SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ TĨNH **ĐỀ THI CHÍNH THỨC** (*Đề thi có 02 trang, gồm 06 câu*)	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 11 THPT NĂM HỌC 2023 - 2024 MÔN THI: TOÁN Thời gian làm bài: **150** phút (*không kể thời gian giao đề*)

Câu 1. *(3,0 điểm)*

a) Giải phương trình $\sin 2x + 4\sin x + \sin\left(x + \dfrac{2023\pi}{2}\right) = 2$.

b) Trong chiến dịch Điện Biên Phủ năm 1954, xe đạp thồ là phương tiện vận chuyển góp phần không nhỏ cho thắng lợi của chiến dịch.

Xe đạp thồ của một anh dân công hoả tuyến sau khi gia cố thì đường kính của bánh xe bằng $70\,\text{cm}$. Trên một đoạn đường, anh để ý rằng có một vết phồng ở bánh xe cứ sau 2 giây lại cọ xát vào khung xe. Tính vận tốc của xe trên quãng đường đó.

Câu 2. *(3,0 điểm)*

a) Cho các số thực a,b,c đều lớn hơn 1 thỏa mãn $\log^2_{\sqrt{a}} b + \left(\log_b c - 1\right)\log_b \sqrt{c} + \log_a \dfrac{c^3}{b} = 0$.

Tính giá trị biểu thức $P = \dfrac{4}{\log_b a} + \log_b\left(bc\right)$.

b) Vay số tiền P theo thể thức ***lãi kép theo định kì*** (lãi kì này tính vào gốc của kì sau) với lãi suất r mỗi kì. Sau n kì, số tiền P_n phải trả (cả vốn lẫn lãi) bằng $P_n = P\left(1+r\right)^n$.

Một học sinh thấy tờ rơi quảng cáo *cho vay không thế chấp* của công ty T&T với lãi suất kép "*cứ vay 1 triệu đồng thì tiền lãi chỉ ba ngàn đồng mỗi ngày*" nên đã vay 1 triệu đồng. Sau 1 tuần, học sinh đó đến trả tiền nhưng thấy tiền lãi ít nên không trả mà vay thêm 10 triệu đồng để mua điện thoại đời mới. Sau 1 năm tính từ ngày vay thêm (bằng 365 ngày), học sinh này đến trả nợ thì mới phát hoảng vì số tiền quá lớn. Tính số tiền học sinh này phải trả lúc đó.

Câu 3. *(5,0 điểm)*

a) Tính $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-3}+\sqrt{6x-3}-2x}{x\sqrt{x}-\sqrt{3x^2-4}}$.

b) Một đề thi gồm 5 câu hỏi ở dạng thức trắc nghiệm dạng Đúng/Sai. Mỗi câu hỏi có 04 ý, tại mỗi ý học sinh lựa chọn đúng hoặc sai. Cách thức tính điểm như sau:

- Học sinh chỉ lựa chọn chính xác 01 ý trong 01 câu hỏi được 0,2 điểm.
- Học sinh chỉ lựa chọn chính xác 02 ý trong 01 câu hỏi được 0,5 điểm.
- Học sinh chỉ lựa chọn chính xác 03 ý trong 01 câu hỏi được 1 điểm.
- Học sinh chỉ lựa chọn chính xác 04 ý trong 01 câu hỏi được 2 điểm.

Một học sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên tất cả các ý trả lời. Tính xác suất để học sinh đó được ít nhất 9 điểm.

Câu 4. *(5,0 điểm)*

a) Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = \widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Góc giữa hai đường thẳng SA và BC bằng 60°. Tính độ dài cạnh SB.

b) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và điểm E thuộc đoạn $A'B$ sao cho $\dfrac{EA'}{EB} = \dfrac{3}{2}$. Mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua điểm E và song song với hai đường thẳng $B'C$, $C'A$. Mặt phẳng $\left(P\right)$ cắt đường thẳng CC' tại điểm F. Tính tỉ số $\dfrac{FC'}{FC}$. Hình tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng $\left(P\right)$ với các mặt của hình lăng trụ đã cho là hình gì?

Câu 5. *(2,0 điểm)*

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\ln\left(x^2-4x+m^2+4m+8\right)+\dfrac{\ln\left(x^2+4\right)}{x^2-2x-m}$ xác định trên khoảng $(0;3)$.

Câu 6. *(2,0 điểm)*

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=3, u_2=7 \\ \dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}=u_n+u_{n-1}, \forall n\in\{2;3;4;...\} \end{cases}$.

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_1u_2}+\dfrac{1}{u_1u_2u_3}+\cdots+\dfrac{1}{u_1u_2u_3\cdots u_n}\right)$.

------------------------**HẾT** ---------------------------

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: ………………………………………Số báo danh: ………………

Câu 1. a. Phương trình tương đương với

$$\sin 2x + 4\sin x - \cos x = 2 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 4\sin x - \cos x = 2$$

$$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x = -2. \end{array}\right.$$

Phương trình $\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi. \end{array}\right.$

Phương trình $\cos x = -2$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ (với $k \in \mathbb{Z}$).

b. Chu vi của bánh xe bằng $2\pi R = 70\pi$ (cm).

Cứ sau 2 giây thì xe đi được quãng đường bằng chu vi của bánh xe nên vận tốc của xe bằng $\dfrac{70\pi}{2} = 35\pi$ (cm/s) (≈ 110 m/s).

Câu 2. a. Từ giả thiết ta có

$$4\log_a^2 b + \frac{1}{2}\log_b^2 c - \frac{1}{2}\log_b c + 3\log_a c - \log_a b = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\log_a^2 b + \frac{1}{2}\log_b^2 c - \frac{1}{2}\log_b c + 3\log_a b.\log_b c - \log_a b = 0.$$

Đặt $\log_a b = x, \log_b c = y$ ta có

$$4x^2 + (3y-1)x + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y = 0 \Leftrightarrow (2x+y)(4x+y-1) = 0.$$

Từ $a,b,c > 1$ ta có $x > 0, y > 0$, suy ra $2x + y > 0$, do đó $4x + y = 1$.

Ta có $P = \dfrac{4}{\log_b a} + \log_b(bc) = 4x + 1 + y = 2$.

b. Lãi suất bằng $r = \dfrac{3000}{1000000} = 0,003$.

Vay 10 triệu, số tiền phải trả sau 365 ngày là $10.(1+0,003)^{365} = 10.(1,003)^{365}$ (triệu đồng)

Vay 1 triệu, số tiền phải trả sau 365+7 ngày là $1.(1+0,003)^{372} = (1,003)^{372}$ (triệu đồng).

Vậy tổng số tiền phải trả là $10.(1,003)^{365} + (1,003)^{372}$ ($\approx 32,89$) (triệu đồng).

Câu 3a. $L = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-(x-1)+\sqrt{6x-3}-(x+1)}{x\sqrt{x}-\sqrt{3x^2-4}} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{2x-3-(x-1)^2}{\sqrt{2x-3}+(x-1)}+\dfrac{6x-3-(x+1)^2}{\sqrt{6x-3}+(x+1)}}{\dfrac{x^3-(3x^2-4)}{x\sqrt{x}+\sqrt{3x^2-4}}}$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{-(x-2)^2}{\sqrt{2x-3}+(x-1)}+\dfrac{-(x-2)^2}{\sqrt{6x-3}+(x+1)}}{\dfrac{(x+1)(x-2)^2}{x\sqrt{x}+\sqrt{3x^2-4}}} = \lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{-1}{\sqrt{2x-3}+(x-1)}+\dfrac{-1}{\sqrt{6x-3}+(x+1)}}{\dfrac{x+1}{x\sqrt{x}+\sqrt{3x^2-4}}}$$

$$= -\frac{8\sqrt{2}}{9}.$$

b. Học sinh đó được ít nhất 9 điểm chỉ trong hai trường hợp:

Trường hợp 1: HS được 10 điểm, tức là trả lời được 5 câu, mỗi câu đúng cả 4 ý.
Trường hợp 2: HS được 9 điểm, tức là trả lời được 4 câu đúng 4 ý và 1 câu chỉ đúng 3 ý.

Mỗi ý trả lời đều có xác suất trả lời đúng là $\frac{1}{2}$ và xác suất trả lời sai là $\frac{1}{2}$.

Xác suất để trả lời được một câu đúng cả 4 ý là $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

TH1: Xác suất để học sinh được 10 điểm là $\left(\frac{1}{2}\right)^{4\times 5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$.

TH2: *Tính xác suất để học sinh được 9 điểm:*

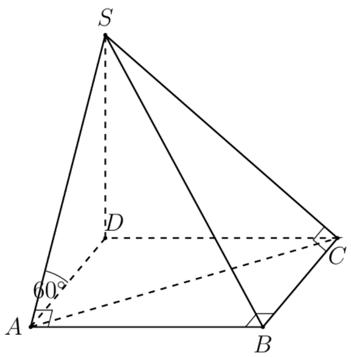
- Xác suất để trả lời được 4 câu đúng cả 4 ý là $C_5^4.\left(\frac{1}{2}\right)^{4\times 4}=5.\left(\frac{1}{2}\right)^{16}$,

- Xác suất để trả lời được 1 câu đúng 3 ý và sai 1 ý là $C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3.\frac{1}{2}=4.\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Xác suất để học sinh được 9 điểm là $5.\left(\frac{1}{2}\right)^{16}.4.\left(\frac{1}{2}\right)^4=20.\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$.

Vậy xác suất cần tìm bằng $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}+20.\left(\frac{1}{2}\right)^{20}=21.\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$.

Câu 4a.



Dựng hình bình hành $ABCD$, suy ra
$(SA,BC)=(SA,AD)$.

Ta có $AD \parallel BC$ suy ra $AD\perp AB$ mà $SA\perp AB$ nên $AB\perp(SAD)\Rightarrow AB\perp SD$ (1)

Tương tự ta cũng có $BC\perp SD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SD\perp(ABCD)$

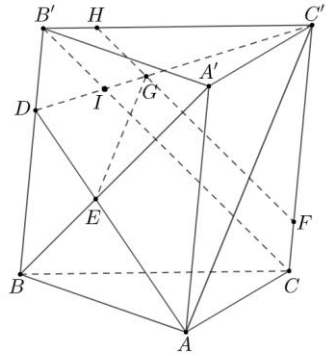
$\Rightarrow(SA,BC)=(SA,AD)=SAD\Rightarrow SAD=60^\circ$.

Suy ra $SD=AD.\tan 60^\circ=BC.\tan 60^\circ=a\sqrt{3}.\sqrt{3}=3a$.

$BD=AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2a$.

Suy ra $SB=\sqrt{SD^2+BD^2}=a\sqrt{13}$.

Câu 4b.



Gọi D là giao điểm của AE và BB'.
Qua E vẽ đường thẳng song song với AC', cắt DC' tại G.
Qua G vẽ đường thẳng song song với $B'C$, cắt CC' tại F. Điểm F là giao điểm của (P) với CC'.

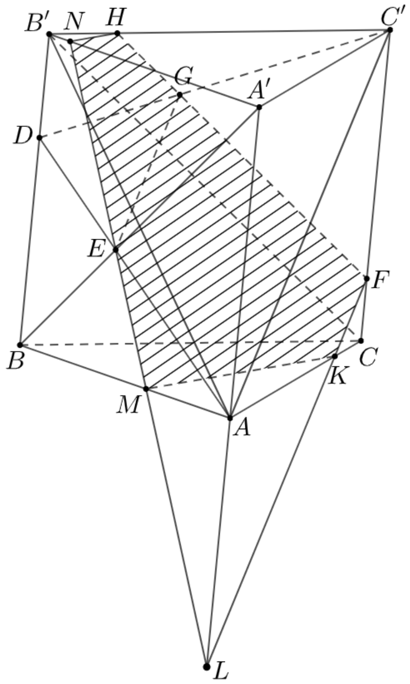
Vì $EG \parallel AC'$ nên $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{EB}{EA'} = \dfrac{BD}{AA'} = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra $\dfrac{B'D}{BB'} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{ID}{IC'} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{C'I}{C'D} = \dfrac{3}{4}$. (1)

Từ $\dfrac{DG}{GC'} = \dfrac{DE}{EA} = \dfrac{2}{3}$ ta có $\dfrac{C'G}{C'D} = \dfrac{3}{5}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $\dfrac{C'G}{C'I} = \dfrac{4}{5}$.

Vì $GF \parallel IC$ nên $\dfrac{C'F}{C'C} = \dfrac{C'G}{C'I} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \dfrac{FC'}{FC} = 4$.



Gọi H là giao điểm của GF và $B'C'$.

Qua F vẽ đường thẳng song song với AC', cắt AC và AA' lần lượt tại K và L.

Đường thẳng EL cắt AB và $A'B'$ lần lượt tại M và N.

Hình tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của hình lăng trụ đã cho là đa giác $HFKMN$

.

Câu 5. Hàm số xác định trên $(0;3)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+m^2+4m+8>0 & (1) \\ x^2-2x-m\neq 0 & (2) \end{cases}$, $\forall x\in(0;3)$

Xét (1) $\Leftrightarrow (x-2)^2+(m+2)^2>0$.

- Với $m=-2$ thì $(1)\Leftrightarrow x\neq 2$ nên hàm số không xác định trên $(0;3)$. Suy ra $m=-2$ không thoả mãn.
- Với $m\neq -2$ thì (1) luôn thoả mãn.

Hàm số xác định trên $(0;3)$ $\Leftrightarrow x^2-2x-m\neq 0$, $\forall x\in(0;3)\Leftrightarrow m\neq x^2-2x$, $\forall x\in(0;3)$.

Xét hàm số $f(x)=x^2-2x$ có bảng biến thiên trên khoảng $(0;3)$ như sau:

x	0		1		3
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

Từ BBT ta có $m\neq x^2-2x$, $\forall x\in(0;3)$ khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m\geq 3 \end{array}\right.$.

Vậy tập hợp các giá trị cần tìm của m là $(-\infty;-1)\cup[3;+\infty)\setminus\{-2\}$.

Câu 6.

Từ giả thiết $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}=u_n+u_{n-1}$, $\forall n\in\{2;3;4;\cdots\}$ ta có

$$u_{n+1}-u_n=u_n^2-u_{n-1}^2\Leftrightarrow u_n^2-u_{n+1}=u_{n-1}^2-u_n$$

Suy ra $u_n^2-u_{n+1}=u_{n-1}^2-u_n=u_{n-2}^2-u_{n-1}=\cdots=u_1^2-u_2=2\Rightarrow u_{n+1}=u_n^2-2$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ (1)

Do đó, với $\forall n\in\{2;3;4;\cdots\}$ ta có

$$\frac{u_{n+1}}{u_1u_2u_3\cdots u_n}=\frac{u_n}{u_1u_2u_3\cdots u_{n-1}}-\frac{2}{u_1u_2u_3\cdots u_n}\Rightarrow\frac{2}{u_1u_2u_3\cdots u_n}=\frac{u_n}{u_1u_2u_3\cdots u_{n-1}}-\frac{u_{n+1}}{u_1u_2u_3\cdots u_n}.$$

Suy ra

$$2\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1u_2}+\frac{1}{u_1u_2u_3}+\cdots+\frac{1}{u_1u_2u_3\cdots u_n}\right)$$

$$=\frac{2}{u_1}+\left(\frac{u_2}{u_1}-\frac{u_3}{u_1u_2}\right)+\left(\frac{u_3}{u_1u_2}-\frac{u_4}{u_1u_2u_3}\right)+\cdots+\left(\frac{u_n}{u_1u_2u_3\cdots u_{n-1}}-\frac{u_{n+1}}{u_1u_2u_3\cdots u_n}\right)$$

$$=\frac{2}{u_1}+\frac{u_2}{u_1}-\frac{u_{n+1}}{u_1u_2\cdots u_n}=3-\frac{u_{n+1}}{u_1u_2\cdots u_n}. \qquad (2)$$

Từ (1) ta cũng có

$$u_{n+1}^2-4=u_n^2\left(u_n^2-4\right)=u_n^2u_{n-1}^2\left(u_{n-1}^2-4\right)=\cdots=u_n^2u_{n-1}^2u_{n-2}^2\cdots u_1^2\left(u_1^2-4\right)=5\left(u_1u_2u_3\cdots u_n\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(\frac{u_{n+1}}{u_1u_2\cdots u_n}\right)^2=5+\frac{4}{\left(u_1u_2\cdots u_n\right)^2} \qquad (3)$$

Vì $u_2=7>u_1=3>0$ và $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n-u_{n-1}}=u_n+u_{n-1}$ nên (u_n) tăng và $u_n\geq 3$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Nếu (u_n) bị chặn trên thì tồn tại $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ hữu hạn và $a\geq 3$.

Từ (1) ta có $a=a^2-2\Rightarrow\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=2 \end{array}\right.$: vô lí, từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

Từ (3) ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_1u_2\cdots u_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{5+\dfrac{4}{\left(u_1u_2\cdots u_n\right)^2}}=\sqrt{5}$.

Từ (2) ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_1u_2}+\dfrac{1}{u_1u_2u_3}+\cdots+\dfrac{1}{u_1u_2u_3\cdots u_n}\right)=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.