

**Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx+25}{x+m}$  đồng biến trên khoảng  $(0; 10)$ .

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ , với  $m$  là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị  $A, B$  sao cho  $A, B$  cách đều đường thẳng  $d: y = 5x - 9$ .

**Câu 3.** Giải phương trình  $\sqrt{3}(1 - \cos 2x) + \sin 2x - 4\cos x + 8 = 4(\sqrt{3} + 1)\sin x$ .

**Câu 4.** Cho  $f(x) = \log_2\left(\frac{x}{1-x}\right)$ . Tính  $S = f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \dots + f\left(\frac{2019}{2021}\right) + f\left(\frac{2020}{2021}\right)$ .

**Câu 5.** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1 \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy + 6x + 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Câu 6.** Cho tập hợp  $E = \{10, 10^2, 10^3, \dots, 10^{20}\}$ . Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp  $E$ , giả sử hai số được lấy ra là  $x$  và  $y$  (với  $x < y$ ). Tính xác suất để  $\log_x y$  là một số nguyên.

**Câu 7.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA$  vuông góc với mặt đáy,  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính  $AC$ . Gọi hai điểm  $M, N$  tương ứng là hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  lên hai đường thẳng  $SB$  và  $SD$ . Biết  $SA = a$ ,  $BD = a\sqrt{3}$  và  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng  $(AMN)$  và  $(ABCD)$ .

**Câu 8.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ , cạnh  $AC = a$  và  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ . Tứ giác  $BCC'B'$  là hình thoi có  $\widehat{B'BC}$  nhọn, mặt phẳng  $(BCC'B')$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ , góc giữa mặt phẳng  $(ABB'A')$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $BC, B'C', A'B$  và  $A'C$ . Tính theo  $a$  thể tích của khối tứ diện  $MNPQ$ .

**Câu 9.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có góc  $\widehat{BAC}$  tù. Đường tròn  $(C)$  ngoại tiếp tam giác  $ABC$  có phương trình  $(C): (x+2)^2 + (y-2)^2 = 25$ . Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$  cắt đường tròn  $(C)$  tại điểm  $K(1; -2)$  ( $K$  không trùng với  $A$ ). Trọng tâm của tam giác  $ABC$  là  $G\left(-1; \frac{16}{3}\right)$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

**Câu 10.** Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2}$ . Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức  $P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y}$ .

..... Hết .....

**Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**Câu 1.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx+25}{x+m}$  đồng biến trên khoảng  $(0;10)$ .

**Lời giải**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ .

$$\text{Ta có: } y' = \frac{m^2 - 25}{(x+m)^2}.$$

Để hàm số đồng biến trên khoảng  $(0;10)$  thì

$$\begin{cases} y' > 0, \forall x \in (0;10) \\ -m \notin (0;10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 25 > 0 \\ -m \notin (0;10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -5 \\ m > 5 \\ -m \leq 0 \\ -m \geq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -10 \\ m > 5 \end{cases}$$

Vậy  $m \in (-\infty; -10] \cup (5; +\infty)$  là các giá trị cần tìm.

**Câu 2.** Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ , với  $m$  là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị  $A, B$  sao cho  $A, B$  cách đều đường thẳng  $d: y = 5x - 9$ .

**Lời giải**

♦ Tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

♦ Ta có  $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 1$  có  $\begin{cases} a_{y'} = 1 \neq 0 \\ \Delta_{y'} = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0 \forall m \end{cases}$  suy ra hàm số đã cho luôn có

hai điểm cực trị với mọi  $m \in \mathbb{R}$ .

**Cách 1.**

♦ Lấy  $y$  chia  $y'$  ta được  $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}m\right)y' - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}m(m^2 - 1)$ .

♦ Đặt  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  là tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho, ta có:

$y_1 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}m(m^2 - 1), y_2 = -\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}m(m^2 - 1)$ . Do đó, đường thẳng đi qua hai điểm cực trị

$A, B$  là  $\Delta: y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}m(m^2 - 1)$ .

♦ Vì đường thẳng  $\Delta: y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}m(m^2 - 1)$  không song song với đường thẳng  $d: y = 5x - 9$  nên  $A, B$  cách đều đường thẳng  $d: y = 5x - 9$  khi và chỉ khi trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$  thuộc đường thẳng  $d: y = 5x - 9$ .

♦ Ta có  $x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = m, y_I = -\frac{2}{3}x_I + \frac{1}{3}m(m^2 - 1) = \frac{1}{3}m^3 - m \Rightarrow I\left(m; \frac{1}{3}m^3 - m\right)$ .

$$I\left(m; \frac{1}{3}m^3 - m\right) \in d: y = 5x - 9 \Leftrightarrow \frac{1}{3}m^3 - m = 5m - 9 \Leftrightarrow m^3 - 18m + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-3)(m^2+3m-9)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=\frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

♦ Vậy  $\begin{cases} m=3 \\ m=\frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$  thỏa yêu cầu bài toán.

**Cách 2.**

Đồ thị hàm số có điểm uốn  $I\left(m; \frac{1}{3}m^3 - m\right)$ . Để hai điểm cực trị cách đều đường thẳng

$$d: y=5x-9 \text{ thì } I \in d \text{ hay } \frac{1}{3}m^3 - m = 5m - 9 \Leftrightarrow m^3 - 18m + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=\frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy  $\begin{cases} m=3 \\ m=\frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$  thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 3.** Giải phương trình  $\sqrt{3}(1-\cos 2x) + \sin 2x - 4\cos x + 8 = 4(\sqrt{3}+1)\sin x$ .

**Lời giải**

Ta có  $\sqrt{3}(1-\cos 2x) + \sin 2x - 4\cos x + 8 = 4(\sqrt{3}+1)\sin x$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 4\cos x - 4\sqrt{3}\sin x - 4\sin x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 2) - 4(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x - 2)(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x + \cos x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có nghiệm:  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 4.** Cho  $f(x) = \log_2\left(\frac{x}{1-x}\right)$ . Tính  $S = f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \dots + f\left(\frac{2019}{2021}\right) + f\left(\frac{2020}{2021}\right)$ .

**Lời giải**

ĐK:  $0 < x < 1$ .

♦ Ta có  $f(x) = \log_2\left(\frac{x}{1-x}\right) = \log_2 x - \log_2(1-x)$ .

♦ Xét:

$$f\left(\frac{1}{2021}\right) = \log_2 \frac{1}{2021} - \log_2 \frac{2020}{2021}.$$

$$f\left(\frac{2}{2021}\right) = \log_2 \frac{2}{2021} - \log_2 \frac{2019}{2021}.$$

$$f\left(\frac{3}{2021}\right) = \log_2 \frac{3}{2021} - \log_2 \frac{2018}{2021}.$$

.....

$$f\left(\frac{2019}{2021}\right) = \log_2 \frac{2019}{2021} - \log_2 \frac{2}{2021}.$$

$$f\left(\frac{2020}{2021}\right) = \log_2 \frac{2020}{2021} - \log_2 \frac{1}{2021}.$$

♦ Ta thấy:  $f\left(\frac{k}{2021}\right) + f\left(\frac{2021-k}{2021}\right) = 0, k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq 2020$  và từ  $f\left(\frac{1}{2021}\right)$  đến  $f\left(\frac{2020}{2021}\right)$  có 2020 số hạng.

♦ Do vậy tổng  $S = f\left(\frac{1}{2021}\right) + f\left(\frac{2}{2021}\right) + \dots + f\left(\frac{2019}{2021}\right) + f\left(\frac{2020}{2021}\right) = 0$ .

**Câu 5.** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1 \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy + 6x + 1 \end{cases}.$$

**Lời giải**

$$\begin{cases} (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = 1 & (1) \\ x\sqrt{6x-2xy+1} = 4xy + 6x + 1 & (2) \end{cases}.$$

Từ phương trình (1) ta có  $x + \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}} \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+y^2} - y$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} = -y + \sqrt{1+(-y)^2} \Leftrightarrow f(x) = f(-y) \quad (*).$$

Xét hàm số  $f(t) = t + \sqrt{1+t^2}, t \in \mathbb{R}$ .

Ta có:  $f'(t) = 1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2} + t}{\sqrt{1+t^2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ .

Suy ra hàm số  $f$  liên tục và đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Do đó  $(*) \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow y = -x$ . Thay vào phương trình (2) ta được

$$x\sqrt{2x^2+6x+1} = -4x^2+6x+1 \Leftrightarrow 2x^2+6x+1-x\sqrt{2x^2+6x+1}-6x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2+6x+1} = -2x \\ \sqrt{2x^2+6x+1} = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x^2-6x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 7x^2-6x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{11}}{2} \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm  $\left(\frac{3-\sqrt{11}}{2}; \frac{-3+\sqrt{11}}{2}\right), (1; -1)$ .

**Câu 6.** Giả sử  $E = \{10; 10^2; 10^3; \dots; 10^{20}\}$ . Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 số từ tập hợp  $E$ , giả sử hai số được lấy ra là  $x$  và  $y$  (với  $x < y$ ). Tính xác suất sao cho  $\log_x y$  là một số nguyên.

**Lời giải**

$$n(\Omega) = C_{20}^2 = 190.$$

$$x = 10^\alpha; y = 10^\beta.$$

$$\log_x y = \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{Z} \quad (\alpha \neq \beta; \beta > \alpha; \beta, \alpha \in [1; 20] = A).$$

Nếu  $\alpha = 1 \Rightarrow \beta \in \{n \in \mathbb{N}; n \in [2; 20]\} = \{2; 3; 4; \dots; 20\} \Rightarrow \beta$  có 19 cách chọn.

Nếu  $\alpha = 2 \Rightarrow \beta \in \{2n | n \in \mathbb{N}; n \in [3; 20]\} = \{4; 6; 8; \dots; 20\} \Rightarrow \beta$  có 9 cách chọn.

Nếu  $\alpha = 3 \Rightarrow \beta \in \{3n | n \in \mathbb{N}; 2 \leq n \leq 6\} = \{6; 9; 12; 15; 18\} \Rightarrow \beta$  có 5 cách chọn.

Nếu  $\alpha = 4 \Rightarrow \beta \in \{4n | n \in \mathbb{N}; 2 \leq n \leq 5\} = \{8; 12; 16; 20\} \Rightarrow \beta$  có 4 cách chọn.

Nếu  $\alpha = 5 \Rightarrow \beta \in \{5n | n \in \mathbb{N}; 2 \leq n \leq 4\} = \{10; 15; 20\} \Rightarrow \beta$  có 3 cách chọn.

Nếu  $\alpha = 6 \Rightarrow \beta \in \{6n | n \in \mathbb{N}; 2 \leq n \leq 3\} = \{12; 18\} \Rightarrow \beta$  có 2 cách chọn.

Nếu  $\alpha = 7 \Rightarrow \beta = 14 \Rightarrow \beta$  có 1 cách chọn.

Nếu  $\alpha = 8 \Rightarrow \beta = 16 \Rightarrow \beta$  có 1 cách chọn.

Nếu  $\alpha = 9 \Rightarrow \beta = 18 \Rightarrow \beta$  có 1 cách chọn.

Nếu  $\alpha = 10 \Rightarrow \beta = 20 \Rightarrow \beta$  có 1 cách chọn.

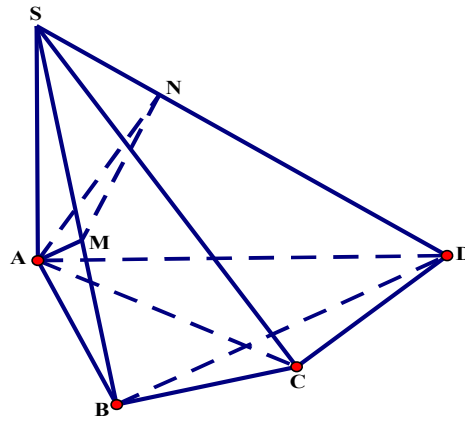
Gọi  $A$ : “ $\log_x y$  là một số nguyên”

$$\Rightarrow n(A) = 19 + 9 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 46.$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{46}{190} = \frac{23}{95}.$$

**Câu 7.** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có  $SA$  vuông góc với mặt đáy,  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính  $AC$ . Gọi hai điểm  $M, N$  tương ứng là hình chiếu vuông góc của điểm  $A$  lên hai đường thẳng  $SB$  và  $SD$ . Biết  $SA = a$ ,  $BD = a\sqrt{3}$  và  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng  $(AMN)$  và  $(ABCD)$ .

**Lời giải**



Do tứ giác  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính  $AC$  nên  $AB \perp BC$ ,  $AD \perp DC$ .

Ta có :

$$+) \begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$$

$$+) \begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$$

$$+) \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AN$$

$$+) \begin{cases} AN \perp SD \\ AN \perp CD \end{cases} \Rightarrow AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$$

$$+) \begin{cases} SC \perp AM \\ SC \perp AN \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AMN).$$

$$+) \begin{cases} SC \perp (AMN) \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow ((AMN), (ABCD)) = (SC, SA).$$

Gọi  $R$  là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABD$ . Khi đó ta có:

$$R = \frac{BD}{2 \sin \widehat{ABD}} = \frac{a\sqrt{3}}{2 \sin 60^\circ} = a.$$

Mặt khác  $R$  cũng là bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác  $ABCD \Rightarrow AC = 2R = 2a$ .

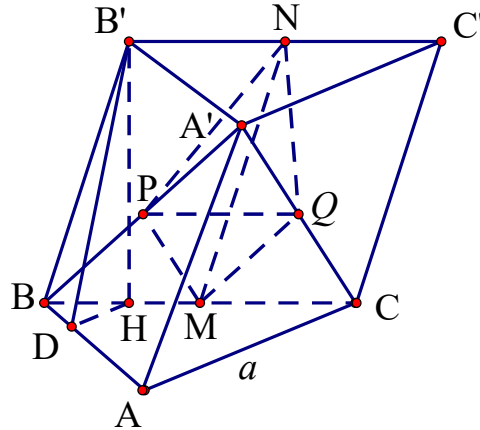
Xét  $\triangle SAC$  vuông tại  $A$ , ta có:  $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$ .

$$\text{Khi đó: } \cos \widehat{ASC} = \frac{SA}{SC} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} > 0 \Rightarrow \cos(SA, SC) = \cos \widehat{ASC} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Vậy cosin của góc giữa hai mặt phẳng  $(AMN)$  và  $(ABCD)$  là  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

**Câu 8.** Cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có đáy  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A$ , cạnh  $AC = a$  và  $\widehat{ABC} = 30^\circ$ . Tứ giác  $BCC'B'$  là hình thoi có  $\widehat{B'BC}$  nhọn, mặt phẳng  $(BCC'B')$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ , góc giữa mặt phẳng  $(ABB'A')$  và mặt phẳng  $(ABC)$  bằng  $60^\circ$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $BC, B'C', A'B$  và  $A'C$ . Tính theo  $a$  thể tích của khối tứ diện  $MNPQ$ .

**Lời giải**



Xét tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ta có

$$BC = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{a}{\sin 30^\circ} = 2a; \quad AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = a\sqrt{3}.$$

Gọi  $H$  là hình chiếu của  $B'$  lên  $BC$ . Khi đó  $B'H \perp (ABC)$  (do  $(BCC'B') \perp (ABC)$ ).

Gọi  $D$  là hình chiếu của  $H$  trên  $AB$ .

$$AB \perp (DHB') \Rightarrow \widehat{B'DH} = (\widehat{ABB'A'}, \widehat{ABC}) = 60^\circ.$$

$$\text{Đặt } DH = x \Rightarrow BD = \frac{DH}{\tan \widehat{DBH}} = \frac{x}{\tan 30^\circ} = x\sqrt{3}.$$

$$\text{Xét tam giác } BB'D \text{ vuông tại } D \text{ có } B'D^2 = B'B^2 - BD^2 = 4a^2 - 3x^2 \Rightarrow B'D = \sqrt{4a^2 - 3x^2}.$$

Xét tam giác  $B'DH$  vuông tại  $H$  ta có

$$\cos \widehat{B'DH} = \frac{DH}{B'D} \Leftrightarrow \cos 60^\circ = \frac{x}{\sqrt{4a^2 - 3x^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - 3x^2} = x \Leftrightarrow \frac{1}{4} (4a^2 - 3x^2) = x^2.$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 = 7x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{4a^2}{7} \Rightarrow x = \frac{2a\sqrt{7}}{7} \Rightarrow B'H = DH \cdot \tan 60^\circ = \frac{2a\sqrt{7}}{7} \cdot \sqrt{3} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot B'H = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot a \cdot \frac{2a\sqrt{21}}{7} = \frac{3a^3\sqrt{7}}{7}.$$

$$\text{Vì } S_{\Delta MPQ} = \frac{1}{4} S_{\Delta A'BC} \text{ và } NC' \parallel BC \Rightarrow NC' \parallel (A'BC) \text{ do đó } d(N, (A'BC)) = d(C', (A'BC)).$$

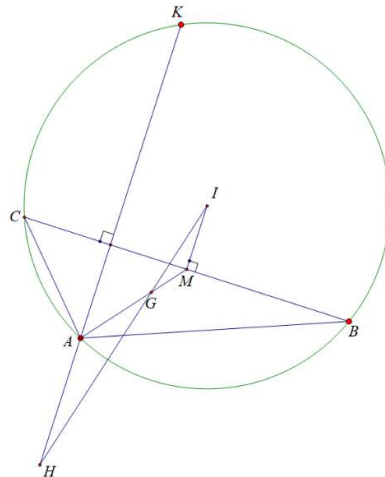
$$\text{Suy ra } V_{MNPQ} = V_{N.MPQ} = \frac{1}{4} V_{N.A'BC} = \frac{1}{4} V_{C'.A'BC}.$$

$$\text{Mặt khác ta lại có: } V_{C'.A'BC} = V_{A'.C'BC} = \frac{1}{2} V_{A'.BCC'B'} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'}.$$

$$\text{Vậy } V_{MNPQ} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{12} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{12} \cdot \frac{3a^3\sqrt{7}}{7} = \frac{a^3\sqrt{7}}{28}.$$

**Câu 9.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có góc  $\widehat{BAC}$  tù. Đường tròn  $(C)$  ngoại tiếp tam giác  $ABC$  có phương trình  $(C): (x+2)^2 + (y-2)^2 = 25$ . Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$  cắt đường tròn  $(C)$  tại điểm  $K(1; -2)$  ( $K$  không trùng với  $A$ ). Trọng tâm của tam giác  $ABC$  là  $G\left(-1; \frac{16}{3}\right)$ . Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

**Lời giải**



♦ Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Khi đó  $IM \perp BC$  với  $I(-2; 2)$  là tâm đường tròn  $(C)$ .

♦ Gọi  $H \equiv IG \cap AK$ .

Do  $IM \parallel AH$  nên áp dụng định lý Talet ta có

$$\frac{IM}{AH} = \frac{IG}{GH} = \frac{MG}{GA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} GH = 2.IG \\ AH = 2.IM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{GH} = 2.\overrightarrow{IG} & (1) \\ \overrightarrow{AH} = 2.\overrightarrow{IM} & (2) \end{cases}.$$

♦ Gọi tọa độ  $H(x; y)$ .

$$\text{Ta có } I(-2; 2); \overrightarrow{GH} = \left(x+1; y-\frac{16}{3}\right); \overrightarrow{IG} = \left(1; \frac{10}{3}\right).$$

$$\text{Từ (1) ta có } \begin{cases} x+1=2 \\ y-\frac{16}{3}=\frac{20}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=12 \end{cases} \Rightarrow H(1; 12).$$

♦ Đường thẳng  $AK$  đi qua điểm  $K(1; -2)$  và  $H(1; 12)$  có vectơ chỉ phương là

$$\vec{u} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{KH} = -\frac{1}{2}(0; 14) = (0; -7) \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n} = (7; 0).$$

Phương trình đường thẳng  $AK$  là  $7(x-1)+0(y+2)=0 \Leftrightarrow x=1$ .

♦ Do  $\{A, K\} = (C) \cap AK$ , ta có

$$\begin{cases} x=1 \\ (x+2)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (y-2)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=-2 \\ x=1 \Rightarrow y=6 \end{cases}.$$

Suy ra tọa độ  $A(1; 6)$ .

♦ Gọi tọa độ  $M(a; b)$ .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IM} = (a+2; b-2); \overrightarrow{AH} = (0; 6).$$

$$\text{Từ (2) ta có } \begin{cases} 2(a+2)=0 \\ 2(b-2)=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow M(-2; 5).$$

♦ Đường thẳng  $BC$  đi qua điểm  $M(-2; 5)$  và vuông góc với  $AK$  nên có VTPT  $\vec{u} = (0; -7)$  có phương trình là  $-7(y-5)=0 \Leftrightarrow y=5$ .

♦ Do  $B, C$  là giao điểm của đường thẳng  $BC$  và đường tròn  $(C)$  nên tọa độ  $B, C$  là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y=5 \\ (x+2)^2 + (y-2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ (x+2)^2 = 16 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \Rightarrow x=2 \Rightarrow B(2; 5) \\ y=5 \Rightarrow x=-6 \Rightarrow C(-6; 5) \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{BC} = (-8; 0) \Rightarrow BC = 8.$$

$$\text{Khoảng cách từ } A \text{ đến } BC \text{ là } d(A, BC) = \frac{|1|}{\sqrt{1^2}} = 1.$$

$$\text{Vậy diện tích } \triangle ABC \text{ là } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}.d(A, BC).BC = \frac{1}{2}.1.8 = 4.$$

**Câu 10.** Cho  $x, y$  là các số thực thỏa mãn  $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$ .

**Lời giải**

$$x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2} . \text{ Điều kiện } \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -1 \end{cases} \Rightarrow x + y \geq 0 .$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki  $(ax + by) \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ .

$$x + y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2y+2} \Leftrightarrow (x + y)^2 = (\sqrt{x-1} + \sqrt{2}\sqrt{y+1})^2 \leq 3(x-1 + y+1) = 3(x + y)$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 - 3(x + y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x + y \leq 3 .$$

$$P = x^2 + y^2 + 2(x+1)(y+1) + 8\sqrt{4-x-y} = (x+y)^2 + 2(x+y) + 8\sqrt{4-(x+y)} + 2 .$$

Đặt  $t = x + y, 0 \leq t \leq 3$ .

$$P = t^2 + 2t + 8\sqrt{4-t} + 2, (0 \leq t \leq 3), P' = 2t + 2 - \frac{4}{\sqrt{4-t}} = \frac{(2t+2)\sqrt{4-t} - 4}{\sqrt{4-t}} .$$

$$P' = 0 \Rightarrow (t+1)\sqrt{4-t} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 3 \\ (t+1)^2(4-t) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 3 \\ t^3 - 2t^2 - 7t = 0 \end{cases} .$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 3 \\ t = 0 \\ t^2 - 2t - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 3 \\ \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 + 2\sqrt{2} \\ t = 1 - 2\sqrt{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow t = 0 . \begin{cases} P(0) = 18 \\ P(3) = 25 \end{cases} .$$

Vậy giá trị lớn nhất của  $P$  bằng 25 khi  $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$  và giá trị lớn nhất của  $P$  bằng 18 khi  $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ .