}{(2x^2+2)^2}; t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
t'	$-$	0	$+$	$-$
t	$\frac{3}{2}$	1	2	$\frac{3}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow t \in [1; 2]$.

Vậy phương trình $\left| f\left(\frac{3x^2+2x+3}{2x^2+2}\right) \right| = m$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $|f(t)| = m$ có nghiệm $t \in [1; 2] \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 4$.

Câu 45.28: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ. Số giá trị nguyên của m để phương trình $|f(2x-3)| - m = 0$ có đúng 2 nghiệm phân biệt là

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	$+\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $2x-3=t$ phương trình đã cho trở thành $|f(t)| - m = 0 \Leftrightarrow |f(t)| = m$. (*)

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ và đường thẳng $y = m$ song song hoặc trùng với trục hoành.

Từ bảng biến thiên đã cho ta vẽ được bảng biến thiên của hàm số $y = |f(t)|$.

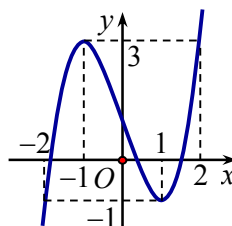
t	$-\infty$	t_n	0	1	$+\infty$
f(t)	$+\infty$	0	$+\infty$	3	$+\infty$
f(t)	$+\infty$	0	$+\infty$	3	$+\infty$

Do hàm số $t = 2x-3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên số nghiệm t của phương trình (*) bằng số nghiệm x của phương trình đã cho.

Dựa vào BBT ta thấy phương trình (*) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow 0 < m < 3$.

Với $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{1; 2\}$.

Câu 45.29: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $|f(x^2 - 2x)| = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?



A. 9.

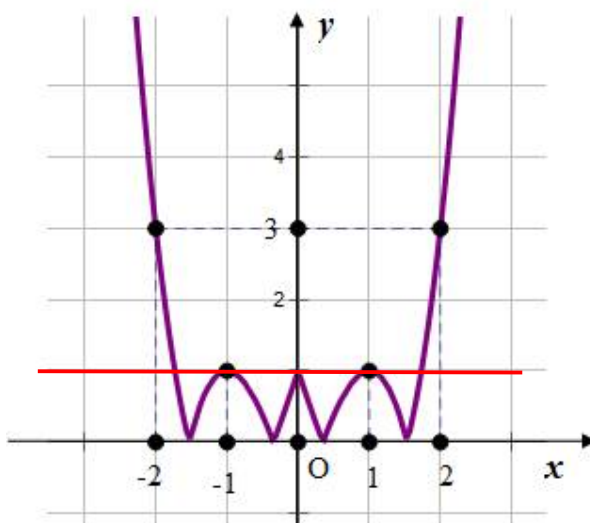
B. 7.

C. 6.

D. 8.

Lời giải

Chọn B



+ Ta có đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ có được bằng cách giữ nguyên phần đồ thị hàm $y = f(x)$ nằm bên phải trục Ox và đối xứng của chính phần đồ thị này qua Ox . Sau đó giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox và lấy đối xứng của phần đồ thị phía dưới Ox qua Ox . Như vậy đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ như hình vẽ.

Từ phương trình $|f(|x^2 - 2x|)| = 1$ Đặt $t = x^2 - 2x$ ta được $|f(t)| = 1$

Khi đó dựa vào đồ thị ta nhận thấy đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại 5 điểm là $t_1 = a \in (-2; 1)$, $t_2 = -1$, $t_3 = 0$, $t_4 = 1$, $t_5 = b \in (1; 2)$

Với $t = x^2 - 2x$

Ta có $t' = 2x - 2 \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	-1	$+\infty$

$t_1 = a \in (-2; 1)$, $t_2 = -1$, $t_3 = 0$, $t_4 = 1$, $t_5 = b \in (1; 2)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$x^2 - 2x = a \in (-2; -1)$ vô nghiệm.

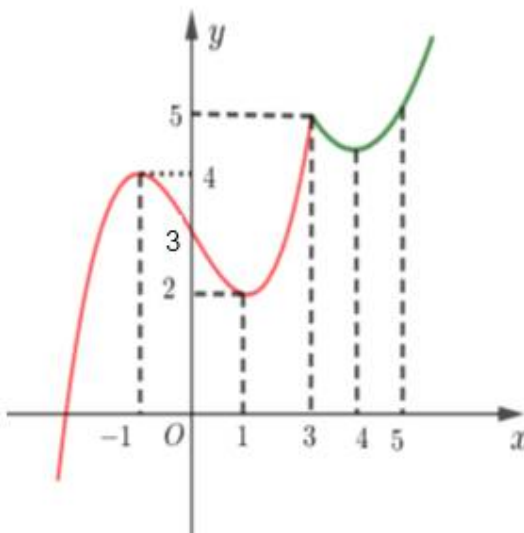
$x^2 - 2x = -1$ có đúng 1 nghiệm x .

$x^2 - 2x = 0$ có đúng 2 nghiệm x .

$x^2 - 2x = 1$ có đúng 2 nghiệm x .

$x^2 - 2x = b$ có đúng 2 nghiệm x .

Câu 45.30: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tìm m để phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$?

A. $2 < m < 3$ hoặc $f(4) < m < 5$.

B. $2 < m \leq 3$ hoặc $f(4) < m < 5$.

C. $2 \leq m < 3$ hoặc $f(4) < m < 5$.

D. $2 < m < 3$ hoặc $f(4) < m \leq 5$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = |x^2 - 2x|$, với $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

Ta thấy hàm số $u(x) = x^2 - 2x$ liên tục trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ và $u' = 2x - 2$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{3}{2}$	0	1	2	$\frac{7}{2}$
$u'(x)$		-	0	+	
$u(x)$	$\frac{21}{4}$				$\frac{21}{4}$
			-1		
$t = u(x) $	$\frac{21}{4}$				$\frac{21}{4}$
		0	1	0	

Nhận xét rằng với $t = 0$ hoặc $1 < t \leq \frac{21}{4}$ thì phương trình $t = |x^2 - 2x|$ có 2 nghiệm phân biệt; với $t = 1$ thì phương trình $t = |x^2 - 2x|$ có 3 nghiệm phân biệt; với mỗi $t \in (0; 1)$ thì phương trình $t = |x^2 - 2x|$ có 4 nghiệm phân biệt.

Với $t = |x^2 - 2x|$ phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ thành $f(t) = m, \left(t \in \left[0; \frac{21}{4}\right]\right)$

Dựa vào đồ thị f ta biện luận số nghiệm của phương trình $f(t) = m, \left(t \in \left[0; \frac{21}{4}\right]\right)$ trong các trường hợp sau

TH1: $m = 2$

$f(t) = 2 \Leftrightarrow t = 1$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 3 nghiệm phân biệt.

TH2: $2 < m < 3$

$f(t) = m \Leftrightarrow \begin{cases} t = a \in (0; 1) \\ t = b \in (1; 3) \end{cases}$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

TH3: $m = 3$

$f(t) = m \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = b \in (1; 3) \end{cases}$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

TH4: $3 < m < f(4)$

$f(t) = m \Leftrightarrow t = a \in (1; 4)$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 2 nghiệm phân biệt.

TH5: $m = f(4)$

$f(t) = m \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = b \in (1; 4) \end{cases}$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

TH6: $f(4) < m < 5$

$f(t) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(1; 5)$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

TH7: $m = 5$

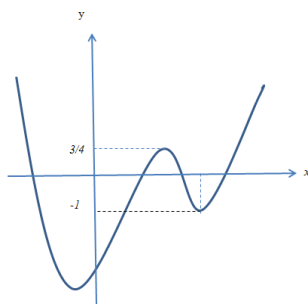
$f(t) = m$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $(1; 5)$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

TH8: $5 < m < f\left(\frac{21}{4}\right)$

$f(t) = m$ có 1 nghiệm thuộc $\left(1; \frac{21}{4}\right)$. Khi đó phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f(|x^2 - 2x|) = m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ khi và chỉ khi $2 < m < 3$ hoặc $f(4) < m < 5$.

Câu 45.31: Cho đồ thị hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x + m|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt là?



A. 0.

B. Vô số.

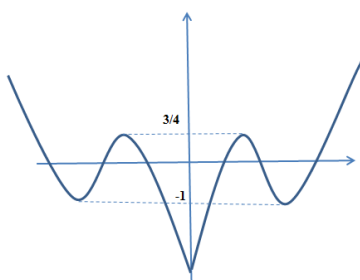
C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như sau:



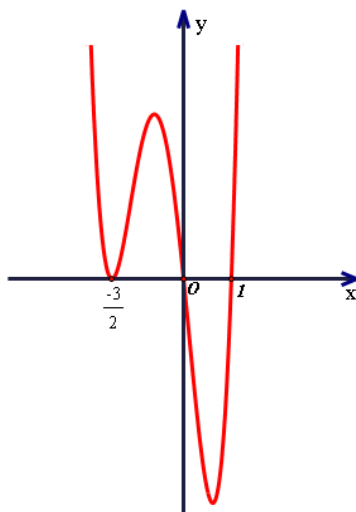
Đồ thị hàm số $y = f(|x+m|)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ dọc theo trục Ox nên số nghiệm của phương trình $f(|x+m|) = m$ bằng số nghiệm của phương trình $f(|x|) = m$.

Do đó, phương trình $f(|x+m|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị của hàm số

$$y = f(|x|) \text{ cắt đường thẳng } y = m \text{ tại 4 điểm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ m = -1 \end{cases}.$$

Vì m nguyên nên $m = -1$.

Câu 45.32: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(-\frac{3}{2}\right) \leq 0$; $f(0) = 3$; $f(1) = 0$; $f(2) > 3$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như sau:



Với $m \in (0; 3)$ số nghiệm thực của phương trình $f(x^2 - 3) = m$; (m là tham số thực), là

A. 3

B. 4

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	+
$f(x)$					3		0	

Đặt $t = x^2 - 3 \Rightarrow t \geq -3$, ta có phương trình $\begin{cases} f(t) = m \\ m \in (0; 3) \end{cases} (*)$ có 3 nghiệm phân biệt, hơn nữa do $f\left(-\frac{3}{2}\right) \leq 0; f(2) > 3$ nên phương trình $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt $t_1, t_2, t_3 \in \left(-\frac{3}{2}; 2\right)$ (thỏa mãn điều kiện) suy ra mỗi phương trình $t_i = x^2 - 3$; $t_i \in \left(-\frac{3}{2}; 2\right); i = 1, 2, 3$. đều có 2 nghiệm phân biệt. Vậy phương trình $f(x^2 - 3) = m$ có tất cả 6 nghiệm phân biệt với $m \in (0; 3)$

Câu 45.33: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Tìm tất cả các giá trị của m để bất phương trình $f(\sqrt{x-1}+1) \leq m$ có nghiệm?

A. $m \geq 1$

B. $m \geq -2$.

C. $m \geq 4$.

D. $m \geq 0$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t(x) = \sqrt{x-1} + 1, t \geq 1$.

Bất phương trình trở thành $f(t) \leq m$ ($t \geq 1$) (*). Bất phương trình (*) có nghiệm với $t \geq 1$ thì $\min_{[1; +\infty)} f(t) \leq m$. Dựa vào BBT ta thấy $\min_{[1; +\infty)} f(t) = -2 \Rightarrow m \geq -2$.

Câu 45.34: Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$ có bảng biến thiên dưới đây. Biết rằng với $m > \alpha$ thì bất phương trình $(4 - x^2)(3 - \sqrt{4 - x^2}) < m + 6$ luôn đúng với mọi m . Hãy cho biết kết luận nào sau đây đúng?

A. α là số nguyên âm.

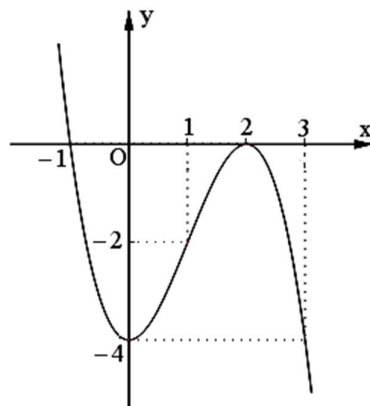
B. α là số nguyên dương.

C. α là số hữu tỉ dương.

D. α là số vô tỉ.

Lời giải.

Chọn A.



Đặt $t = \sqrt{4-x^2}$; $0 \leq t \leq 2$

Khi đó bất phương trình trên trở thành $-t^3 + 3t^2 - 4 < m + 2$ (*)

Đề $(4-x^2)(3-\sqrt{4-x^2}) < m+6$ luôn đúng với mọi m thì (*) luôn đúng với mọi $t \in [0; 2]$

Tức là $f(t) < m+2$ luôn đúng với mọi $t \in [0; 2]$

$$\Leftrightarrow m+2 > \max_{t \in [0; 2]} f(t) \Leftrightarrow m+2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$$

Câu 45.35: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $(\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x})^3 - 6\sqrt{2+x-x^2} - 9 \leq m$ có nghiệm.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	0	-4	$+\infty$	

A. 12

B. 13.

C. 14.

D. 15.

Lời giải

Chọn D

* ĐKXD: $-1 \leq x \leq 2$

* Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}$. Với $-1 \leq x \leq 2$ thì $\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{6}$

* Ta có $t^2 = 3 + 2\sqrt{2+x-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{2+x-x^2} = t^2 - 3$

* Bất phương trình đã cho trở thành $m \geq t^3 - 3t^2 = f(t)$, $t \in [\sqrt{3}; \sqrt{6}]$.

* Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[\sqrt{3}; \sqrt{6}]$ là

x	$-\infty$	0	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{6}$	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	0		-4		$+\infty$

* Yêu cầu bài toán $m \geq \min_{[\sqrt{3}; \sqrt{6}]} f(t) = -4$

* $m \geq -4$ kết hợp $m \in [-10; 10]$ và m nguyên nên có 15 giá trị của m .

Câu 45.36: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	1	4	$-\infty$

Bất phương trình $f(e^x) < e^{2x} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (\ln 2; \ln 4)$ khi và chỉ khi

- A.** $m \geq f(2) - 4$. **B.** $m \geq f(2) - 16$. **C.** $m > f(2) - 4$. **D.** $m > f(2) - 16$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(e^x) < e^{2x} + m$ nghiệm đúng với mọi $x \in (\ln 2; \ln 4)$ khi và chỉ khi

$$m > f(e^x) - e^{2x}, \forall x \in (\ln 2; \ln 4). (*)$$

$$\text{Đặt } t = e^x \Rightarrow t \in (2; 4)$$

$$\text{Bất phương trình } (*) \text{ trở thành : } m > f(t) - t^2, \forall t \in (2; 4)$$

$$\text{Xét hàm số } g(t) = f(t) - t^2 \text{ trên } (2; 4)$$

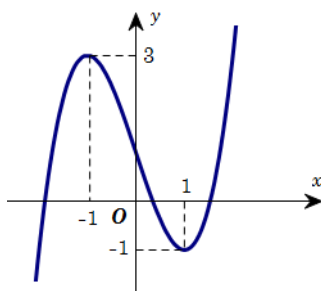
$$\text{Ta có } g'(t) = f'(t) - 2t < 0 \text{ (do } f'(t) < 4, \forall t \in (2; 4))$$

$$\text{Vậy } g(t) = f(t) - t^2 \text{ nghịch biến trên } (2; 4)$$

$$\text{Suy ra : } g(t) < g(2) = f(2) - 4$$

$$\text{Do đó để thỏa mãn yêu cầu bài toán ta có } m \geq f(2) - 4$$

Câu 45.37: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị hàm số như hình bên. Sử dụng đồ thị hàm số đã cho, tìm số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8|x|^3 - 6|x|(x^2 + 1)^2 = (m - 1)(x^2 + 1)^3$ có nghiệm.



A. 2

B. 0

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình } 8\left|\frac{x}{x^2+1}\right|^3 - 6\left|\frac{x}{x^2+1}\right| = m - 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2x}{x^2+1}\right|^3 - 3\left|\frac{2x}{x^2+1}\right| + 1 = m.$$

$$\text{Đặt } t = \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \geq 0. \text{ Ta có } x^2 + 1 \geq 2x \text{ suy ra } 0 \leq \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1. \text{ Do đó } 0 \leq t \leq 1.$$

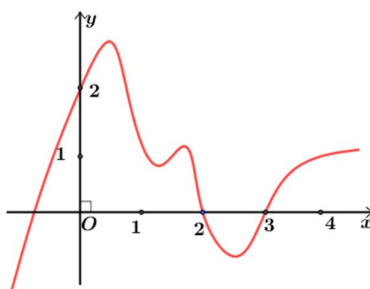
$$\text{Phương trình trở thành } t^3 - 3t + 1 = m \quad (*).$$

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (chỉ xét với $x \in [0; 1]$) và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy để phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm thuộc đoạn $[0; 1]$ khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 1$.

Như vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán đã cho.

Câu 45.38: Cho hàm số $y = f(x)$ có liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x^3 - 3x) + 3x^3 - 3x - 13 = (x^2 - 2)^3 - 3(x - 1)^2$.



A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

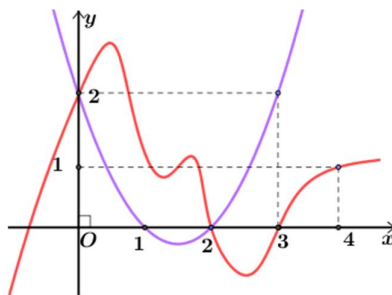
Chọn C

$$f(x^3 - 3x) + 3x^3 - 3x - 13 = (x^2 - 2)^3 - 3(x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow f(x^3 - 3x) = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 3x^3 + 9x + 2$$

$$\Leftrightarrow f(x^3 - 3x) = (x^3 - 3x)^2 - 3(x^3 - 3x) + 2$$

Đặt $t = x^3 - 3x$ ta có phương trình $f(t) = t^2 - 3t + 2$



$$\text{Dựa vào đồ thị thì } f(t) = t^2 - 3t + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = 0 \\ x^3 - 3x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \\ x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 5 nghiệm.

Câu 45.39: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập các giá trị nguyên của m để cho phương trình $f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$.

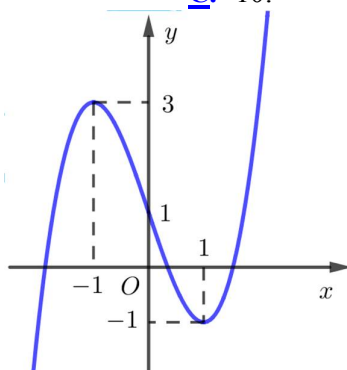
Tổng các phần tử của S bằng :

A. - 5.

B. - 8.

C. -10.

D. -6.



Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x$, do $x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x \in (0; 1] \Rightarrow t \in (0; 1]$. PT đã cho trở thành $f(t) = 3t + m$

$$\Leftrightarrow f(t) - 3t = m \quad (*)$$

Đặt $g(t) = f(t) - 3t$. Ta có: $g'(t) = f'(t) - 3$ (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có: $\forall t \in (0; 1]: f'(t) < 0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\forall t \in (0; 1]: g'(t) < 0$.

Do đó hàm số $g(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

$$\text{PT } (*) \text{ có nghiệm } t \in (0; 1] \Leftrightarrow \min_{[0;1]} g(t) \leq m < \max_{[0;1]} g(t) \Leftrightarrow g(1) \leq m < g(0)$$

$$\Leftrightarrow f(1) - 3 \leq m < f(0) \Leftrightarrow -4 \leq m < 1.$$

Vậy m nguyên là: $m = -4; -3; -2; -1; 0 \Rightarrow S = -10$.