Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

CHUYÊN ĐỀ 9:

GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam
Email : dangnamneu@gmail.com
Yahoo: changtraipkt
Mobile: 0976266202

PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ

Phương pháp:

Biến đổi hai vế nhờ các phép toán đại số cơ bản; nhóm nhân tử chung; quy đồng; dựa vào giá trị tuyệt đối;… sau đó nếu có dùng các bất đẳng thức cơ bản

$(x+y)^2 \geq 0$ và $(x-y)^2 \geq 0$

$$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)=\frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)\geq 0$$

$$(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)\geq 0 \quad (*)$$

Từ (*) ta có một bất đẳng thức khác hay được sử dụng:

$$(xy+yz+zx)^2 \geq 3(xy.yz+yz.zx+zx.xy)=3xyz(x+y+z)$$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng $-\frac{1}{2}\leq xy+yz+zx\leq 1$.

Lời giải:

Ta có

$$2(xy+yz+zx)+1=2(xy+yz+zx)+x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2\geq 0$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\geq -\frac{1}{2}$$

Lại có

$$1-(xy+yz+zx)=x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$$

$$=\frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)\geq 0$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx\leq 1$$

Từ đó suy ra đpcm.

Bài 2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x\leq y\leq z$. Chứng minh rằng

$$y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{y}(x+z)\leq\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)(x+z)$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải:

BĐT tương đương với

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)(x+z)-y\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{y}(x+z)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)(x+z-y)+\frac{1}{y}(x+z)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(x+z)\left(\frac{1}{y}+\frac{x+z-y}{xz}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x+z)(y-x)(z-y)}{xyz}\ge 0.$$ đúng vì $0<x\le y\le z$.

Ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 3. Cho 2 số thực $x\neq 0, y\neq 0$ thay đổi vào thỏa mãn điều kiện:

$$xy(x+y)=x^2+y^2-xy.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$A=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$$

Lời giải:

Ta có

$$A=\frac{x^3+y^3}{x^3y^3}=\frac{(x+y)\left(x^2+y^2-xy\right)}{x^3y^3}=\frac{(x+y)(x+y)xy}{x^3y^3}=\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2$$

Theo giả thiết ta có

$$xy(x+y)=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy\ge(x+y)^2-\frac{3}{4}(x+y)^2=\frac{1}{4}(x+y)^2>0.$$

$$\Rightarrow 0<\frac{x+y}{xy}\le 4\Rightarrow A=\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2\le 16.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=-\frac{1}{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của A bằng 16.

Bài 4. Cho x,y,z là các số thực thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=2\left(x^3+y^3+z^3\right)-\left(x^2y+y^2z+z^2x\right).$$

Lời giải :

Ta có $x,y,z\in[0;1]\Rightarrow\begin{cases}\left(1-x^2\right)(1-y)+\left(1-y^2\right)(1-z)+\left(1-z^2\right)(1-x)\ge 0\\ x^3\le x^2\le x;\ y^3\le y^2\le y;\ z^3\le z^2\le z\end{cases}$

Từ đó suy ra $x+y+z+x^2+y^2+z^2-\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\le 3$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\Rightarrow P = 2\left(x^3+y^3+z^3\right)-\left(x^2y+y^2z+z^2x\right)\le 3$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P=3$ khi $x=y=z=1$.

Bài 5. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=\frac{5}{3}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}.$$

Lời giải :

Do $a,b,c>0$ nên bất đẳng thức tương đương với

$bc+ca-ab<1$

Theo bất đẳng thức cơ bản ta có

$\left(a+b-c\right)^2\ge 0\Rightarrow bc+ca-ab\le\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)=\frac{5}{6}<1$ luôn đúng

Từ đó ta có đpcm.

Bài 6. Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}+\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{4}}+\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{4}}$$

Lời giải :

Ta có

$$a+\frac{(b-c)^2}{4}-\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2=a(a+b+c)+\frac{(b-c)^2}{4}-\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(b-c)^2}{4}-\frac{(b+c)^2}{4}=-bc\le 0\Rightarrow\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}\le a+\frac{b+c}{2}$$

Tương tự

$$\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{4}}\le b+\frac{c+a}{2}$$

$$\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{4}}\le c+\frac{a+b}{2}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên suy ra

$$P=\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}+\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{4}}+\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{4}}\le 2(a+b+c)=2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=0,c=1$ hoặc các hoán vị

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Giá trị lớn nhất của P bằng 2.

Bài 7. Cho $a,b,c\in[0;1]$ thỏa mãn $a+b+c=\frac{3}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\cos\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Lời giải :

Do $a,b,c\in[0;1]$ nên $0\le a^2+b^2+c^2\le a+b+c=\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2}$

vậy P lớn nhất(nhỏ nhất) khi $a^2+b^2+c^2$ nhỏ nhất (lớn nhất)

- Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2$

Ta có $a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}(a+b+c)^2=\frac{3}{4}$. Suy ra GTLN của P bằng $\cos\frac{3}{4}$; xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{2}$

- Tìm giá trị lớn nhất của $a^2+b^2+c^2$

giả sử :

$a\le b\le c\Rightarrow a+b+c=\frac{3}{2}\le 3c\Rightarrow c\ge\frac{1}{2}$.

Vậy $a^2+b^2+c^2=(a+b)^2-2ab+c^2\le(a+b)^2+c^2=c^2+\left(\frac{3}{2}-c\right)^2\le\frac{5}{4}$

Do $(c-1)(2c-1)\le 0$

Suy ra GTNN của P bằng $\cos\frac{5}{4}$; xảy ra khi $(a,b,c)=\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$hoặc các hoán vị

Bài 8. Cho x,y là các số thực không âm. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(x+1)^2(y+1)^2}$$

Lời giải :

Ta có $P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(x+1)^2(y+1)^2}=\frac{\left(x+xy^2\right)-\left(y+yx^2\right)}{(x+1)^2(y+1)^2}$

$=\frac{x(y+1)^2-y(x+1)^2}{(x+1)^2(y+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}-\frac{y}{(y+1)^2}$

Với $x,y\ge 0$ thì $0\le\frac{x}{(x+1)^2}\le\frac{1}{4};0\le\frac{y}{(y+1)^2}\le\frac{1}{4}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Từ đó suy ra GTLN của P bằng $\frac{1}{4}$ khi $x=1; y=0$

GTNN của P bằng $-\frac{1}{4}$ khi $x=0; y=1$.

Bài 9. Cho $a,b,c\ge 0$ là các số đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right)\ge 4$$

Lời giải :

Giả sử $c=\min(a,b,c)$, khi đó do $a,b,c\ge 0$ ta suy ra

$$ab+bc+ca\ge ab$$

$$\frac{1}{(b-c)^2}\ge\frac{1}{b^2}$$

$$\frac{1}{(a-c)^2}\ge\frac{1}{a^2}$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$ab\left(\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}\right)\ge 4\Leftrightarrow\frac{ab}{(a-b)^2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-4\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{ab}{(a-b)^2}+\frac{(a-b)^2}{ab}-2\ge 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{ab}{(a-b)^2}}-\sqrt{\frac{(a-b)^2}{ab}}\right)^2\ge 0 \text{ luôn đúng}$$

Vậy ta có đpcm.

Bài 10. Cho $a,b,c>0$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}$$

Lời giải :

Ta có $b=\frac{2ac}{a+c}$ thay vào $P=\frac{a+\frac{2ac}{a+c}}{2a-\frac{2ac}{a+c}}+\frac{c+\frac{2ac}{a+c}}{2c-\frac{2ac}{a+c}}=\frac{a+3c}{2a}+\frac{c+3a}{2c}=1+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 4$

Bài 11. Cho $a,b,c\in[1;3]$ thỏa mãn $a+b+c=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=a^2+b^2+c^2$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Lời giải :

Cách 1 :

Đặt $a = x+1; b = y+1; c = z+1; x, y, z \in [0;2]$

Khi đó $P = a^2 + b^2 + c^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2(x+y+z) + 3$

$= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) + 2(x+y+z) + 3$

$= -2(xy+yz+zx) + 18$

Từ $x, y, z \in [0;2] \Rightarrow (2-x)(2-y)(2-z) \ge 0$

$\Leftrightarrow 8 - 4(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) - xyz \ge 0$

$\Rightarrow -2(xy+yz+zx) = -4 - xyz \le -4$ do $xyz \ge 0$

Từ đó suy ra $P \le -2(xy+yz+zx) + 18 \le 14$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) = (1,2,3)$ hoặc các hoán vị

Bình luận :

Đặt $a = x+1; b = y+1; c = z+1$ để chúng ta tận dụng tích $xyz \ge 0$

Nếu không abc sẽ rất khó đánh giá

Cách 2 : Xem phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Bài 12. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ và $x - y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \dfrac{x+y-2}{z+2}$

Lời giải :

Ta có $x^2 + y^2 = 5 - z^2 = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 + (x-y)^2\right) = \frac{1}{2}\left((x+y)^2 + (3-z)^2\right)$

$(x+y)^2 = 1 + 6z - 3z^2$

Ta có :

$P(z+2) + 2 = (x+y) \Rightarrow (x+y)^2 = (P(z+2)+2)^2$

$\Leftrightarrow (P^2+3)z^2 + (4P^2 + 4P - 6)z + 4P^2 + 8P + 3 = 0$

Coi đây là phương trình bậc hai với ẩn là z, để phương trình có nghiệm thì

$\Delta'_z = (2P^2 + 2P - 3)^2 - (P^2+3)(4P^2 + 8P + 3) \ge 0 \Leftrightarrow -\frac{36}{23} \le P \le 0$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

- Với $x=2; y=0; z=1$ thì $P=0$ là giá trị lớn nhất của P.
- Với $x=\frac{20}{31}; y=-\frac{66}{31}; z=\frac{7}{31}$ thì $P=-\frac{36}{23}$ là giá trị nhỏ nhất của P.
-

Bài 13. Cho $a,b,c\in[0;1]$. Chứng minh rằng $\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\geq 3abc$

Lời giải :

$$(a-1)^2\geq 0\Rightarrow a(2-a)\leq 1\Rightarrow \frac{1}{2-a}\geq a$$

Tương tự :

$$\frac{1}{2-b}\geq b;\frac{1}{2-c}\geq c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\geq a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\geq 3abc \text{ do } abc\leq 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 14. Cho $a,b,c\in[0;1]$ và $a+b+c\neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab+1}+\frac{1}{bc+1}+\frac{1}{ca+1}\leq\frac{5}{a+b+c}$$

Lời giải :

Không mất tính tổng quát ta giả sử $1\geq a\geq b\geq c\geq 0$

Khi đó

$$\frac{c}{ab+1}+\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}\leq\frac{a+b+c}{bc+1}\leq\frac{1+b+c+(1-b)(1-c)+bc}{bc+1}=2$$

Mặt khác

$$\frac{a+b}{ab+1}+\frac{b+c}{bc+1}+\frac{c+a}{ca+1}=\left(\frac{a+b}{ab+1}-1\right)+\left(\frac{b+c}{bc+1}-1\right)+\left(\frac{c+a}{ca+1}-1\right)+3$$

$$=-\frac{(1-a)(1-b)}{ab+1}-\frac{(1-b)(1-c)}{bc+1}-\frac{(1-c)(1-a)}{ca+1}+3\leq 3$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1, c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 15. Cho $a,b>0$ thỏa mãn $a^2+b^2=1$. Chứng minh rằng

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{2}+\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{2}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2 \Leftrightarrow a+b+2ab\ge 2\sqrt{2}ab+1$

$\Leftrightarrow a+b+(a+b)^2-1\ge 2\sqrt{2}\left(\frac{(a+b)^2-1}{2}\right)+1$

$\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{2}\right)t^2+t+\sqrt{2}-2\ge 0$ (*) ; với $t=a+b\in\left(1;\sqrt{2}\right]$

(Vì $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab>a^2+b^2=1\Rightarrow a+b>1$

Và $(a+b)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)=2\Rightarrow a+b\le\sqrt{2}$

Suy ra $t\in\left(1;\sqrt{2}\right]$). Bất đẳng thức (*) luôn đúng với $t\in\left(1;\sqrt{2}\right]$.

Bài 16. Cho $a,b,c\ge 0$. Chứng minh rằng $\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 4(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

Lời giải :

Không mất tính tổng quát ta giả sử b nằm giữa a và c, ta xét hai trường hợp

- Nếu $a\ge b\ge c\Rightarrow VT\ge 0\ge VP$, ta có đpcm.
- Nếu $c\ge b\ge a$, khi đó vế phải

$VP=4(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

$=4(a+b+c)(b-a)(c-b)(c-a)$

$\le\left((a+b+c)(b-a)+(c-b)(c-a)\right)^2$

Ta chỉ cần chứng minh

$(a+b+c)(b-a)+(c-b)(c-a)\le a^2+b^2+c^2$

Thật vậy bất đẳng thức này tương đương với

$-a(2a+2c-b)\le 0$, đúng

Vậy ta có đpcm.

Bài 17. Cho $a,b,c\in[0;1]$. Chứng minh rằng

$a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)\le 1$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$a+b+c-(ab+bc+ca)\le 1$

Làm ta nghĩ đến :

$(1-a)(1-b)(1-c)\ge 0 \Leftrightarrow 1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc\ge 0$

$\Rightarrow (a+b+c)-(ab+bc+ca)\le 1-abc\le 1$

Từ đó ta có đpcm. Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=0, c=1$ hoặc các hoán vị.

Bài 18. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{4}{(a+b)^3}+\frac{4}{(b+c)^3}+\frac{4}{(c+a)^3}\ge \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

Lời giải :

Đặt $\begin{cases} a+b=x \\ b+c=y \\ c+a=z \end{cases}$ do $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$ nên $x,y,z>0$ và $\begin{cases} a=3-y \\ b=3-z \\ c=3-x \end{cases}$

Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{4}{x^3}+\frac{4}{y^3}+\frac{4}{z^3}\ge \frac{3-y}{y}+\frac{3-x}{x}+\frac{3-z}{z}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{x^3}-\frac{3-x}{x}\right)+\left(\frac{4}{y^3}-\frac{3-y}{y}\right)+\left(\frac{4}{z^3}-\frac{3-z}{z}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2)^2}{x^3}+\frac{(y+1)(y-2)^2}{y^3}+\frac{(z+1)(z-2)^2}{z^3}\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng, từ đó ta có đpcm.

Bài 19. Chứng minh rằng với mọi $a,b\in[0;1]$ thì ta luôn có $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\le \frac{2}{1+ab}$

Lời giải :

Bất đẳng thức tương đương với

$(1+ab)(2+a^2+b^2)\le 2(1+a^2)(1+b^2) \Leftrightarrow (ab-1)(a-b)^2\le 0$, bất đẳng thức cuối luôn đúng. Ta có đpcm.

Bài 20. Cho $x,y,z\in[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=(1+xyz)\left(\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\right)$$

Lời giải :

Sử dụng bài 19, ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}\le\frac{2}{1+\sqrt{x^3y^3}}$$

$$\frac{1}{1+z^3}+\frac{1}{1+xyz}\le\frac{2}{1+\sqrt{xyz^4}}$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{x^3y^3}}+\frac{2}{1+\sqrt{xyz^4}}\le\frac{4}{1+\sqrt{\sqrt{x^4y^4z^4}}}=\frac{4}{1+xyz}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\le\frac{3}{1+xyz}\Rightarrow P=(1+xyz)\left(\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+y^3}+\frac{1}{1+z^3}\right)\le 3$$

Dẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$

Vậy giá trị lớn nhất của $P=3$.

Bài 21. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a\le b\le c$. Chứng minh rằng

$$(a-b+c)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 1$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{1}{a-b+c}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\ge\frac{1}{b}+\frac{1}{a-b+c}$$

$$\Leftrightarrow\frac{a+c}{ac}\ge\frac{a+c}{b(a-b+c)}\Leftrightarrow\frac{1}{ac}\ge\frac{1}{b(a-b+c)}$$

$$\Leftrightarrow b(a-b+c)\ge ac\Leftrightarrow a(b-c)-b(b-c)\ge 0\Leftrightarrow(a-b)(b-c)\ge 0$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng do $a\le b\le c$. Ta có đpcm.

Bài 22. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}$$

Lời giải :

Ta có $a^2+ab+b^2=\frac{3}{4}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a-b)^2\ge\frac{3}{4}(a+b)^2$

$$\Rightarrow\sqrt{a^2+ab+b^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}|a+b|\ge\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$$

Tương tự ta có

$$\sqrt{b^2+bc+c^2}\ge\frac{\sqrt{3}}{2}|b+c|\ge\frac{\sqrt{3}}{2}(b+c)$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\sqrt{c^2+ac+a^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}|c+a| \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(c+a)$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta suy ra

$P \ge \sqrt{3}(a+b+c) = \sqrt{3}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho $ab \ge 0$. Chứng minh rằng $\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) \ge \left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)$

1.2. Cho $x,y,z \in [0;2]$ thỏa mãn $x+y+z=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2+y^2+z^2$.

1.3. Chứng minh rằng với mọi x,y,z không âm ta luôn có $(x+2y+z)(x+y+z)^2 \ge 4(x+y)(y+z)(z+x)$.

1.4. Cho $a,b,c \in [1;2]$. Chứng minh rằng $3(ab+bc+ca) \ge 2(a+b+c)+a^2b+b^2c+c^2a$

1.5. Cho $a,b,c>0$ và $b=\min(a,b,c)$. Chứng minh rằng $(a-b+c)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \le 1$

1.6. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+\left(\frac{b+c}{a}\right)^3} \le 1+\frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a}\right)^2$, từ đó chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \ge 1$$

1.7. Cho $x,y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\frac{x^3}{x^3+8y^3}}+\sqrt{\frac{4y^3}{y^3+(x+y)^3}}$

1.8. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a+c}{3a+b}+\frac{a+b}{3a+c}+\frac{2a}{2a+b+c} < 2$$

1.9. Cho $xy \ge 0$ và $x^2+2y^2=1$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+2y} \ge 1+\sqrt{1+\sqrt{2}}$

1.10. Chứng minh rằng với ba số thực a,b,c ta luôn có $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \ge (ab+bc+ca-1)^2$

PHƯƠNG PHÁP KHẢO SÁT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đưa bài toán nhiều biến về bài toán một biến, khảo sát tính tính đơn điệu của hàm số suy ra giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số.
Các hướng giải quyết bài toán loại này
+ Nếu trong biểu thức có xuất hiện biểu thức đối xứng của x, y đặt $t = x + y$ hoặc $t = xy$.
+ Nếu không biểu diễn các biến về một biến được có thể coi biểu thức đó là hàm một biến và các biến còn lại là hằng số.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1;4]$ và $x \geq y, x \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

<u>Lời giải:</u>

Ta có

$$P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} = \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}}$$

Đặt $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z}$, ta có $abc = 1, bc = \frac{x}{y} \in [1;4]$

Khi đó ta có

$$P = \frac{1}{2+3a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$$

Mặt khác ta có

$\frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{2+b+c}{1+bc+b+c} = 1 + \frac{1-bc}{1+bc+b+c} \geq 1 + \frac{1-bc}{1+bc+2\sqrt{bc}} = \frac{2}{\sqrt{bc}+1}$, do $bc \geq 1$. Suy ra

$P \geq \frac{1}{2+3a} + \frac{1}{\sqrt{bc}+1} = \frac{1}{2+\frac{3}{bc}} + \frac{1}{\sqrt{bc}+1} = f(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{1}{t+1}$, với $t = \sqrt{bc} \in [1;2]$.

Ta có $f'(t) = 2\left[\frac{3t}{\left(2t^2+3\right)^2} - \frac{1}{(t+1)^2}\right] < 0$

Vì $\sqrt{3t}(t+1)^2 - \left(2t^2+3\right) \leq \frac{t+3}{2}(t+1)^2 - \left(2t^2+3\right)$

$\leq \frac{2+3}{2}(t+1)^2 - \left(2t^2+3\right) = -\frac{(4t-1)(t-1)}{2} \leq 0$

Do đó $f(t)$ nghịch biến trên đoạn $[1;2]$, suy ra

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$P \geq f(t) \geq f(2) = \frac{34}{33}.$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 4, y = 1, z = 2.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{34}{33}$.

Bài 2. Cho các số thực dương $x, y, z \in (0;4]$ và $x \leq y; x \leq z$ và thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 2\left(xy + yz + zx\right).$$

Lời giải:

Xét

$P = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z - 2\left(xy + yz + zx\right)$

Ta có

$f(x,y,z) - f(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}) = y^2 + z^2 + y + z - 2\left(yz + xy + zx\right) - 2\sqrt{yz} + 4x\sqrt{yz}$

$= \left(y - z\right)^2 + \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 - 2x\left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2$

$= \left(\sqrt{y} - \sqrt{z}\right)^2 \left(y + z - 2x + 1 + 2\sqrt{yz}\right) \geq 0$, vì $x \leq y, x \leq z.$

Đặt $t = \sqrt{yz} \Rightarrow x = \frac{1}{t^2}, t = \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{2}$. Khi đó $f(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}) = f(\frac{1}{t^2},t,t) = \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^2} + 2t - \frac{4}{t} = f(t)$

Ta có

$f'(t) = \left(2 + \frac{4}{t^2}\right)\left(1 - \frac{1}{t^3}\right), f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$

Lập bảng biến thiên ta suy ra

$\min P = \min f(t) = f(1) = 0.$ Xảy ra khi $x = y = z = 1.$

Bài 3. Cho $\frac{1}{4} \leq x \leq 1; y, z \geq 1$ sao cho $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z}.$

Lời giải:

Ta có $\frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} \geq \frac{2}{1+\sqrt{yz}} \Rightarrow P \geq \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+\sqrt{yz}} = \frac{1}{1+\frac{1}{yz}} + \frac{2}{1+\sqrt{yz}}$

Đặt $t = \sqrt{yz} \Rightarrow 1 \leq t = \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 2 \Rightarrow P = f(t) = \frac{t^2}{t^2+1} + \frac{2}{1+t}$

Ta có $f'(t) = \frac{2t}{\left(t^2+1\right)^2} - \frac{2}{\left(1+t\right)^2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$f(t) \geq f(2) = \frac{22}{15}$

Suy ra $\min P = \frac{22}{15}$ khi $x = \frac{1}{4}; y = z = 2$.

Bài 4. Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$P = \frac{2\left(x^2 + 6xy\right)}{1 + 2xy + 2y^2}$.

Lời giải:

Vì $x^2 + y^2 = 1$, nên

$$P = \frac{2\left(x^2 + 6xy\right)}{x^2 + y^2 + 2xy + 2y^2} = \frac{2\left(x^2 + 6xy\right)}{x^2 + 3y^2 + 2xy}$$

+ Nếu $y = 0 \Rightarrow P = 2$.

+ Xét với $y \neq 0 \Rightarrow P = \frac{2\left(t^2 + 6t\right)}{t^2 + 2t + 3}, t = \frac{x}{y} \in \mathbb{R}$.

Xét hàm số $f(t)$ trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f'(t) = \frac{-4\left(2t^2 - 9\right)}{\left(t^2 + 2t + 3\right)^2} = 0 \Leftrightarrow t = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Lập bảng biến thiên ta suy ra

$$\max P = \max f(t) = f\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{48\sqrt{2} - 18}{17}, \text{ khi } x = \pm\frac{3\sqrt{11}}{11}, y = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}.$$

$$\min P = \min f(t) = f\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-18 - 48\sqrt{2}}{17}, \text{ khi } x = \mp\frac{3\sqrt{11}}{11}, y = \pm\sqrt{\frac{2}{11}}.$$

Bài 4. Cho $a \geq b > 0$. Chứng minh rằng: $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$.

Lời giải:

Lấy logarit cơ số tự nhiên 2 vế BĐT cần chứng minh trở thành

$$b\ln\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right) \leq a\ln\left(2^b + \frac{1}{2^b}\right) \Leftrightarrow \frac{\ln\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)}{a} \leq \frac{\ln\left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)}{b} \Leftrightarrow f(a) \leq f(b).$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Trong đó $f(t)=\dfrac{\ln\left(2^t+\dfrac{1}{2^t}\right)}{t}, t>0$. Do vậy ta chỉ cần chứng minh hàm $f(t)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Thậy vậy, ta có

$$f'(t)=\frac{4^t\ln 4^t-\left(4^t+1\right)\ln\left(4^t+1\right)}{\left(4^t+1\right)t^2}=\frac{\ln\dfrac{\left(4^t\right)^{4^t}}{\left(4^t+1\right)^{\left(4^t+1\right)}}}{\left(4^t+1\right)t^2}<0.$$ Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Bài 5. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=4\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}\right)-9\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right).$$

Lời giải:

Theo giả thì

$2\left(a^2+b^2\right)+ab=(a+b)(ab+2)$, chia cả 2 vế của đẳng thức này cho ab ta được

$2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+1=a+\dfrac{2}{a}+b+\dfrac{2}{b}$.

Sử dụng BĐT Cô si ta có

$a+\dfrac{2}{b}+b+\dfrac{2}{a}\ge 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, suy ra

$2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+1\ge 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$, đặt

$t=\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\Rightarrow 2t+1\ge 2\sqrt{2}\sqrt{t+2}\Rightarrow 4t^2-4t-15\ge 0\Rightarrow t\ge\dfrac{5}{2}$.

Vậy ta có $P=f(t)=4t^3-9t^2-12t+18$

Ta có $f'(t)=12t^2-18t-12\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=2>\dfrac{5}{2}$.

Lập bảng biến thiên suy ra $\min f(t)=-\dfrac{23}{4}$, khi $t=\dfrac{5}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\dfrac{23}{4}$, khi $\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}\vee\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$.

Bài 6. Cho x,y,z là các số thực không âm có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$P = xy + yz + zx - 2xyz.$$

Lời giải:

Giả sử $x = \min(x, y, z) \Rightarrow 3x \le x + y + z = 1 \Rightarrow x \le \frac{1}{3}.$

Khi đó ta có

$P = xy + yz + zx - 2xyz = yz(1-2x) + xy + zx \ge 0.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1, y = z = 0.$

Mặt khác ta lại có

$$P = yz(1-2x) + x(y+z) \le x(1-x) + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 (1-2x) = f(x)$$

Ta tìm giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{1}{3}\right].$

Ta có $f'(x) = \frac{3}{2}x\left(\frac{1}{3} - x\right) \ge 0$, do đó $f(x)$ đồng biến trênđoạn $\left[0; \frac{1}{3}\right].$

Vậy $\max P = \max f(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{27}$. Khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}.$

Bài 7. Cho x, y, z là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + xyz \ge 4.$$

Lời giải:

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x = \min(x, y, z) \Rightarrow 3x \le x + y + z = 3 \Rightarrow x \le \frac{1}{3}.$

Khi đó ta có

$P - 4 = x^2 + (y+z)^2 - 2yz + xyz - 4 = (x-2)yz + x^2 + (3-x)^2 - 4$

$= f(t) = (x-2)t + 2x^2 - 6x + 5, 0 \le t = yz \le \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = \left(\frac{3-x}{2}\right)^2.$

Vậy ta tìm giá trị nhỏ nhất của $f(t)$ trên $\left[0; \left(\frac{3-x}{2}\right)^2\right]$, ta có $f(t)$ là hàm số nghịch biến do $x - 2 < 0$.

Vậy $P - 4 = f(t) \ge f\left(\left(\frac{3-x}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}(x-1)^2(x+2) \ge 0 \Rightarrow P \ge 4.$ Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1.$

Bài 8. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh

$$5\left(a^2 + b^2 + c^2\right) \le 6\left(a^3 + b^3 + c^3\right) + 1.$$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Không mất tính tổng giả sử $a=\min(a,b,c)\Rightarrow a\le \frac{1}{3}.$

BĐT đã cho tương đương với

$$5\left(a^2+(b+c)^2-2bc\right)\le 6\left(a^3+(b+c)^3-3bc(b+c)\right)+1$$

$$\Leftrightarrow 5\left(a^2+(1-a)^2-2bc\right)\le 6\left(a^3+(1-a)^3-3bc(1-a)\right)+1$$

$$\Leftrightarrow (9a-4)bc+(2a-1)^2\ge 0.$$

Ta đặt $t=bc\Rightarrow 0<t\le\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\left(\frac{1-a}{2}\right)^2$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$f(t)=(9a-4)t+(2a-1)^2\ge 0, t\in\left[0;\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\right]$$

Do $f(t)$ là hàm nghịch biến nên $f(t)\ge f\left(\left(\frac{1-a}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{4}a(3a-1)^2\ge 0.$ Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}.$

Bài 9. Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $ab+a+b=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{3a}{b+1}+\frac{3b}{a+1}+\frac{ab}{a+b}-\left(a^2+b^2\right).$$

Lời giải:

Đặt $t=a+b\Rightarrow ab=3-t; a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=t^2-2(3-t)=t^2+2t-6$

Ta có $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\Rightarrow 3-t\le\frac{1}{4}t^2\Leftrightarrow t\ge 2.$

Suy ra $P=\frac{3\left(a^2+b^2\right)+3(a+b)}{ab+a+b+1}+\frac{ab}{a+b}-\left(a^2+b^2\right)=-t^2+t+\frac{12}{t}-\frac{5}{2}$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+t+\frac{12}{t}-\frac{5}{2}$ với $t\ge 2$

Ta có $f'(t)=-2t+1-\frac{12}{t^2}<0, t\ge 2$. Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên

$[2;+\infty)\Rightarrow P=f(t)\le f(2)=\frac{3}{2}.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1.$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 1 khi $a=b=1.$

Bài 10. Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}x+y+z=4\\ xyz=2\end{cases}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Chứng minh rằng $183-165\sqrt{5} \le x^4+y^4+z^4 \le 18$.

Lời giải:

Ta có $P = x^4+y^4+z^4 = \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 - 2\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)$

$=\left((x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\right)^2 - 2(xy+yz+zx)^2 + 2xyz(xy+yz+zx)$

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} x+y+z=4 \\ xyz=2 \end{cases}$, đặt $t = xy+yz+zx \Rightarrow P = 2\left(t^2-32t+144\right)$

Ta có $(y+z)^2 \ge 4yz \Rightarrow (4-x)^2 \ge \dfrac{8}{x}$, giải bất phương trình này ta suy ra $3-\sqrt{5} \le x \le 2$.

Ta có $t = x(y+z)+yz = x(4-x)+\dfrac{2}{x}$, xét hàm số $f(x) = x(4-x)+\dfrac{2}{x}$ trên đoạn $\left[3-\sqrt{5}, 2\right]$ ta được $t \in \left[5, \dfrac{5\sqrt{5}-1}{2}\right]$

Tương tự xét hàm số $f(t) = 2\left(t^2-32t+144\right)$ trên đoạn $\left[5, \dfrac{5\sqrt{5}-1}{2}\right]$ ta suy ra đpcm.

Bài 11. Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+1}} - \frac{2}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Lời giải :

Sử dụng bất đẳng cô si cho 3 số dương ta có :

$(a+1)(b+1)(c+1) \le \left(\dfrac{a+b+c+3}{3}\right)^3$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức Cauchy sharvart ta có

$a^2+b^2+c^2+1 \ge \dfrac{1}{4}(a+b+c+1)^2$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Đặt $t = a+b+c+1 > 1$. Khi đó kết hợp với các bất đẳng thức trên ta suy ra

$P \le \dfrac{2}{t} - \dfrac{54}{(t+2)^3} = f(t)$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{2}{t} - \dfrac{54}{(t+2)^3}$ trên khoảng $(1, +\infty)$.

Ta có $f'(t) = -\dfrac{2}{t^2} + \dfrac{162}{(t+2)^4} \Leftrightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow f(4) = \dfrac{1}{4}; \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0; f(1) = 0$

từ đo suy ra $\max\limits_{t\in(1,+\infty)} f(t) = f(4) = \dfrac{1}{4}$. Từ đó suy ra giá trị lớn nhất của $P = \dfrac{1}{4}$ khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 12. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a \geq b \geq c$; $a^2+b^2+c^2=5$. Chứng minh rằng

$$(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca) \geq -4$$

Lời giải :

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :
$(a-b)(b-c)(a-c)(ab+bc+ca) \leq 4$ (*)
Đặt vế trái của bất đẳng thức (*) là P.
Nếu $ab+bc+ca<0 \Rightarrow P \leq 0$, ta có đpcm.
Xét $ab+bc+ca \geq 0$, ta đặt $x=ab+bc+ca$

Ta có : $(a-b)(b-c) \leq \left(\dfrac{a-b+b-c}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2 \Rightarrow (a-b)(b-c)(a-c) \leq \dfrac{1}{4}(a-c)^3$

Mặt khác lại có

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(a-c)^2$$
$$\geq \frac{1}{2}(a-c)^2+\frac{1}{4}(a-b+b-c)^2$$

Suy ra $5-x \geq \dfrac{3}{4}(a-c)^2 \Rightarrow a-c \leq \sqrt{\dfrac{4}{3}(5-x)}; 0 \leq x \leq 5$

Suy ra $P \leq \dfrac{1}{4}x\left(\sqrt{\dfrac{4}{3}(5-x)}\right)^3 = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}x\sqrt{(5-x)^3}$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}x\sqrt{(5-x)^3}$ trên đoạn $[0;5]$, ta suy ra $\max\limits_{x\in[0;5]} f(x) = f(2) = 4$.
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2; b=1; c=0$. Ta có đpcm.

Bài 13. Cho $x,y>0$ thỏa mãn $x+2y-xy=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^2}{4+8y}+\frac{y^2}{1+x}$$

Lời giải:

Theo giả thiết ta có :

$$x+2y=xy=\frac{1}{2}.x.2y \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2 \Rightarrow x+2y \geq 8$$

Theo bất đẳng thức Cauchy sharcs ta có

$$\frac{x^2}{4+8y}+\frac{y^2}{1+x}=\frac{x^2}{4+8y}+\frac{(2y)^2}{4+4x} \geq \frac{(x+2y)^2}{4+8y+4+4x}=\frac{(x+2y)^2}{8+4(x+2y)}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Vậy đặt $t = x + 2y$ và xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{8+4t}, t \ge 8$

Ta có $f'(t) = \dfrac{4t^2 + 8t}{(8+4t)^2} > 0$ với $t \ge 8$.

Suy ra $\min\limits_{t \in [8;+\infty)} f(t) = f(8) = \dfrac{8}{5}$.

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{8}{5}$, khi $x = 4; y = 2$.

Bài 14. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = \frac{x^3 + y^3}{xy+9} + \frac{y^3 + z^3}{yz+9} + \frac{z^3 + x^3}{zx+9}$$

<u>Lời giải :</u>

Theo bất đẳng thức Cauchy schwarz ta có
$$x^3\left(\frac{1}{xy+9} + \frac{1}{zx+9}\right) \ge \frac{4x^3}{x(y+z)+18} = \frac{4x^3}{x(9-x)+18}$$
Tương tự :
$$y^3\left(\frac{1}{xy+9} + \frac{1}{yz+9}\right) \ge \frac{4y^3}{y(z+x)+18} = \frac{4y^3}{y(9-y)+18}$$
$$z^3\left(\frac{1}{zx+9} + \frac{1}{yz+9}\right) \ge \frac{4z^3}{z(x+y)+18} = \frac{4z^3}{z(9-z)+18}$$
Do đó
$$P = x^3\left(\frac{1}{xy+9} + \frac{1}{zx+9}\right) + y^3\left(\frac{1}{xy+9} + \frac{1}{yz+9}\right) + z^3\left(\frac{1}{zx+9} + \frac{1}{yz+9}\right)$$
$$\ge \frac{4x^3}{-x^2+9x+18} + \frac{4y^3}{-y^2+9y+18} + \frac{4z^3}{-z^2+9z+18}$$
Xét hàm số $f(x) = \dfrac{4x^3}{-x^2+9x+18}$

Dễ chứng minh được rằng :
$$\frac{4x^3}{-x^2+9x+18} \ge \frac{11}{4}x - \frac{21}{4}$$
$$\frac{4y^3}{-y^2+9y+18} \ge \frac{11}{4}y - \frac{21}{4}$$
$$\frac{4z^3}{-z^2+9z+18} \ge \frac{11}{4}z - \frac{21}{4}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Từ đó cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta suy ra $P \geq \frac{11}{4}(x+y+z)-3.\frac{21}{4}=9$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=3$.

Bài 15. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)+3.$$

<u>Lời giải :</u>

Giả sử $a=max\{a,b,c\}$

- Nếu $a \geq c \geq b$ thì

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \geq 3 \Rightarrow 3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq 3\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right) \geq 2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)+3$$

- Nếu $a \geq b \geq c$ thì

Xét hàm số $f(a)=3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)-3$

Ta có $f'(a)=\frac{3}{b}-\frac{3c}{a^2}-\frac{2}{c}+\frac{2b}{a^2}=\frac{(a^2-bc)(3c-2a)}{a^2bc}$

Do $a \geq b \geq c \Rightarrow a^2 \geq bc$

Nếu $3c>2a$ hàm số đồng biến suy ra

$$f(a) \geq f(b)=\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-2 \geq 0$$

Nếu $3c<2a$ hàm số nghịch biến suy ra

$$f(a) \geq f(b+c)=\frac{(b-c)^2}{bc}+\frac{3c-2b}{b+c}=\frac{2(b-2c)^2+c(b-c)}{(b+c)^2} \geq 0$$

Ta có đpcm.

Bài 16. Cho ba số thực $a,b,c \in [1;2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{(a+b)^2}{c^2+4(ab+bc+ca)}$$

<u>Lời giải :</u>

Sử dụng bất đẳng thức cô si ta có $4ab \leq (a+b)^2$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Khi đó $P \ge \dfrac{(a+b)^2}{c^2+4(a+b)c+(a+b)^2} = \dfrac{\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\right)^2}{1+4\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\right)^2}$

Ta đặt $t=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$ thì do $a,b,c\in[1;2] \Rightarrow t=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}\in[1;4]$

Bây giờ ta xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2}{1+4t+t^2}$ có $f'(t)=\dfrac{4t^2+2t}{\left(t^2+4t+1\right)^2}>0, \forall t\in[1;4]$

Từ đó suy ra $\min\limits_{t\in[1;4]} f(t)=f(1)=\dfrac{1}{6}$.

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của P bằng $\dfrac{1}{6}$ khi $a=b=1; c=2$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho $x,y,z\ge 0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$P=2\left(x^2+y^2+z^2\right)-4xyz-9x+2012$.

1.2. Cho x,y,z là ba số thực thuộc đoạn $[1;9]$ và $x=max(x,y,z)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x}{x+2y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}.$$

1.3. Cho các số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $(x+y)^3+4xy\ge 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=3\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)-2\left(x^2+y^2\right)+1.$$

1.4. Cho x,y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}+|y-2|.$$

1.5. Cho các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=3\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)+3(ab+bc+ca)+2\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

1.6. Cho các số thực không âm x,y thay đổi và thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy.$$

1.7. Cho x,y là các số thực thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{4x^2+2xy-1}{2xy-2y^2+3}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.8. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x^2y + xy^2 = x + y + 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + \frac{(1+2xy)^2 - 3}{2xy}.$$

1.9. Cho $a, b, c \geq -\frac{2}{5}$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$P = \frac{26-5a}{5a^2+2} + \frac{26-5b}{5b^2+2} + \frac{26-5c}{5c^2+2} \geq 9.$$

1.10. Cho $x, y \in (0;1); x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^x + y^y$.

1.11. Cho $x, y \geq 0$ với $x + y = 2$. Chứng minh rằng

$$x^2y^2\left(x^2 + y^2\right) \leq 2.$$

1.12. Cho x, y, z là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh

$$7(xy + yz + zx) \leq 2 + 9xyz.$$

1.13. Cho các số thực dương a, b, c thuộc đoạn $[1;2]$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq 5abc.$$

1.14. Cho x, y là 2 số thực thay đổi thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 \leq 3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^2 - xy + 2y^2.$$

1.15. Cho các số thực a, b, c thay đổi thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

1.16. Cho $0 < a < b < 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 \ln b - b^2 \ln a > \ln a - \ln b.$$

1.17. Cho các số thực không âm a, b, c có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a-b)(b-c)(c-a).$$

1.18. Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq \frac{5}{2}.$$

1.19. Cho x, y là 2 số thực thỏa mãn $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$. Chứng minh rằng

$$\cos x + \cos y \leq 1 + \cos(xy).$$

1.20. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3. Chứng minh rằng

$$3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) + 4abc \geq 13.$$

1.21. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\begin{cases} 0 < x < y \leq z \leq 1 \\ 3x + 2y + z \leq 4 \end{cases}$. Chứng minh rằng

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$3x^2+2y^2+z^2\le\frac{16}{3}.$$

1.22. Cho các số thực không âm x,y,z có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$x(y-z)^4+y(z-x)^4+z(x-y)^4\le\frac{1}{12}.$$

1.23. Cho các số thực x,y không nhỏ hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\left(x^3+y^3\right)-\left(x^2+y^2\right)}{(x-1)(y-1)}.$$

1.24. Cho các số thực $x,y\in[-3;2]$ và thỏa mãn $x^3+y^3=2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^2+y^2.$$

1.25. Cho các số thực không âm a,b,c và không đồng thời bằng không. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a^3+b^3+16c^3}{(a+b+c)^3}$$

1.26. Cho bốn số nguyên thay đổi thỏa mãn $1\le a<b<c<d\le 50$. Chứng minh

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\ge\frac{53}{175}.$$

1.27. Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z\le 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}.$$

1.28. Cho các số dương a,b,c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{1+a}}+\frac{b}{\sqrt{1+b}}+\frac{c}{\sqrt{1+c}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

1.29. Cho a,b,c là ba số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\ge 3.$$

1.30. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8.$$

1.31. Cho các số thực dương a,b,c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge a^2+b^2+c^2.$$

1.32. Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\le\frac{9}{10}.$$

1.33. Cho các số thực dương a,b,c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\ge 1.$$

1.34. Cho hai số dương x, y có tổng bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{y}{\sqrt{1-y}}.$$

1.35. Cho các số thực x, y thỏa mãn $0<x\le y<\pi$.

Chứng minh rằng $\left(x^3-6x\right)\sin y\le\left(y^3-6y\right)\sin x$.

1.36. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}x+y+z=4\\ xyz=2\end{cases}$

Chứng minh rằng $183-165\sqrt{5}\le x^4+y^4+z^4\le 18$.

1.37. Cho $a,b\ge 1$ là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{4}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+a^2+b^2.$$

1.38. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}x^2+y^2-z^2+xy-yz-zx=1\\ y^2+z^2+yz=2\end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+z^2$.

1.39. Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn $(a+c)(b+c)=4c^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{a}{b+3c}+\frac{b}{a+3c}+\frac{c}{bc+ca}$.

1.40. Cho a,b,c là ba số thực thỏa mãn $ab+bc+ca=1; a+b+c>0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{4}{a+b+c}+\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)}$.

1.41. Cho các số thực $x, y, z\in[0;1]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(xy-y+1)^2+(yz-z+1)^2+(zx-x+1)^2$$

1.42. Cho x, y là hai số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2=2$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{y^2}+\frac{9y^2}{x+2y}\ge 4$$

1.43. Cho a,b là các số thực thỏa mãn $a\ge-\frac{1}{2},\frac{a}{b}>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2a^3+1}{b(a-b)}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.44. Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $\begin{cases} y - x^2 \geq 1 \\ 3x^2 - 2x + y \leq 1 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = y^2 - 3x^2 + 2x$.

1.45. Cho x, y là các số thực không âm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^3 + x^3y^3\left(x^3 + 2y^3 - 3\right) + \left(y^3 - 2\right)^2 - 1$$

1.46. Cho ba số thực a, b, c $(a \neq 0); a > b$ sao cho hàm số $y = 2ax^3 + 3bx^2 + 6cx + 12(a + b - c)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a+b+c}{a-b}$.

1.47. Cho các số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3 + b^3}{b\left(3a^2 - 4ab + 11b^2\right)} + \frac{b^3 + c^3}{c\left(3b^2 - 4bc + 11c^2\right)} + \frac{c^3 + a^3}{a\left(3c^2 - 4ca + 11a^2\right)}$$

1.48. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc(a + b + c)^2 = (ab + bc + ca)^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{4a^3 + 1}{b} + \frac{4b^3 + 1}{c} + \frac{4c^3 + 1}{a}.$$

1.49. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{3}{2}(ab + bc + ca)$ và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{(a - 2c)^2}{ab + bc + ca}$.

1.50. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{3}{2}(ab + bc + ca)$ và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{a - 2c}{\sqrt{ab + bc + ca}}$

1.51. Cho $a, b, c \in [1; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2.$$

1.52. Cho $a, b, c \in \left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$. Chứng minh rằng $8\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}\right) \geq 5\left(\dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{a}\right) + 9$.

1.53. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng

$$3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) + 3.$$

1.54. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + b^2} + \frac{1}{1 + c^2}.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.55. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = xy + yz + zx + \frac{5}{x+y+z}$$

1.56. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + 2y - xy = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{4+8y} + \frac{y^2}{1+x}$$

1.57. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{3}{ab+bc+ca}$$

1.58. Cho bốn số thực x, y, z, t thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 9\left(\frac{x+z}{x+t}\right)^2 + 16\left(\frac{x+t}{x+y}\right)^2$

PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI
BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY – SCHAWARS VÀ HOLDER

BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI

Trong Đề thi TSĐH các bài toán BĐT thường cho 3 biến số , nên ta chỉ cần sử dụng chắc 2 kết quả sau.
Với 2 số không âm a, b ta có

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.
Với 3 số không âm a, b, c ta có

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.
Ngoài ra ta có các kết quả sau

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b} (a, b > 0).$$

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \ge \frac{2}{1+\sqrt{ab}} (a, b \ge 0).$$

$$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca), \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 9.$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho x, y, z là ba số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{yz}\right)+y\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{zx}\right)+z\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{xy}\right).$$

Lời giải:

Ta có

$$P = x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{yz}\right)+y\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{zx}\right)+z\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{xy}\right)$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{yz}+\frac{y^2}{2}+\frac{y}{zx}+\frac{z^2}{2}+\frac{z}{xy}$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{z}{xy}+\frac{1}{2}\frac{y}{zx}\right)+\left(\frac{y^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{z}{xy}+\frac{1}{2}\frac{x}{yz}\right)+\left(\frac{z^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{x}{yz}+\frac{1}{2}\frac{y}{zx}\right)$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}.\frac{1}{2}\frac{z}{xy}.\frac{1}{2}\frac{y}{zx}}+3\sqrt[3]{\frac{y^2}{2}.\frac{1}{2}\frac{z}{xy}.\frac{1}{2}\frac{x}{yz}}+3\sqrt[3]{\frac{z^2}{2}.\frac{1}{2}\frac{x}{yz}.\frac{1}{2}\frac{y}{zx}}=\frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{9}{2}$ khi $x = y = z = 1$.

Bài 2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\leq 1.$$

Lời giải:

Ta có

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geq\frac{4}{x+x}$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{4}{y+z}$$

Cộng theo vế 2 bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 4\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y+z}\right)\geq\frac{16}{2x+y+z}$$

Một cách tương tự, ta có

$$\frac{2}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\geq\frac{16}{2y+z+x}$$

$$\frac{2}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{16}{2z+x+y}$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{4}$.

Bài 3. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \ge 3\sqrt{3}.$$

Lời giải:

Sử dụng BĐT Cô si cho 3 số dương ta có

$1 + x^3 + y^3 \ge 3\sqrt[3]{1.x^3.y^3} = 3xy$, suy ra

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \ge \frac{\sqrt{3xy}}{xy}$$

Một cách tương tự ta có 2 bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \ge \frac{\sqrt{3yz}}{yz}$$

$$\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \ge \frac{\sqrt{3zx}}{zx}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, và để ý

$\frac{\sqrt{3xy}}{xy} + \frac{\sqrt{3yz}}{yz} + \frac{\sqrt{3zx}}{zx} \ge 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3xy}}{xy}.\frac{\sqrt{3yz}}{yz}.\frac{\sqrt{3zx}}{zx}} = 3\sqrt{3}.$ Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 4. Chứng minh rằng nếu $0 \le y \le x \le 1$ thì $x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \le \frac{1}{4}$.

Lời giải:

BĐT đã cho tương đương với

$$\frac{1}{4} + y\sqrt{x} \ge x\sqrt{y}$$

Do $0 \le x \le 1 \Rightarrow \sqrt{x} \ge x^2$, vậy $\frac{1}{4} + y\sqrt{x} \ge \frac{1}{4} + yx^2 \ge 2\sqrt{\frac{1}{4}.yx^2} = x\sqrt{y}$. Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1; y = \frac{1}{4}$.

Bài 5. Cho 2 số dương thay đổi thỏa mãn $x + y \ge 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{3x^2+4}{4x} + \frac{2+y^3}{y^2}.$$

Lời giải:

Ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$P=\frac{3x}{4}+\frac{1}{x}+\frac{2}{y^2}+y=\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{2}{y^2}+\frac{y}{4}+\frac{y}{4}\right)+\frac{x+y}{2}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{x}{4}.\frac{1}{x}}+3\sqrt[3]{\frac{2}{y^2}.\frac{y}{4}.\frac{y}{4}}+\frac{6}{2}=\frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=2, y=4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{9}{2}$.

Bài 6. Cho x, y là các số thực không âm . Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}.$$

Lời giải:

Vì $x, y\geq 0$ nên ta có

$$\left|(x-y)(1-xy)\right|\leq\left|(x+y)(1+xy)\right|=(x+y)(1+xy).$$

Từ đó suy ra $|P|\leq\frac{(x+y)(1+xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}=\frac{(x+y)(1+xy)}{(x+y+1+xy)^2}$

Mặt khác ta lại có

$$(x+y+1+xy)^2\geq 4(x+y)(1+xy)\Rightarrow |P|\leq\frac{1}{4}.$$

Từ đó suy ra $-\frac{1}{4}\leq P\leq\frac{1}{4}$.

Với $x=1; y=0$ thì $P=\frac{1}{4}$.

Với $x=0; y=1$ thì $P=-\frac{1}{4}$.

Bài 7. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}+\frac{bc}{a}.$$

Lời giải:

Ta có

$$P^2=\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}+2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức Cô sic ho mỗi bộ hai số dương ta có

$$\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}\geq 2b^2;\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}\geq 2c^2;\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{a^2c^2}{b^2}\geq 2a^2$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$P^2 \ge 4\left(a^2+b^2+c^2\right)=4 \Leftrightarrow P \ge 2.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2.

Bài 8. Cho ba số thực dương a,b,c có tổng bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=x+\sqrt{xy}+\sqrt[3]{xyz}.$$

Lời giải:

Ta có

$$P=x+\frac{1}{2}\sqrt{x.4y}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{x.4y.16z}$$

Sử dụng BĐT Cô si ta có

$$P \le x+\frac{1}{4}\left(x+4y\right)+\frac{1}{12}\left(x+4y+16z\right)=\frac{16}{12}\left(x+y+z\right)=\frac{4}{3}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x=4y \\ x=4y=16z \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{16}{21} \\ y=\frac{4}{21} \\ z=\frac{1}{21} \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{4}{3}$.

Bài 9. Cho các số không âm a,b,c,d chứng minh rằng

$16(abc+bcd+cda+dab) \le \left(a+b+c+d\right)^3$

Lời giải:

Ta có

$$16(abc+bcd+cda+dab)=16ab(c+d)+16cd(a+b)$$

$$\le 4\left(a+b\right)^2(c+d)+4\left(c+d\right)^2(a+b)$$

$$=4\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+b+c+d\right)$$

$$\le\left(a+b+c+d\right)^3.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ $a=b=c=d$.

Bài 10. Cho các số thực không âm a,b,c,d,e có tổng bằng 5. Chứng minh rằng

$abc+bcd+cde+dea+eab \le 5$.

Lời giải:

Không mất tính tổng quát ta giả sử $e=\min(a,b,c,d,e)$

Ta có

$$abc+bcd+dce+cea+eab=e(a+c)(b+d)+bc(a+d-e)$$

$$\le e\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c+a+d-e}{3}\right)^3=e\left(\frac{5-e}{2}\right)^2+\left(\frac{5-2e}{3}\right)^3$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$e\left(\frac{5-e}{2}\right)^2+\left(\frac{5-2e}{3}\right)^3\le 5\Leftrightarrow (e-1)^2(e+8)\ge 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=e=1$.

Bài 11. Cho các số thực không âm a,b,c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ge ab+bc+ca$$

Lời giải:

Ta có $a+b+c=3\Rightarrow 2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

$$=9-(a^2+b^2+c^2)$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 9$$

Sử dụng BĐT Cô si cho mỗi bộ 3 số dương ta có

$$a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a}\ge 3a;b^2+\sqrt{b}+\sqrt{b}\ge 3b;c^2+\sqrt{c}+\sqrt{c}\ge 3c$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 3(a+b+c)=9.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 12. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz\ge xy+yz+zx$. Chứng minh $xyz\ge 3(x+y+z)$.

Lời giải:

Theo giả thiết ta có

$(xyz)^2\ge (xy+yz+zx)^2$, mặt khác ta lại có

$$(xy+yz+zx)^2\ge 3\left(xzy^2+yxz^2+yzx^2\right)=3xyz(x+y+z)$$

Từ 2 bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=3$.

Bài 13. Cho x,y,z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\ge 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Lời giải:

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

BĐT đã cho tương đương với

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right)\geq\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Để ý $\frac{x}{\sqrt[3]{xyz}}=\sqrt[3]{\frac{x^2}{yz}}$

Sử dụng BĐT Cô si cho mỗi bộ 3 số dương ta có

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+1\geq 3\frac{x}{\sqrt[3]{xyz}};\frac{y}{z}+\frac{y}{x}+1\geq 3\frac{y}{\sqrt[3]{xyz}};\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1\geq 3\frac{z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right)+3\geq\frac{3(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Lại có $\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}\geq 3$, từ đó ta có đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 14. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của tam giác có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}+\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{1}{\sqrt{c+a-b}}\geq\frac{9}{ab+bc+ca}$$

<u>Lời giải:</u>

Đặt $x=\sqrt{a+b-c};y=\sqrt{b+c-a};z=\sqrt{c+a-b}$.

Thì ta có $x^2+y^2+z^2=a+b+c=3$.

BĐT tương đương với

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{36}{9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$$

$$\Leftrightarrow\left(9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\left(xy+yz+zx\right)\geq 36xyz$$

Sử dụng BĐT Cô si ta có

$$xy+yz+zx\geq 3\sqrt[3]{\left(xyz\right)^2}$$

$$9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\geq 12\sqrt[12]{\left(xyz\right)^4}$$

Nhân theo 2 vế của 2 bất đẳng thức trên, ta có đpcm

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 15. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$$

<u>Lời giải:</u>

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta có $a^3+b^3 \ge ab(a+b) \Rightarrow a^3+b^3+abc \ge ab(a+b+c) \Rightarrow \dfrac{abc}{a^3+b^3+abc} \le \dfrac{c}{a+b+c}$

Tương tự ta cũng có

$\dfrac{abc}{b^3+c^3+abc} \le \dfrac{a}{a+b+c}; \dfrac{abc}{c^3+a^3+abc} \le \dfrac{b}{a+b+c}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bình luận: Một bài tương tự

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{8^{\frac{a}{2}}+8^{\frac{b}{2}}+1}+\frac{1}{8^{\frac{b}{2}}+8^{\frac{c}{2}}+1}+\frac{1}{8^{\frac{c}{2}}+8^{\frac{a}{2}}+1} \le 1$$

Bài toán này được giải quyết bằng cách đặt $x=2^{\frac{a}{2}}, y=2^{\frac{b}{2}}, z=2^{\frac{c}{2}} \Rightarrow xyz=2^{\frac{a+b+c}{2}}=1$

Bài 16. Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$. Chứng minh

$\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy} \ge \sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$

Lời giải:

Đặt $a=\dfrac{1}{x}; b=\dfrac{1}{y}; c=\dfrac{1}{z} \Rightarrow a+b+c=1.$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$\sqrt{bc+a}+\sqrt{ca+b}+\sqrt{ab+c} \ge 1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$

Ta có

$$\sqrt{bc+a}=\sqrt{bc+a(a+b+c)}=\sqrt{(a+b)(a+c)} \ge \sqrt{\left(a+\sqrt{bc}\right)^2}=a+\sqrt{bc}$$

Một cách tương tự ta có

$\sqrt{ca+b} \ge b+\sqrt{ca}$

$\sqrt{ab+c} \ge c+\sqrt{ab}$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, và để ý $a+b+c=1$. Ta suy ra đpcm

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=3$.

Bài 17. Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh

$\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}+\sqrt{1+c^2} \le 2(a+b+c).$

Lời giải:

Ta có

$$\sqrt{1+a^2}=\sqrt{ab+bc+ca+a^2}=\sqrt{(a+c)(a+b)} \le \frac{a+c+a+b}{2}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Một cách tương tự ta có

$\sqrt{1+b^2} \le \dfrac{2b+a+c}{2}$

$\sqrt{1+c^2} \le \dfrac{2c+a+b}{2}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 18. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}} \ge \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}.$$

<u>Lời giải:</u>

Dễ thấy bất đẳng thức đúng với bộ 3 số (a,b,c) thì cũng đúng với bộ 3 số $(ka,kb,kc), k>0$.

Vậy không mất tính tổng quát ta chứng minh bất đẳng thức với $a+b+c=6$.

Ta phải chứng minh bất đẳng thức

$\dfrac{a}{\sqrt{6-a}}+\dfrac{b}{\sqrt{6-b}}+\dfrac{c}{\sqrt{6-c}} \ge 3$.

Đặt $x=\sqrt{6-a}; y=\sqrt{6-b}; z=\sqrt{6-c} \Rightarrow x^2+y^2+z^2=12 \Rightarrow x+y+z \le 6$.

Ta cần chứng minh

$\dfrac{6-x^2}{x}+\dfrac{6-y^2}{y}+\dfrac{6-z^2}{z} \ge 3 \Leftrightarrow 6\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)-(x+y+z) \ge 3.$

Thật vậy bất đẳng thức này luôn đúng.

Do $6\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)-(x+y+z) \ge \dfrac{54}{x+y+z}-(x+y+z) \ge 9-6=3.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 19. Cho các số thực không âm a,b,c không đồng thời bằng không. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\dfrac{x}{y+z}}+\sqrt{\dfrac{y}{z+x}}+\sqrt{\dfrac{z}{x+y}}$.

<u>Lời giải:</u>

Sử dụng bất đẳng thức Cô si ta có

$x+y+z \ge 2\sqrt{x(y+z)} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{x}{y+z}} \ge \dfrac{2x}{x+y+z}$

Một cách tương tự ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\sqrt{\dfrac{y}{z+x}} \ge \dfrac{2y}{x+y+z}; \sqrt{\dfrac{z}{x+y}} \ge \dfrac{2z}{x+y+z}$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta suy ra $P \ge 2$. Nhận thấy $x = y = 1, z = 0$ dấu bằng xảy ra.
Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 khi 2 số bằng 1 và một số bằng không.

Bài 20. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x(x+y+z) = 3yz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \left(\frac{x+y}{y+z}\right)^3 + \left(\frac{x+z}{y+z}\right)^3 + \frac{3(x^2+xy+yz+zx)}{(y+z)^2}.$$

Lời giải:

Đặt $a = \dfrac{x+y}{y+z}, b = \dfrac{x+z}{y+z} \Rightarrow a^2 + b^2 - ab = \left(\dfrac{x+y}{y+z}\right)^2 + \left(\dfrac{x+z}{y+z}\right)^2 - \dfrac{x+y}{y+z}.\dfrac{x+z}{y+z} = 1$

Suy ra $(a+b)^2 = 1 + 3ab \le 1 + \dfrac{3}{4}(a+b)^2 \Rightarrow a+b \le 2$

Ta có $P = a^3 + b^3 + 3ab = a + b + 3ab \le 2 + \dfrac{3}{4}(a+b)^2 = 5$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1 \Rightarrow x = y = z = 1$.

Bài 21. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 5xy + 7yz + 8zx$.

Lời giải :

Ta có $P = 5xy + 7yz + 8zx = 3x(y+z) + 2y(z+x) + 5z(x+y)$

$= 3x(2-x) + 2y(2-y) + 5z(2-z) = 1 = 10 - \left(3(1-x)^2 - 2(1-y)^2 - 5(1-z)^2\right)$

$= \dfrac{340}{31} - \left(3(1-x)^2 + \dfrac{300}{961} + 2(1-y)^2 + \dfrac{450}{961} + 5(1-z)^2 + \dfrac{180}{961}\right)$

$\le \dfrac{340}{31} - \left(\dfrac{60}{31}(1-x) + \dfrac{60}{31}(1-y) + \dfrac{60}{31}(1-z)\right) = \dfrac{340}{31} - \dfrac{60}{31}(3-x-y-z) = \dfrac{280}{31}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{21}{31}; y = \dfrac{16}{31}; z = \dfrac{25}{31}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $P = \dfrac{280}{31}$.

Bình luận : Để có được biến đổi ở (*), ta tìm các số thực a, b, c thỏa mãn
$5xy + 7yz + 8zx = a.x(y+z) + b.y(z+x) + c.z(x+y)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Bài 22. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$1+\frac{3}{a+b+c}\ge\frac{6}{ab+bc+ca}$$

Lời giải:

Cách 1:

Ta có $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)=3(a+b+c)\Rightarrow ab+bc+ca\ge\sqrt{3(a+b+c)}$

Suy ra $\frac{6}{ab+bc+ca}\le 2\sqrt{\frac{3}{a+b+c}}$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$1+\frac{3}{a+b+c}-2\sqrt{\frac{3}{a+b+c}}\ge 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{\frac{3}{a+b+c}}-1\right)^2\ge 0 \text{ luôn đúng}$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Cách 2:

Đặt $a=\frac{1}{x};b=\frac{1}{y};c=\frac{1}{z}$ do $abc=1\Rightarrow xyz=1$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$1+\frac{3}{xy+yz+zx}\ge\frac{6}{x+y+z}$$

Theo bất đẳng thức cô si ta có

$$(x+y+z)^2\ge 3(xy+yz+zx)$$

Suy ra $1+\frac{3}{xy+yz+zx}\ge 1+\frac{9}{(x+y+z)^2}$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$1+\frac{9}{(x+y+z)^2}\ge\frac{6}{x+y+z}\Leftrightarrow\left(1-\frac{3}{x+y+z}\right)^2\ge 0 \text{ luôn đúng}$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 23. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2}+\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2}+\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2}\le\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Lời giải :

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

$$3a^2+2b^2+c^2=2\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+c^2\right)\ge 4ab+2ac=2a(2b+c)$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\Rightarrow \frac{a}{3a^2+2b^2+c^2} \le \frac{1}{2}.\frac{1}{2b+c}$$

Lại có

$$(2b+c)\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge 3\sqrt[3]{b^2c}.3\sqrt[3]{\frac{1}{b^2c}} = 9 \Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{1}{2b+c} \le \frac{1}{18}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Suy ra

$$\frac{a}{3a^2+2b^2+c^2} \le \frac{1}{18}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Tương tự ta chứng minh được :

$$\frac{b}{3b^2+2c^2+a^2} \le \frac{1}{18}\left(\frac{2}{c}+\frac{1}{a}\right)$$

$$\frac{c}{3c^2+2a^2+b^2} \le \left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta suy ra đpcm.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 24. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+1=z$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3y^3}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2}$$

<u>Lời giải :</u>

Ta có

$$x+zy = zy+z-1-y = (y+1)(z-1) = (y+1)(x+y)$$

$$y+zx = zx+z-1-x = (z-1)(x+1) = (x+1)(x+y)$$

$$z+xy = xy+x+y+1 = (x+1)(y+1)$$

Vậy $P = \dfrac{x^3y^3}{(x+yz)(y+zx)(z+xy)^2} = \dfrac{x^3y^3}{(x+y)^2(x+1)^3(y+1)^3}$

Theo bất đẳng thức cô si ta có

$$(x+y)^2 \ge 4xy$$

$$x+1 = \frac{x}{2}+\frac{x}{2}+1 \ge 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}} \Rightarrow (x+1)^3 \ge \frac{27x^2}{4}$$

$$y+1 = \frac{y}{2}+\frac{y}{2}+1 \ge 3\sqrt[3]{\frac{y^2}{4}} \Rightarrow (y+1)^3 \ge \frac{27y^2}{4}$$

Từ đó suy ra :

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\frac{x^3y^3}{(x+y)^2(x+1)^3(y+1)^3}\le\frac{4}{729}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{4}{729}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=2; z=5$.

Bài 25. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)}\ge abc+\sqrt[3]{\left(a^3+abc\right)\left(b^3+abc\right)\left(c^3+abc\right)}$$

<u>Lời giải :</u>

Chia hai vế bất đẳng thức cho abc bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)}\ge 1+\sqrt[3]{\left(1+\frac{bc}{a^2}\right)\left(1+\frac{ac}{b^2}\right)\left(1+\frac{ab}{c^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}+\frac{ab}{c^2}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}}\ge 1+\sqrt[3]{\left(1+\frac{bc}{a^2}\right)\left(1+\frac{ac}{b^2}\right)\left(1+\frac{ab}{c^2}\right)}$$

Dến đây ta đặt

$$x=\frac{bc}{a^2};y=\frac{ca}{b^2};z=\frac{ab}{c^2}\Rightarrow xyz=1$$

Vậy ta cần chứng minh

$$\sqrt{3+x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\ge 1+\sqrt[3]{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{3+x+y+z+xy+yz+zx}\ge 1+\sqrt[3]{2+x+y+z+xy+yz+zx}$$

Dặt $t=\sqrt[3]{2+x+y+z+xy+yz+zx}\ge\sqrt[3]{8\sqrt[8]{x^3y^3z^3}}=2$

Ta cần chứng minh :

$\sqrt{t^3+1}\ge 1+t\Leftrightarrow t^3+1\ge 1+2t+t^2\Leftrightarrow t^3-t^2-2t\ge 0\Leftrightarrow t(t-2)(t+1)\ge 0$ luôn đúng

Vậy ta có đpcm.

Bài 26. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $(1-a)(1-b)(1-c)=8abc$

Chứng minh rằng $a+b+c\ge 1$

<u>Lời giải :</u>

- Nếu có một số lớn hơn 1, khi đó do $a,b,c>0$ nên $a+b+c>1$, ta có ngay diều phải chứng minh.
- Vậy xét cả 3 số nhỏ hơn 1

Giả thiết có :

$$(1-a)(1-b)(1-c)=8abc\Rightarrow\frac{1-a}{a}.\frac{1-b}{b}.\frac{1-c}{c}=8$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Ta đặt $x=\frac{1-a}{a};y=\frac{1-b}{b};z=\frac{1-c}{c}\Rightarrow x,y,z>0;xyz=8$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}\ge 1\Leftrightarrow x+y+z\ge 6$ luôn đúng

Do $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=6$. Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 27. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+2b^2+3c^2=3abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3a+2b+c+\frac{8}{a}+\frac{6}{b}+\frac{4}{c}$

Lời giải :

Theo giả thiết ta có

$a^2+2b^2+3c^2=3abc\Leftrightarrow 3abc=a^2+c^2+2\left(b^2+c^2\right)\ge 2ac+4bc=2c\left(a+2b\right)$

$\Rightarrow 3ab\ge 2\left(a+2b\right)$

$P=3a+2b+c+\frac{8}{a}+\frac{6}{b}+\frac{4}{c}=a+\frac{b}{2}+2\left(a+\frac{4}{a}\right)+\frac{3}{2}\left(b+\frac{4}{b}\right)+c+\frac{4}{c}$

$\ge a+\frac{b}{2}+2.4+\frac{3}{2}.4+4=\frac{2a+b}{2}+18$

Từ $3ab\ge 2\left(a+2b\right)\Leftrightarrow \frac{3}{2}\ge\frac{1}{b}+\frac{2}{a}\ge\frac{9}{2a+b}\Leftrightarrow 2a+b\ge 6$

Từ đó suy ra $P\ge 21$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Bài 28. Cho $a,b,c>1$ thỏa mãn $a+b+c=abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a-2}{b^2}+\frac{b-2}{c^2}+\frac{c-2}{a^2}$

Lời giải :

Ta có $P=\frac{(a-1)+(b-1)}{b^2}-\frac{1}{b}+\frac{(b-1)+(c-1)}{c^2}-\frac{1}{c}+\frac{(c-1)+(a-1)}{a^2}-\frac{1}{a}$

$=(a-1)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+(b-1)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+(c-1)\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$\ge\frac{2(a-1)}{ab}+\frac{2(b-1)}{bc}+\frac{2(c-1)}{ca}-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)$

Lại có theo giả thiết

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$a+b+c=abc \Rightarrow \frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$

Vậy $P \geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-2 \geq \sqrt{3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)^2}-2=\sqrt{3}-2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt{3}$.

Bài 29. Cho x, y là các số dương thỏa mãn $2x+3y=5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}-1}{2y}+\frac{\sqrt{\left(1+x^3\right)\left(1+y^3\right)}-1}{3x^2}$

Lời giải :

Ta có $P \geq \frac{1+xy-1}{2y}+\frac{1+\sqrt{x^3y^3}-1}{3x^2}=\frac{x}{2}+\frac{y\sqrt{y}}{3\sqrt{x}}$

Theo bất đẳng thức cô – si ta có :

$\frac{x}{2}+\frac{y\sqrt{y}}{3\sqrt{x}}=\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{6}+\frac{y\sqrt{y}}{6\sqrt{x}}+\frac{y\sqrt{y}}{6\sqrt{x}}\right)$

$\geq \frac{x}{3}+3\sqrt[3]{\frac{x}{6}.\frac{y\sqrt{y}}{6\sqrt{x}}.\frac{y\sqrt{y}}{6\sqrt{x}}}=\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\frac{1}{6}(2x+3y)=\frac{5}{6}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{5}{6}$ khi và chỉ khi $x=y=1$.

Bài 30. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=\sqrt{5}$. Chứng minh rằng $\left|\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(c^2-a^2\right)\right| \leq \sqrt{5}$.

Lời giải :

Giả sử $a=\min(a,b,c) \Rightarrow b+c=\sqrt{5}-a \leq \sqrt{5}$

Và đặt $P=\left|\left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(c^2-a^2\right)\right|$

$\Rightarrow P^2=\left(a^2-b^2\right)^2\left(b^2-c^2\right)^2\left(c^2-a^2\right)^2$

$\leq b^4c^4\left(b^2-c^2\right)^2=b^4c^4(b-c)^2(b+c)^2$

$\leq 5b^4c^4(b-c)^2$

Sử dụng bất đẳng thức cô si ta suy ra

$5b^4c^4(b-c)^2=5bc.bc.bc.bc(b-c)^2$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\le 5\left(\frac{4bc+(b-c)^2}{5}\right)^5 = 5\left(\frac{(b+c)^2}{5}\right)^5 \le 5$$

Suy ra $P \le \sqrt{5}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=0, b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, c=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ hoặc các hoán vị.

Bài 31. Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $x>1, y>2, z>3$ và $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}\ge 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x-1)(y-2)(z-3)$.

Lời giải:

Từ giả thiết và sử dụng bất đẳng thức cô si ta suy ra

$$\frac{1}{x}\ge 1-\frac{2}{y}+1-\frac{3}{z}=\frac{y-2}{y}+\frac{z-3}{z}\ge 2\sqrt{\frac{y-2}{y}.\frac{z-3}{z}}$$

$$\frac{2}{y}\ge 1-\frac{1}{x}+1-\frac{3}{z}=\frac{x-1}{x}+\frac{z-3}{z}\ge 2\sqrt{\frac{x-1}{x}.\frac{z-3}{z}}$$

$$\frac{3}{z}\ge 1-\frac{1}{x}+1-\frac{2}{y}=\frac{x-1}{x}+\frac{y-2}{y}\ge 2\sqrt{\frac{x-1}{x}.\frac{y-2}{y}}$$

Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta suy ra

$$P=(x-1)(y-2)(z-3)\le\frac{3}{4}.$$

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng $(a+b)(a+c)\ge 2\sqrt{abc(a+b+c)}$

1.2. Chứng minh rằng với mọi số thực a,b ta luôn có $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\le\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$

1.3. Cho $x,y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{x^3+y^3+7xy(x+y)}{xy\sqrt{2(x^2+y^2)}}$$

1.4. Chứng minh với $a>b>0$, ta có

$$a+\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}\ge 3.$$

1.5. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\ge 2.$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Chứng minh $8abc \le 1$.

1.6. Cho $a,b,c>0$ và $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+a+b+c \ge 6$.

1.7. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+\left(a+b+c\right)^2 \le 4$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab+1}{\left(a+b\right)^2}+\frac{bc+1}{\left(b+c\right)^2}+\frac{ca+1}{\left(c+a\right)^2} \ge 3$$

1.8. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2}+\frac{a+b}{c^2}$$

1.9. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P=a^3+b^3+c^3+a^2+b^2+c^2+abc$.

1.10. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \ge \frac{4}{3}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)^2.$$

1.11. Cho $x \ge 2, y \ge 3, z \ge 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{xy\sqrt{z-4}+yz\sqrt{x-2}+zx\sqrt{y-3}}{xyz}.$$

1.12. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{3a-b+c}+\frac{b}{3b-c+a}+\frac{c}{3c-a+b} \ge 1$$

1.13. Cho bốn số thực dương a,b,c,d. Chứng minh rằng

$$\frac{a-d}{a+b}+\frac{d-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+a}+\frac{c-a}{a+d}.$$

1.14. Cho ba số thực dương a,b,c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3}+\frac{1}{b^2+2c^2+3}+\frac{1}{c^2+2a^2+3} \le \frac{1}{2}.$$

1.15. Cho các số thực a,b,c có tổng bằng không. Chứng minh

$$8^a+8^b+8^c \ge 2^a+2^b+2^c$$

1.16. Cho các số thực dương a,b,c có tổng bằng 1. Chứng minh

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1} \le \frac{3}{4}.$$

1.17. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{c+a-b}.$$

1.18. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh một tam giác. Chứng minh rằng

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$$

1.19. Cho x,y,z là các số thực dương có tích bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{x+y+1}{x^2+y^2+1}+\frac{y+z+1}{y^2+z^2+1}+\frac{z+x+1}{z^2+x^2+1}.$$

1.20. Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+ab^2}{c^3}+\frac{1+bc^2}{a^3}+\frac{1+ca^2}{b^3}\ge\frac{18}{a^3+b^3+c^3}$$

1.21. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $ab+bc+ca=7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{8a^4+1}{a^2}+\frac{108b^5+1}{b^2}+\frac{16c^6+1}{c^2}.$$

1.22. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)+a+c}}+\sqrt{\frac{(b+c)(a+c)}{(b+c)(a+c)+a+b}}+\sqrt{\frac{(a+c)(a+b)}{(a+c)(a+b)+b+c}}$$

1.23. Cho $x,y,z>0$. Chứng minh rằng $\frac{xyz\left(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\left(x^2+y^2+z^2\right)(xy+yz+zx)}\le\frac{3+\sqrt{3}}{9}$.

1.24. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=xyz$. Chứng minh rằng

$$\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)\left(z^2-1\right)\le\sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)}$$

1.25. Cho các số thực không âm x,y,z thỏa mãn $xy+yz+zx=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2y^3+y^2z^3+z^2x^3+(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$

1.26. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $13x+5y+12z=9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{xy}{2x+y}+\frac{3yz}{2y+z}+\frac{6zx}{2z+x}$

1.27. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b+c)^2}{abc}+\frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ge\frac{81}{a+b+c}$$

1.28. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{\sqrt{(1-c)^3(1+c)}}+\frac{bc}{\sqrt{(1-a)^3(1+a)}}+\frac{ca}{\sqrt{(1-b)^3(1+b)}}\le\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

1.29. Cho $a,b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}$

1.30. Cho $x,y,z>1$ thỏa mãn $xy+yz+zx\ge 2xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x-1)(y-1)(z-1)$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.31. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng
$$9xyz + 1 \ge 4\left(xy + yz + zx\right)$$

BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY – SCHAWARS

Bất đẳng thức này có dạng
$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \ge \left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2, \forall a_i, b_i \in \mathbb{R}$.
Để chứng minh bất đẳng thức này ta xét tam thức bậc 2
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i x - b_i\right)^2$$
$$= \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)x^2 - 2\left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)x + \left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \ge 0, \forall x$$
$\Leftrightarrow \Delta' = \left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2 - \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \le 0$ (đpcm). trong đó có ít nhất một số khác 0.
Một dạng đặc biệt của BĐT này rất hay được áp dụng là
$\dfrac{a_1^2}{b_1} + \dfrac{a_2^2}{b_2} + ... + \dfrac{a_n^2}{b_n} \ge \dfrac{\left(a_1 + a_2 + ... + a_n\right)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}$, trong đó các số $b_i > 0$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P = \frac{x^2\left(y+z\right)}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{y^2\left(z+x\right)}{z\sqrt{z} + 2z\sqrt{x}} + \frac{z^2\left(x+y\right)}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}.$$

<u>Lời giải:</u>

Sử dụng BĐT Cô si cho 2 số dương ta có
$$x^2\left(y+z\right) \ge 2x^2\sqrt{yz} = 2x^2.\frac{1}{\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x}$$
Một cách tương tự ta có
$$y^2\left(z+x\right) \ge 2y\sqrt{y}; z^2\left(x+y\right) \ge 2z\sqrt{z}$$
Đặt $a = x\sqrt{x}, b = y\sqrt{y}, c = z\sqrt{z}$, ta có $abc = 1$.
Khi đó ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của
$$P = \frac{2a}{b+2c} + \frac{2b}{c+2a} + \frac{2c}{c+2b}$$
Ta có
$$P = 2\left(\frac{a^2}{a\left(b+2c\right)} + \frac{b^2}{b\left(c+2a\right)} + \frac{c^2}{c\left(c+2b\right)}\right) \ge 2\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a\left(b+2c\right) + b\left(c+2a\right) + c\left(c+2b\right)} = 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2 xảy ra khi $x=y=z=1$.

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số thực $x,y,z>1$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

Lời giải:

Theo giả thiết ta có

$$\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=1$$

Sử dụng BĐT Cauchy – Schawars ta có

$$1=\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\ge\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\right)^2}{x+y+z}$$

$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\le\sqrt{x+y+z}$. Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{3}{2}$.

Bài 3. Cho các số thực dương a,b,c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\ge\frac{9}{10}.$$

Lời giải:

Ta có

$$VT=\frac{a^2}{a+abc}+\frac{b^2}{b+abc}+\frac{c^2}{c+abc}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+3abc}\ge\frac{1}{1+\frac{(a+b+c)^3}{9}}=\frac{9}{10}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 4. Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x^2+y^2+1}+\frac{1}{y^2+z^2+1}+\frac{1}{z^2+x^2+1}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xy+yz+zx$

Lời giải:

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy shart ta có

$$\left(x^2+y^2+1\right)\left(1+1+z^2\right)\ge(1.x+1.y+z)^2\Rightarrow\frac{1}{x^2+y^2+1}\le\frac{2+z^2}{(x+y+z)^2}$$

Một cách tương tự ta có

$$\frac{1}{y^2+z^2+1}\le\frac{2+x^2}{(x+y+z)^2};\frac{1}{z^2+x^2+1}\le\frac{2+y^2}{(x+y+z)^2}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$1=\frac{1}{x^2+y^2+1}+\frac{1}{y^2+z^2+1}+\frac{1}{z^2+x^2+1}\le\frac{6+x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}$$

Suy ra

$$(x+y+z)^2\le 6+x^2+y^2+z^2=6+(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\Rightarrow P=xy+yz+zx\le 3$$

Bài 5. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{2a^2+bc}+\frac{b}{2b^2+ca}+\frac{c}{2c^2+ab}\ge abc$$

Lời giải:

Chia cả hai vế bất đẳng thức cho abc, bđt tương đương với

$$\frac{1}{2a^2bc+b^2c^2}+\frac{1}{2b^2ca+a^2c^2}+\frac{1}{2c^2ab+a^2b^2}\ge 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy- shacwar cho vế trái ta được

$$\frac{1}{2a^2bc+b^2c^2}+\frac{1}{2b^2ca+a^2c^2}+\frac{1}{2c^2ab+a^2b^2}$$

$$\ge\frac{9}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2b^2ca+2c^2ab}$$

$$=\frac{9}{(ab+bc+ca)^2}\ge\frac{9}{\left(\frac{1}{3}(a+b+c)^2\right)^2}=1$$

Từ đó ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 6. Cho a,b là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2\le a+b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a+2b$.

Lời giải:

Ta có

$$a^2+b^2\le a+b\Leftrightarrow\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}$$

Vậy $P=a+2b=\left(a-\frac{1}{2}\right)+2\left(b-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}$, theo bất đẳng thức Cauchy-shawar

$$\left(\left(a-\frac{1}{2}\right)+2\left(b-\frac{1}{2}\right)\right)^2\le\left(1^2+2^2\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{5}{2}$$

Từ đó suy ra $P\le\frac{3+\sqrt{10}}{2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a;b)=\left(\frac{5+\sqrt{10}}{10};\frac{5+2\sqrt{10}}{10}\right)$

Bài 7. Cho a,b,c không âm thỏa mãn $a+2b+3c=4$ và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{1}{\sqrt{ab+bc+ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab+bc+c^2}}$$

Lời giải:

Với hai số dương x,y; sử dụng bđt cô si ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{2}{\sqrt{xy}}\ge\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Sử dụng bất đẳng thức này ta có
$$P=\frac{1}{\sqrt{ab+bc+ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab+bc+c^2}}\ge\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{ab+bc+ca+ab+bc+c^2}}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c^2+ca+2bc+2ab}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(c+2b)}}$$
$$\ge\frac{2\sqrt{2}}{\frac{a+c+c+2b}{2}}\ge\frac{4\sqrt{2}}{a+2b+3c}=\sqrt{2}$$
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=2;b=1;c=0$. Suy ra giá trị nhỏ nhất của $P=\sqrt{2}$.

Bài 8. Cho a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1,ab+bc+ca>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P=\frac{2}{|a-b|}+\frac{2}{|b-c|}+\frac{2}{|c-a|}+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

Lời giải:

Giả sử $a>b>c$ khi đó
$$P=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{a-c}+\frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$
Ta có
$$\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}=2\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)\ge\frac{8}{a-b+b-c}=\frac{8}{a-c}$$
Vậy $P\ge10\left(\frac{1}{a-c}+\frac{1}{\sqrt{4(ac+ab+bc)}}\right)\ge\frac{20}{\sqrt{(a-c)\sqrt{4(ac+ab+bc)}}}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$$\geq \frac{20}{\sqrt{\frac{1}{2}\left((a-c)^2+4(ac+ab+bc)\right)}}=\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)(a+c+4b)}}$$

$$=\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}}=\frac{20\sqrt{6}}{\sqrt{3(1-b)(1+3b)}}\geq \frac{20\sqrt{6}}{\frac{3(1-b)+(1+3b)}{2}}=10\sqrt{6}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b=\frac{1}{3}, a=\frac{2+\sqrt{6}}{6}, c=\frac{2-\sqrt{6}}{6}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+c$

1.2. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=15\frac{x^2}{z}+\frac{5}{36}\frac{y^2}{x}+\frac{24}{25}\frac{z^2}{y}$$

1.3. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{\left(1+\sqrt{ab}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{bc}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\sqrt{aa}\right)^2}$$

1.4. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\left(1+\frac{2a}{b}\right)^2+\left(1+\frac{2b}{c}\right)^2+\left(1+\frac{2c}{a}\right)^2\geq \frac{9(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

1.5. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2b^2+7}{(a+b)^2}+\frac{b^2c^2+7}{(b+c)^2}+\frac{c^2a^2+7}{(c+a)^2}\geq 6$$

1.6. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c\leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(a+b)\sqrt{1+\frac{1}{a^2b^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{c^2}}$$

1.7. Cho $x,y>0$ thỏa mãn $x^2+y^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(1+x^2\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)^2+\left(1+y^2\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$$

1.8. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(3a+\frac{2}{b+c}\right)^2+\left(3b+\frac{2}{c+a}\right)^2+\left(3c+\frac{2}{a+b}\right)^2$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

1.9. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2\left[\frac{x^4}{(xy+1)(xz+1)}+\frac{y^4}{(yz+1)(xy+1)}+\frac{z^4}{(zy+1)(zx+1)}\right]$

BẤT ĐẲNG THỨC HOLDER

Ta chỉ xét một dạng của bất đẳng thức này,để hiểu cách vận dụng bất đẳng thức này,nó thực sự là một công cụ hữu hiệu khi giải toán bất đẳng thức.

Cho $a, b, c, x, y, z, u, v, t$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(u^3+v^3+t^3\right)\geq\left(axu+byv+czt\right)^3$$

Chứng minh:

Sử dụng bất dẳng thức Cô si cho 3 số dương ta có

$$\frac{a^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{x^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{u^3}{u^3+v^3+t^3}\geq\frac{3axu}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(u^3+v^3+t^3\right)}}$$

Một cách tương tự xây dựng tiếp 2 bất đẳng thức

$$\frac{b^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{y^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{v^3}{u^3+v^3+t^3}\geq\frac{3byv}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(u^3+v^3+t^3\right)}}$$

$$\frac{c^3}{a^3+b^3+c^3}+\frac{z^3}{x^3+y^3+z^3}+\frac{t^3}{u^3+v^3+t^3}\geq\frac{3czt}{\sqrt[3]{\left(a^3+b^3+c^3\right)\left(x^3+y^3+z^3\right)\left(u^3+v^3+t^3\right)}}$$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Do vậy khi làm toán để vận dụng bất đẳng thức này, ta có thể sử dụng luôn BĐT Cô si theo như cách chứng minh trên.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$(1+a)(1+b)(1+c)\geq\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3.$$

Lời giải:

Sử sụng BĐT Cô si cho bộ 3 số dương ta có

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\geq\frac{3\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Cộng theo vế 2 bất đẳng thức trên. Ta có đpcm.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 2. Cho a,b là hai số thực dương. Chứng minh rằng
$$\frac{(1+a^2b)(1+b^2)}{(a^2-a+1)(1+b^3)}\le 2$$

<u>Lời giải:</u>

Sử dụng bất đẳng thức ở bài toán 1
Ta có:
$$(1+a^3)(1+a^3)(1+b^3)\ge(1+a^2b)^3$$
$$(1+1)(1+1)(1+a^3)\ge(1+a)^3$$
$$(1+1)(1+b^3)(1+b^3)\ge(1+b^2)^3$$
Nhân theo vế ba bất đẳng thức trên ta suy ra
$$8(1+a^3)^3(1+b^3)^3\ge(1+a^2b)^3(1+a)^3(1+b^2)^3$$
Suy ra:
$$\frac{(1+a^2b)(1+b^2)}{(a^2-a+1)(1+b^3)}\le 2$$

KỸ THUẬT CÔ SI NGƯỢC DẤU

Kỹ thuật được khai thác để sử dụng BĐT Cô si cho mẫu số của các phân số, do vậy cần có bước chuyển phân số về tổng của một số dương và một số âm.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho các số thực dương a,b,c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge\frac{3}{2}$$

<u>Lời giải:</u>

Ta có
$$\frac{a}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{1}{2}ab$$
Một cách tương tự ta có

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

$\frac{b}{1+c^2}\geq b-\frac{1}{2}bc;\frac{c}{1+a^2}\geq c-\frac{1}{2}ca$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\geq a+b+c-\frac{1}{2}(ab+bc+ca)\geq\frac{3}{2}.$

Do $a+b+c=3$ và $3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2=9.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1.$

Bài 2. Cho các số thực dương a,b,c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\geq 1.$

<u>Lời giải:</u>

Ta có

$\frac{a^2}{a+2b^2}=a-\frac{2ab^2}{a+2b^2}\geq a-\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}}=a-\frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2b^2}$

Một cách tương tự ta có

$\frac{b^2}{b+2c^2}\geq b-\frac{2}{3}\sqrt[3]{b^2c^2};\frac{c^2}{c+2a^2}\geq c-\frac{2}{3}\sqrt[3]{c^2a^2}$

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên ta được

$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\geq a+b+c-\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^2c^2}+\sqrt[3]{c^2a^2}\right)\geq 1.$

Thật vậy vì

$3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2=3(a+b+c)\Rightarrow ab+bc+ca\leq a+b+c$

$\Rightarrow 3\left(\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{b^2c^2}+\sqrt[3]{c^2a^2}\right)\leq\sum(ab+a+b)\leq 3(a+b+c).$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 3. Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2}\geq 1.$$

<u>Lời giải:</u>

Ta có

$\frac{1}{a^3+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{a^3}{a^3+2}\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{a^3}{3a}=\frac{1}{2}-\frac{a^2}{6}$

Một cách tương tự ta có

$\frac{1}{b^3+2}\geq\frac{1}{2}-\frac{b^2}{6};\frac{1}{c^3+2}\geq\frac{1}{2}-\frac{c^2}{6}$

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

BÀI TẬP ÁP DỤNG

1.1. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\frac{a}{1+b^2c}+\frac{b}{1+c^2a}+\frac{c}{1+a^2b}\geq\frac{3}{2}.$$

1.2. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\geq\frac{1}{2}(a+b+c).$$

1.3. Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh

$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}\geq 1.$$

1.4. Cho các số thực dương a,b,c,d có tổng bằng 4. Chứng minh

$$\frac{a+1}{1+b^2}+\frac{b+1}{1+c^2}+\frac{c+1}{1+d^2}+\frac{d+1}{1+a^2}\geq 4.$$

PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA

Một số bài toán BĐT có điều kiện ràng buộc ta có thể quy về dạng lượng giác, khi đó BĐT dễ chứng minh hơn.

Một số dấu hiệu nhận biết đưa bài toán BĐT về dạng lượng giác

+ Nếu các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$ thì luôn tồn tại 3 góc của tam giác ABC sao cho $a=\tan\frac{A}{2}, b=\tan\frac{B}{2}, c=\tan\frac{C}{2}$.

+ Nếu các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=abc$ thì luôn tồn tại 3 góc của tam giác ABC sao cho $a=\tan A, b=\tan B, c=\tan C$.

+ Nếu các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2=b^2+c^2-\alpha bc(\alpha\in(0;2))(*)$ thì tồn tại 3 góc của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện (*).

+ Nếu $a^2+b^2+c^2+2abc=1, a,b,c\in[-1;1]$ thì luôn tồn tại $a=\cos A, b=\cos B, c=\cos C; A+B+C=\pi$.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn $x(x+y+z)=3yz$. Chứng minh rằng

$$(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(y+z)(z+x)\leq 5(y+z)^3.$$

<u>Lời giải:</u>

Đặt $a=x+y, b=y+z, c=z+x$ thì a,b,c là các số dương và

$x=\frac{c+a-b}{2}, y=\frac{a+b-c}{2}, z=\frac{b+c-a}{2}$

Điều kiện bài toán trở thành

$\frac{(c+a-b)}{2}\frac{(a+b+c)}{2}=3\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right) \Leftrightarrow (a+c)^2-b^2=3b^2-3(a-c)^2$

$\Leftrightarrow b^2=a^2+c^2-ac(*)$. Từ đây coi a,b,c như là 3 cạnh của một tam giác thì có góc $B=60^0$.

Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$a^3+c^3+3abc\le 5b^3$

BĐT này đương đương với

$(a+c)(a^2-ac+c^2)+5abc=b^2(a+c)+3abc\le 5b^3 \Leftrightarrow a+c+3ac\le 5b^2$

Sử dụng $B=60^0; a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$2\sqrt{3}(\sin A+\sin C)+12\sin A\sin C\le 15$

Mặt khác ta có

$\sin A+\sin C=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}\le 2\sin\frac{A+C}{2}=\sqrt{3}$

$\sin A\sin C\le\left(\frac{\sin A+\sin C}{2}\right)^2\le\frac{3}{4}$

Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z.$

Bài 2. Cho các số thực không âm a,b,c và thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+2abc=4$. Chứng minh rằng $a+b+c\ge abc+2$.

Lời giải:

Theo giả thiết suy ra $a,b,c\in[0;2]$, nên tồn tại 3 góc $A,B,C\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ sao cho

$a=2\cos A, b=2\cos B, c=2\cos C$. Theo giả thiết suy ra

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1$, suy ra A,B,C là các đỉnh của tam giác nhọn ABC.

Vậy ta cần chứng minh

$\cos A+\cos B+\cos C\ge 4\cos A\cos B\cos C+1$

$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\ge\cos A\cos B os C$.

Mặt khác ta lại có

$\cos B\cos C\le\frac{(\cos B+\cos C)^2}{4}=\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)\le\sin^2\frac{A}{2}$

Một cách tương tự ta có

$\cos A\cos C\le\sin^2\frac{B}{2};\cos A\cos B\le\sin^2\frac{C}{2}$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên, ta có đpcm.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

1.1. Cho $ab\neq 0$ thỏa mãn $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{4}{b}-\frac{2}{a}$. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a^2+b^2-a+3b$

1.2. Cho x,y là các số thực thỏa mãn $x^2y^2+2yx^2+1=0$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+y\left(y+\frac{1}{x}+2\right)$$

1.3. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng $a+b+c\leq 3$.

1.4. Cho các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{5}{2}$$

1.5. Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=\frac{1-16xyz}{4}$. Chứng minh rằng

$$\frac{x+y+z+4xyz}{1+4(xy+yz+zx)}\geq\frac{13}{28}.$$

1.6. Cho các số thực không âm x,y. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$$

1.7. Cho các số thực $a_1,a_2,...,a_n$ thỏa mãn $-2\leq a_i\leq 2,\forall i=\overline{1,n}$ và các số thực này có tổng bằng không. Chứng minh rằng

$$\left|a_1^3+a_2^3+...+a_n^3\right|\leq 2n.$$

1.8. Cho $xy\geq 0$ và $x^2+2y^2=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+2y}\geq 1+\sqrt{1+\sqrt{2}}$$

1.9. Cho a,b là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2\leq a+b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a+2b$.

1.10. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc+a+c=b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{2}{a^2+1}-\frac{2}{b^2+1}+\frac{3}{c^2+1}$$

1.11. Cho $a\in\left[-1;\frac{5}{4}\right]$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{5-4a}-\sqrt{1+a}}{\sqrt{5-4a}+2\sqrt{1+a}+6}$$

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam

Dang Thanh Nam
Auditing 51a, National economics University, Ha Noi, Viet Nam